

9/96

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : HYDRAULIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
المكتبة - BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

SIMULATION NUMERIQUE D'UN
ECOULEMENT LAMINAIRE DANS DES
CONDUITES NON CYLINDRIQUES
A MOTIF PERIODIQUE

PROPOSE PAR :

Melle : S. BENMAMAR
Mr : A. BILEK

DIRIGE PAR:

Mr : A. BILEK

ETUDIE PAR :

Mr: A. DJERBOUA
Melle : