

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département Hydraulique

المدرسة الوطنية للتكنولوجيا  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique  
PROJET DE FIN D'ETUDE

THEME

**DETERMINATION DE LA LIGNE D'EAU  
DANS LES CANAUX NON  
PRISMATIQUES ET A FORTE PENTE**

Proposé par :

Melle S. BENMAMAR

Mr A. BILEK

Etudié par :

Mr OUKACHA Mebarek

Mr LECHEHEB Messaoud

Dirigé par :

Mr A. BILEK

Mr A. BERREKSI

Promotion Juin 1996

E.N.P. 10, Avenue Hacén Badi EL - HARRACH - ALGER

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

**Département Hydraulique**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
**BIBLIOTHEQUE — المكتبة**  
**Ecole Nationale Polytechnique**

PROJET DE FIN D'ETUDE

**THEME**

**DETERMINATION DE LA LIGNE D'EAU  
DANS LES CANAUX NON  
PRISMATIQUES ET A FORTE PENTE**

Proposé par :

Melle S. BENMAMAR

Mr A. BILEK

Etudié par :

Mr OUKACHA Mebarek

Mr LECHEHEB Messaoud

Dirigé par :

Mr A. BILEK

Mr A. BERREKSI

**Promotion Juin 1996**

E.N.P. 10, Avenue Hacén Badi EL - HARRACH - ALGER

## REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier en tous premier lieu M<sup>elle</sup> S.BENMAMAR qui nous a donné un grand coup de pousse qui nous a permis de faire le premier pas . Ensuite nous adressons nous remerciments à M<sup>r</sup> A.BILEK et M<sup>r</sup> Ali.BERREKSI pour nous avoir suivi et dirigés avec patience et rigueur tout au long de notre étude . Nous remerciment vont ensuite à M<sup>r</sup> S.ABBAS ingénieur d'état à l'A.N.B pour sa précieuse contribution ainsi qu'à M<sup>me</sup> N.KECHOUD.

On n'oubliera pas tout ceux qui ont contribué à notre formation en particulier les enseignants du Département Hydraulique .

Dans une large mesure , on remerciera les travailleurs du centres de documentation « Bibliothèque et Périodiques » , ainsi que les étudiants de post-graduation .

## Dédicaces

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

Je dédie ce modeste travail à :

Ma mère et Mon père

La mémoire de ma grande mère maternelle ,

à la mémoire de mon grand père paternel

Ma soeur aîné

Mon frère et mes soeurs

Mes amis(es)

Et à tous ceux qui me sont chers(es)

Mebarek Oukacha .

A mes très chers parents

A mes soeurs et frères

A ceux qui m'ont accompagné dans les chemins les plus étroits et m'ont encouragé dans les moments les plus difficiles . A tous mes amis (es) .

Je dédie ce modeste travail

M. Lecheheb .

## TABLE DES MATIERES



Chapitre I : Introduction générale .....	1
Chapitre II : Etat de connaissance sur les écoulements à surface libre dans les canaux non prismatiques	
II.A Généralités sur les écoulements à surface libre .....	3
II.A.1 Classification des écoulements .....	3
a- Ecoulement permanent .....	3
b- Ecoulement non permanent .....	4
II.A.2 Nombre de Froude .....	4
II.A.3 Intumescence . onde de gravité .....	5
II.A.3.1 Ecoulement avec onde .....	5
II.A.3.2 Instabilité à la surface . ondes en cascades .....	6
II.A.4 Géométrie des canaux à ciel ouvert .....	7
1- Profil de la section transversale .....	7
2- Canaux prismatiques et non prismatiques .....	8
II.B Ecoulement dans les canaux non prismatiques .....	8
II.B.1 Notion d'ondes transversales .....	8
II.B.2 Etude d'un déviation brusque d'un mur .....	9
II.B.3 Ondes positives et ondes négatives .....	11
II.B.4 Réduction des ondes transversales .....	12
II.B.5 Rétrécissement d'un canal dans des conditions d'écoulement supercritique .....	13
II.B.5.1 Types de rétrécissement .....	13
II.B.5.2 rétrécissement en forme d'entonnoir .....	14
II.B.6 Elargissement d'un canal dans des conditions d'écoulement supercritique .....	17
Chapitre III : Modélisation mathématique	
III.1 Introduction .....	19

III.2 Hypothèses de base .....	19
III.3 Mise en équation .....	20
a- Equation de continuité .....	22
b- Equation de conservation de la quantité de mouvement .....	23
c- Développement et simplification des équations .....	27
III.4 Transformation géométrique .....	29
III.4.1 Application de la transformation géométrique aux équations de l'écoulement .....	31
III.4.2 Opérations d'algèbre matricielle sur les équations .....	32
III.5 Conditions initiales - conditions aux limites .....	35
III.5.A Conditions initiales .....	35
III.5.B Conditions aux limites .....	35
B.1 Conditions d'amant , conditions d'aval .....	36
B.2 Conditions de symétrie .....	36
B.3 Condition sur les parois latérales .....	37
 Chapitre IV : Simulation numérique	
IV.1 Introduction .....	39
IV.2 Méthode des différences finies .....	39
IV.2.1 Notion de consistance , convergence , stabilité .....	42
IV.2.2 Schéma explicite , schéma implicite .....	43
IV.3 Les modes numériques courant utilisés .....	43
IV.3.1 Schéma de Maccormack .....	44
IV.3.2 Schéma de Lambda .....	45
IV.3.3 Schéma de Gabutti .....	46
IV.4 Application de schéma de Gabutti au modèle mathématique .....	47
IV.4.1 Discrétisation des équations .....	48
IV.4.2 Conditions sur la paroi solide .....	50
IV.4.3 Stabilité de schéma .....	50
IV.4.4 Traitement numérique des ondes de choc Notion de viscosité artificielle .....	51

Chapitre V : Application et analyse des résultats

V.A 1 <sup>ère</sup> application : Analyse de l'écoulement	
supercritique dans un rétrécissement rectiligne symétrique . . . . .	57
V.A.1 Présentation de l'application . . . . .	57
V.A.2 Résultats et analyses . . . . .	58
V.B 2 <sup>ème</sup> application : Analyse d'un écoulement	
supercritique dans un élargissement progressif symétrique . . . . .	65
V.B.1 Présentation de l'application . . . . .	65
V.B.2 Résultats et analyses . . . . .	66
V.C 3 <sup>ème</sup> application : Ecoulement dans le coursier	
d'un évacuateur de crues en modèle réduit . . . . .	72
V.C.1 Présentation de l'application . . . . .	72
V.C.2 Résultats et analyses . . . . .	73
V.D 4 <sup>ème</sup> application : Etude de l'effet d'une forte	
inclinaison sur l'écoulement dans le rétrécissement	
rectiligne et dans l'élargissement progressif . . . . .	80
V.D.1 Présentation de l'application . . . . .	80
V.D.2 Résultats et analyses . . . . .	80
Conclusion générale . . . . .	88

Bibliographie

هذه الأطروحة تعرض دراسة للبريانات ذات سطح حر في القنوات متغيرة  
المجاذ وذات انحدار معتبر. جملة المعادلات المعتمدة عن هذه الظاهرة التي حصل  
عليها بتطبيق قوانين انحفاظ الكتلة وكمية الحركة، اعتمدت بعض الفرضيات  
تبين أنه من الضروري تحويل الوسط القينيائي العبر مستطيل إلى ميدان حسابي  
مستطيل، وقد تم حل جملة المعادلات حسابياً بواسطة مخطط للفروق المنهية المسمى  
مخطط "GABUTTI". إن النتائج المحصل عليها حسابياً بالتعبير مرفقة مع النتائج  
التجريبية.

## Summary

This thesis present an analysis of some free surface flow in channels of variable geometry and of strong slope. The system of equations governing the problem is obtained by the application of the laws of conservation of the mass and of the quantity of movement, in basing hypotheses. It on some appeared necessary of transforming the physical domain no oblong in a domain of oblong Count. The system of equations is resolute numerically by a diagram to the finite differences said diagram of Gabutti. The results obtained by numeric simulation Concord well enough with the experimental results.

## RESUME

Cette these presente une analyse des ecoulements à surface libre dans les canaux à geometrie variable et à forte pente ; le système d'equations regissant le probleme est obtenu par l'application des lois de conservation de la masse et des quantités de mouvement, en se basant sur certaines hypotheses. Il à paru necessaire de transformer le domaine physique non rectangulaire. Le système d'equations est resolu numeriquement par un schéma aux differences finies dit schéma de Gabutti. les resultats obtenus par simulation numerique Concordent suffisamment bien avec les resultats experimentaux.



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## **CHAPITRE I**

### ***INTRODUCTION GENERALE***

L'hydraulique est une science aussi ancienne que la civilisation humaine . Son progrès fut lent et laborieux , puis elle prit avec le temps la forme d'une science empirique .

Le développement de la physique et des mathématiques , a permis de rendre l'hydraulique de plus en plus rationnelle , sans pour autant perdre son caractère empirique .

Mais cependant , il reste bien des phénomènes qui ne sont pas encore expliqués ou modélisés d'une manière rigoureuse et rationnelle ; l'hydraulique est d'ailleurs pleine de paradoxes .

Tout ceci mis en évidence la complexité des phénomènes hydrauliques et la nécessité de disposer d'outils mathématiques plus puissants .

Les tendances actuelles de cette discipline sont large et prometteuses . La modélisation mathématique des phénomènes complexes basée sur des hypothèses simplificatrices et profitant au maximum de l'évolution des méthodes numériques et de l'outil informatique , la est un moyen satisfaisant , pour faire face à l'incapacité actuelle des mathématiques de fournir une solution générale .

La modélisation est une caractéristique des études modernes .

L'hydraulique des écoulements à surface libre est l'un des domaines qui reste un champ d'investigations très vaste .

On présente dans cette thèse , une étude sur les écoulements à surface libre qui a pour principal objectif ; la détermination de la ligne d'eau dans les canaux non prismatiques et à forte pente .

L'intérêt pratique de notre étude est de permettre un dimensionnement rationnel , par conséquent économique des murs bajoyers dans les différentes structures hydrauliques convergentes et divergentes .

Les écoulement à forte pente s'effectues à grandes vitesses et à faible profondeurs en présentant des perturbations à la surface libre . Le passage de tels écoulements dans des structures de géométrie variable même sur une courte distance , conduit à

## **CHAPITRE II**

# ***ETAT DE CONNAISSANCE SUR LES ECOULEMENTS A SURFACE LIBRE DANS LES CANAUX NON PRISMATIQUES***

**IIA- GENERALITES SUR LES ECOULEMENTS A SURFACE LIBRE :**

Les écoulements à surface libre sont caractérisés par l'existence d'une surface de séparation entre liquide et gaz ( air ) sur laquelle s'exerce une pression généralement atmosphérique .

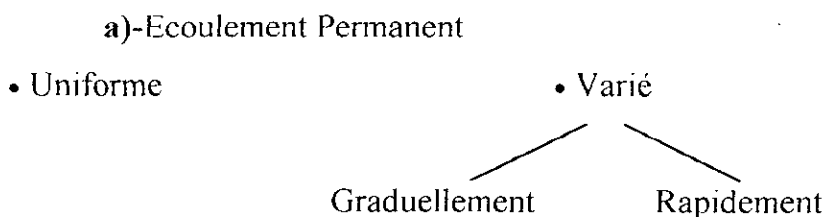
Cette condition limite imposée sur la surface libre de l'eau parait plus faible que celle imposée sur une paroi solide dans les écoulements en charge ( elle donne un degré de liberté plus grand ) , mais ceci va entraîner une complexité supérieure pour la modélisation de ce type d'écoulement du fait que la surface libre est déformable .

**II.A.1- Classification des écoulements :** [8,10]

On peut repartir les écoulements à surface libre suivant plusieurs paramètres , par conséquent on distingue les classifications suivantes :

- permanent ou non permanent si le paramètre est le temps .
- uniforme ou varié selon l'espace considéré .
- torrentiel ou fluvial selon l'effet de la gravité .
- laminaire ou turbulent selon l'effet de la viscosité .

La classification classique adoptée [10] repartie les écoulement à surface libre en deux grandes catégories ;



## b)- Ecoulement non permanent

## • Uniforme

## • Varié

Graduellement

Rapidement

**II.A.2- Nombre de Froude :**

La mise en mouvement d'une masse liquide sous l'effet de son inertie est reflété par la variation ( dans l'espace et/ou dans le temps ) des principales forces agissantes c'est-à-dire les forces de pression , de pesanteur et de frottement .

La proportion de chaque ensemble de forces le long de l'écoulement et/ou dans le temps exprime le régime de l'écoulement .

En hydraulique on s'intéresse à certains rapports de forces parmi ces rapports , d'une grande utilité en hydraulique des écoulements à surface libre :

Le rapport des forces d'inertie aux forces de pesanteur , qui est connu sous le nom de nombre de Froude ( nombre adimensionnel ) .

Ce nombre caractérise la dynamique de l'écoulement et peut être formulé comme suit :

$$F = \frac{V}{(g \cdot h)^{1/2}} \quad (2.1)$$

où :

V : vitesse moyenne de l'écoulement ( m/s)

g : accélération de la pesanteur ( m/s<sup>2</sup> )

h : La profondeur hydraulique , définie comme étant le quotient de l'aire de la section mouillée par la largeur de la surface libre ( m ) , pour un canal rectangulaire h est la profondeur d'écoulement .

L'écoulement est dit en régime critique , subcritique ou supercritique selon que le nombre de Froude , F est respectivement égale , inférieur ou supérieur à l'unité .

**II.A.3- Intumescence - onde de gravité : [8,19]**

La variabilité dans le temps d'un écoulement à surface libre se manifeste par des ondes de gravité à la surface libre . On considère ici des ondes de faible amplitude ou de grande longueur d'onde .

La théorie hydrodynamique pour les ondes de faible amplitude définit la vitesse apparente de propagation , appelée également célérité d'une intumescence comme étant :

$$C = \pm \sqrt{g \cdot h} \quad (2.2)$$

où :

g : accélération de la pesanteur :

h : profondeur hydraulique , définie comme étant le rapport de la section mouillée et de la largeur superficielle , qui devient profondeur d'écoulement dans le cas d'un canal rectangulaire .

Notant que la relation ci-dessus ( 2.2 ) peut aussi être obtenue par l'application de l'équation de continuité et de l'équation de l'énergie .

Les deux signes possibles pour la célérité , indiquent bien que l'onde peut se propager vers l'aval ou vers l'amont .

**II.A.3.1- Ecoulement avec onde :**

La relation ( 2.2 ) a été établie pour une eau au repos , mais elle reste cependant valable dans la cas où l'eau est en mouvement , en effet il y a superposition des ondes au courant .

Par ailleurs la célérité absolue ,  $C_w$  pour un écoulement de vitesse moyenne U est :

$$C_w = U \pm C \quad (2.3)$$

Cette célérité a donc deux valeurs :

$$C_{w_1} = U + C \quad , \quad C_{w_2} = U - C$$

Suite à ceci on distingue essentiellement trois cas par conséquent trois régimes :

i)  $U < C$  , où l'onde avec la célérité ,  $C_{W1}$  , se propage vers l'aval et l'onde avec la célérité ,  $C_{W2}$  , se propage vers l'amont ; c'est le régime fluvial .

ii)  $U > C$  , où l'onde avec la célérité ,  $C_{W1}$  , se propage vers l'aval et l'onde avec la célérité ,  $C_{W2}$  , se propage aussi vers l'aval c'est le régime torrentiel .

iii) Dans le cas particulier où  $U \equiv C = \sqrt{g \cdot h_c}$  , avec  $h_c$  la profondeur critique , l'écoulement est en régime critique .

### II.A.3.2- Instabilité à la surface - ondes en cascades :

Si la pente du radier est très importante et/ou l'écoulement est torrentiel , la surface libre de l'eau peut devenir instable ( figure.II.1 ) , cette instabilité se traduit par : - une série d'onde de gravité de faible amplitude , appelées ondes en cascade, qui se propage vers l'aval .

- un déferlement qui provoque un entraînement d'air .

Ainsi les ondes en cascade se superposent à l'écoulement , elles se déplacent en croissant vers l'aval avec une célérité absolue ,  $C_w$  , plus importante que la vitesse moyenne  $U$  :

$$C_w = U + \sqrt{g \cdot h}$$

Cependant la présence de tels phénomènes rend extrêmement difficile l'étude rigoureuse de l'écoulement dans de tels conditions .

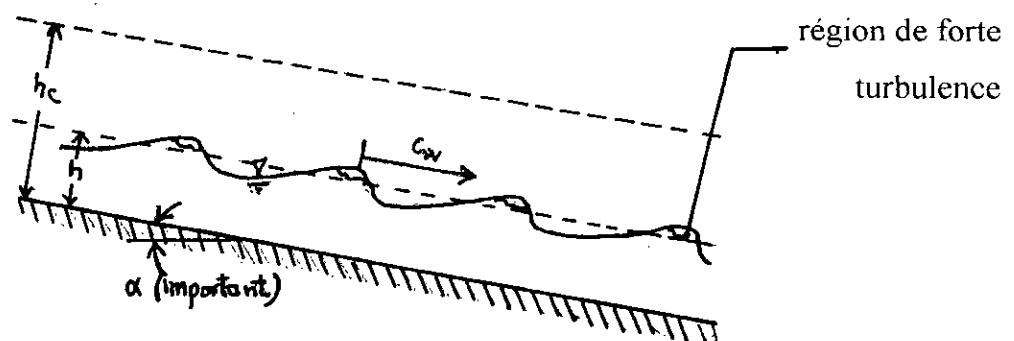


fig.II.1 : Ondes en cascade

**II.A.4- Géométrie des canaux à ciel ouvert :****1. Profil de la section transversale :**

Dans les cours d'eau naturels le profil de la section transversale est irrégulier ( fig.II.2.a ), par contre dans les canaux artificiels on utilise des sections de géométrie régulière , on cite ici les profils usuellement adoptés : profil trapézoïdal , triangulaire , rectangulaire , semi circulaire et parabolique .

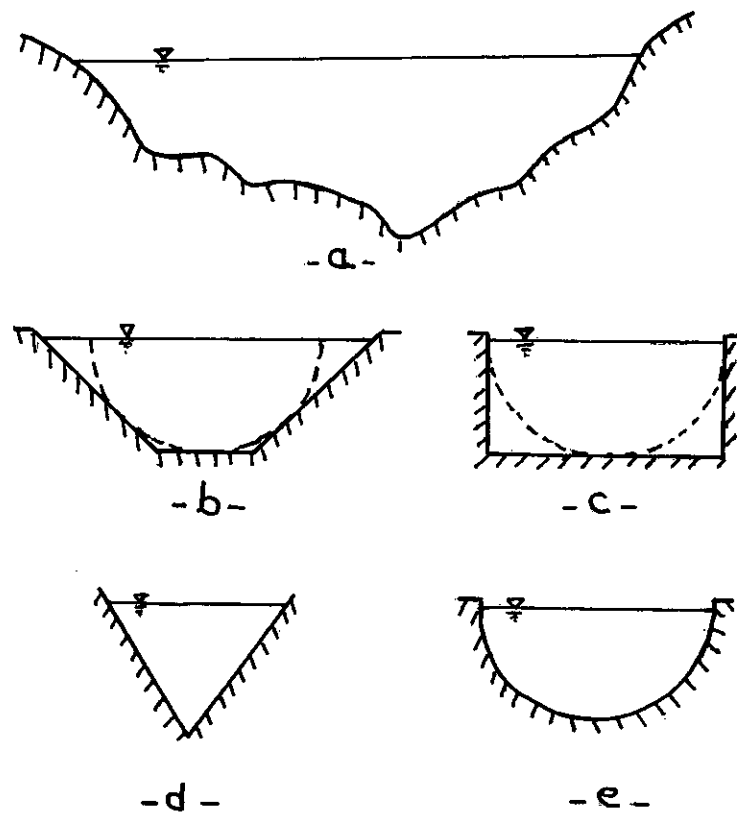


fig.II.2 : Types de profils de section transversale .

- a- profil d'un cours d'eau naturel
- b- profil trapézoïdal
- c- profil rectangulaire
- d- profil triangulaire
- e- profil semi-circulaire



### 2-Canaux prismatiques et non prismatiques :

\* Un canal est dit prismatique si :

- L'ensemble des génératrices du canal sont des droites parallèles entre elles .
- Le profil de la section transversale ne varie pas le long de l'écoulement .

\* Un canal est dit non prismatique si :

- Les génératrices du canal ne sont plus parallèles entre elles .
- La forme du canal présente des changements de section le long de l'écoulement, produisant soit une convergence , soit une divergence , qui peuvent être progressives ou brusques .

Les canaux non prismatiques sont souvent utilisés sur une courte distance , c'est pour cela d'ailleurs qu'on les désigne souvent sous le nom de transitions .

Leur présence engendre des instabilités à la surface libre .

## II.B- ECOULEMENT DANS LES CANAUX NON PRISMATIQUES : [12,28]

Le changement de direction ou de section d'un canal découvert provoque la perturbation de l'écoulement à l'aval , ceci se traduit par une surface libre irrégulière et ondulée .

Cette irrégularité est plus accentuée pour les écoulements torrentiels ( ou supercritiques ) où elle est négligeable .

L'écoulement en régime supercritique dans les canaux non prismatiques est toujours accompagné d'ondes de chocs ( dites aussi ondes transversales ) ce qui nécessitera une surélévation importante des parois latérales du canal .

Dans ce qui suit on va examiner la formation d'ondes transversales .

### II.B.1- Notion d'ondes transversales : [28]

Il est bien connu que si un écoulement subcritique dans un canal découvert ne produit pas d'ondes de chocs , l'écoulement supercritique lui par contre s'effectue en présence de ces dernières .

Les écoulements avec  $F > 1$ , ou écoulements à grande vitesse entraînent des particularités du type ondes, ces dernières constituent des problèmes caractéristiques le long du canal dans les deux directions, amont et aval.

Chaque obstacle dans le canal, par exemple, pile, une déviation ou une jonction de mur, crée une perturbation distincte le long de courbes caractéristiques bien définies, il se forme un réseau d'ondes stationnaires à la surface libre : creux ou ce qui est plus dangereux surélévation, de telles ondes sont appelées ondes transversales ou par analogie à la dynamique des gaz ondes de chocs.

Dans les écoulements permanents, ces ondes ne se déplacent pas sauf pour les variations turbulentes, et nécessitent une revanche supplémentaire.

Il y a donc lieu de rechercher des moyens permettant de réduire de telles ondes.

### II.B.2- Etude d'une déviation brusque d'un mur :

Soit un écoulement torrentiel dans un large canal rectangulaire dont la pente du radier est bien choisie afin de compenser la pente de frottement.

En un certain point, le mur du canal subit une brusque déviation, d'un angle  $\theta$  vers l'écoulement ce qui est illustré à la figure II.3.

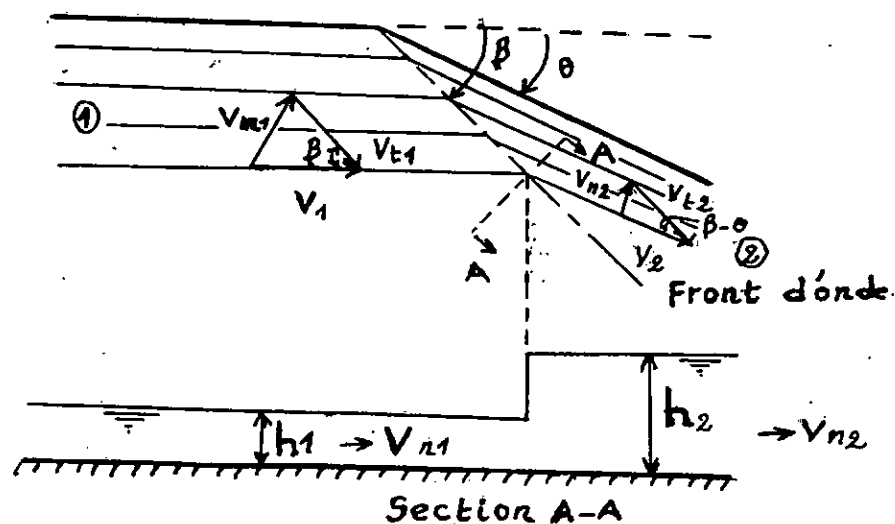


fig.II.3 : Ondes transversales dans une déviation de mur.

La déviation du mur produit une perturbation de l'écoulement le long d'une ligne droite faisant un angle  $\beta$  par rapport à la direction initiale de l'écoulement. L'angle  $\beta$  est appelé « angle de chocs » et la ligne correspondante « onde transversale ».

L'application respective du principe de la conservation de masse et des quantités de mouvement au front du choc entre les positions à l'amont désignés par l'indice (1) et les positions à l'aval désignés par l'indice (2) donne :

$$Y = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\beta - \theta)} \quad (2.4)$$

$$Y = \frac{1}{2} \left[ (1 + 8F_1^2 \sin^2 \beta)^{1/2} - 1 \right] \quad (2.5)$$

$$F_2^2 = Y^{-1} \left[ F_1^2 - \frac{1}{2Y} (Y - 1)(Y + 1)^2 \right] \quad (2.6)$$

où :

$$F_1 = \frac{V_1}{(gh_1)^{1/2}}$$

$$F_2 = \frac{V_2}{(gh_2)^{1/2}}$$

$$Y = \frac{h_2}{h_1}$$

Le système d'équations écrit ci-dessus permet, pour  $h_1$ ,  $V_1$ ,  $\theta$  donnés de calculer  $h_2$ ,  $\beta$  et  $F_2$ .

Dans le cas où  $F_1 \sin \beta > 1$ , l'équation (2.4) peut être simplifiée par l'équation approchée suivante :

$$Y = \sqrt{2} \cdot F_1 \sin \beta - \frac{1}{2} \quad (2.7)$$

et Hager a montré que :

$$\beta = \theta + \frac{3}{2\sqrt{2}} F_1^{-1} \quad (2.8)$$

Les équations (2.6) et (2.7) ont été vérifiées expérimentalement [21]

**II.B.3- Ondes positives et ondes négatives :**

La figure.II.4 représente un canal découvert, qui subit un léger changement de direction, d'un faible angle  $\theta$ , à l'amont de ce changement  $F_1 > 2$

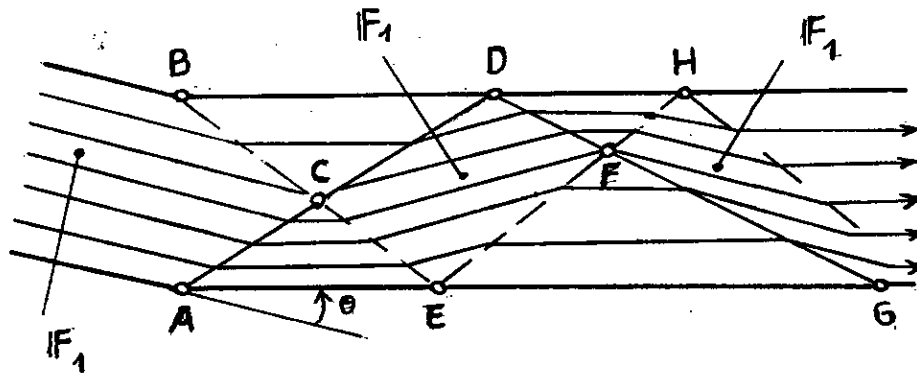


fig.II.4 : Schématisation des ondes positives et ondes négatives .

Le canal change de direction d'un angle  $\theta$  aux points A et B .

Au point A , le changement de direction rentre dans l'écoulement , un tel changement est qualifié de « positif » et engendre une augmentation de la profondeur d'écoulement , l'onde créée est dite onde positive .

Contrairement , au point B la déviation du canal est considérée négative et engendre une diminution de la profondeur d'écoulement .

L'onde est dite négative , cette dernière est différente de l'onde positive du fait que le changement de la profondeur est progressif et non brutal .

Dans la zone située à gauche de ACB , c'est-à-dire à l'amont des ondes transversales , l'écoulement n'est pas influencé et les lignes de courant restent parallèles au canal d'entrée .

Dans les régions ACE et BCD , les lignes de courant sont parallèles aux murs du canal aval et les profondeurs d'écoulement augmentent et diminuent respectivement .

Le point C est le lieu de rencontre des deux ondes transversales .  
Leur superposition nous ramène à l'état initial par conséquent les caractéristiques de la région CDEF sont  $h_1$  comme profondeur et  $F_1$  comme nombre de Froude , mais les lignes de courant ont dévié de  $2\theta$  par rapport à la direction initiale .

A l'aval de la ligne DF et EF , une nouvelle inversion se produit et les lignes de courant redeviennent parallèle aux murs .

La profondeur de l'écoulement augmente dans la région DFH et diminue dans la région EFG .

Le long du mur ( AEG ) , la surface de l'eau s'élève tout d'abord brusquement , puis diminue progressivement au dessous de la profondeur initiale  $h_1$ . L'écoulement est ainsi agité dans le canal , ce qui nécessite des murs plus hauts que ceux de la zone d'entrée , d'où l'importance de l'étude portant sur la réduction des sommets des ondes .

#### **II.B.4- Réduction des ondes transversales :**

Pour réduire les ondes transversales et du fait optimiser le coût de l'ouvrage (tel que les coursiers ) un moyen simple et efficace est souvent envisagé ; basé sur le principe de l'interférence d'ondes .

Selon ce principe , une onde négative est produite pour remplacer une onde positive identique . Par exemple , une déviation de mur positive dans un canal de largeur finie , telle que représentée sur la figure.II.5.a , ci-dessous conduit à une augmentation de la profondeur d'écoulement (  $h_2 > h_1$  ) .

Dans la figure ( II.5.b ) , l'inverse se produit conduisant à une diminution de la profondeur d'écoulement à l'aval .

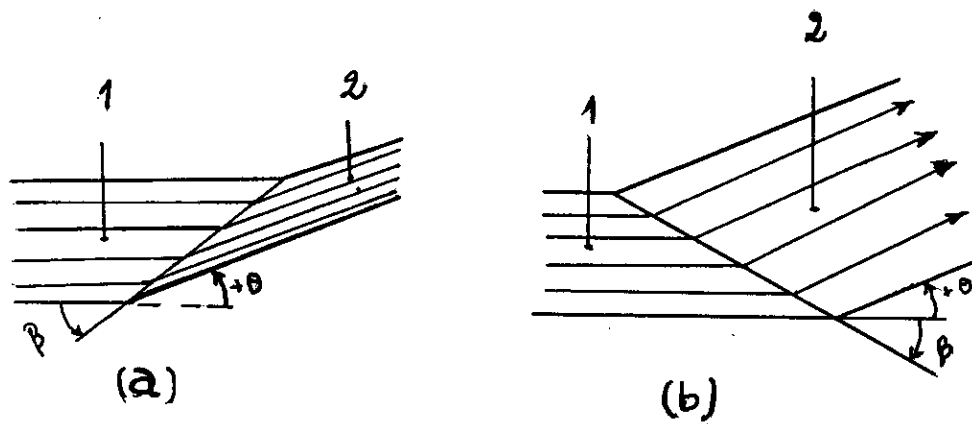


fig.II.5 : (a) Augmentation de la profondeur d'écoulement .  
(b) Diminution de la profondeur d'écoulement .

### II.B.5- Rétrécissement d'un canal dans des conditions d'écoulement supercritique :

#### II.B.5.1- Types de rétrécissement :

Un rétrécissement de canal dans un écoulement torrentiel se présente aux endroits où :

- la pente du radier est augmentée .
- la rugosité est réduite .
- le débit augmenté .

Un rétrécissement permet de passer d'un canal d'entrée de largeur  $b_1$  à un canal de largeur  $b_2$  ( $b_2 < b_1$ ) .

On distingue les rétrécissement en forme d'entonnoir ,en forme d'éventail et en forme de tuyère ( fig.II.6 ) .

Le premier type a une forme polygonale entre la partie large et la partie étroite du canal .

Dans la forme en éventail , on utilise des arcs circulaires dont la courbure est orientée vers l'écoulement , alors que la forme en tuyère deux arcs circulaires sont disposés en S .

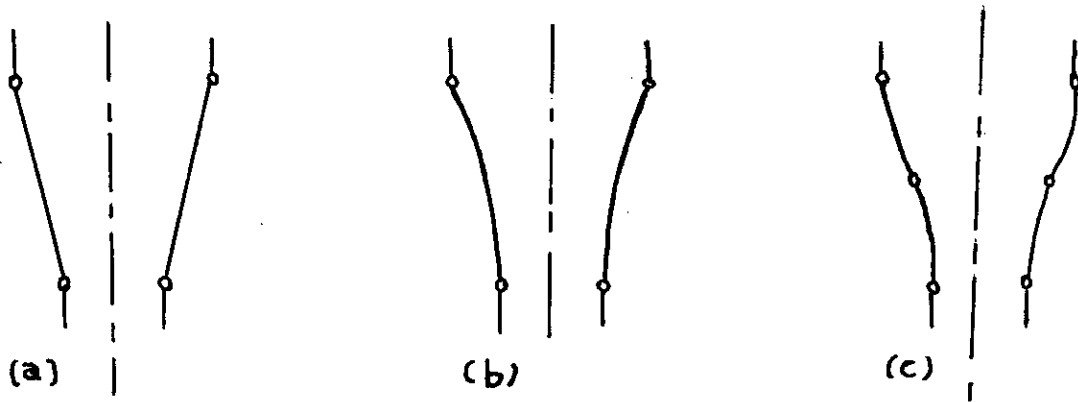


fig.II.6 : Types de rétrécissement .

- a) en forme d'entonnoir
- b) en forme d'éventail
- c) en forme de tuyère .

Le rétrécissement en forme d'éventail présente le minimum de déviation élémentaires et correspond ainsi à la forme optimale du point de vue géométrique . En ce qui concerne le rétrécissement en forme de tuyère , l'arc amont aura un rayon plus petit que l'arc aval .

On s'intéresse en particulier au cas du rétrécissement en forme d'entonnoir .

**II.B.5.2- Rétrécissement en forme d'entonnoir :**

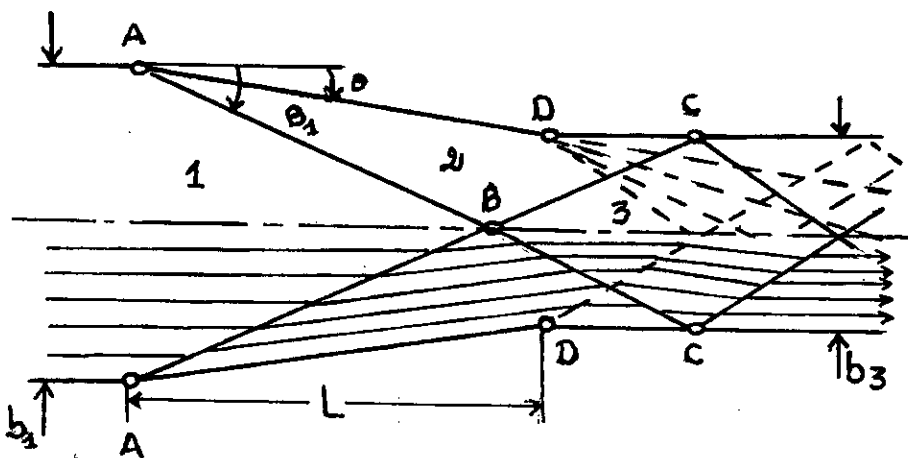


fig.II.7 : Représentation schématique de l'écoulement dans un rétrécissement de canal d'après IPPEN et DAWSON (1951)

(——) onde positive      (-----) onde négative .

La figure.II.7, schématise un rétrécissement symétrique, de tracé rectiligne, avec lignes de courant et ondes transversales. L'indice (1) correspond aux conditions d'écoulement à l'amont du rétrécissement,  $h_1, V_1, F_1$  étant respectivement la profondeur, la vitesse et le nombre de Froude de l'écoulement amont.

Les largeurs du canal d'entrée et du canal de sortie sont respectivement  $b_1$  et  $b_3$ .

Pour un angle  $\theta$  arbitraire de rétrécissement, le schéma de l'écoulement est illustré sur la figure.II.7.

L'onde transversale positive, ayant comme origine les points A, est réfléchi sur le mur opposé aux points C et pénètre dans le canal aval. Simultanément, des ondes négatives se forme aux points D. La superposition des ondes positives et négatives conduit à un écoulement agité. Il en résulte que l'écoulement dans le canal aval connaît des perturbations.

Il est évident que le choix de  $\theta$  dépend du nombre de Froude amont  $F_1$  et du rapport des largeurs d'entrée et de sortie  $\varphi = b_1/b_3$ . une fois  $\varphi$  et  $\theta$  fixés, chaque changement de  $F_1$  conduit à une situation représentée dans la figure.II.7.

Pour un certain choix bien étudié de  $\theta$ , les ondes de choc à l'aval du point B sont dérivées exactement vers les points D. L'écoulement qui en résulte dans le canal aval n'a pratiquement pas de perturbations de surface.

Il s'ensuit que l'écoulement dans la zone.2, est le seul qui n'est pas axial (fig.II.8.a, ci-dessous). La figure II.8.b, représente des profils caractéristiques de surface, le long des murs latéraux et le long de l'axe du canal.

D'après Hager et Bretz l'angle de rétrécissement  $\theta$  peut être déterminé par la formule approché suivante :

$$\arctg\theta = \frac{1}{2F_1} \left( \frac{b_1}{b_3} - 1 \right) \quad (2.9)$$

valable pour  $\theta < 10^\circ$



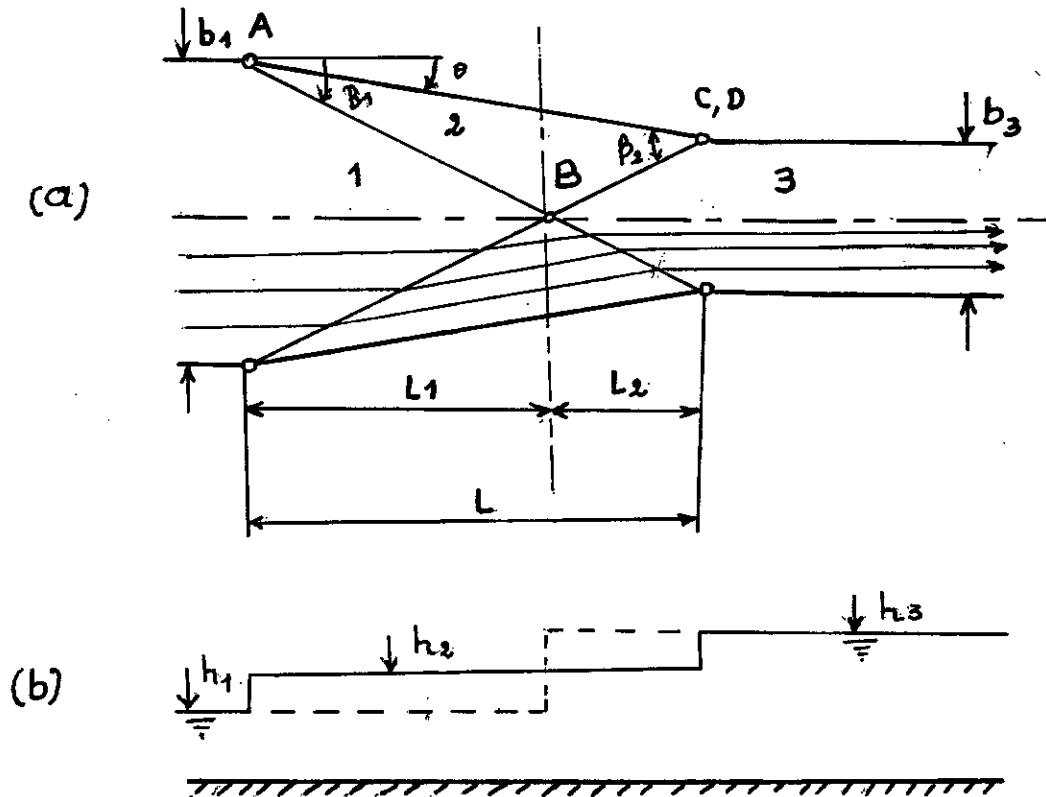


fig.II.8 : Conception d'un rétrécissement de canal en forme d'entonnoir d'après IPPEN et DAWSON (1951)

a) Vue en plan

b) Coup longitudinal avec

( ——— ) profil de la surface libre le long de l'axe du canal

( - - - - - ) profil de la surface libre le long des murs

La conception d'un rétrécissement se base sur le débit pour lequel la hauteur maximale de l'onde se produit . Ce débit n'est pas connu à priori on considère en général , le débit maximal comme débit de projet pour tous les autres débits , la forme du rétrécissement ne sera pas conforme à l'équation ( 2.9 ) .

### II.B.6- Elargissement d'un canal dans des conditions d'écoulement supercritique :

Les élargissements sont fréquemment utilisés dans les réalisations hydrauliques, tel que le canal qui débouche sur un coursier à pente raide. Contrairement à une réduction de la largeur d'un canal, où la vitesse moyenne  $V$  diminue et la hauteur d'eau  $h$  augmente dans la direction de l'écoulement, la vitesse  $V$  dans les canaux à parois divergentes augmente et  $h$  décroît pour des conditions pseudo-uniformes ( fig.II.9 , ci-dessous ).

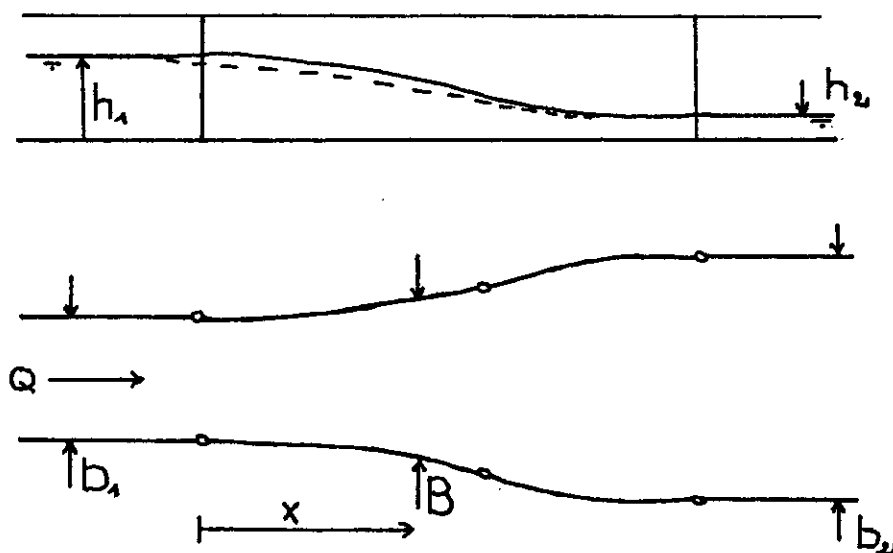


fig.II.9 : Géométrie d'un élargissement dans des conditions d'écoulement torrentielles

- ( ——— ) profil de la surface libre le long de l'axe
- ( - - - - - ) profil de la surface libre le long des parois
- ( o ) début et fin de la transition

Dans la figure ci-dessus  $b_1$  et  $b_2$  désignent respectivement les largeurs à l'amont et à l'aval du canal rectangulaire . L'écoulement s'effectue de gauche à droite, on considère de plus que le canal d'entrée est infiniment large ( $b_1/b_2 \rightarrow 0$ ).

La fonction qui exprime la variation de la largeur (  $B = B(x)$  ) dans la transition s'écrit comme suit :

$$\frac{B}{b_1} = \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{x}{b_1 \cdot F_1} \right]^{3/2} + 1 \right) \quad (2.10)$$

où :  $x$  est représentée sur la figure.II.9.

Remarquons que si la transition entre le canal étroit et le canal plus large est trop brusque , des ondes transversales importantes peuvent prendre forme par contre, une transition trop progressive conduit à un ouvrage de grande longueur et très coûteux .

Remarquons aussi que la forme de l'élargissement représenté par l'équation (2.10) empêche la séparation de l'écoulement .

**CHAPITRE III**

***MODELISATION MATHEMATIQUE***

### **III.1- INTRODUCTION :**

Le mouvement d'une masse liquide , est gouverné par les lois de conservation de la physique des milieux continus , en l'occurrence :

- Loi de conservation de la masse .
- Loi de conservation de la quantité de mouvement .
- Loi de conservation de l'énergie .

Mais il n'est guère facile de traduire ou de formuler mathématiquement l'écoulement liquide , en particulier si ce dernier est à surface libre .L'établissement des équations qui régissent un tel phénomène est obtenu par l'application des lois de conservation mentionnées ci-dessus , en se basant sur un certain nombre d'hypothèses qui s'imposent pour des raisons physiques et/ou mathématiques mais qui doivent être justifiées et c'est de la que vient l'aspect approché des modèles mathématiques .

### **III.2- HYPOTHESES DE BASE : [6,8,16,22]**

Pour l'établissement des équations de base , des écoulements à surface libre bidimensionnels non permanent en régime graduellement varie , on fait les suppositions suivantes :

- 1- le fluide est incompressible .
- 2- la distribution des pressions est hydrostatique .
- 3- La répartition des vitesses transversales est uniforme .
- 4- Les contraintes tangentielles au fond du canal sont prépondérantes par rapport aux autres contraintes .
- 5- Les pertes de charge générales sont les mêmes que dans le cas d'un écoulement permanent de même profondeur .
- 6- Accélération de coriolis négligeable .

**III.3- MISE EN EQUATION :** [1,2,4,5,11,22,23,31]

Soit un écoulement à surface libre dans un canal non prismatique de pente considérable  $\alpha_x$  figure III.1

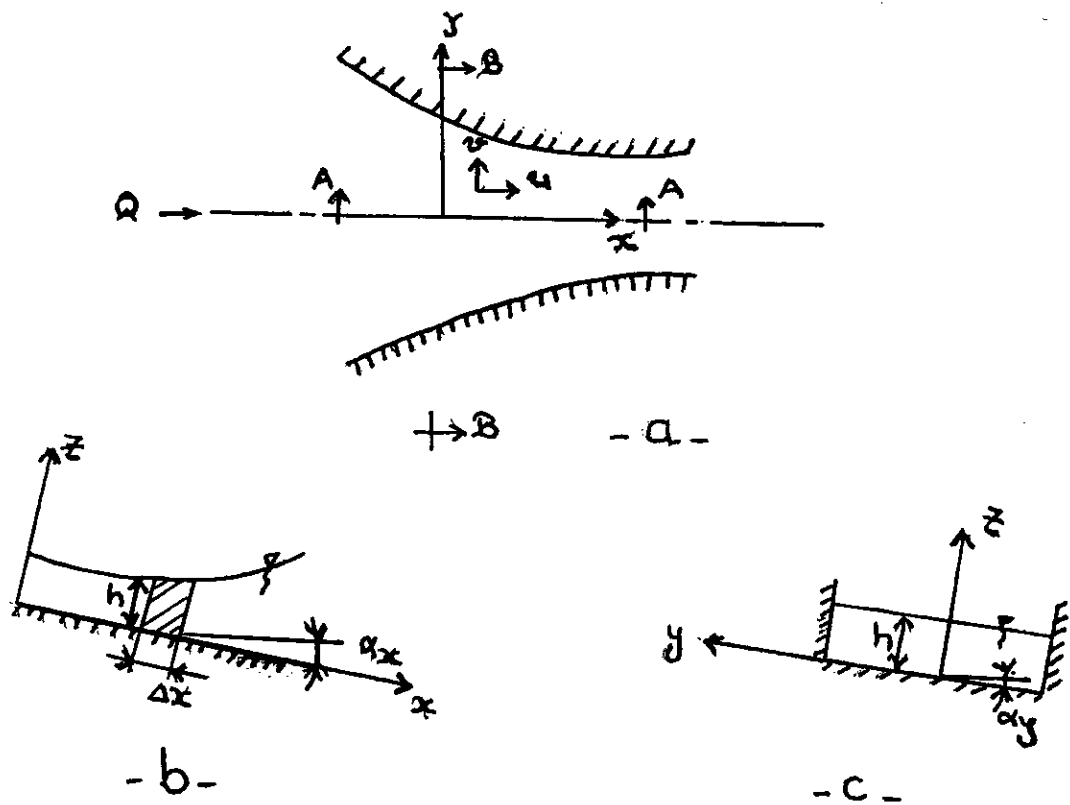


fig III.1 : Ecoulement à surface libre

a/ vue en plan      b/section A-A      c/section B-B

L'écoulement est défini dans l'espace et dans le temps par les variables suivantes :

- la profondeur d'écoulement  $h = h(x, y, t)$

- le vecteur vitesse  $\vec{V}$  de composante  $u$  suivant  $x$  et de composante  $v$  suivant  $y$

$$\vec{V} = \vec{u}(x, y, t) + \vec{v}(x, y, t)$$

Notant que le repère orthonormé  $xyz$  est lié au radier du canal. Cependant, on a trois inconnus qu'on doit déterminer ; l'application de la loi de conservation de la masse nous donne une équation et celle de conservation de la quantité de mouvement nous donne deux équations l'une suivant  $x$  et l'autre suivant  $y$ , ainsi le système est fermé.

Considérons un volume de contrôle élémentaire de base  $\Delta x \cdot \Delta y$  et de hauteur  $h$ , où  $h$  est la profondeur d'écoulement (figure III.2).

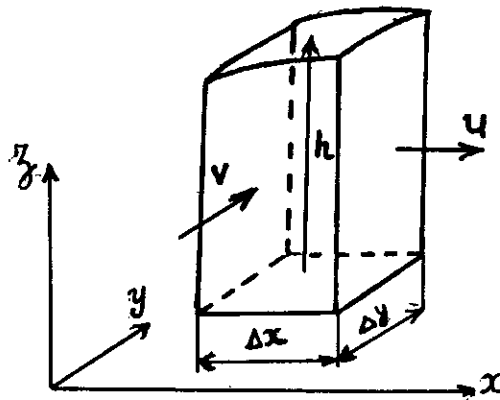


fig III.2 : Volume de contrôle élémentaire.

**a) Equation de continuité :**

L'équation de continuité traduit le principe de conservation de la masse, ce qui signifie qu'aucun fluide ne peut ni être créé ni disparaître dans un volume donné.

Ainsi l'augmentation de la masse, pendant un certain temps, du fluide contenu dans un volume donné, doit être égale à la somme des masses de fluide qui y entrent, diminuée de celles qui en sortent.

Considérons l'élément de volume  $\Delta x \cdot \Delta y \cdot h$  (fig III.2), dans l'intervalle de temps  $\Delta t$  sa masse varie de :

- suivant la direction x

$$[\rho \cdot u \cdot h(x, y, t) - \rho \cdot u \cdot h(x + \Delta x, y, t)] \cdot \Delta y \cdot \Delta t$$

- suivant la direction y

$$[\rho \cdot v \cdot h(x, y, t) - \rho \cdot v \cdot h(x, y + \Delta y, t)] \cdot \Delta x \cdot \Delta t$$

où :  $\rho$  : masse volumique du fluide .

$u, v$  : composantes de la vitesse suivant les axes x et y respectivement.

$h$  : profondeur d'écoulement .

Par ailleurs la variation de la masse fluide dans les deux directions, est égale à la masse stockée dans l'élément de volume considéré .

$$\begin{aligned} \rho \cdot \Delta h \cdot \Delta x \cdot \Delta y &= [\rho \cdot u \cdot h(x, y, t) - \rho \cdot u \cdot h(x + \Delta x, y, t)] \cdot \Delta y \cdot \Delta t \\ &+ [\rho \cdot v \cdot h(x, y, t) - \rho \cdot v \cdot h(x, y + \Delta y, t)] \cdot \Delta x \cdot \Delta t \end{aligned}$$

$\rho$  est une constante par hypothèse, en divisant l'équation ci-dessus par  $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta t$  et en faisant tendre ces grandeurs vers zéro on obtient la relation mathématique exprimant la conservation de la masse :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = 0 \quad (3.1)$$



### **b) Equation de conservation de la quantité de mouvement :**

L'énoncé du principe de la quantité de mouvement stipule que la variation de la quantité de mouvement dans l'élément de volume pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$ , doit être égale à la somme de l'accroissement de la quantité de mouvement et la somme des forces extérieures appliquées sur l'élément de volume pendant le même intervalle de temps.

L'augmentation de la quantité de mouvement dans l'élément de volume considéré est définie par la différence entre celle entrant par la section  $x$  (respectivement  $y$ ) et celle sortant par la section  $x + \Delta x$  (respectivement  $y + \Delta y$ ). Suivant la direction  $x$  (respectivement  $y$ ) elle est donnée par :

- Suivant  $x$  :

$$[(\rho \cdot h \cdot u^2 \cdot \Delta y \cdot \Delta t)_x - (\rho \cdot h \cdot u^2 \cdot \Delta y \cdot \Delta t)_{x + \Delta x}] + [(\rho \cdot h \cdot u \cdot v \cdot \Delta x \cdot \Delta t)_y - (\rho \cdot h \cdot u \cdot v \cdot \Delta x \cdot \Delta t)_{y + \Delta y}]$$

- Suivant  $y$  :

$$[(\rho \cdot h \cdot v^2 \cdot \Delta x \cdot \Delta t)_y - (\rho \cdot h \cdot v^2 \cdot \Delta x \cdot \Delta t)_{y + \Delta y}] + [(\rho \cdot h \cdot u \cdot v \cdot \Delta y \cdot \Delta t)_x - (\rho \cdot h \cdot u \cdot v \cdot \Delta y \cdot \Delta t)_{x + \Delta x}]$$

La variation de la quantité de mouvement dans l'élément de volume pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$  est :

- suivant  $x$  :

$$[(\rho \cdot h \cdot u \cdot \Delta x \cdot \Delta y)_t - (\rho \cdot h \cdot u \cdot \Delta x \cdot \Delta y)_{t + \Delta t}]$$

- Suivant  $y$  :

$$[(\rho \cdot h \cdot v \cdot \Delta x \cdot \Delta y)_t - (\rho \cdot h \cdot v \cdot \Delta x \cdot \Delta y)_{t + \Delta t}]$$

D'une autre part, les principales forces extérieures agissant sur l'élément de volume pendant le même intervalle de temps  $\Delta t$ , sont :

- les forces de pression .
- les forces de gravité .
- les forces de frottement .

**• BILAN DES FORCES EXTERIEURES:**

**1- Forces de pression :**

La figure III.3 illustre la distribution de la pression dans le cas d'un écoulement torrentiel à forte pente [ 19 ]

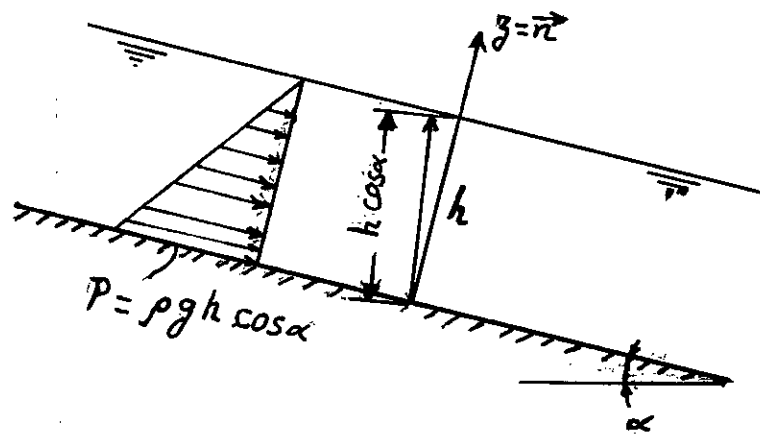


fig III.3 : Répartition hydrostatique de la pression .

Les forces de pression ont pour résultante :

$$|F_p| = \rho \cdot g \cdot h \cdot \cos \alpha_x \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad (3.2)$$

La projection de cette résultante sur les axes donne :

- Projection sur x :

$$F_{px} = -\rho g h \frac{\partial h}{\partial x} \cos \alpha_x \cdot \Delta x \Delta y \quad (3.2.1)$$

- Projection sur y :

$$F_{py} = -\rho g h \frac{\partial h}{\partial y} \cos \alpha_x \cdot \Delta x \Delta y \quad (3.2.2)$$

**2- Force de gravité :**

La décomposition de la force de gravité ,  $F_g$  , sur les axes donne :

- Suivant x :

$$F_{gx} = \rho \cdot g \cdot h \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \sin \alpha_x \quad (3.3.1)$$

- Suivant y :

$$F_{gy} = \rho \cdot g \cdot h \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \sin \alpha_y \quad (3.3.2)$$

**3- Force de frottement :**

La force de frottement est proportionnelle à la surface de contact eau-fond , le fond est considéré relativement plat , cette surface est  $\Delta x \cdot \Delta y$  pour l'élément de volume considéré .

Par ailleurs , cette force est aussi proportionnelle au carré de la vitesse , opposée à l'écoulement et s'écrit :

$$F_f = - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_f \cdot \vec{V} \cdot |\vec{V}| \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad (3.4)$$

avec :  $C_f$  : coefficient de frottement , selon Chezy  $C_f$

$$\text{est défini par : } C_f = \frac{2g}{C^2} .$$

où :  $C$  : coefficient de Chezy

$g$  : accélération de la pesanteur .

Si le coefficient de Manning est utilisé alors :

$$C = \frac{1}{n} R_H^{1/6}$$

où :  $n$  : coefficient de Manning

$R_H$  : le rayon hydraulique , pour un canal rectangulaire

$$R_H = \frac{B \cdot h}{b + h}$$

B étant la largeur du canal et h , le tirant d'eau, de plus si ce canal est symétrique :

$$R_H = \frac{b \cdot h}{b + h} \quad \text{avec} \quad b = B/2 .$$

Finalement , la conservation de la quantité de mouvement s'écrit suivant les deux direction x,y comme suit :

• Suivant x :

$$\begin{aligned} [(\rho \cdot h \cdot u \cdot \Delta x \cdot \Delta y)_t - (\rho \cdot h \cdot u \cdot \Delta x \cdot \Delta y)_{t+\Delta t}] &= [(\rho \cdot h \cdot u^2 \cdot \Delta y \cdot \Delta t)_x - (\rho \cdot h \cdot u^2 \cdot \Delta y \cdot \Delta t)_{x+\Delta x}] \\ &+ [(\rho \cdot h \cdot u \cdot v \cdot \Delta x \cdot \Delta t)_y - (\rho \cdot h \cdot u \cdot v \cdot \Delta x \cdot \Delta t)_{y+\Delta y}] \\ &+ [\rho \cdot g \cdot h \cdot \sin \alpha_x \cdot \Delta x \cdot \Delta y - \rho \cdot g \cdot h \frac{\partial h}{\partial x} \cos \alpha_x \cdot \Delta x \cdot \Delta y \\ &- n^2 \left( \frac{b+h}{b \cdot h} \right)^{1/3} \rho \cdot g \cdot u \cdot |V| \cdot \Delta x \cdot \Delta y] \cdot \Delta t \end{aligned}$$

• Suivant y :

$$\begin{aligned} [(\rho \cdot h \cdot v \cdot \Delta x \cdot \Delta y)_t - (\rho \cdot h \cdot v \cdot \Delta x \cdot \Delta y)_{t+\Delta t}] &= [(\rho \cdot h \cdot v^2 \cdot \Delta x \cdot \Delta t)_y - (\rho \cdot h \cdot v^2 \cdot \Delta x \cdot \Delta t)_{y+\Delta y}] \\ &+ [(\rho \cdot h \cdot u \cdot v \cdot \Delta y \cdot \Delta t)_x - (\rho \cdot h \cdot u \cdot v \cdot \Delta y \cdot \Delta t)_{x+\Delta x}] \\ &+ [\rho \cdot g \cdot h \cdot \sin \alpha_y \cdot \Delta x \cdot \Delta y - \rho \cdot g \cdot h \frac{\partial h}{\partial y} \cos \alpha_x \cdot \Delta x \cdot \Delta y \\ &- n^2 \left( \frac{b+h}{b \cdot h} \right)^{1/3} \rho \cdot g \cdot v \cdot |V| \cdot \Delta x \cdot \Delta y] \cdot \Delta t \end{aligned}$$

$\rho$  , est une constante par hypothèse , en divisons les équations ci-dessus par  $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta t$  , et en faisant tendre ces grandeurs vers zéro , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_x \right) + \frac{\partial}{\partial y}(uvh) = gh(sox - sfx) \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(vh) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_x \right) + \frac{\partial}{\partial x}(uvh) = gh(soy - sfy) \quad (3.6)$$

Dans les équations ( 3.5 ) et ( 3.6 ) on adopte les notations utilisées dans la littérature où :

$$\bullet \text{ sfx} = n^2 u (u^2 + v^2)^{1/2} \left( \frac{b+h}{bh^4} \right)^{1/3}$$

$$\bullet \text{ sfy} = n^2 v (u^2 + v^2)^{1/2} \left( \frac{b+h}{bh^4} \right)^{1/3}$$

sfx et sfy sont couramment appelées pentes de frottement .

$$\bullet \text{ sox} = \sin \alpha_x$$

$$\bullet \text{ soy} = \sin \alpha_y$$

Finalement , le modèle mathématique se résume dans le système d'équations suivant:

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) &= 0 \\ \bullet \frac{\partial}{\partial t}(uh) + \frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_x \right) + \frac{\partial}{\partial y}(uvh) &= gh(\text{sox} - \text{sfx}) \\ \bullet \frac{\partial}{\partial t}(vh) + \frac{\partial}{\partial x}(uvh) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_x \right) &= gh(\text{soy} - \text{sfy}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

### C- Développement et simplification des équations :

#### 1- Equation de continuité :

On garde la même forme c'est-à-dire :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = 0$$

#### 2- Equation de la quantité de mouvement suivant la direction , x :

$$\frac{\partial}{\partial t}(uh) + \frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_x \right) + \frac{\partial}{\partial y}(uvh) = gh(\text{sox} - \text{sfx})$$

(1)

(2)

(3)

(4)

Le développement des termes (1) , (2) et (3) nous donne

$$(1) \frac{\partial}{\partial t}(uh) = h \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$(2) \frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 h + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_x \right) = 2hu \frac{\partial u}{\partial x} + u^2 \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial}{\partial x} (gh \cos \alpha_x)$$

$$(3) \frac{\partial}{\partial y} (uvh) = u \frac{\partial}{\partial y} (vh) + vh \frac{\partial u}{\partial y}$$

En introduisant ces développements , on aboutit à :

$$u \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uh) + \frac{\partial}{\partial y} (vh) \right) + h \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} + gh \cos \alpha_x \right) + v \frac{\partial u}{\partial x} \right] = (4)$$

Le premier terme de l'équation ci-dessus représente le terme gauche de l'équation de continuité , par conséquent il est nul .

Après simplification on arrive à la formulation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} + gh \cos \alpha_x \right) + v \frac{\partial u}{\partial x} = g(sox - sfx) \quad (3.8)$$

### 3- Equation de la quantité de mouvement suivant la direction , y :

En suivant les même étapes que précédemment on obtient l'équation ci-dessous :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v^2}{2} + gh \cos \alpha_x \right) = g(soy - sfy) \quad (3.9)$$

Donc le système d'équations qui traduit l'écoulement après les opérations de simplifications s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uh) + \frac{\partial}{\partial y} (vh) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} + gh \cos \alpha_x \right) + v \frac{\partial u}{\partial x} = g(sox - sfx) \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v^2}{2} + gh \cos \alpha_x \right) = g(soy - sfy)$$

### III.4- TRANSFORMATION GEOMETRIQUE : [6,23,30]

Dans la pratique hydrotechnique , les canaux découverts ont fréquemment une géométrie relativement complexe . La résolution des écoulements dans de tels canaux par des méthodes numériques basées sur une discrétisation du domaine physique (notamment la méthode des différences finies ) , nécessite de porter une grande attention lors de cette opération , en particulier au niveau des parois latérales.

Roache [6] confirme que l'utilisation d'une procédure d'interpolation après discrétisation du domaine physique , comme l'illustre la figure III.4 a conduit à des solutions aberrantes .

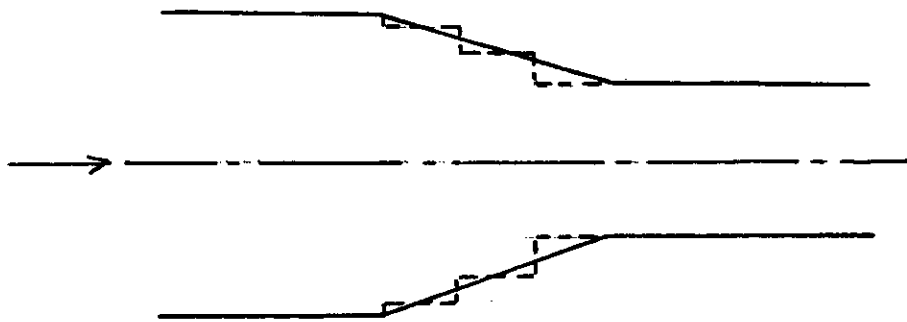


fig III.4 :Discrétisation aux parois latérales

A cet égard , il est commode dans tels cas de transformer le domaine physique en un domaine de calcul de forme rectangulaire plus adopté aux calculs numériques .

Cette procédure est basée sur la transformation de coordonnées suivante ( Anderson et Al [6] ) .

$$\xi = x \quad (3.11)$$

$$\eta = y/b(x)$$

$b(x)$  , étant la distance entre l'axe de symétrie et la paroi latérale à une distance  $x$  (fig.III.5 )

Après cette transformation , il est à présent possible d'appliquer les différences finies dans le maillage ainsi établi . Notant que les frontières du domaine de calcul coïncident avec  $\eta = 0$  et  $\eta = 1$  .

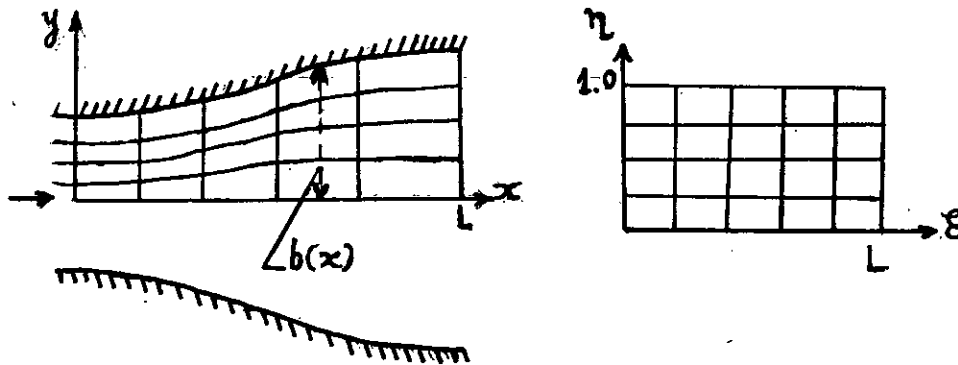


fig III.5 : Transformation de coordonnées pour une transition symétrique .



### III.4.1- Application de la transformation géométrique aux équations de l'écoulement :

Il est indispensable d'adapter les équations qui gouvernent l'écoulement à la transformation géométrique effectuée précédemment sur les coordonnées .

Considérons la fonction  $f = f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$

D'après les propriétés des dérivées partielles on peut écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

L'application de ( 3.12 ) sur la transformation de coordonnées ( 3.11 ) nous donne après simplification :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\eta}{b(\xi)} b'(\xi) \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{b(\xi)} \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

où :  $b'(\xi) = \frac{d}{d\xi}(b(\xi))$

La procédure mathématique ( 3.13 ) appliquée sur les équations de l'écoulement conduit à :

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \xi}(uh) - \frac{\eta}{b(\xi)} b'(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta}(uh) + \frac{1}{b(\xi)} \frac{\partial}{\partial \eta}(vh) = 0 \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{u^2}{2} + gh \cos \alpha_x \right) - \frac{\eta}{b(\xi)} b'(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{u^2}{2} + gh \cos \alpha_x \right) + \frac{1}{b(\xi)} v \frac{\partial u}{\partial \eta} = g(sox - sfx)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\eta}{b(\xi)} b'(\xi) u \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{1}{b(\xi)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{v^2}{2} + gh \cos \alpha_x \right) = g(soy - sfy)$$

#### III.4.2- Opérations d'algèbre matricielle sur les équations : [15,26]

En terme de primitives des variables de l'écoulement  $h$ ,  $u$  et  $v$ , le système d'équations ( 3.14 ) qui gouverne l'écoulement s'écrit :

$$V_t + P_\xi - \frac{\eta}{b(\xi)} b'(\xi) P_\eta + \frac{1}{b(\xi)} R_\eta + T = 0 \quad (3.15)$$

où :  $V = (h, u, v)^t$

$$P = \begin{bmatrix} uh \\ \frac{1}{2} u^2 + gh \cos \alpha_x \\ uv \end{bmatrix} ; \quad R = \begin{bmatrix} vh \\ uv \\ \frac{1}{2} v^2 + gh \cos \alpha_x \end{bmatrix} ;$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 \\ -g(sox - sfx) \\ -g(soy - sfy) \end{bmatrix}$$

L'équation ( 3.15 ) n'est pas dans une forme totalement conservative à cause de la présence du terme  $T$  appelé « Terme de source ».

Quand ce terme n'est pas nul, il agit comme une source, mais comme la contribution de ce terme est généralement petite les propriétés de la forme conservative ne sont pas altérées.

Il est cependant, nécessaire pour certains schémas numériques (schémas aux différences finies), que les équations soient dans une forme non conservative c'est-à-dire dissipative, dans ce but, la forme dissipative de l'équation (3.15) est obtenue en substituant les termes  $P_\xi$  ( $P_\eta$ ) et  $R_\eta$  comme suit :

$$P_\xi = G \cdot V_\xi \quad (P_\eta = G \cdot V_\eta)$$

$$R_\eta = H \cdot V_\eta$$

où :  $G$  et  $H$  sont des matrices jacobiniennes, définies par :

$$G = \begin{bmatrix} u & h & 0 \\ g \cos \alpha_x & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix} \quad ; \quad H = \begin{bmatrix} v & 0 & h \\ 0 & v & 0 \\ g \cos \alpha_x & 0 & v \end{bmatrix}$$

### Les valeurs propres :

Les valeurs propres de la matrice  $G$  et  $H$  sont respectivement :

$$G \begin{cases} \lambda_1 = u \\ \lambda_2 = u + c \\ \lambda_3 = u - c \end{cases}$$

$$H \begin{cases} \omega_1 = v \\ \omega_2 = v + c \\ \omega_3 = v - c \end{cases}$$

où :  $c = (gh \cos \alpha_x)^{1/2}$

Les matrices  $G$  et  $H$  sont décomposables, ou plutôt peuvent être diagonalisées sous la forme suivante :

$$G = M \cdot D_G \cdot M^{-1}$$

$$H = N \cdot D_H \cdot N^{-1}$$

où : M et N sont des matrices de passages

$M^{-1}$  et  $N^{-1}$  matrices inverses de M et N

$D_G$  et  $D_H$  sont les matrices diagonales de G et H respectivement .

$$M = \begin{bmatrix} 0 & h/2c & h/2c \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad N = \begin{bmatrix} 0 & h/2c & h/2c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Les matrices G et H peuvent être écrites en fonction des valeurs propres .

$$G = \begin{bmatrix} 1/2(\lambda_2 + \lambda_3) & (h/2c)(\lambda_2 - \lambda_3) & 0 \\ (c/2h)(\lambda_2 - \lambda_3) & 1/2(\lambda_2 + \lambda_3) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1/2(\omega_2 + \omega_3) & 0 & h/2c(\omega_2 - \omega_3) \\ 0 & \omega_1 & 0 \\ (c/2h)(\omega_2 - \omega_3) & 0 & 1/2(\omega_2 + \omega_3) \end{bmatrix}$$

De plus les matrices G et H peuvent être décomposées d'une autre manière , celle qui consiste à les diviser en deux parties , l'une positive et l'autre négative ,

$$G = G^+ + G^-$$

$$H = H^+ + H^-$$

ceci est accompli par un test des valeurs propres

$$\begin{aligned}
 \lambda_i^+ &= \max(\lambda_i, 0) \\
 \lambda_i^- &= \min(\lambda_i, 0) \\
 \omega_i^+ &= \max(\omega_i, 0) \\
 \omega_i^- &= \min(\omega_i, 0)
 \end{aligned}
 \quad i = 1, 2, 3$$

L'incorporation de tout les changements sur le système d'équations initial conduit à:

$$V_t + G^+ V_\xi + G^- V_\xi - \frac{\eta}{b(\xi)} b'(\xi) (G^+ V_\eta + G^- V_\eta) + \frac{1}{b(\xi)} (H^+ V_\eta + H^- V_\eta) + T = 0 \quad (3.16)$$

### **III.5- CONDITIONS INITIALES , CONDITIONS AUX LIMITES : [5,27]**

D'une manière générale , une équation aux dérivées partielles admet une infinité de solutions .

La solution particulière désirée est déterminée à partir de conditions supplémentaires . Ces conditions portent ,dans la plupart des cas , sur le comportement particulier de la solution sur une courbe qu'on appelle frontière ou limite .

#### **III.5.A- Conditions initiales :**

Les conditions initiales sont les conditions au temps  $t = 0$  .

Pour l'exécution des calculs , il est nécessaire de partir d'un état d'écoulement bien défini au temps  $t = 0$  , ceci est réalisé par un choix judicieux des variables de l'écoulement  $h$  ,  $u$  ,  $v$  .

Les trois variables seront spécifiées en tous les points du maillage .

#### **III.5.B- Conditions aux limites :**

Pour résoudre un problème physique donnée on est amené à prendre en considération les conditions aux limites suivantes :

- Conditions d'amont et d'aval .
- La condition de symétrie .
- Conditions sur les parois latérales .

### **B-1- Conditions d'amont , Conditions d'aval :**

Pour les écoulements bidimensionnels en régime supercritique , trois conditions aux limites doivent être spécifiées à l'amont et aucune à l'aval par contre les écoulements bidimensionnels en régime subcritique , deux conditions aux limites doivent être spécifiées à l'amont et une condition à l'aval .

### **B-2- Conditions de symétrie :**

Pour la détermination des variables de l'écoulement  $h$  ,  $u$  et  $v$  au niveau de l'axe de l'écoulement ( axe de symétrie géométrique ) , il est nécessaire d'utiliser la procédure de réflexion .

Cette procédure , consiste à remplacer les valeurs des variables de l'écoulement  $h$  ,  $u$  et  $v$  aux points fictifs du maillage par les variables aux points intérieurs correspondants ( figure .III.6 ) .

Notant qu'une réflexion symétrique est utilisée pour déterminer  $h$  et  $u$  , par contre une réflexion antisymétrique est utilisée pour déterminer  $v$  .

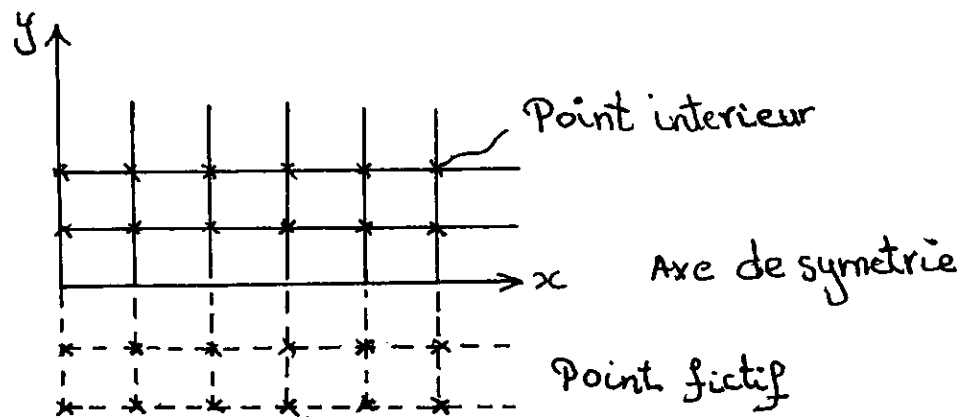


fig.III.6 : Procédure de réflexion à l'axe de l'écoulement .

### B-3- Conditions sur les parois latérales :[14,15]

La condition limite au niveau de la paroi solide , est sur la vitesse longitudinale  $u$  , elle est spécifiée et maintenue égale à zéro , le long de la paroi solide .

Mais cependant pour le calcul des variables de l'écoulement  $h$  et  $v$  au niveau des parois latérales , on est obligé de faire appel une autre fois à la procédure de réflexion .

Cette fois-ci pour le calcul des variables d'écoulement aux points du maillage fictif , figure III.7 , une réflexion symétrique est utilisée pour la profondeur d'écoulement  $h$  et une réflexion antisymétrique pour la vitesse normale  $v$  et la vitesse longitudinal  $u$  .

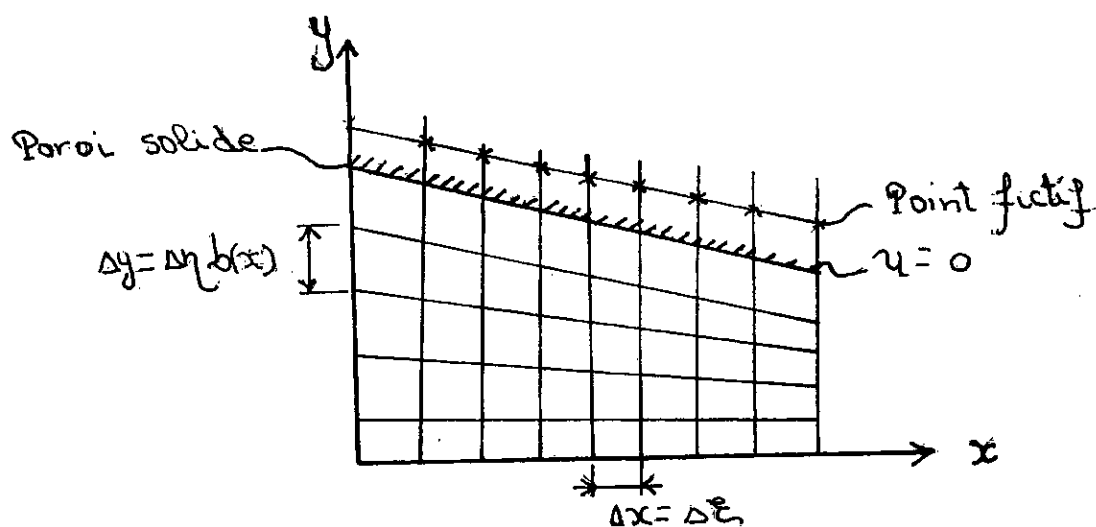


fig.III.7 : Conditions sur les parois latérales .



**CHAPITRE IV**

***SIMULATION NUMERIQUE***

**IV.1- INTRODUCTION : [13]**

La modélisation d'un phénomène physique , se traduit souvent par des équations différentielles , des équations intégrales ou par équations aux dérivées partielles , en effet un grand nombre de problèmes en hydraulique sont formulés par des équations aux dérivées partielles .

La résolution d'un problème différentiel , par exemple , qui est par nature « continu » , signifie l'obtention des valeurs d'une ( ou de plusieurs ) inconnue (s) en fonction d'une variable ( comme le temps ) qui prend une infinité de valeurs possibles Si l'on est capable de résoudre analytiquement ce problème différentiel , c'est-à-dire d'exprimer sa solution à l'aide d'une formule , alors tout va bien : il suffira , a posteriori , d'appliquer cette formule à telle ou telle valeur de  $t$  que choisira l'utilisateur .

L'obtention d'une solution analytique où exacte se limite pratiquement , à des problèmes très simples ou de géométrie très particulière .

Mais par contre une solution approchée est réalisable grâce à une résolution numérique qui consiste à discrétiser le problème , i.e. le remplacer par un problème discret censé lui être proche en un certain sens .

On peut réaliser une approximation par éléments finis , différences finies . . . etc .

Les méthodes numériques d'approximations sont nombreuses mais leur choix où leur emploi représente tout un art dans la présente étude , on a opté pour une résolution par différences finies .

**IV.2- METHODE DES DIFFERENCES FINIES : [7,13,18,25]**

La méthode des différences finies est l'une des méthodes classiques fréquemment utilisée pour la résolution des équations aux dérivées partielles régissant les phénomènes physiques , en particulier ceux du domaine hydraulique .

Cette méthode a pour objectif d'approcher la solution d'une ou plusieurs fonctions , en remplaçons le domaine continu par un domaine discret et l'opérateur différentiel par un opérateur aux différences finies , par conséquent , le domaine de

calcul est constitué par un ensemble fini de points ou noeuds , délimité par des frontières et formant ainsi un réseau ( appelé aussi maillage ) , ce qui est illustré par la figure IV.1 .

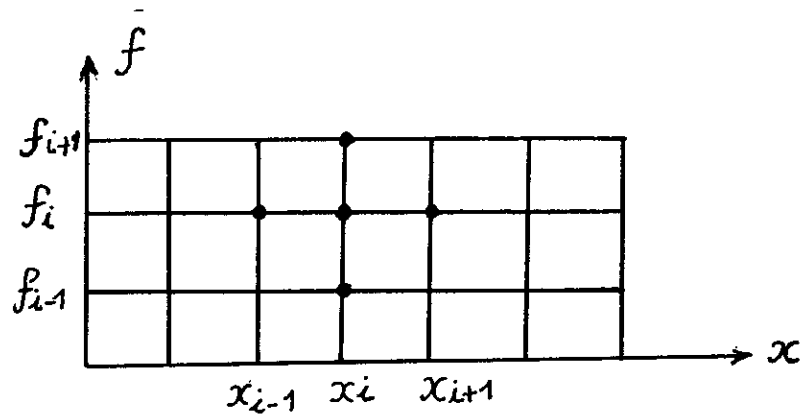


fig.IV.1 : Maillage élémentaire .

La dérivée partielle d'une fonction  $f$  en un point quelconque  $i$  du maillage est remplacé par une différence finie , on écrit :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \quad (4.1)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} \quad (4.2)$$

où :

$$f_i = f(x_i)$$

$$x_i = (i - 1)\Delta x$$

L'équation ( 4.1 ) utilise une différence avant par contre l'équation ( 4.2 ) utilise une différence arrière .

La discrétisation dans la méthode des différences finies est basée sur le développement en série de TAYLOR , pour un pas  $\Delta x$  petit , on peut écrire que :

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x) + o(\Delta x^n)$$

où  $n$  : représente l'ordre d'approximation ou de précision et  $o(\Delta x^n)$  est l'erreur de troncature .

Il est facile d'étendre ou de généraliser la discrétisation des dérivées partielles aux cas bidimensionnels ( figure.IV.2 ) et plus .

Lorsqu'une fonction  $f$  dépend par exemple de deux variable (  $x,y$  ) on peut écrire :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x}$$

où ( 4.3 )

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta y}$$

où ( 4.4 )

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta y}$$

où (  $i,j$  ) : fait référence au point du maillage dans les directions  $x$  ,  $y$  respectivement  $\Delta x$  ,  $\Delta y$  pas d'espace suivant les directions  $x$  ,  $y$  respectivement .

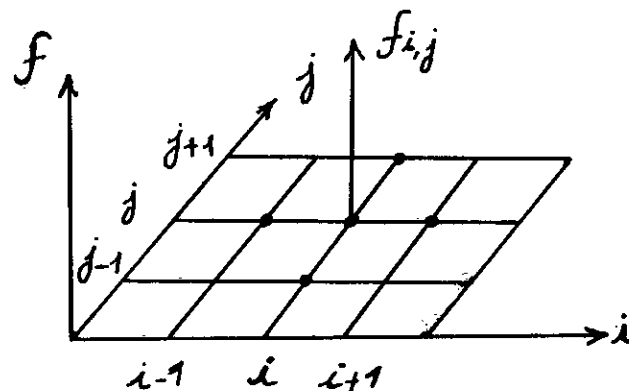


fig.IV.2 : Maillage bidimensionnel en espace .

**IV.2.1- Notion de consistance , convergence , stabilité : [7,13,25]****a- Stabilité :**

Etant donnée l'équation  $L(f) = 0$  ( $L$  opérateur différentiel) et les conditions initiales ou aux limites associées on notera :

$\bar{f}_i^n$  La solution analytique exacte

$F_i^n$  La solution exacte du schéma aux différences

$f_i^n$  La solution numérique trouvée .

La quantité  $S_i^n = |F_i^n - f_i^n|$  est l'erreur de stabilité du schéma aux différences .

Il s'agit d'une erreur locale au noeud  $(i, n)$  . La notion de stabilité que nous introduisons n'a de véritable sens que dans le cas d'un problème d'évolution . La stabilité du schéma traduit le fait que des erreurs locales à un instant donné s'affaiblissent ou augmentent quand  $t$  croît . L'erreur de stabilité résulte de l'accumulation des erreurs d'arrondi .

Nous admettons qu'un schéma aux différences finies est stable si la valeur maximum de  $|F_i^n - f_i^n|$  tend vers zéro avec les dimensions du maillage et ne croît pas exponentiellement .

D'une façon générale , l'amplitude  $S_i^n$  au noeud  $(i, n)$  est inaccessible par voie analytique . On se contente d'établir des majorations dans certains cas particuliers . Cependant , les résultats numériques sont toujours plus précis que ces majorations ne le laissent prévoir .

**b- Consistance d'un schéma aux différences finies :**

On dit qu'un schéma est consistant ( ou compatible ), si les équations aux différences sont construites à partir d'une expression équivalente à l'équation de départ au second ordre près .

Cela signifie que l'erreur de troncature, tend vers zéro, lorsque les dimensions du maillage tendent vers zéro.

Notant que la notion de consistance est indépendante de la notion de stabilité.

### **c- Convergence d'un schéma aux différences finies :**

Un schéma est dit convergent quand :

$$\left| \bar{f}_i^n - F_i^n \right| \rightarrow 0 \text{ quand les dimensions du maillage tendent vers zéro.}$$

L'intérêt des notions de stabilité et de consistance est lié au théorème de LAX qui établit que pour une large classe d'équations la consistance et la stabilité constituent une condition nécessaire et suffisante de convergence.

### **IV.2.2- Schéma explicite, schéma implicite :**

Un schéma est explicite, si chaque valeur approchée de la solution, au temps  $t + \Delta t$  et au point  $x$ , est décrite à partir des valeurs de la solution précédente au temps  $t$ . Cette valeur est donc explicitement fonction des valeurs connues, déjà calculées, et s'obtient directement pour chaque  $x$ .

Un schéma est implicite, si la valeur approchée, en un point au temps  $t + \Delta t$ , est écrite en fonction de la solution précédente au temps  $t$ , et les valeurs voisines au temps  $t + \Delta t$ . Il s'agit donc d'une liaison, entre toutes les valeurs au temps  $t + \Delta t$ , qui se résoud globalement.

### **IV.3- LES MODELES NUMERIQUES COURAMMENT UTILISES :**

[5,6,9,15,16,17,20,24].

Plusieurs modèles numériques où schémas aux différence finies ont été développés, parmi lesquels :

Schéma de Maccormack, schéma de Lambda et schéma de Gabutti, pour ne citer que ceux la.

Les trois schémas mentionnés ci-dessus, sont des schémas explicites de type predicteur-correcteur du second ordre, ils sont fort utilisés pour le calcul des écoulements à surface libre en présence de chocs.

La principale différence entre ces schémas réside dans la façon d'approximer (discrétiser) la dérivée partielle par chacun d'entre eux.

### 1- Schéma de Mac-cormack : [6,15]

Le système d'équations ( 3.7 ) établi au chapitre III peut se mettre sous la forme quasi-linéaire suivante :

$$U_t + E_x + F_y + S = 0 \quad (4.5)$$

où

$$U = (h, uh, vh)^t$$

$$E = \begin{bmatrix} uh \\ u^2 h + 1/2 gh^2 \cos \alpha_x \\ uvh \end{bmatrix} ; \quad F = \begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2 h + 1/2 gh^2 \cos \alpha_x \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh(sox - sfx) \\ -gh(soy - sfy) \end{bmatrix}$$

L'approximation par le schéma de Mac-cormack est réalisée comme suit :

• Etape de prédiction :

$$\tilde{U}_{i,j} = U_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \nabla_x E_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta y} \nabla_y F_{i,j}^k - \Delta t S_{i,j}^k \quad \begin{cases} 2 \leq i \leq N \\ 2 \leq j \leq M \end{cases}$$

• Etape de correction :

$$\hat{U}_{i,j} = \tilde{U}_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_x \tilde{E}_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta y} \Delta_y \tilde{F}_{i,j} - \Delta t \tilde{S}_{i,j} \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq N-1 \\ 1 \leq j \leq M-1 \end{cases}$$

La valeur de U au niveau de temps supérieur K+1 est :

$$U_{i,j}^{k+1} = 1/2 \left( U_{i,j}^k + \hat{U}_{i,j} \right)$$

où

$\nabla$  désigne une différence arrière

$\Delta$  désigne une différence avant

## 2- Schéma de Lambda : [9,16]

Reprenons le système d'équations ( 3.16 )

$$V_t + G^+ V_{\xi}^+ + G^- V_{\xi}^- + \frac{1}{b} \left( H^+ V_{\eta}^+ + H^- V_{\eta}^- \right) - \eta \frac{b'}{b} \left( G^+ V_{\eta}^+ + G^- V_{\eta}^- \right) + T = 0$$

• Etape de prédiction :

$$\tilde{V}_{\xi}^+ = \frac{2V_{i,j}^k - 3V_{i-1,j}^k + V_{i-2,j}^k}{\Delta \xi}$$

$$\tilde{V}_{\xi}^- = \frac{V_{i+1,j}^k - V_{i,j}^k}{\Delta \xi}$$

• Etape de correction :

$$\hat{V}_{\xi}^+ = \frac{\tilde{V}_{i,j} - \tilde{V}_{i-1,j}}{\Delta \xi}$$

$$\hat{V}_{\xi}^- = \frac{-2\tilde{V}_{i,j} + 3\tilde{V}_{i+1,j} - \tilde{V}_{i+2,j}}{\Delta \xi}$$

La discretisation suivant la direction  $\eta$  se détermine d'une manière similaire .

La nouvelle valeur de V au niveau de temps K+1 se calcul par :

$$V_{i,j}^{k+1} = 1/2 \left( V_{i,j}^k + \hat{V}_{i,j} \right)$$



Remarque :

Le schéma de Lambda a été introduit par Moretti (1979) puis développé et amélioré par Gabutti (1983), ce qui l'a conduit à un nouveau schéma qui porte son nom, c'est d'ailleurs le schéma de Gabutti qui sera utilisé pour la résolution numérique du modèle mathématique qui gouverne le phénomène physique étudié.

**IV.4- APPLICATION DU SCHEMA DE GABUTTI****AU MODELE MATHEMATIQUE :**

Les écoulements à surface libre à forte pente sont en régime torrentiel ou supercritique ceci se traduit dans les termes du modèle mathématique comme suit :

On a donc le système d'équation régissant notre problème :

$$V_t + G^+ V_{\xi}^+ + G^- V_{\xi}^- + \frac{1}{b} (H^+ V_{\eta}^+ + H^- V_{\eta}^-) - \eta \frac{b'}{b} (G^+ V_{\eta}^+ + G^- V_{\eta}^-) + T = 0$$

$$G^+ = G = \begin{bmatrix} 1/2(\lambda_2 + \lambda_3) & h/2c(\lambda_2 - \lambda_3) & 0 \\ c/2h(\lambda_2 - \lambda_3) & 1/2(\lambda_2 + \lambda_3) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) > 0 \text{ par conséquent } G^- = [0]$$

$$H^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\omega_2 & 0 & \frac{h}{2c}\omega_2 \\ 0 & \omega_1 & 0 \\ \frac{c}{2h}\omega_2 & 0 & \frac{1}{2}\omega_2 \end{bmatrix} ; \quad H^- = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\omega_3 & 0 & \frac{-h}{2c}\omega_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-c}{2h}\omega_3 & 0 & \frac{1}{2}\omega_3 \end{bmatrix}$$

$$(\omega_1, \omega_2) > 0 \text{ et } \omega_3 < 0$$

#### IV.4.1- Discrétisation des équations :

• Etape de prédiction :

Partie A :

$$\begin{bmatrix} \tilde{h}_{i,j} \\ \tilde{u}_{i,j} \\ \tilde{v}_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{i,j}^k \\ u_{i,j}^k \\ v_{i,j}^k \end{bmatrix} - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} [G]_{i,j}^k \begin{bmatrix} (h_{i,j} - h_{i-1,j})^k \\ (u_{i,j} - u_{i-1,j})^k \\ (v_{i,j} - v_{i-1,j})^k \end{bmatrix} + \eta(j) \frac{b'(i)}{b(i)} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta \eta} [G]_{i,j}^k \begin{bmatrix} (h_{i,j} - h_{i,j-1})^k \\ (u_{i,j} - u_{i,j-1})^k \\ (v_{i,j} - v_{i,j-1})^k \end{bmatrix} \\ - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \cdot \frac{1}{b(i)} \left( [H^+]_{i,j}^k \begin{bmatrix} (h_{i,j} - h_{i,j-1})^k \\ (u_{i,j} - u_{i,j-1})^k \\ (v_{i,j} - v_{i,j-1})^k \end{bmatrix} + [H^-]_{i,j}^k \begin{bmatrix} (h_{i,j+1} - h_{i,j})^k \\ (u_{i,j+1} - u_{i,j})^k \\ (v_{i,j+1} - v_{i,j})^k \end{bmatrix} \right) - \Delta t [T]_{i,j}^k$$

Partie B :

$$\begin{bmatrix} \hat{h}_{i,j} \\ \hat{u}_{i,j} \\ \hat{v}_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{i,j}^k \\ u_{i,j}^k \\ v_{i,j}^k \end{bmatrix} - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} [G]_{i,j}^k \begin{bmatrix} (2h_{i,j} - 3h_{i-1,j} + h_{i-2,j})^k \\ (2u_{i,j} - 3u_{i-1,j} + u_{i-2,j})^k \\ (2v_{i,j} - 3v_{i-1,j} + v_{i-2,j})^k \end{bmatrix} + \eta(j) \frac{b'(i)}{b(i)} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta \eta} [G]_{i,j}^k \begin{bmatrix} (2h_{i,j} - 3h_{i,j-1} + h_{i,j-2})^k \\ (2u_{i,j} - 3u_{i,j-1} + u_{i,j-2})^k \\ (2v_{i,j} - 3v_{i,j-1} + v_{i,j-2})^k \end{bmatrix} \\ - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \cdot \frac{1}{b(i)} \left( [H^+]_{i,j}^k \begin{bmatrix} (2h_{i,j} - 3h_{i,j-1} + h_{i,j-2})^k \\ (2u_{i,j} - 3u_{i,j-1} + u_{i,j-2})^k \\ (2v_{i,j} - 3v_{i,j-1} + v_{i,j-2})^k \end{bmatrix} + [H^-]_{i,j}^k \begin{bmatrix} (-2h_{i,j} + 3h_{i,j+1} - h_{i,j+2})^k \\ (-2u_{i,j} + 3u_{i,j+1} - u_{i,j+2})^k \\ (-2v_{i,j} - 3v_{i,j+1} - v_{i,j+2})^k \end{bmatrix} \right) - \Delta t [T]_{i,j}^k$$

• Etape de correction :

$$\begin{bmatrix} \bar{h}_{i,j} \\ \bar{u}_{i,j} \\ \bar{v}_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{h}_{i,j} \\ \tilde{u}_{i,j} \\ \tilde{v}_{i,j} \end{bmatrix} - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} [\tilde{G}]_{i,j} \begin{bmatrix} \tilde{h}_{i,j} - \tilde{h}_{i-1,j} \\ \tilde{u}_{i,j} - \tilde{u}_{i-1,j} \\ \tilde{v}_{i,j} - \tilde{v}_{i-1,j} \end{bmatrix} + \eta(j) \frac{b'(i)}{b(i)} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta \eta} [\tilde{G}]_{i,j} \begin{bmatrix} \tilde{h}_{i,j} - \tilde{h}_{i,j-1} \\ \tilde{u}_{i,j} - \tilde{u}_{i,j-1} \\ \tilde{v}_{i,j} - \tilde{v}_{i,j-1} \end{bmatrix} \\ - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \cdot \frac{1}{b(i)} \left( \begin{bmatrix} \tilde{H}^+ \end{bmatrix}_{i,j} \begin{bmatrix} \tilde{h}_{i,j} - \tilde{h}_{i,j-1} \\ \tilde{u}_{i,j} - \tilde{u}_{i,j-1} \\ \tilde{v}_{i,j} - \tilde{v}_{i,j-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{H}^- \end{bmatrix}_{i,j} \begin{bmatrix} \tilde{h}_{i,j+1} - \tilde{h}_{i,j} \\ \tilde{u}_{i,j+1} - \tilde{u}_{i,j} \\ \tilde{v}_{i,j+1} - \tilde{v}_{i,j} \end{bmatrix} \right) - \Delta t [\tilde{T}]_{i,j}$$

La solution au pas de temps K+1 se détermine comme suit :

$$\begin{bmatrix} h_{i,j}^{k+1} \\ u_{i,j}^{k+1} \\ v_{i,j}^{k+1} \end{bmatrix} = 1/2 \begin{bmatrix} h_{i,j}^k + \hat{h}_{i,j} + \bar{h}_{i,j} - \tilde{h}_{i,j} \\ u_{i,j}^k + \hat{u}_{i,j} + \bar{u}_{i,j} - \tilde{u}_{i,j} \\ v_{i,j}^k + \hat{v}_{i,j} + \bar{v}_{i,j} - \tilde{v}_{i,j} \end{bmatrix}$$

**IV.4.2- Conditions sur la paroi solide :** [15]

Pour la détermination des variables de l'écoulement  $h, u, v$  au niveau de la paroi solide, on doit adapter les équations à cette condition limite et ceci est réalisé comme suit :

- on multiplie chaque terme du système d'équation par  $M^{-1}$  c'est-à-dire :

$$M^{-1}V_t + D_G M^{-1}V_\xi + \frac{1}{b} M^{-1}ND_H N^{-1}V_\eta - \eta \frac{b'}{b} D_G M^{-1}V_\eta + M^{-1}T = 0$$

- on pose  $u = 0$  ou  $u_t = 0$  ( au niveau de la paroi solide )

- on obtient après simplifications les équations adaptées à la frontière solide .

$$\begin{aligned} \bullet \quad h_t + \lambda_3 \left( h_\xi - \frac{h}{c} u_\xi \right) - \eta \frac{b'}{b} \lambda_3 \left( h_\eta - \frac{h}{c} u_\eta \right) + \frac{1}{2b} (\omega_2 + \omega_3) h_\eta \\ - \frac{h}{cb} \omega_1 u_\eta + \frac{h}{2cb} (\omega_2 - \omega_3) v_\eta + \frac{gh}{c} (sox - sfx) = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\bullet \quad u_t = 0 \quad (4.7)$$

$$\bullet \quad v_t + \frac{c}{2hb} (\omega_2 - \omega_3) h_\eta + \frac{1}{2b} (\omega_2 + \omega_3) v_\eta - g(soy - sfy) = 0 \quad (4.8)$$

La discretisation des équations ci-dessus doit se faire suivant la même manière utilisée dans IV.4.1 .

**IV.4.3- Stabilité du schéma :** [6]

Le schéma de Gabutti n'est stable que si la condition de Courant - Friedrichs - Lewy ( C.F.L ) est satisfaite .

Cette condition s'exprime pour les écoulements bidimensionnels , par l'expression suivante :

$$C_n = \frac{(V + \sqrt{gh}) \Delta t}{b(\xi) \Delta \xi \Delta \eta} \left( \Delta \xi^2 + (b(\xi) \Delta \eta)^2 \right)^{1/2} \leq 2 \quad (4.9)$$

où :

$V$  : est la vitesse résultante au point du maillage .

Cette condition doit être satisfaite en tout les points du maillage , a partir de l'expression ( 4.9 ) on tire l'incrément de temps :

$$\Delta t = \frac{C_n \cdot b_{\min} \cdot \Delta \xi \cdot \Delta \eta}{\max(V + \sqrt{gh}) \left( \Delta \xi^2 + (b_{\min} \Delta \eta)^2 \right)^{1/2}} \quad (4.10)$$

A chaque itération la formule ( 4.10 ) fixe le pas de temps  $\Delta t$  , en supposons que les pas d'espace  $\Delta \xi$  ,  $\Delta \eta$  sont constants .

#### **IV.4.4- Traitement numérique des ondes de chocs ,**

##### **Notion de viscosité artificielle : [6,9,15,22]**

Un écoulement à surface libre s'effectuant en présence de singularités géométriques est accompagné d'ondes de chocs , c'est-à-dire une surface de discontinuité séparant deux domaines où la solution est régulière . La présence de ces dernières est une cause supplémentaire de difficultés car la position de ces lignes de discontinuité n'est généralement pas connue a priori et fait partie des inconnues du problème .

En conséquence direct plusieurs schémas aux différences finies du second ordre produisent des oscillations numériques au voisinage des discontinuités . Pour le traitement des ondes de chocs , il est nécessaire d'introduire dans les équations un terme supplémentaire dit de viscosité artificielle , qui a la propriété d'être négligeable par tout où la solution est régulière mais de permettre un lissage de singularités la ou elles apparaissent

Pour amortir les oscillations numérique une procédure développée par Jameson et Al (1981) , est utilisée dans ce modèle .

- Un terme de dissipation est ajouté au système d'équations régissant le problème :

$$V_t + P_\xi + \frac{1}{b} R_\eta - \eta \frac{b'}{b} P_\eta + T + DV = 0 \quad (4.11)$$

où :

D : est l'opérateur de dissipation défini le long des axes par :

$$DV = D_{\xi} V + D_{\eta} V$$

On utilisant une différence finie de second ordre l'opérateur dans la direction  $\xi$  devient :

$$D_{\xi} V = \left[ \Gamma_{\xi_{i+1/2,j}} (V_{i+1,j} - V_{i,j}) - \Gamma_{\xi_{i-1/2,j}} (V_{i,j} - V_{i-1,j}) \right]$$

Les valeurs des variables calculés sont modifiées en utilisant l'algorithme suivant :

$$V_{i,j}^{k+1} = V_{i,j}^k + D_{\xi} V_{i,j}^{k+1} + D_{\eta} V_{i,j}^{k+1}$$

où :

$$\Gamma_{\xi_{i-1/2,j}} = \chi \max \left( \Omega_{\xi_{i-1,j}}, \Omega_{\xi_{i,j}} \right)$$

avec :

$\chi$  est une constante utilisée pour regulariser la quantité de dissipation .

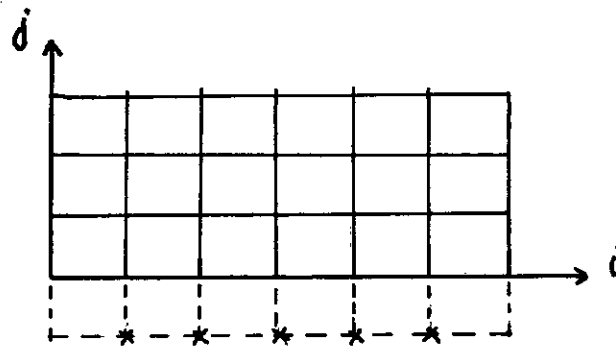
Les valeurs de  $\Omega_{\xi_{i,j}}$  et  $\Omega_{\eta_{i,j}}$  en utilisant par exemple la variable h sont données

par :

$$\Omega_{\xi_{i,j}} = \frac{|h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}|}{|h_{i+1,j}| + |2h_{i,j}| + |h_{i-1,j}|}$$

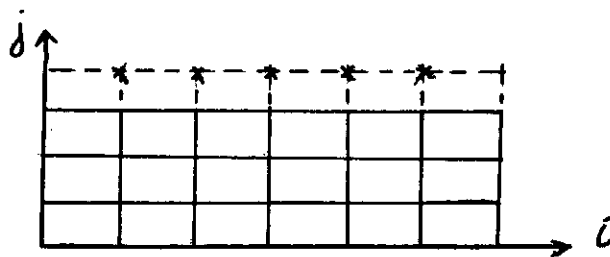
$$\Omega_{\eta_{i,j}} = \frac{|h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}|}{|h_{i,j+1}| + |2h_{i,j}| + |h_{i,j-1}|}$$

aux points où  $h_{i,j-1}$  n'existe pas ( fig.ci-après ) :



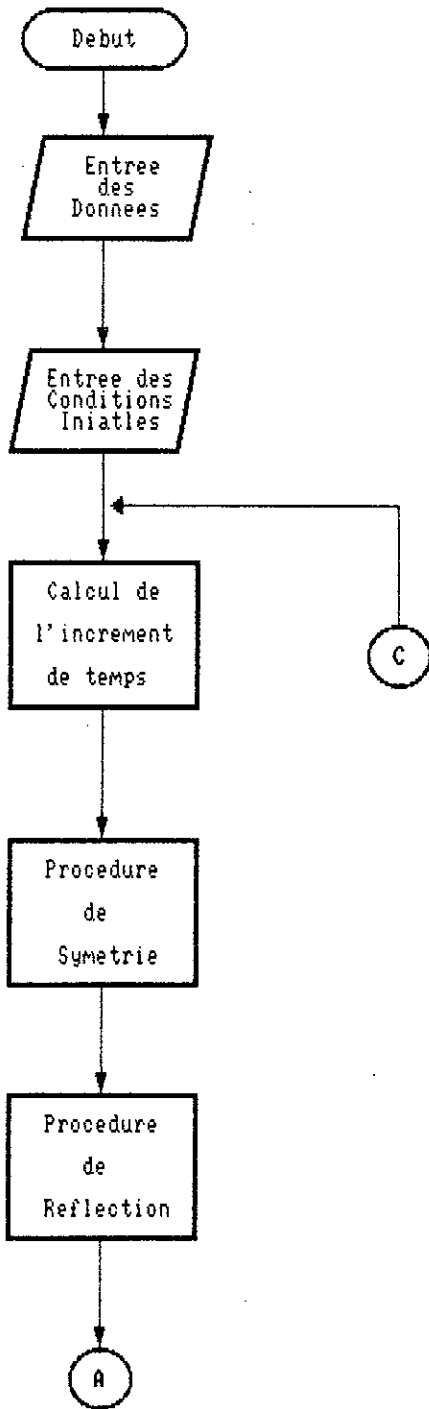
$$\Omega_{\eta_{i,j}} = \frac{|h_{i,j+1} - h_{i,j}|}{|h_{i,j+1}| + |h_{i,j}|}$$

aux points où  $h_{i,j+1}$  n'existe pas ( fig. ci-après ) :

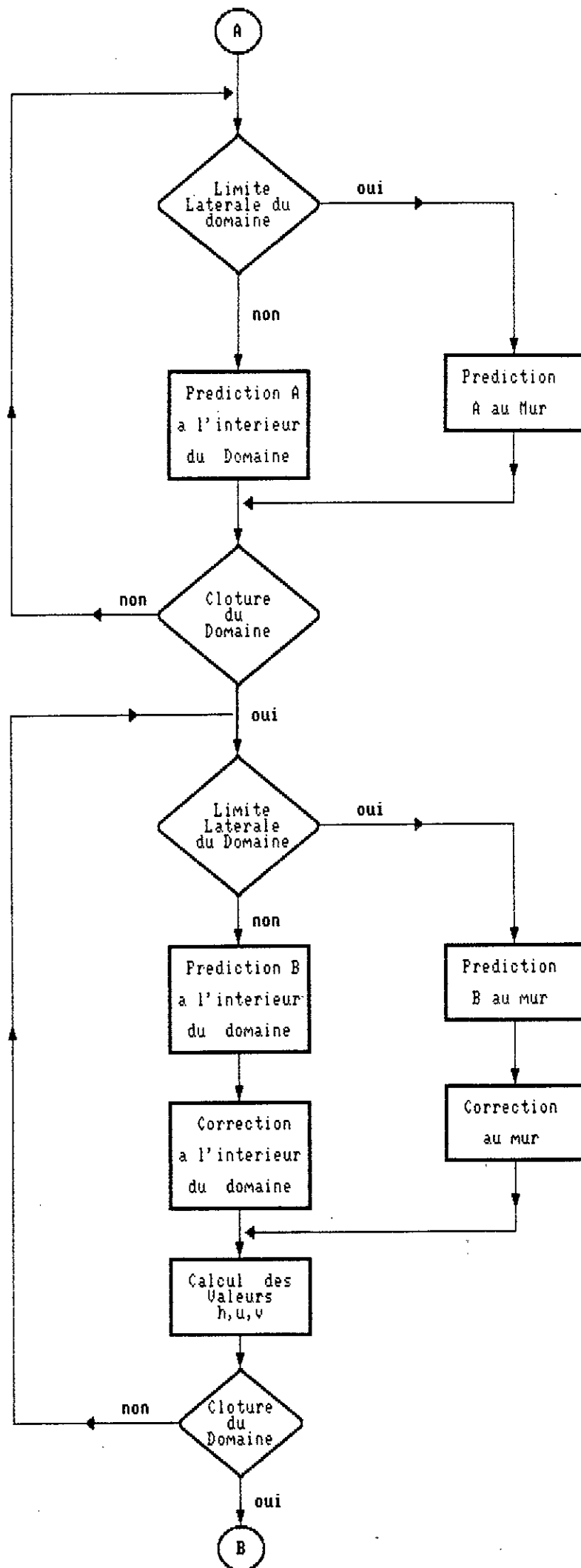


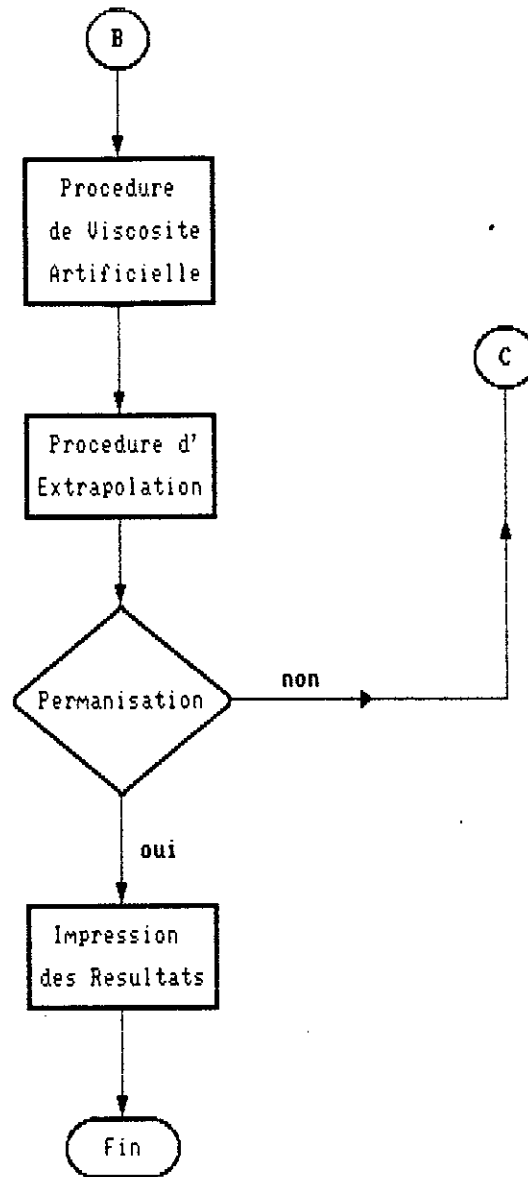
$$\Omega_{\xi_{i,j}} = \frac{|h_{i,j-1} - h_{i,j}|}{|h_{i,j-1}| + |h_{i,j}|}$$

**ORGANIGRAMME GENERAL**









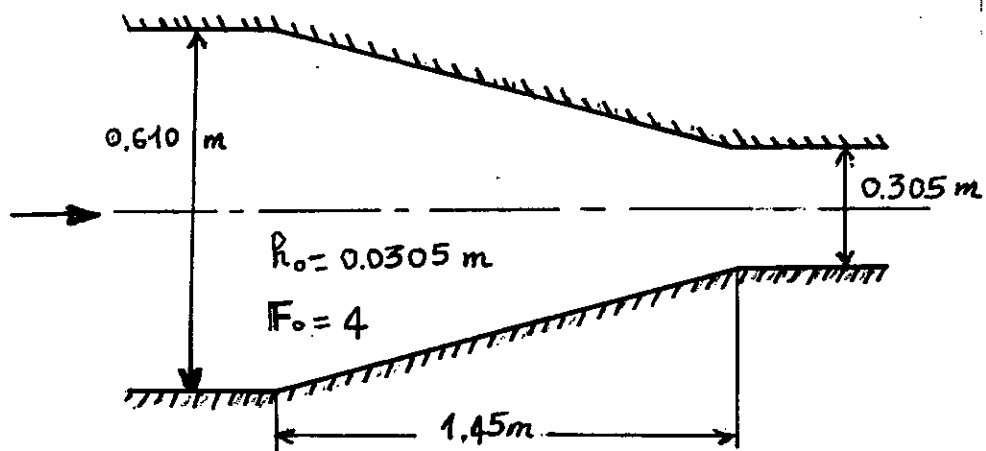
**CHAPITRE V**

***APPLICATIONS ET ANALYSE  
DES RESULTATS***

**V.A- 1<sup>ERE</sup> APPLICATION : ANALYSE DE L'ÉCOULEMENT  
SUPERCRITIQUE DANS UN RÉTRÉCISSEMENT RECTILIGNE  
SYMÉTRIQUE :**

**1- Présentation de l'application :**

Dans cette application on va étudier un écoulement en régime supercritique traversant un rétrécissement rectiligne symétrique à section transversale rectangulaire qui est schématisé par la figure.V.1.



figV.1 : Rétrécissement rectiligne symétrique .

Les conditions aux limites de l'écoulement sont les suivantes :

- Le tirant d'eau à l'amont est  $h_0 = 0,0305$  m .
- Le nombre de Froude à l'amont est  $F_0 = 4$  .
- La vitesse transversale à l'amont est  $V_0 = 0$  m/s .
- Les pentes de fond et de frottement sont supposées nulles .

Nous utilisons un maillage assez raffiné en prenant les pas d'espace suivants :

$$\Delta\xi = 0,0483 \text{ m}$$

$$\Delta\eta = 0,0476 .$$

Pour les problèmes de stabilité et d'oscillation , on prend le coefficient de dissipation  $\chi = 0,8$  et le nombre de courant  $C_n = 0,8$  .

Pour le déroulement des calculs , la profondeur  $h_0 = 0,0305$  m , la vitesse transversale  $v_0 = 0$  m/s , et le nombre de Froude  $F_0 = 4$  , sont considérés comme conditions initiales .

## 2- Résultats et analyses :

Comme premier constat on peut dire que les résultats de notre modèle suivent approximativement l'allure de la ligne d'eau expérimentale [6] et présentent un ordre de grandeur comparable à ce qui est donné par l'expérience .

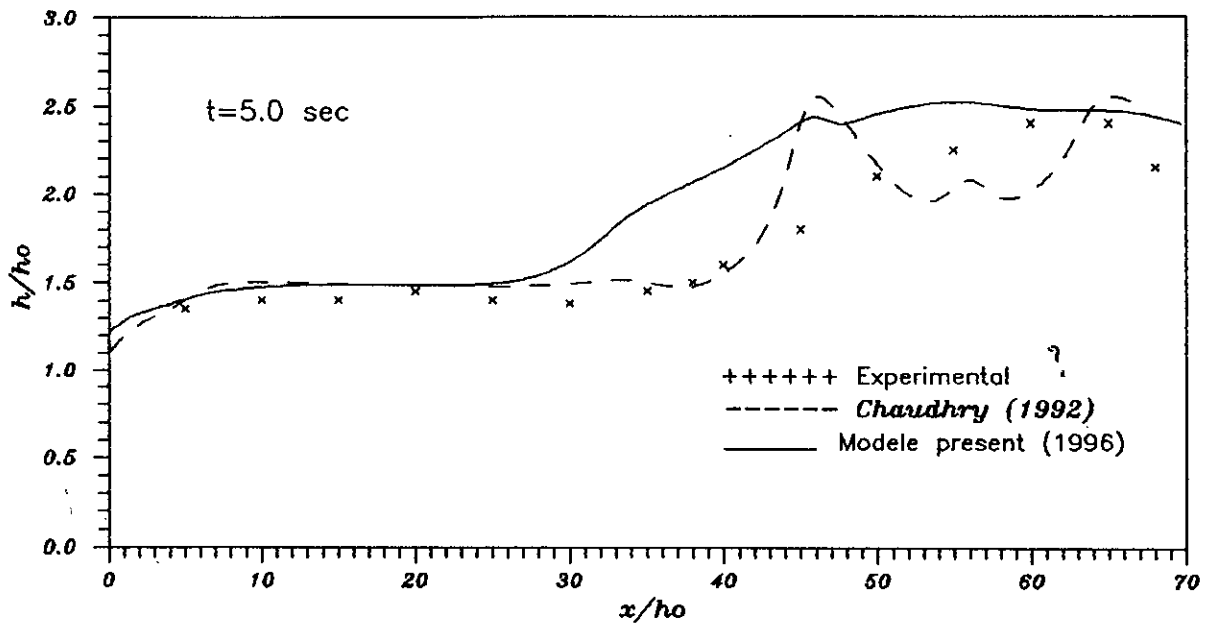
La figure ( V.A.1 ) montre que la ligne d'eau le long de la paroi obtenue par notre modèle suit globalement de très proche celle obtenue expérimentalement contrairement au modèle numérique de Chaudhry [6] dans lequel on observe des perturbations qui n'ont pas lieu d'être .

Pour la ligne d'eau le long de l'axe médian figure ( V.A.2 ) notre modèle prévoit quoiqu'avec un léger décalage le pic expérimental , ce qui n'est pas le cas dans le modèle de Chaudhry qui lui par contre présente un assez long palier à la place du pic, mais par la suite notre modèle interprète mal la réalité .

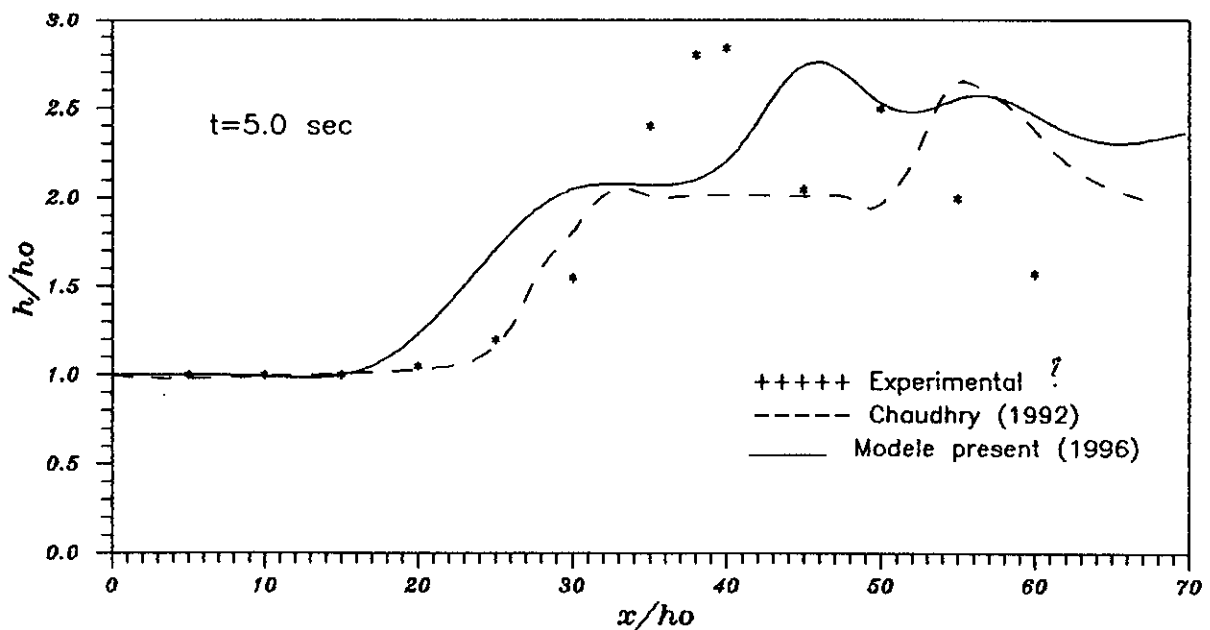
La différence entre les résultats qu'on a obtenus par simulation numérique et ceux obtenus expérimentalement en particulier au niveau de l'axe médian s'explique par le fait que l'hypothèse d'une répartition hydrostatique des pressions n'est pas valable dans la zone de choc , et bien d'autres phénomènes qui ne sont pas pris rigoureusement en compte ( hypothèses ) . D'autre part les bons résultats obtenus au niveau de la paroi s'expliquent par la prise en compte et mise en évidence de la couche limite par notre modèle figures ( V.A.10 , 11 , 12 ) .

Notant que notre modèle atteint l'état permanent à  $t = 5$ s ( voir figures V.A.3 , 4 ) contre 3s dans le modèle de Chaudhry .

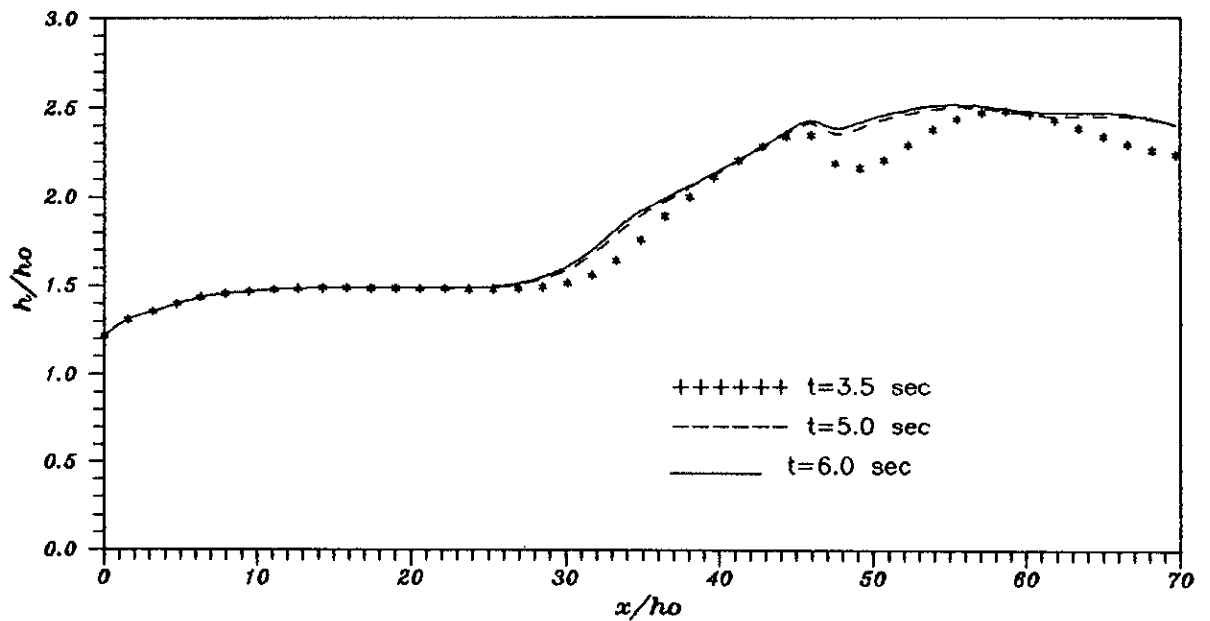
Les figures V.A.5 , 6 , 7 , 8 montrent l'étude faite sur l'effet de la viscosité artificielle sur les résultats numériques . Cette étude nous permet de conclure que notre schéma présente des oscillations importantes d'où la nécessité du lissage numérique effectué et que la valeur de la constante de dissipation  $\chi = 0,8$  est une valeur optimale .



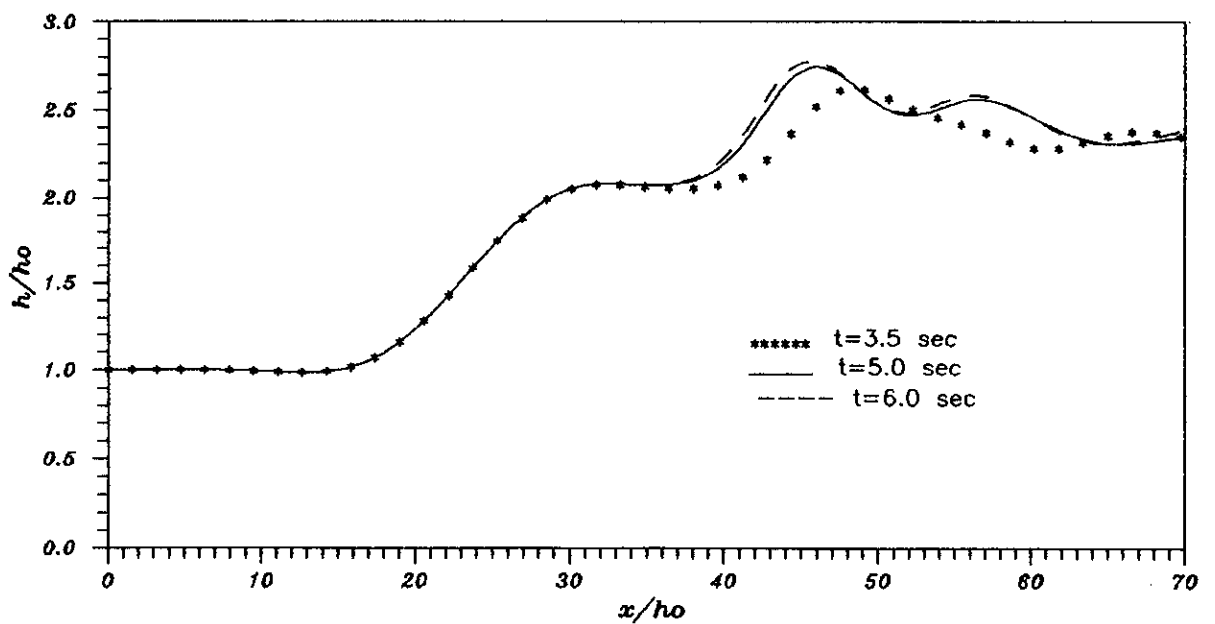
Fig(V.A.1): Ligne d'Eau le Long de la Paroi dans le Retrecissement.



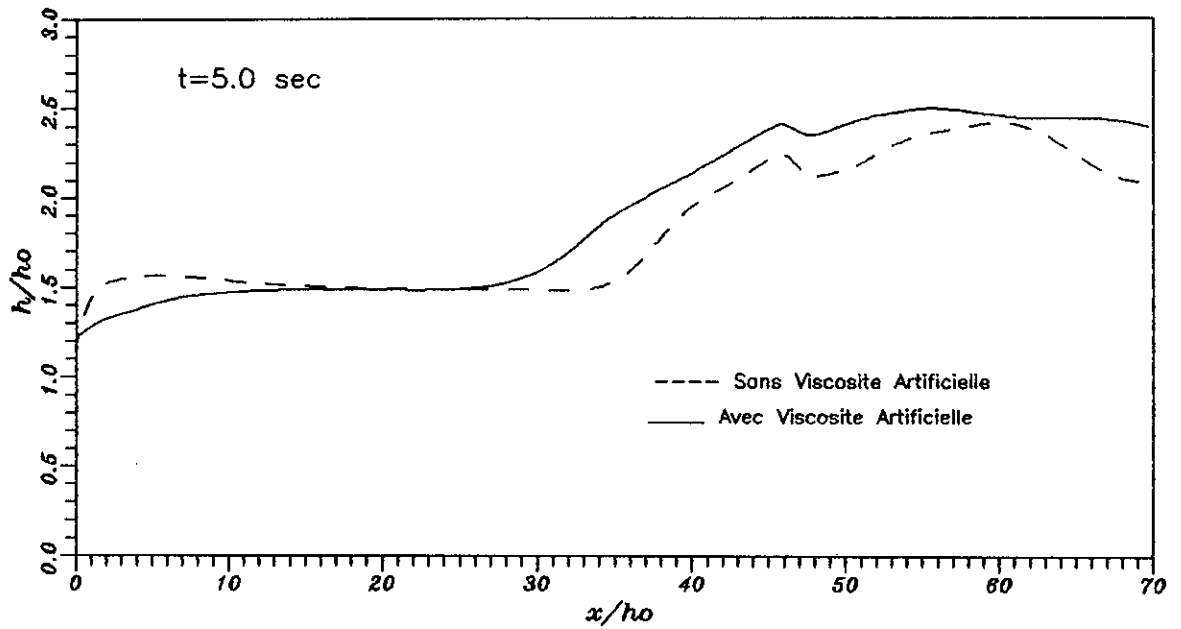
Fig(V.A.2): Ligne d'Eau le Long de l'Axe de L'Ecoulement dans le Retrecissement.



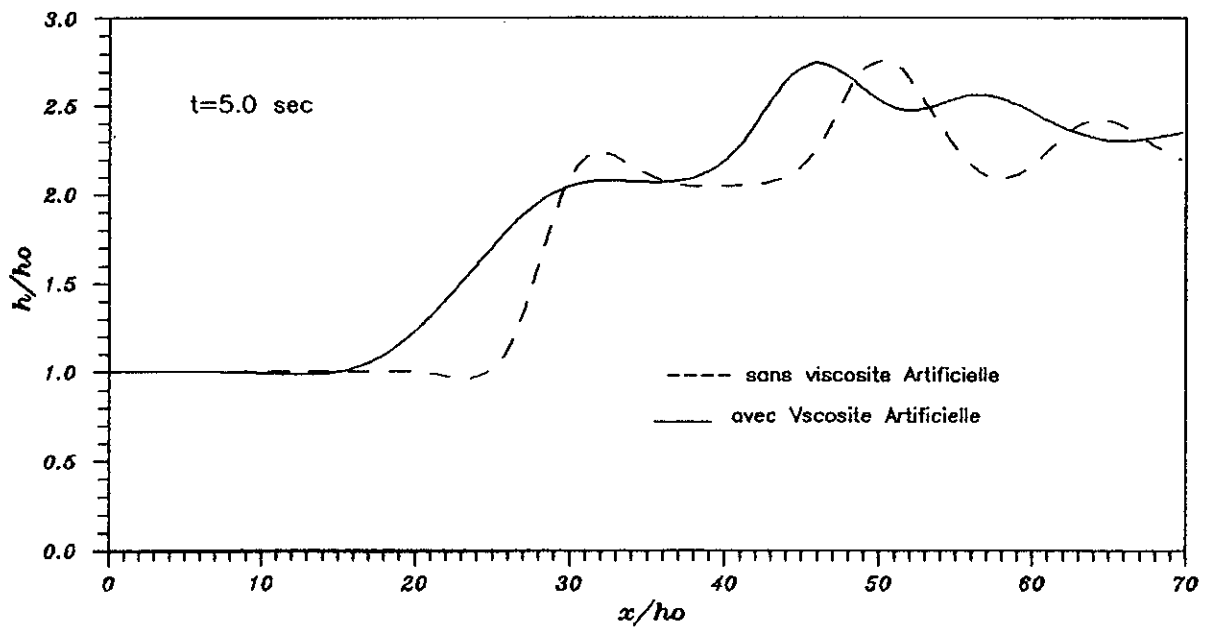
*Fig(V.A.3): permanisation de l'Écoulement le Long de la paroi dans le Retrecissement.*



*Fig(V.A.4): Permanisation de l'Écoulement le Long de L'axe dans le Retrecissement.*

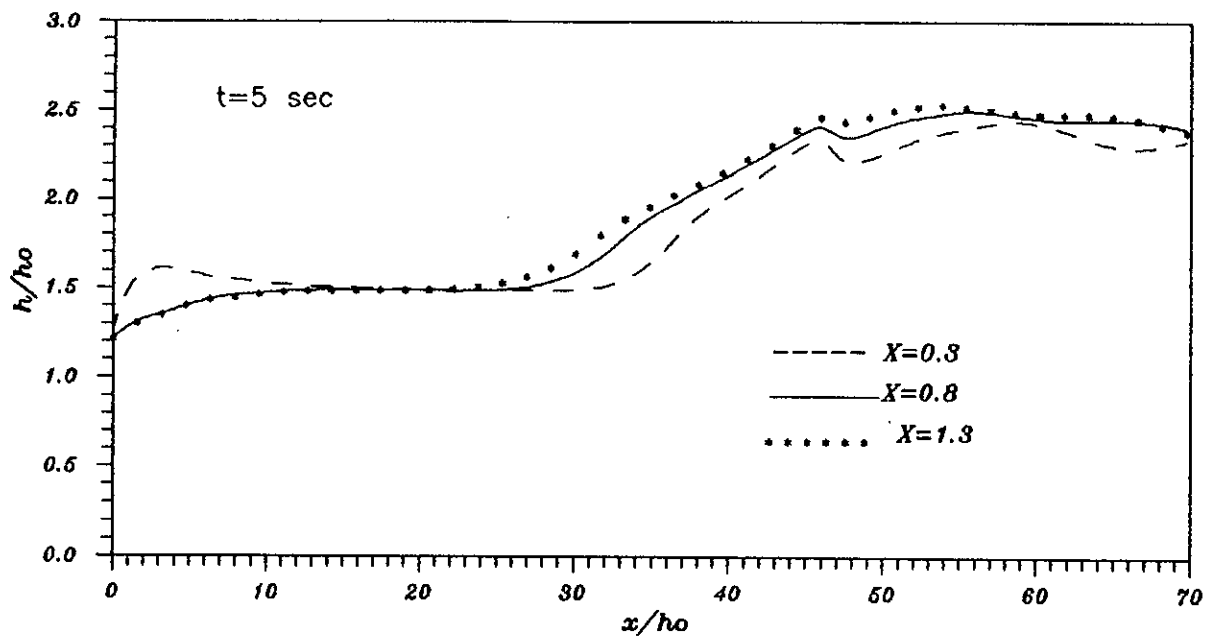


*Fig(V.A.5): Comparaison des Resultats sans et avec Viscosité Artificielle pour H le Long de la Paroi.*

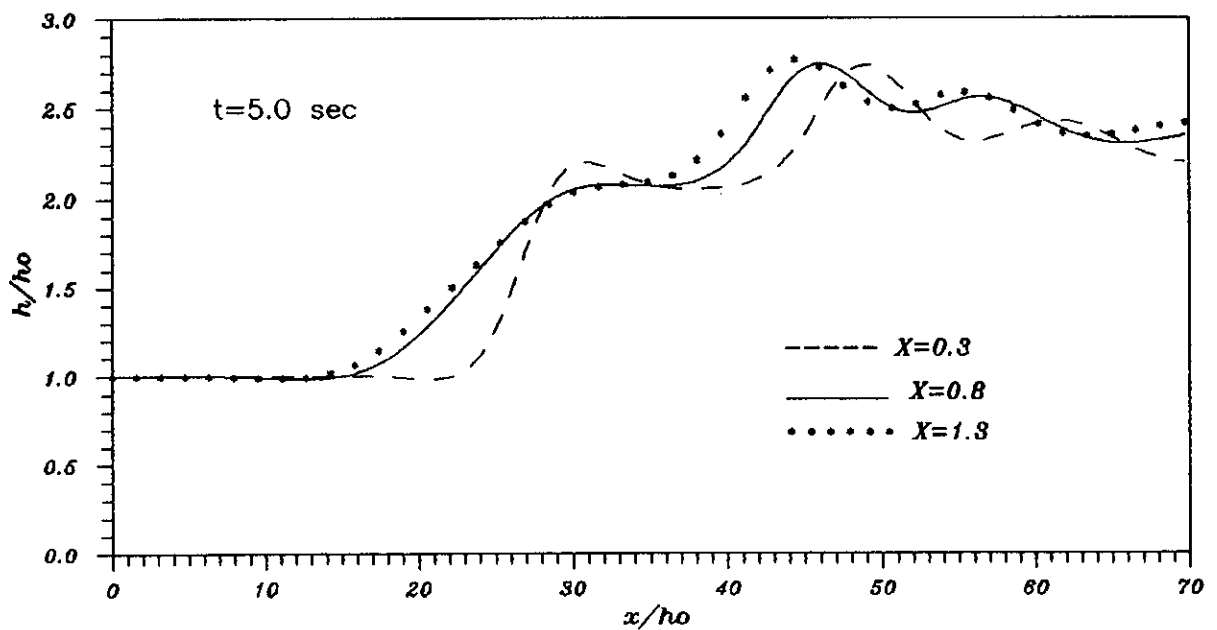


*Fig(V.A.6): Comparaison des Resultats avec et sans Viscosité Artificielle de H le Long de l'axe.*

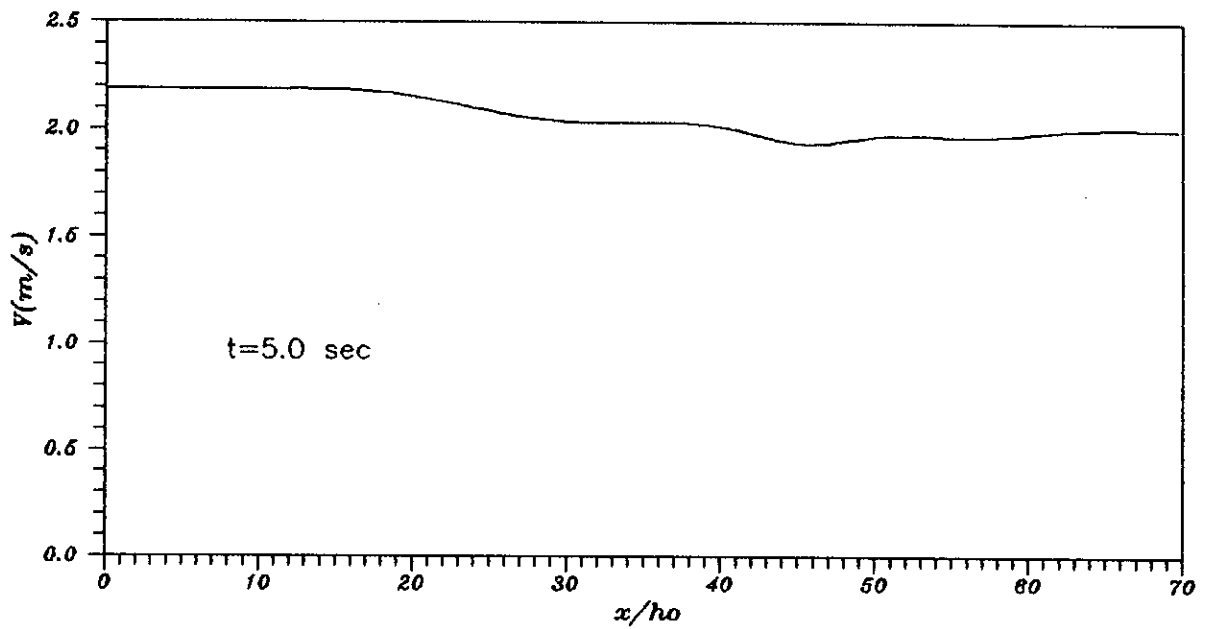




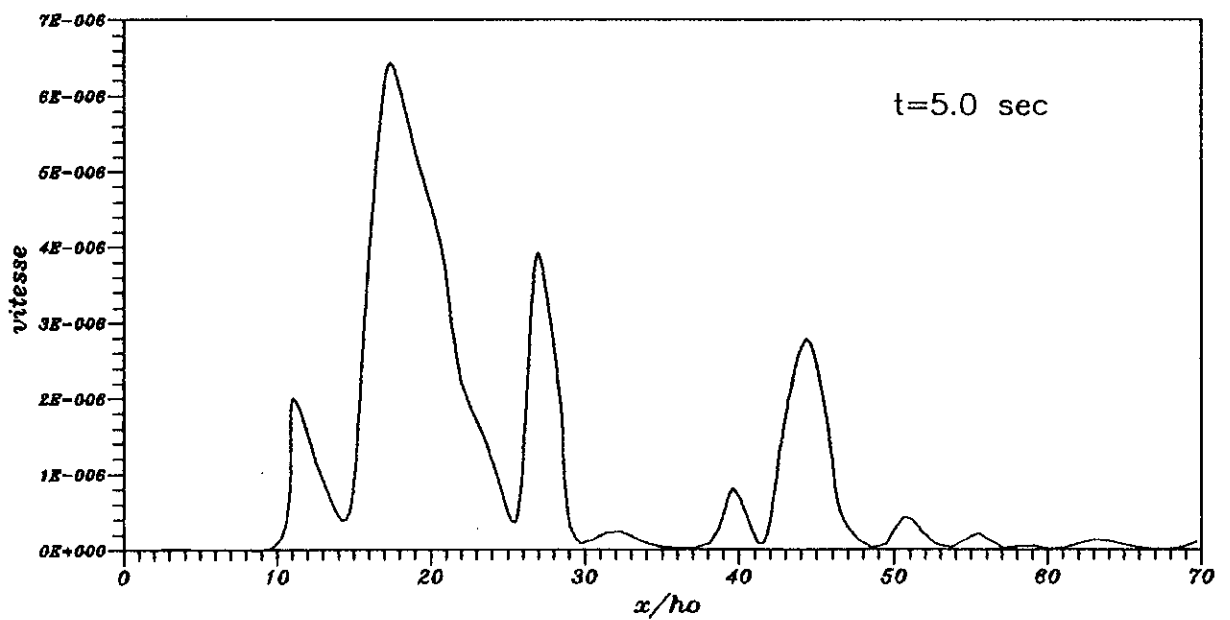
Fig(V.A.7): Effet de la Viscosite Artificielle le Long de la Paroi.



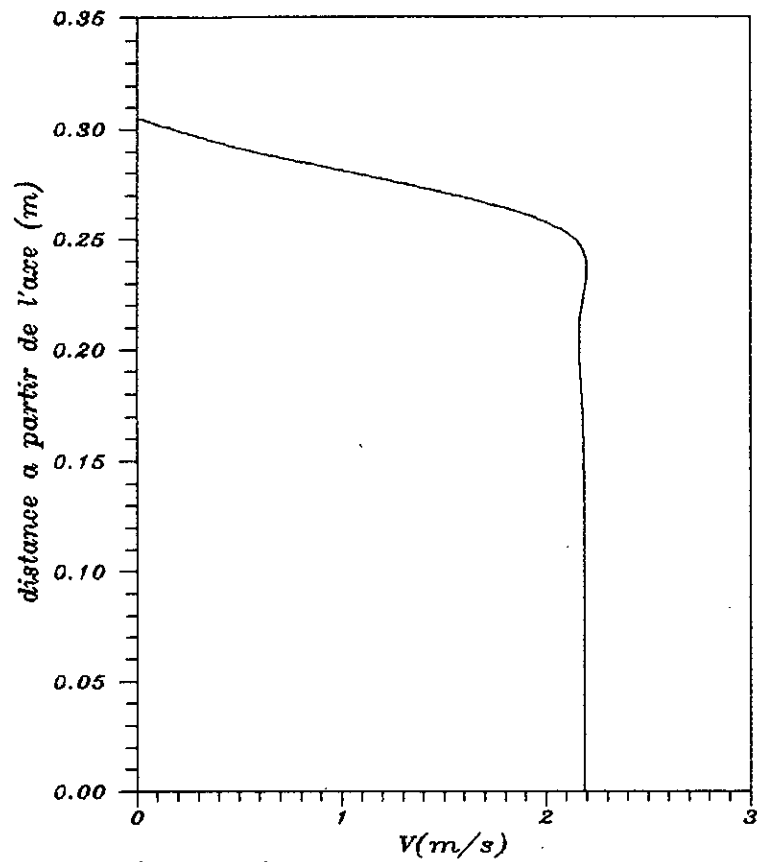
Fig(V.A.8): Effet de la Viscosite Artificielle le Long de l'axe d'écoulement.



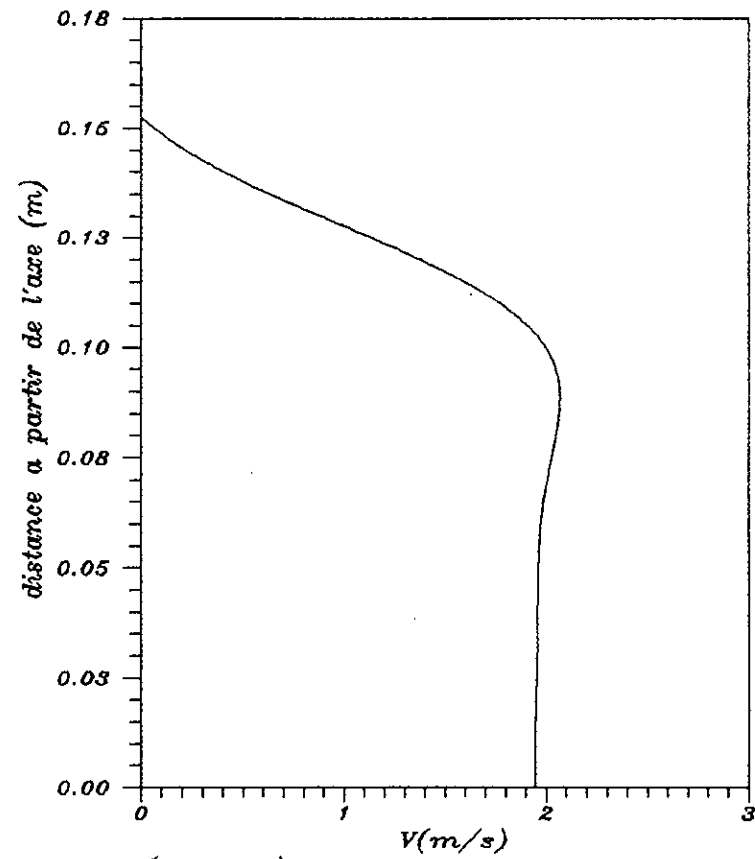
*Fig(V.A.9): Profil de Vitesse le Long de l'Axe.*



*Fig(V.A.10): Profil de Vitesse le Long de la paroi.*



Fig(V.A.11): Profil de la Vitesse a l'Entree du Retrecissement.



Fig(V.A.12): Profil de la Vitesse a la Sortie du Retrecissement.

**V.B- 2<sup>ND</sup> APPLICATION : ANALYSE D'UN ECOULEMENT SUPERCRITIQUE DANS UN ELARGISSEMENT PROGRESSIF SYMETRIQUE :**

**1- Présentation de l'application : [6]**

Dans cette 2<sup>nd</sup> application , nous analysons un écoulement supercritique dans un élargissement progressif symétrique à section transversale rectangulaire illustré par la figure V.2.

La forme de l'élargissement est formulée par l'équation suivante :

$$b(x) = \frac{b_0}{2} \left( \frac{x}{b_0 F_0} \right)^{1.5} + \frac{b_0}{2}$$

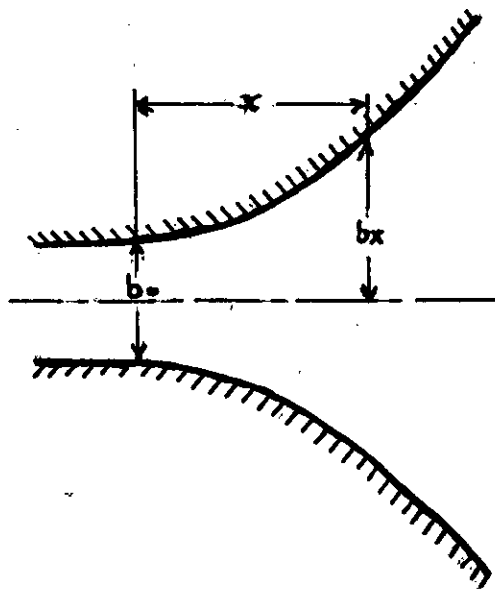


fig.V.2 : Elargissement progressif.

Les conditions aux limites de l'écoulement dans ce canal sont :

- Le tirant d'eau à l'amont est  $h_0 = 0,0305$  m .
- Le nombre de Froude à l'amont est  $F_0 = 2$  .
- La vitesse transversale à l'amont est  $v_0 = 0$  m/s .
- Le coefficient de Manning  $n = 0,012$  .
- La pente de fond est supposée nulle .
- Le rapport profondeur-largeur est  $h_0/b_0 = 0,25$  .

Nous utilisons un maillage dont les pas d'espace sont les suivants :

$$\Delta\xi = 0,0305 \text{ m}$$

$$\Delta\eta = 0,0476 \text{ .}$$

A cause des problèmes de stabilité et d'oscillation nous avons adopté les coefficients suivants :

- Le coefficient de dissipation  $\chi = 0,3$
- Le nombre de courant est  $C_n = 0,9$

Les conditions initiales utilisées pour le déroulement des calculs sont :

- La profondeur  $h_0 = 0,0305$  m
- La vitesse longitudinale  $U_0 = 1,094$  m/s
- La vitesse transversale  $v_0 = 0$  m/s .

## **2- Résultats et analyses :**

D'après les résultats obtenus dans cette application on remarque que :

- Les profils en long de la surface libre , le long de l'axe médian et de la paroi représentés dans les figures ( V.B.1 ) et ( V.B.2 ) respectivement , montrent que la ligne d'eau décroît progressivement le long de l'écoulement .

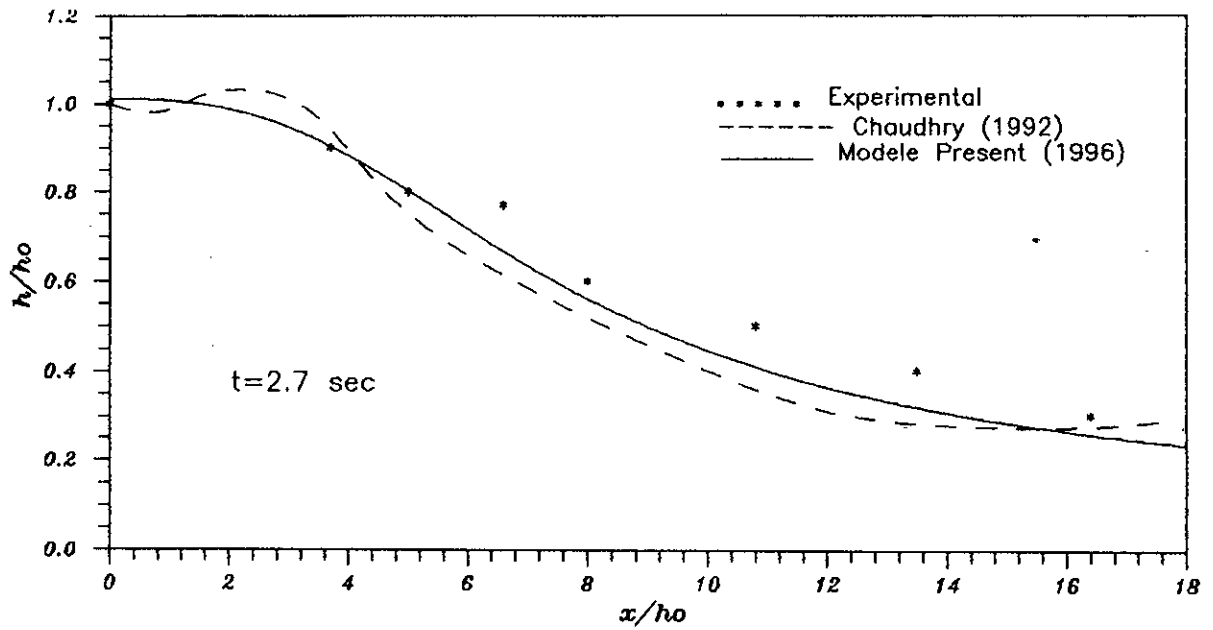
Au niveau de l'axe médian , cette ligne suit approximativement l'allure des mesures expérimentales . Bien qu'au niveau de la paroi c'est aussi le cas , mais avec une majoration de la ligne d'eau obtenu par le présent modèle à l'aval de l'écoulement .

- La variation de la vitesse le long de l'axe de l'écoulement est donnée sur la figure (V.B.5), on remarque qu'elle augmente dans la direction de l'écoulement. Les profils de vitesse à la section d'entrée et de sortie de l'élargissement figures (V.B.6, 7) montrent clairement le développement de la couche limite.

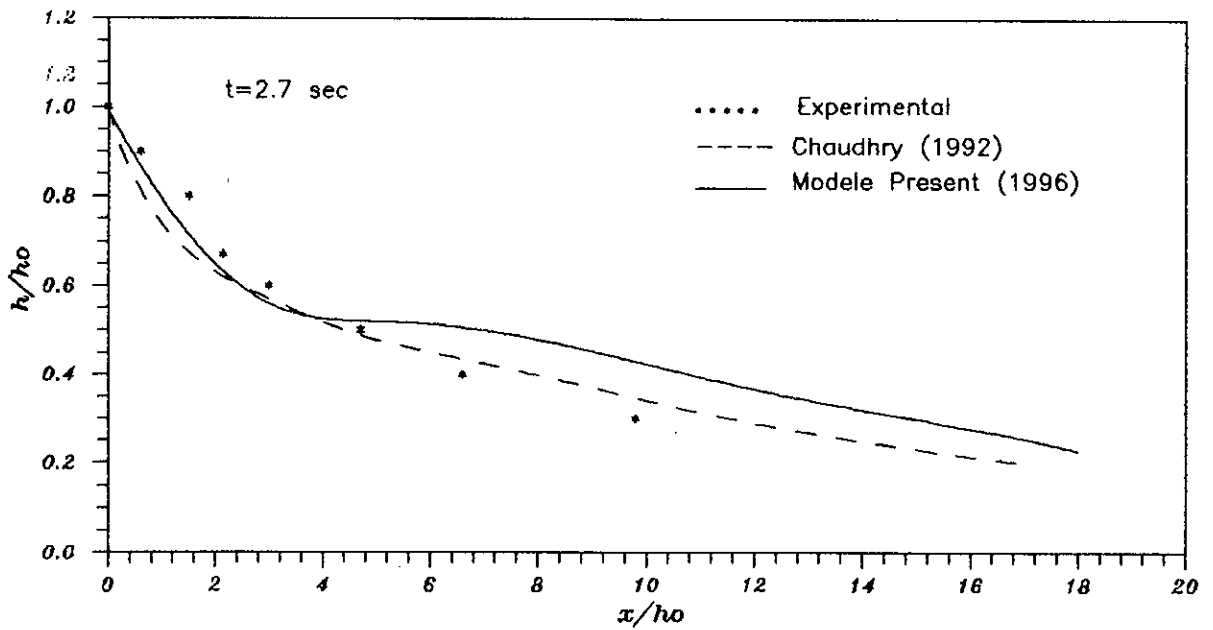
Suite aux observations faites ci-dessus on peut dire que l'écoulement dans un canal de telle envergure n'entraîne pas de variations rapides de hauteurs, ce qui s'explique par le fait que l'angle de choc augmente et les ondes de chocs divergents.

En conclusion des deux applications A et B on peut dire que :

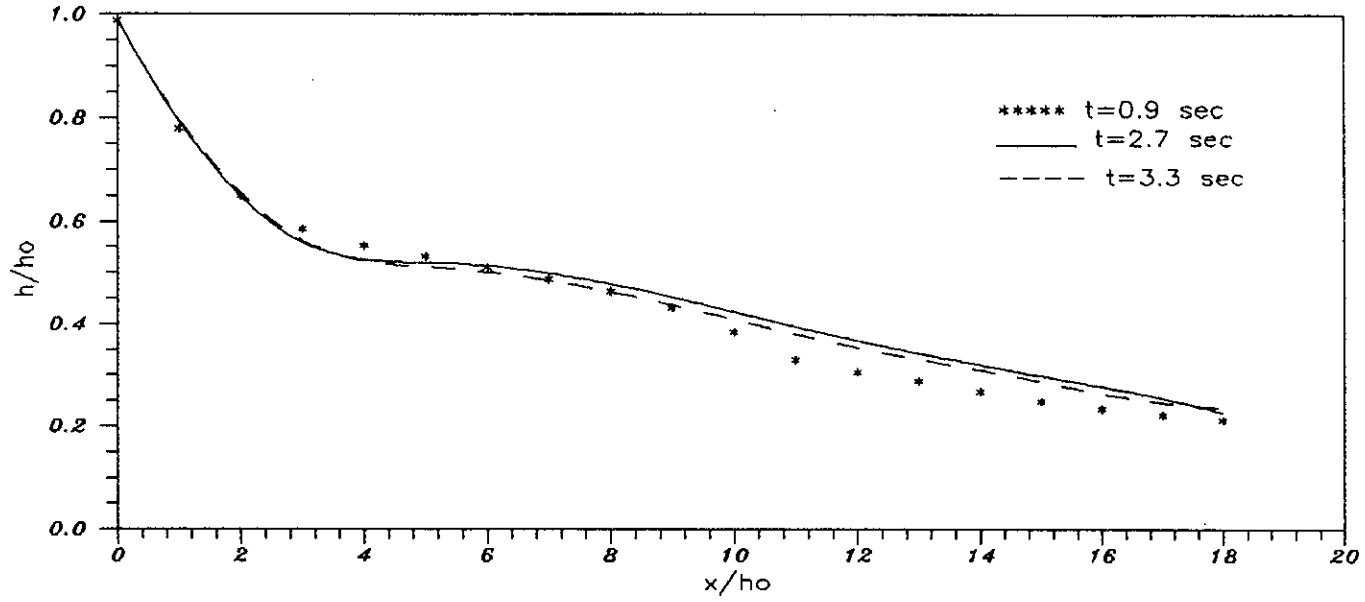
- Le modèle présent met en évidence le développement de la couche limite même si c'est d'une manière grossière, ceci justifie le bon choix des conditions aux limites.
- Le modèle présent donne des résultats satisfaisants et appréciables en ce sens on a démontré les performances de ce dernier, et c'est d'ailleurs le but escompter de ces deux applications.



*Fig(V.B.1): Profil en Long de la Surface Libre le Long de l'axe dans l'Elargissement Progressif.*

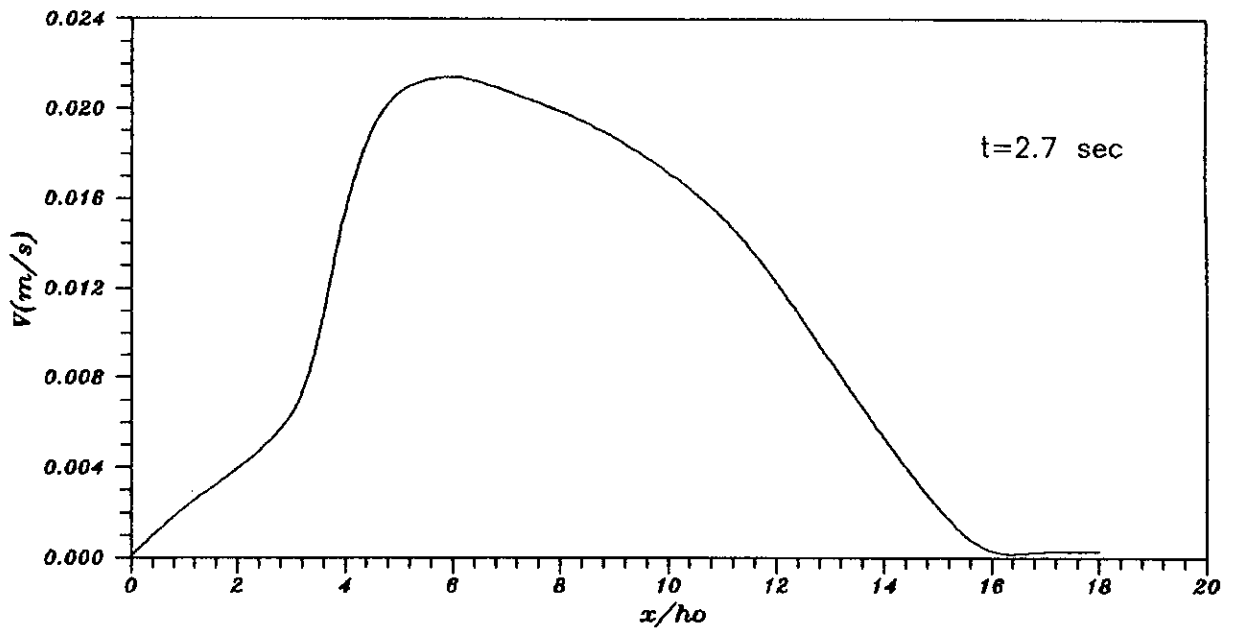


*Fig(V.B.2): Profil en Long de la Surface Libre le Long de la Paroi dans l'Elargissement Progressif.*

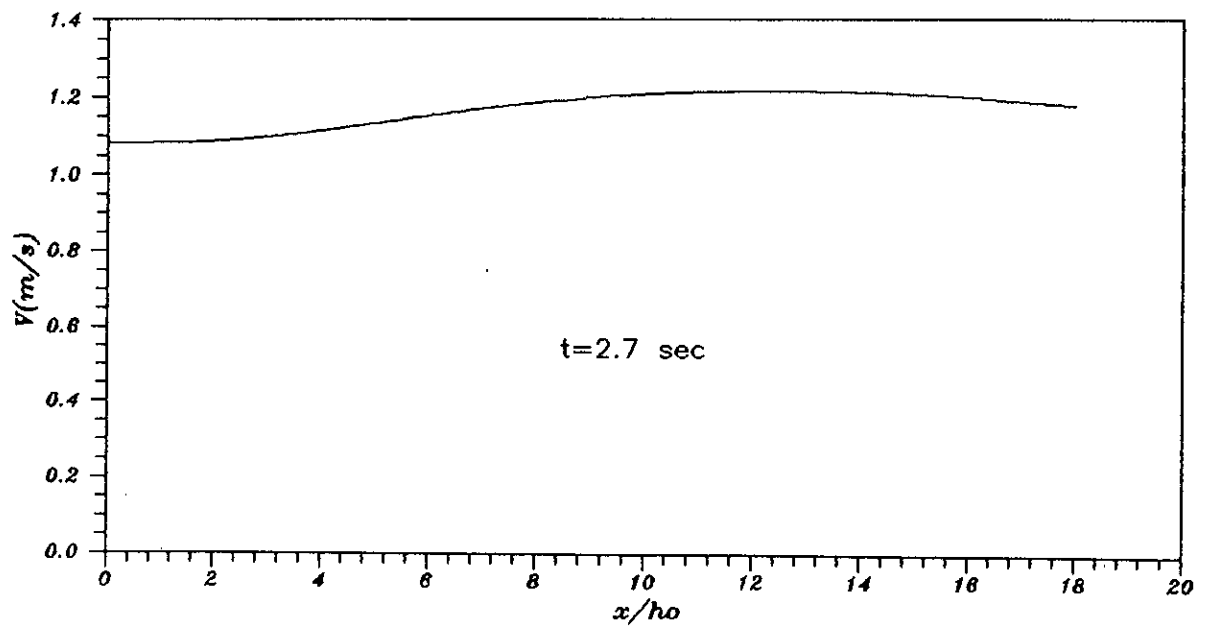


Fig(V.B.3): Permanisation de l'Écoulement le Long de la Paroi dans l'Élargissement Progressif.

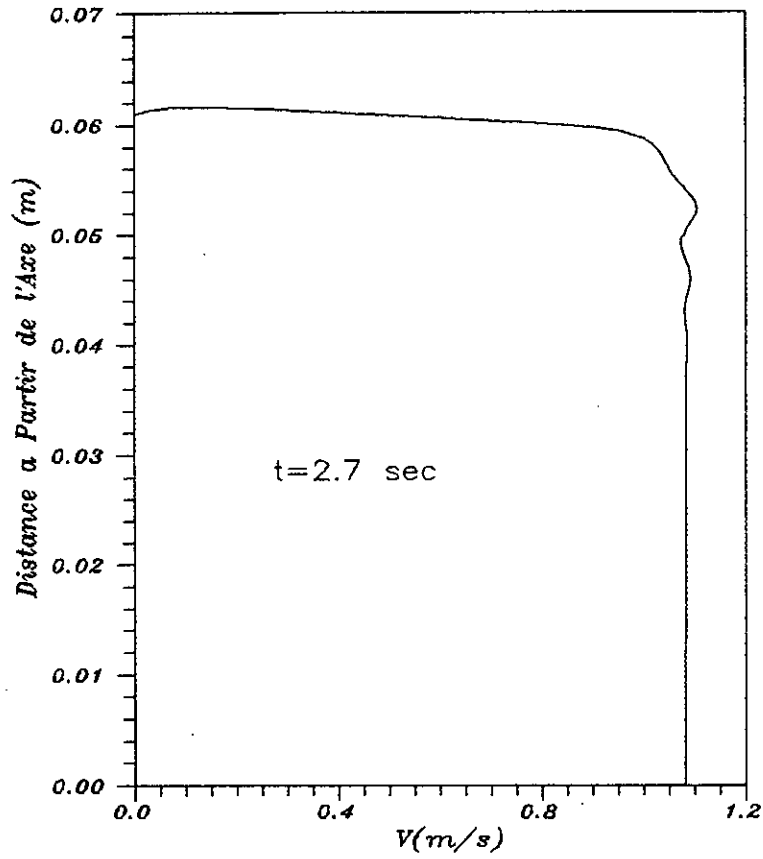




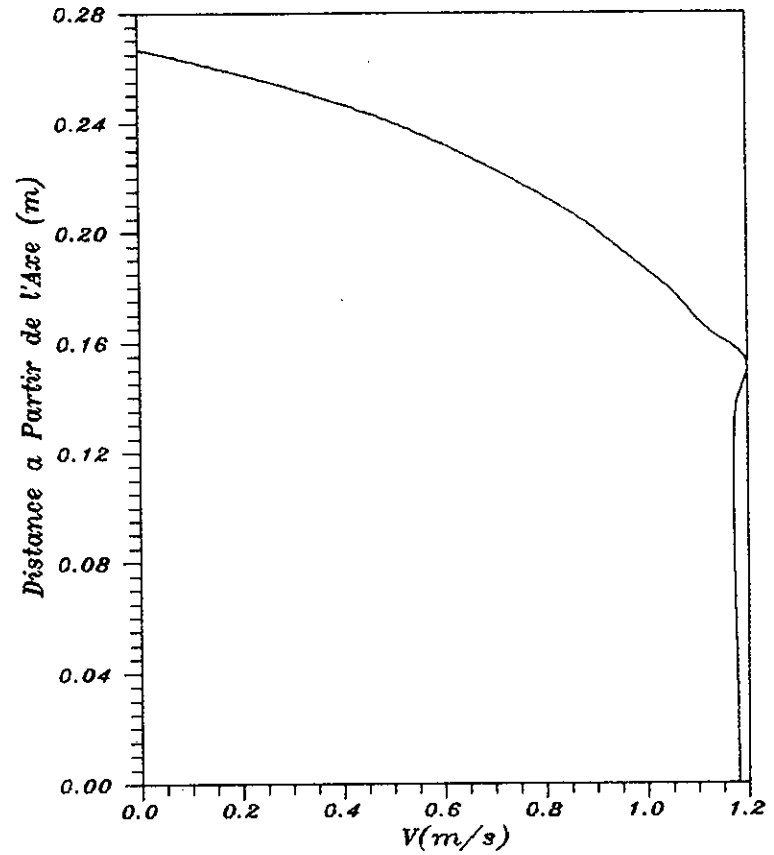
*Fig(V.B.4): Profil de la Vitesse le Long de la Paroi.*



*Fig(V.B.5): Profil de la vitesse le Long de l'axe.*



Fig(V.B.6): Profil de la Vitesse a la Section d'entree.



Fig(V.B.7): Profil de la Vitesse a la section de Sortie.

### **V.C- 3 APPLICATION : ECOULEMENT DANS LE COURSIER** **D'UN EVACUATEUR DE CRUES EN MODELE REDUIT :**

#### **1- Présentation de l'application :**

\* description du modèle réduit [3]

Le modèle réduit en question est un évacuateur de surface , composé d'un déversoir latéral , d'un bac de réception , d'un coursier à forte pente et d'un saut de ski . La partie du modèle qui nous intéresse , c'est évidemment « LE COURSIER » sur lequel des essais expérimentaux ont été faits avec des débits de  $0,0344 \text{ m}^3/\text{s}$  (débit réel  $1000 \text{ m}^3/\text{s}$ ) et de  $0,0688 \text{ m}^3/\text{s}$  ( débit réel  $2000 \text{ m}^3/\text{s}$  ).

Afin de déterminer la hauteur à donner aux murs bajoyers on a relevé la ligne d'eau des débits exceptionnels de  $0,093 \text{ m}^3/\text{s}$  ( débit réel  $2700 \text{ m}^3/\text{s}$  ).

Le coursier est un canal dont la pente du radier est d'environ  $28^\circ$  , sur une longueur de  $0,74 \text{ m}$  et possède une section rectangulaire symétrique de  $0,41 \text{ m}$  .

\* On va déterminé par simulation numérique la ligne d'eau le long de la paroi pour  $Q = 0,0344 \text{ m}^3/\text{s}$  et  $Q = 0,093 \text{ m}^3/\text{s}$  .

Les conditions de l'écoulement dans le coursier sont résumés dans le tableau suivant:

Conditions de l'écoulement dans le coursier		
- $Q \text{ (m}^3/\text{s)}$	0.0344	0.093
- Le tirant d'eau à l'amont est $h_0 \text{ (m)}$	0.0656	0.1302
- La vitesse longitudinale est $U_0 \text{ (m/s)}$	1.280	1.742
- La vitesse transversale est $V_0 \text{ (m/s)}$	0	0
- La pente de fond est $\alpha_x \text{ (}^\circ\text{)}$	28.1245	28.1245
- coefficient de Manning $n$	0.01	0.01

On utilisera :

- Un maillage avec des pas d'espace  $\Delta\xi = 0,02$  m et  $\Delta\eta = 0,01025$
- Un coefficient de dissipation  $\chi = 0,8$
- Un nombre de courant  $C_n = 0,8$

Les variables de l'écoulement sont  $h_0$ ,  $U_0$  et  $V_0$  indiquées dans le tableau ci-dessus qui sont spécifiées en tous les points du maillage comme conditions initiales.

## 2- Résultats et analyses :

La ligne d'eau le long de la paroi pour un débit  $Q = 0,0344$  m<sup>3</sup>/s obtenu par simulation numérique figure V.C.1 , présente un décalage par rapport à celle obtenue expérimentalement , mais pour le débit exceptionnel de 0,093 m<sup>3</sup>/s , notre modèle numérique donne des résultats fort appréciables ( voir figure V.C.6 ) .

On peut interpréter les résultats par ce qui suit :

- L'écoulement amont n'est pas stable à cause de la présence du bac de réception , c'est le siège d'apparition d'ondes de chocs qui se propagent vers le coursier , par contre dans les calculs numériques on a supposé implicitement que l'écoulement à l'amont est stable .

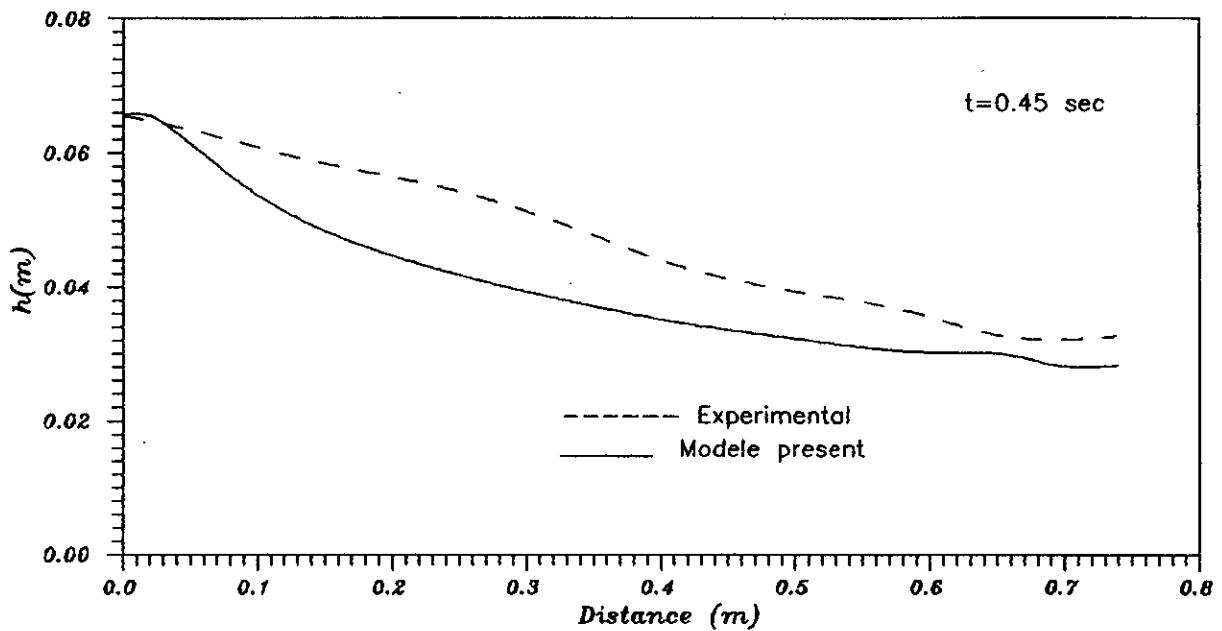
La géométrie constante du coursier n'aurait pas engendrée d'ondes de chocs significatives .

- Pour le débit de 0,0344 m<sup>3</sup>/s les ondes de chocs qui arrivent au niveau du coursier produisent des perturbations importantes , mais pour le débit exceptionnel ces dernières sont considérablement réduites , c'est d'ailleurs ce qui explique les très bons résultats obtenus pour ce débit .

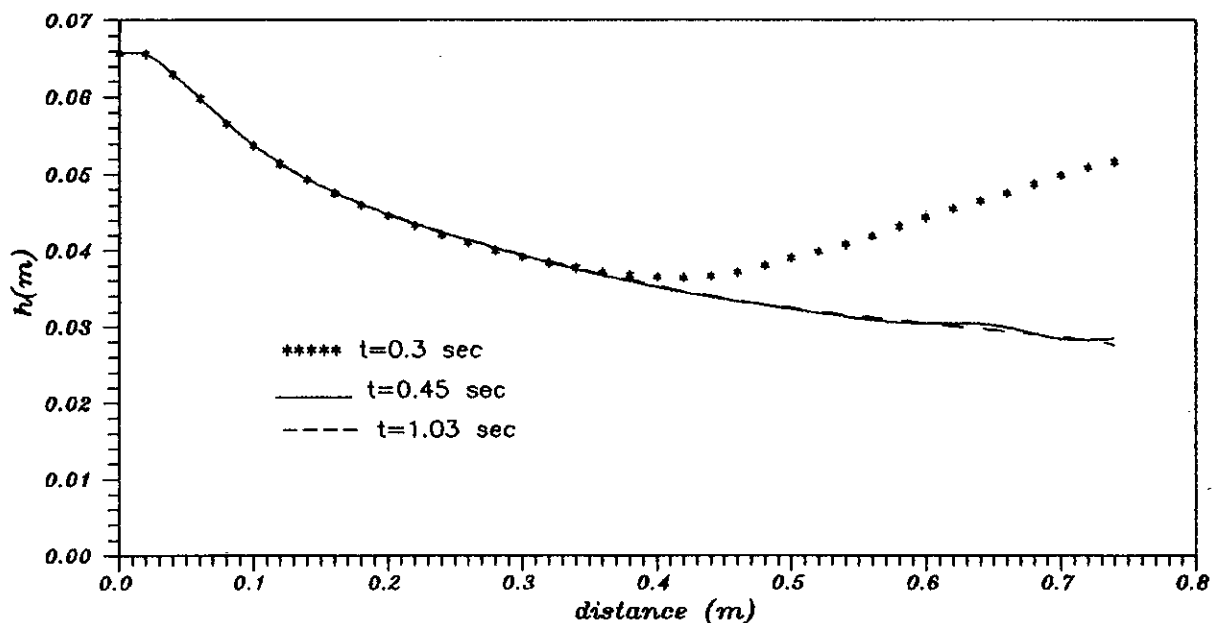
Notant que le modèle numérique atteint rapidement l'état permanent , soit en un temps  $t = 0,45$  s ( figure V.C.3 et V.C.7 ) .

On a représenté l'évolution de la vitesse et du nombre de FROUDE le long de l'écoulement dans les figures ci-après, on a même fait une représentation tridimensionnelle de l'écoulement illustré dans la figure V-C-10.

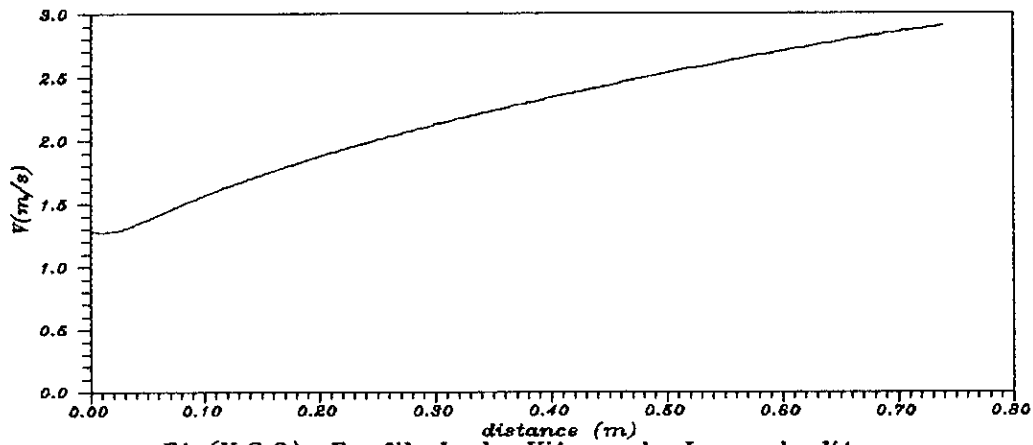
En conclusion de cette application, on peut dire qu'on est parvenu à vérifier la validité du modèle mathématique établi.



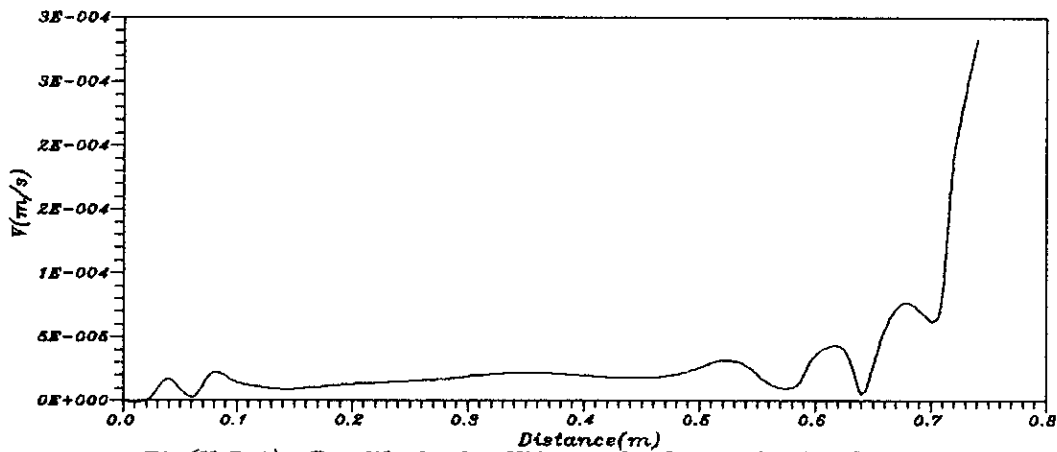
*Fig(V.C.1): Ligne d'Eau le Long de la Paroi dans un Coursier Rectangulaire pour un Debit de 0.0344(m<sup>3</sup>/s).*



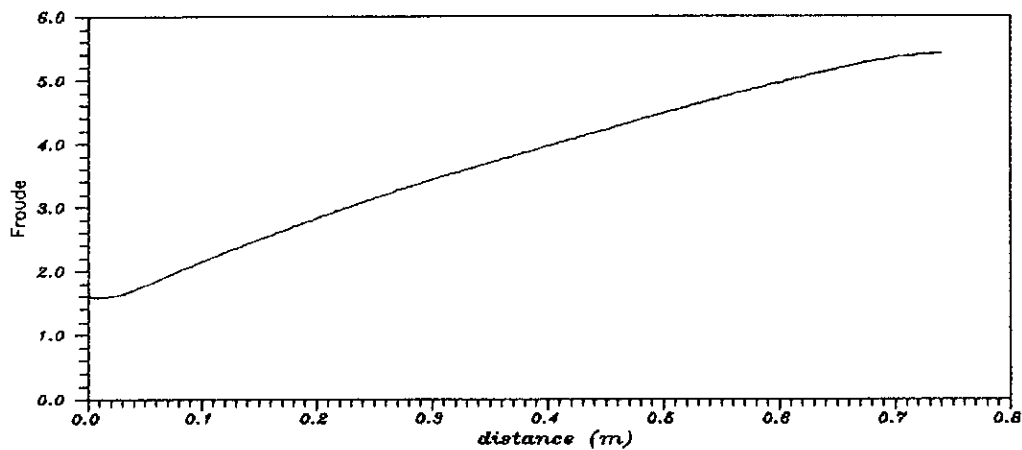
*Fig(V.C.2): Permanisation de la Ligne d'Eau le Long de la Paroi Q=0.0344 m<sup>3</sup>/s.*



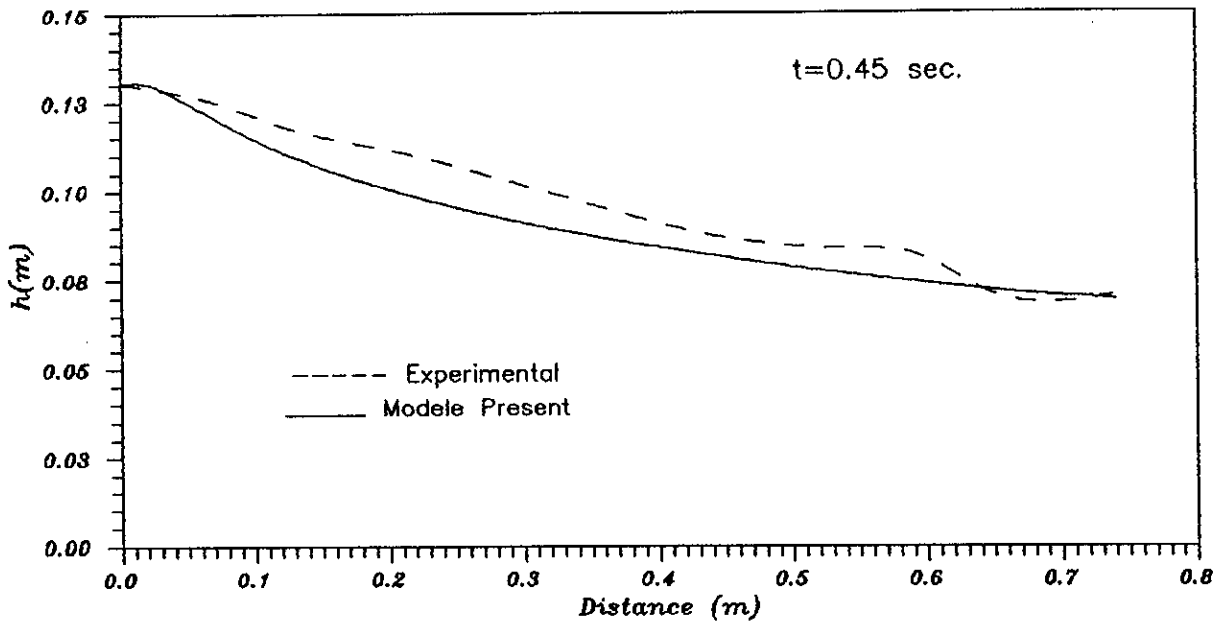
Fig(V.C.3): Profil de la Vitesse le Long de l'axe d'Écoulement pour  $Q=0.0344 \text{ m}^3/\text{s}$ .



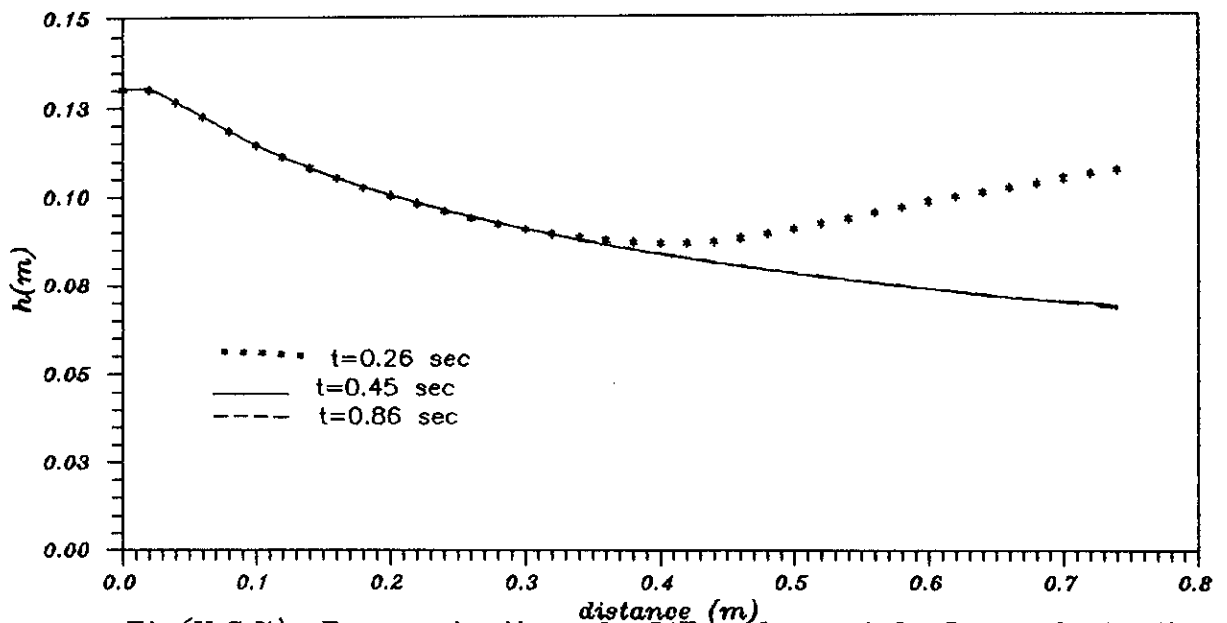
Fig(V.C.4): Profil de la Vitesse le Long de la Paroi  $Q=0.0344 \text{ m}^3/\text{s}$ .



Fig(V.C.5): Evolution du Nombre de Froude le Long de l'Écoulement  $Q=0.0344 \text{ m}^3/\text{s}$ .

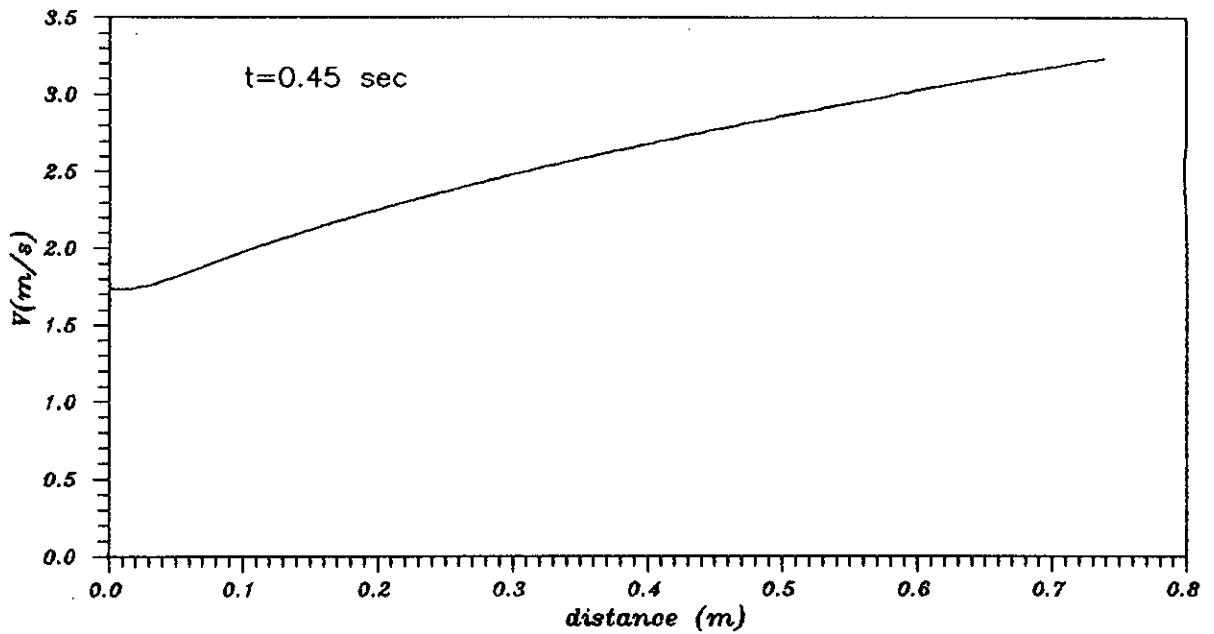


Fig(V.C.6): La Ligne d'Eau le Long de la Paroi dans un Coursier Rectangulaire pour un Debit de 0.093(m<sup>3</sup>/s)

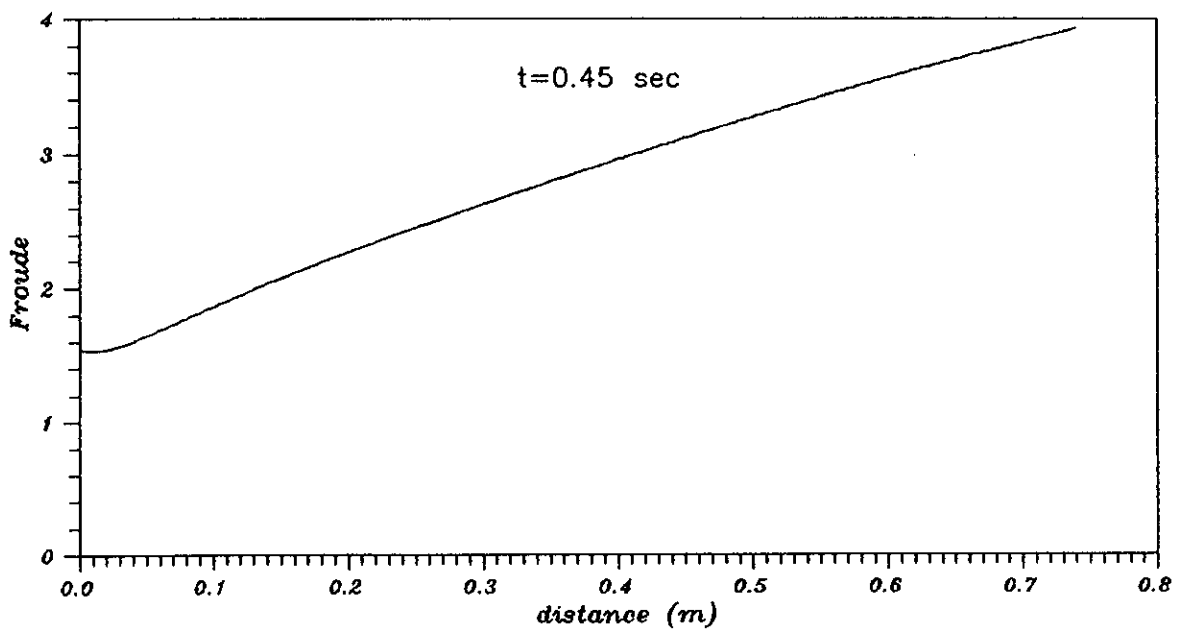


Fig(V.C.7): Permenisation de L'Ecoulement le Long de la Paroi. pour Q=0.093 m<sup>3</sup>/s



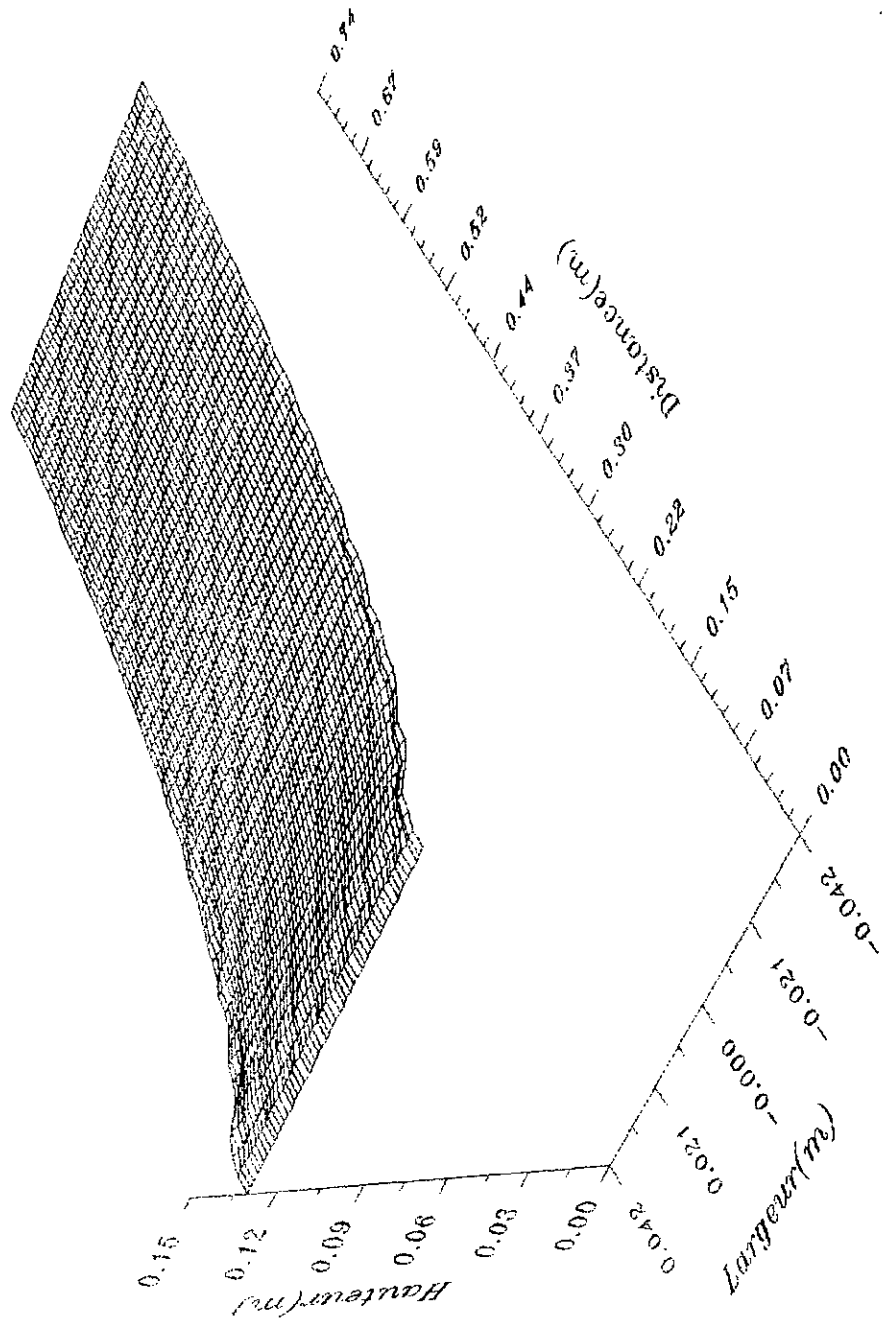


*Fig(V.C.8): Evolution de la Vitesse le Long d'Écoulement pour  $Q=0.093 \text{ m}^3/\text{s}$ .*



*Fig(V.C.9): Evolution du Nombre de Froude le Long de l'Écoulement pour  $Q=0.093 \text{ m}^3/\text{s}$ .*

Fig(V.C.10): Representation Tridimensionnelle de  
 la Surface Libre dans le Coursier  
 $q=0.093 \text{ m}^3/\text{s}$



## **V.D- 4<sup>ème</sup> APPLICATION : ETUDE DE L'EFFET D'UNE FORTE INCLINAISON SUR L'ÉCOULEMENT DANS LE RETRECISSEMENT RECTILIGNE ET DANS L'ÉLARGISSEMENT PROGRESSIF :**

### **1- Présentation de l'application :**

Dans cette application on va examiner les conséquences d'une forte inclinaison sur l'écoulement dans le rétrécissement rectiligne et l'élargissement progressif étudiés à faible pente dans les deux premières applications . En particulier on se propose deux variantes  $\alpha_x = 30^\circ$  et  $\alpha_x = 45^\circ$

Notant que les mêmes données que lors de l'étude à faible pente restent valable .

### **2- Résultats et analyses :**

#### **a- Rétrécissement rectiligne :**

Si le radier du rétrécissement prend une pente de  $30^\circ$  ou de  $45^\circ$  le modèle numérique prévoit un rabaissement considérable de la surface libre .

D'après la figure V.D.1 , on remarque que les ondulations de la surface libre au niveau de la paroi sont localisées à l'intérieur de la transition par contre au niveau de l'axe médian figure V.D.2 , la surélévation ne survienne que très loin à l'aval , la représentation tridimensionnelle de la surface libre figure V.D.8 nous permet de visualiser un creu important au niveau du centre de la transition .

L'idée qui se dégage d'après les observations faites ci-dessus est que l'effet d'une forte pente sur l'ampleur des ondes de chocs est une réduction sensible de celles-ci , ce qui est prévisible .

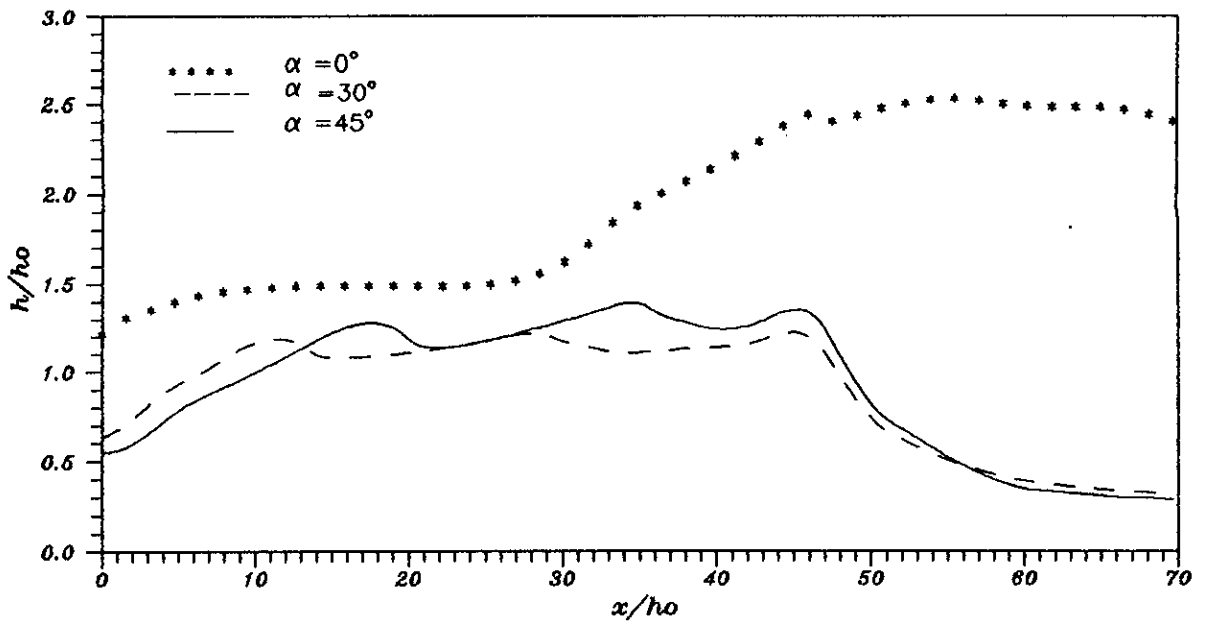
La vitesse d'écoulement augmente lineairement ( figure V.D.3 ) et devient de plus en plus importante , ce qui est aussi le cas du nombre de Froude figure V.D.4 qui atteint une valeur de l'ordre de 20 à l'aval ce qui mis en évidence la dynamique ultra-critique des écoulements à forte pente .

**b- Elargissement progressif :**

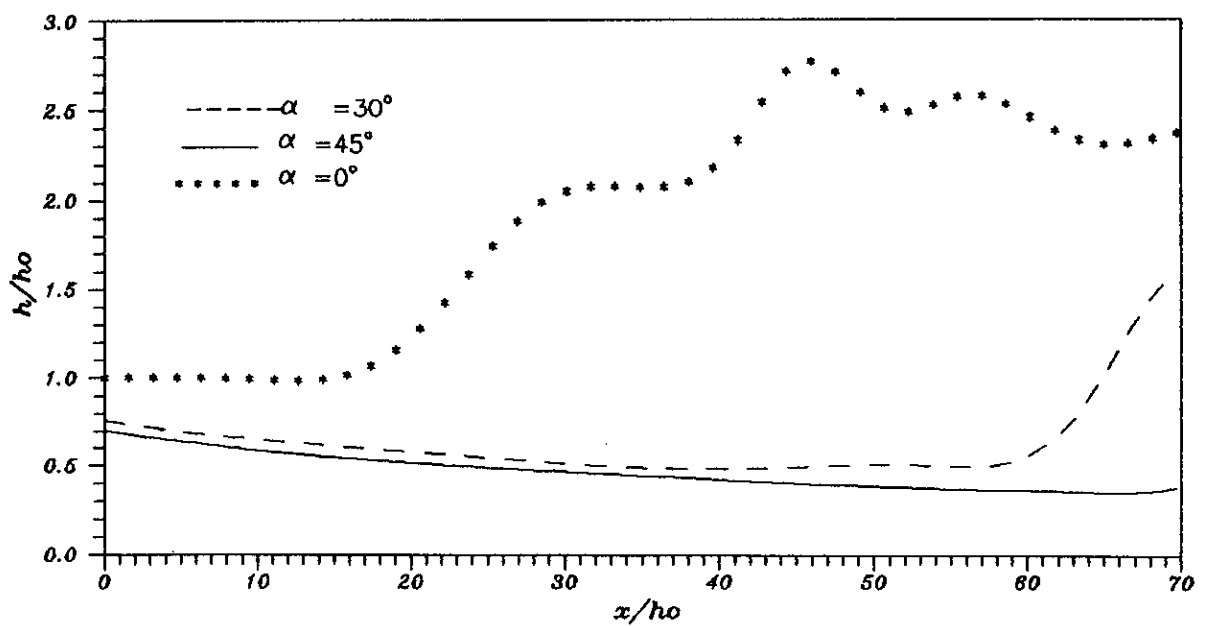
La figure V.D.5 montre que la ligne d'eau au niveau de la paroi dans l'élargissement progressif diminue d'une manière impressionnante, les hauteurs à l'aval sont presque nulles . . .

On voit d'après la figure V.D.9 qui est une représentation tridimensionnelle de la surface libre dans l'élargissement progressif, que la ligne d'eau est plus importante au niveau de l'axe médian contrairement au rétrécissement rectiligne ceci à cause de la divergence des parois latérales de l'élargissement .

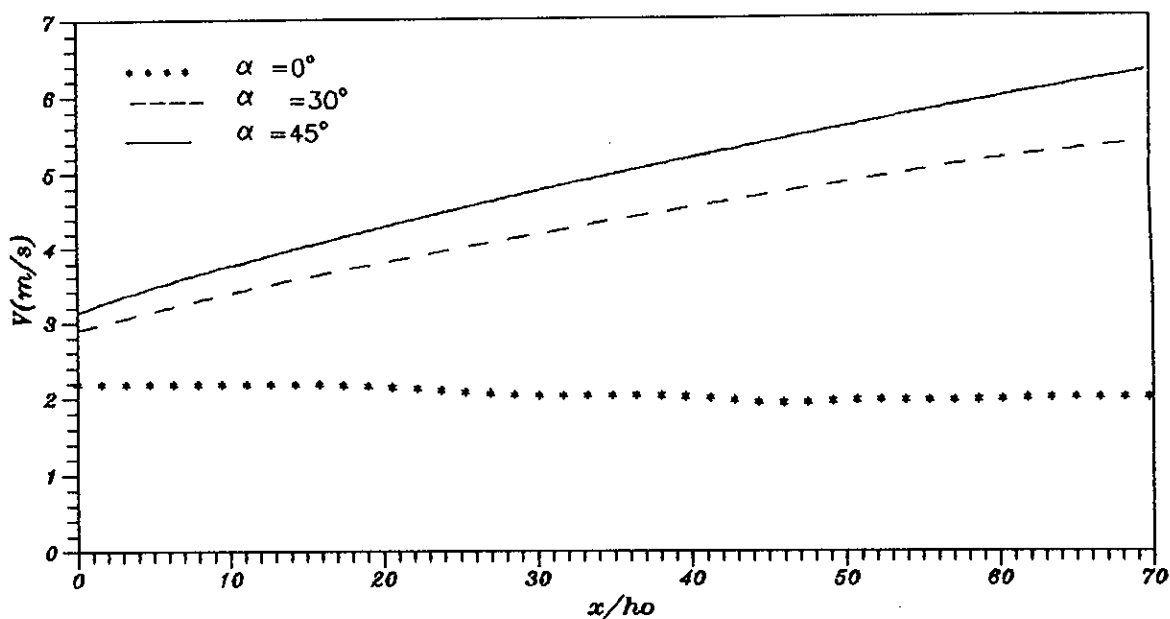
Suite à cette dernière application on peut prévoir que le danger d'une dépression serait localisé au niveau du centre de la transition pour le rétrécissement et à la zone proche des parois latérales dans le cas de l'élargissement .



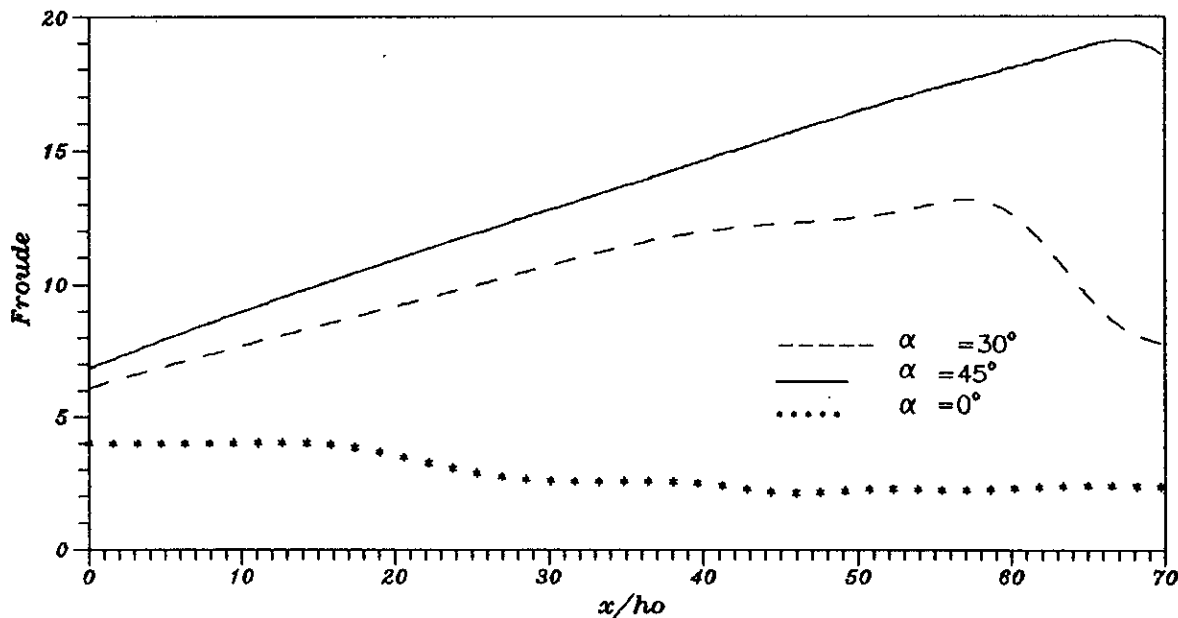
Fig(V.D.1): Effet de la Pente sur la Profondeur le Long de la Paroi dans Le Retrecissement.



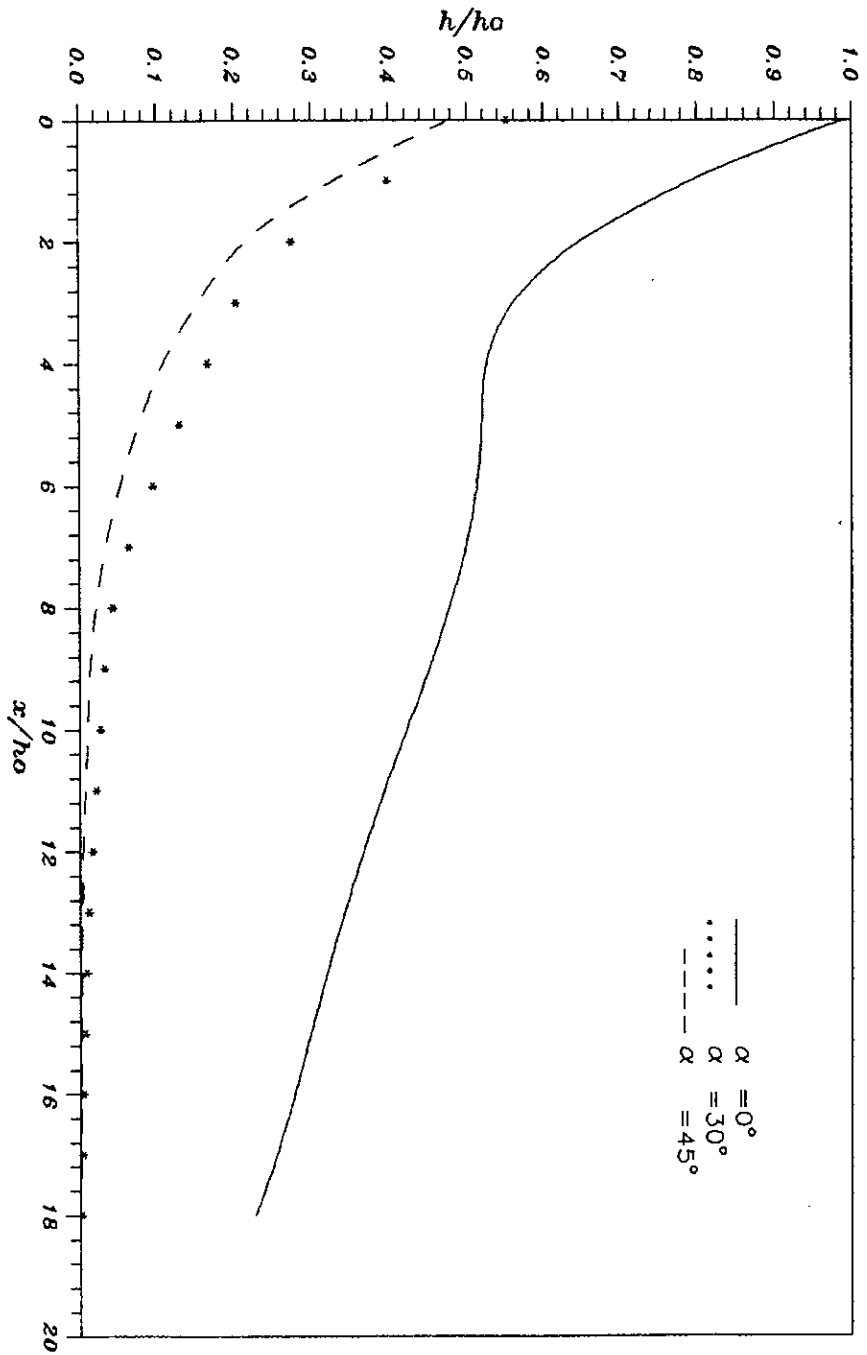
Fig(V.D.2): Effet de la pente sur la profondeur le Long de l'axe dans le Retrecissement.



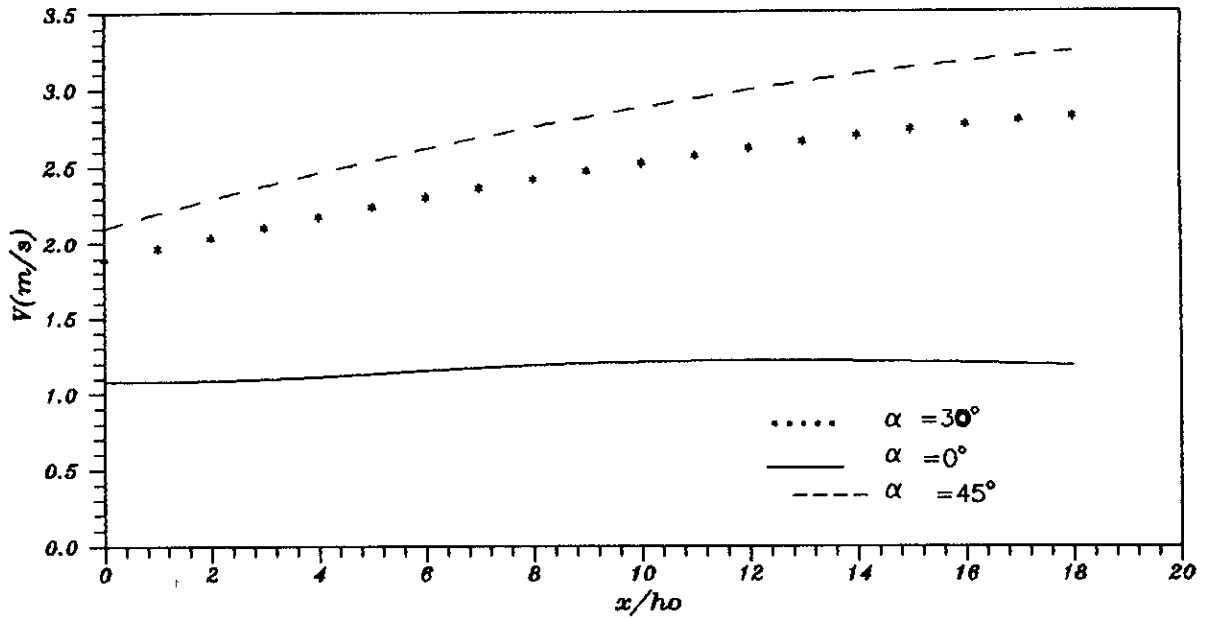
Fig(V.D.3): Effet de la Pente sur la Vitesse le Long de l'axe dans le Retrecissement.



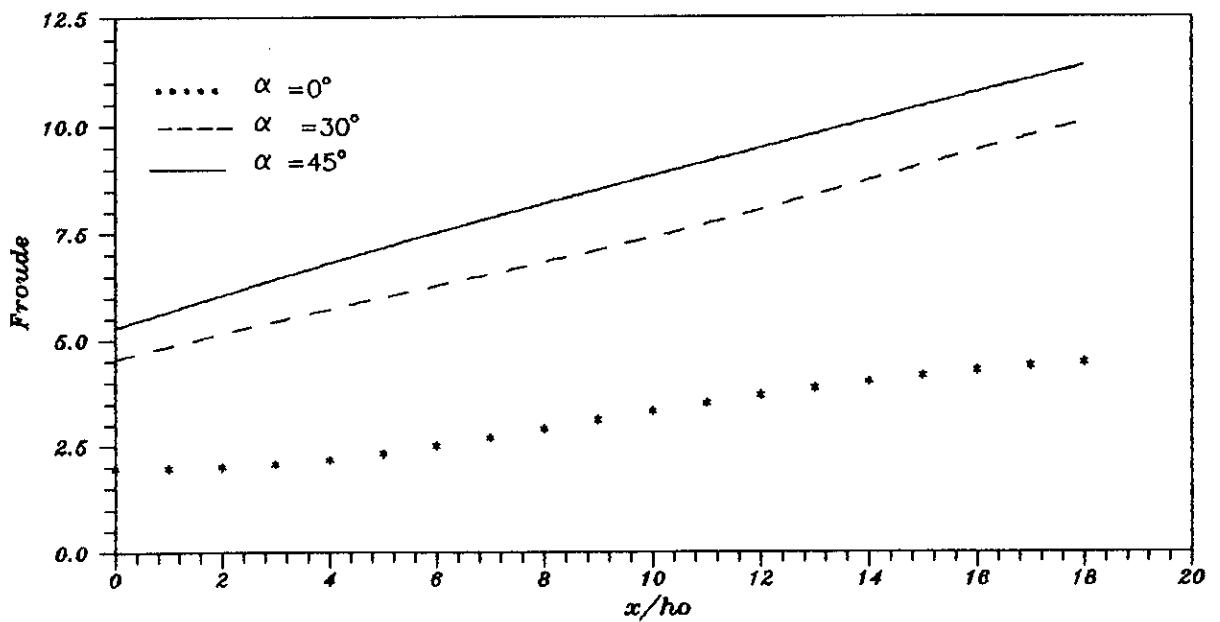
Fig(V.D.4): L'Evolution du Nombre de Froude le Long de l'Ecoulement le Retrecissement.



Fig(V.D.5): Effet de la pente sur la surface Libre le Long de la Paroi dans l'Elargissement Progressif.



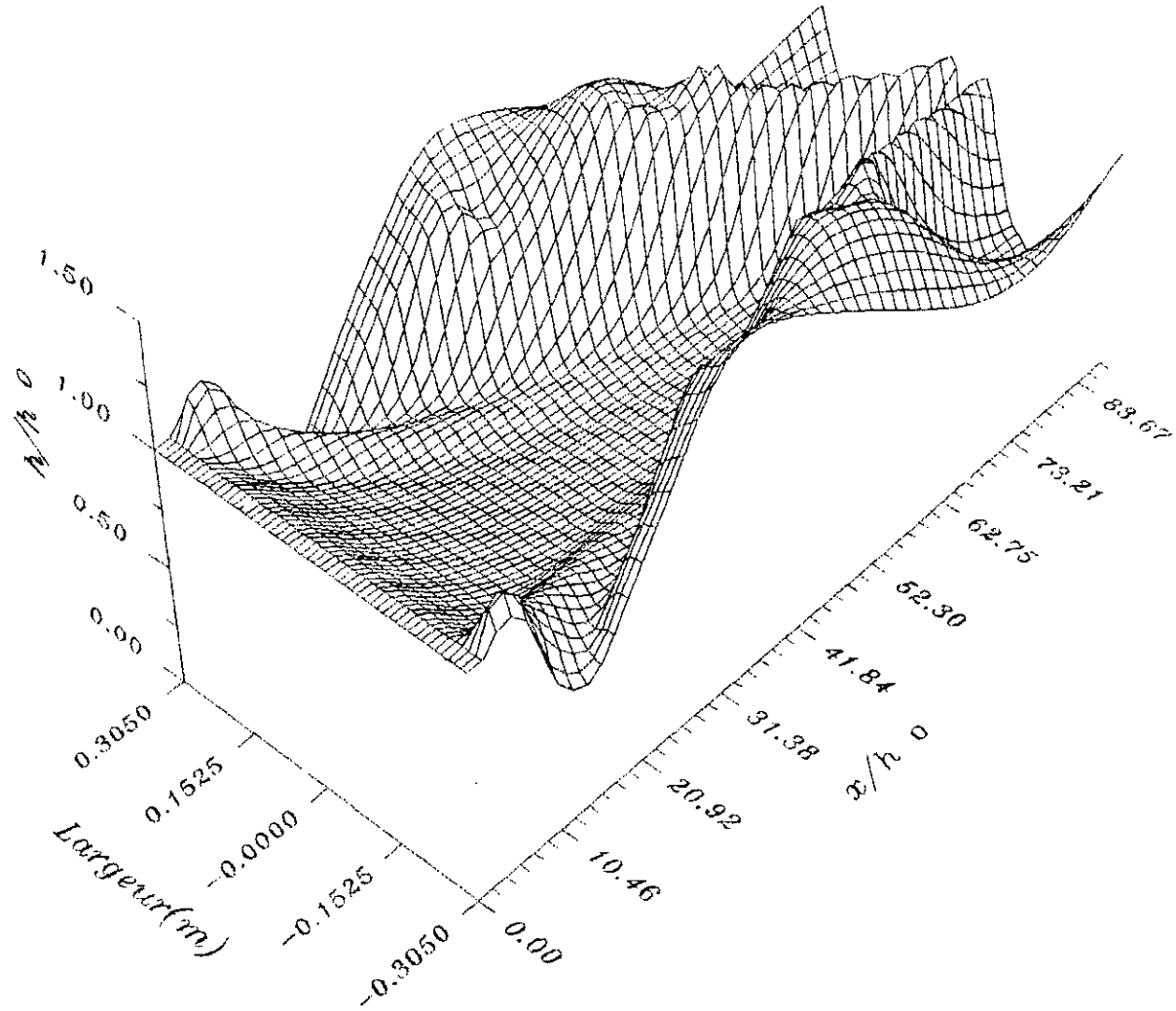
Fig(V.D.6): Effet de la Pente sur le Profil de la Vitesse le Long de l'Axe dans l'Elargissement Progressif.



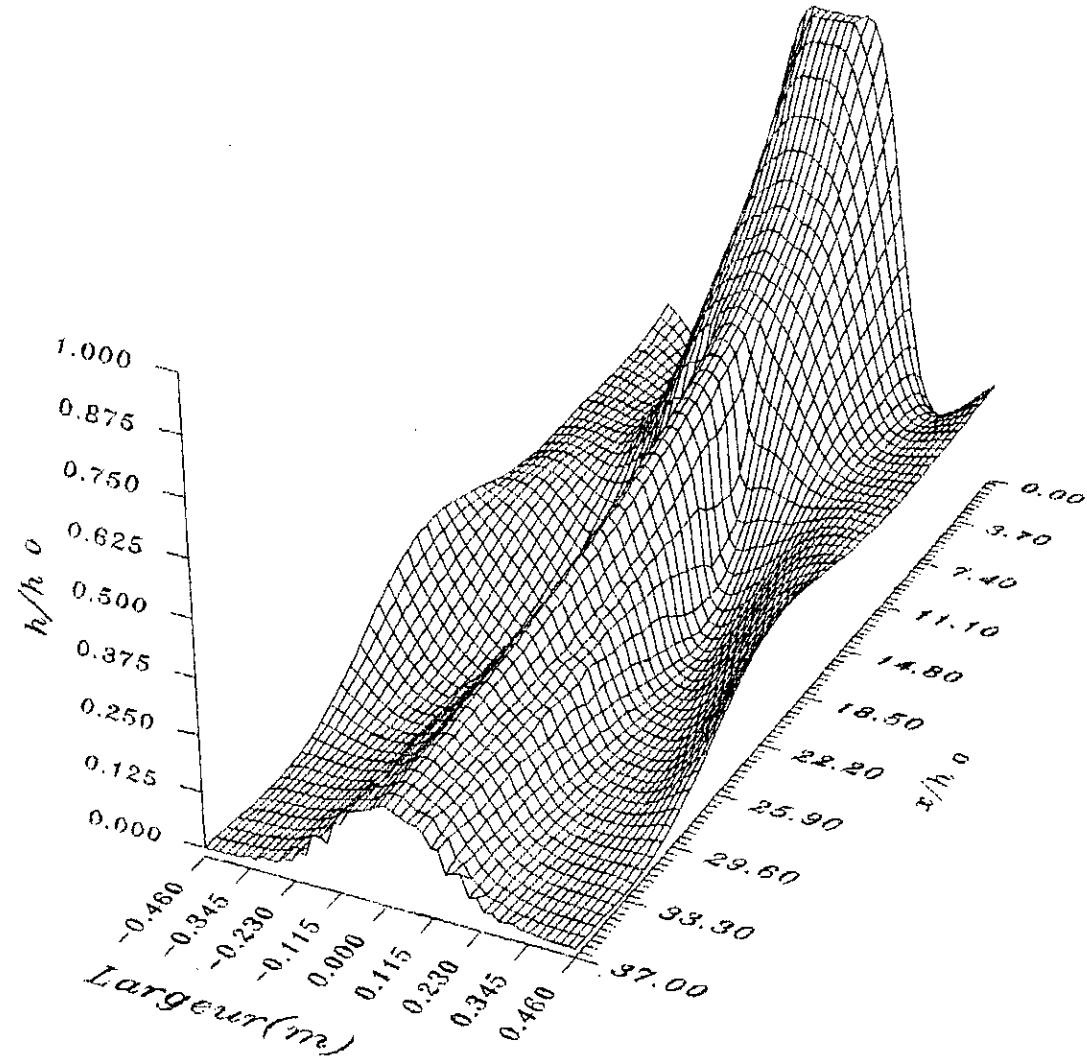
Fig(V.D.7): Effet de la pente sur le Nombre de Froude dans l'Elargissement Progressif.



Fig(V.D. 8 ): Representation Tridimensionnelle de  
 la Surface Libre dans le Retrecissement  
 Rectiligne  $\alpha = 45^\circ$



Fig(V.D. 9) : Representation Tridimensionnelle de la Surface Libre dans l'Elargissement Progressif  $\alpha = 45^\circ$



## ***CONCLUSION GENERALE***

## CONCLUSION GENERALE

Pour atteindre le but qu'on s'est fixé au début de cette étude c'est -à-dire : la détermination de la ligne d'eau dans les canaux non prismatiques et à forte pente , on a construit tout d'abord les équations de base régissant les écoulements à surface libre bidimensionnels non permanents en régime graduellement varié , par application des lois de conservation adéquates et en se basant sur des hypothèses simplificatrices .

Puis une adaptation à une résolution numérique a été opérée , sur le modèle mathématique ainsi qu'une prise en compte judicieuse des conditions aux limites .

L'expérimentation numérique de notre modèle sur des applications où la transition est de faible pente , a permis de constater que le modèle numérique utilisé (modèle de Gabutti ) jouit d'une efficacité et d'une fiabilité satisfaisante .

Dans la troisième application qui concernait l'écoulement dans un coursier étudier en modèle expérimental comme avant projet au niveau de l'Agence Nationale des Barrages , nous avons obtenu une approximation numérique valable et appréciable . Ceci nous mène à dire et affirmer la validité du modèle ainsi établi .

Lors de la quatrième application on a constaté la grande influence de la ligne d'eau dans le rétrécissement et dans l'élargissement sous l'effet d'une forte inclinaison , ceci est traduit par de faibles profondeurs et le danger de dépressions ainsi qu'une réduction de l'ampleur des agitations au niveau de la surface libre .

A la lumière des applications et des observations correspondantes on arrive aux résultats suivants :

- La mise en évidence par notre modèle numérique de la couche limite a permis l'obtention de meilleurs résultats au niveau des parois latérales comparés à d'autres résultats numériques .

- L'hypothèse d'une répartition hydrostatique des pressions est clairement remise en cause au voisinage du choc .

Enfin, notre travail n'est qu'une approche, ceci laisse la voie ouverte à d'autres études pour des améliorations et la prise en compte plus rigoureuse des hypothèses ainsi que la recherche d'une précision supérieure des résultats numériques .

**BIBLIOGRAPHIE**

- [1] M.B.ABBOTT . « Computational hydraulics » . ed. Pitman publishing limited .  
1979 .
- [2] R.ABSI , S.RETIEB , O.BELHADJ , S.BENMAMAR . « Modélisation et  
simulation numérique des problèmes de diffraction bidimensionnelle d'un  
mascaret en régime instationnaire » . Thèse d'ingénieur d'état , ENP . 1994 .
- [3] Agence Nationale des Barrages . « Etude d'avant projet détaillé du barrage de  
l'oued Cherf » , Modèle réduit hydraulique . Rapport partielle N°11 . 1987 .
- [4] R.A.BALTZER , C.LAI . « computer simulation of unsteady flow in water  
ways » . Jour. of the Hyd.Division , Vol.94 , N°HY4 . 1968 .
- [5] A.BERREKSI , A.BOUHADJI , O.BELHADJ . « Simulation et analyse des  
écoulements bidimensionnels à surface libre en zones de transition » . Thèse  
d'ingénieur d'état , ENP . 1993 .
- [6] S.M.BHALLAMUDI , M.H.CHAUDHRY . « Computation of flows in open-  
channel transitions » . Jour. of Hyd.Res , Vol.30 , N°1 . 1992 .
- [7] C.BOISSON , B.GAY , M.GOTTELAND . « Différences finies » . Ecole  
Centrale de Lyon . 1990 .
- [8] M.CARLIER . « Hydraulique générale et appliquée » . ed.Eyrolles . 1980 .
- [9] M.H.CHAUDHRY . « Applied hydraulic transients » . ed. Van-Nostrano  
Reinhold Co , New York . 1988 .

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [10] V.T.CHOW . « Open channel hydraulics » . ed.M.C.Graw Hill Book Co ,  
New York . 1959 .
- [11] V.T.CHOW , D.R.MAIDMENT , L.W.MAYS . « Applied hydrology »  
ed.M.C.Graw Hill Book Co , New York . 1988 .
- [12] F.ENGELUND , J.MUNCH-PETERSEN . « Ecoulement permanent dans les  
canaux convergents et divergents » . La Houille Blanche , N°3 , P.475 . 1953.
- [13] D.EUVRARD . « Résolution numérique des équations aux dérivées partielles ,  
différences finies , éléments finis , méthodes de singularités » . ed.Masson .  
1993 .
- [14] R.J.FENNEMA , M.H.CHAUDHRY . « Implicit methods for two-dimesional  
unsteady free-surface flows » . Jour.of Hyd.Res , Vol.27 , N°3 . 1989 .
- [15] R.J.FENNEMA , M.H.CHAUDHRY . « Explicit methods for 2-D transient  
free surface flows » .Jour. of Hyd.Eng , Vol.116 , N°8 . 1990 .
- [16] R.J.FENNEMA , M.H.CHAUDHRY . « Explicit numerical schemes for  
unsteady free-surface flows with shocks » .Water Ressources Research ,  
Vol.22 , N°13 . 1986 .
- [17] B.GABUTTI . « In two upwind finite-difference schemes for hyperbolic  
equations in non conservative form » . Computer and Fluids , Vol.11 , N°3 ,  
pp.207.230 . 1983 .
- [18] S.GODOUNOV , V.RIABENKI . « Schémas aux différences » . OPU . 1987 .

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [19] W.H.GRAF , M.S.ALTINAKAR . « Hydraulique fluviale » , Volume 16, Tome 1 Presses Polytechniques Universitaires Romande . 1993 .
- [20] HACHEMI , O.BELHADJ . « Analyse du coup de bélier par trois méthodes numériques , Mac.cormak, Lambda, Gabutti » . Thèse d'ingénieur d'état, ENP.1994 .
- [21] W.HAGER . « Supercritical flow in channel junctions » . Jour. of Hyd.Eng , Vol.115 , N°5 . 1989 .
- [22] M.HUG . « Mécanique des fluides appliquée aux problèmes d'aménagements et d'énergétique » . ed.Eyrolles . 1975 .
- [23] O.F.JIMENEZ , M.H.CHAUDHRY . « Computation of supercritical free-surface flows » . Jour. of Hyd.Eng , Vol.114 , N°4 . 1988 .
- [24] G.MORETTI . « The Lambda scheme » . Computer and Fluids , Vol.7 , pp.191.205 .1979 .
- [25] C.H.OBLED . « Analyse numérique » . Ecole Supérieur d'Hydraulique de Grenoble . 1989 .
- [26] C.SCOUARNEC.« Algèbre spectrale », Tome1. ed.Publisud,Toulouse . 1987 .
- [27] O.SINNIGER , W.HAGER . « Constructions hydrauliques » . Presses Polytechniques Romandes , Lausanne . 1989 .
- [28] Sous Comité N°4 du Comité de l'Hydraulique des Barrages Suisse . « Spillways-schock waves and air » . Entrainement Review and Recommendation , C.I.G.B , Bulletin N°81 . 1992 .



## BIBLIOGRAPHIE

---

- [29] A.STROHMEIER . « Fortran 77 » . ed.Eyrolles .1985 .
- [30] J.Y.YANG , C.A.HSU . « Computations of free surface flows ». Jour. of Hyd.Res , Vol.31 , N°3 . 1993 .
- [31] B.C.YEN . « Open-channel flows equation revisited ». Jour. of the Eng. Mechanics Division , Vol.99 , N°EM5 , Octobre 1973 .

# ERRATUM

Page	Paragraphe	au lieu de	Lire
1	Introduction	• la est un moyen	La modélisation est un moyen
6	II.A.3.2	• série d'onde • se propage	série d'ondes se propagent
8	II.A.4.2	• qu'on les désigne • où elle est négligeable	qu'on les désignent que pour les écoulements fluxiaux (ou subcritiques) où elle est négligeable
15	II.B.5.2	• se forme	se forment
33	III.4.2	• dans forme	dans une forme.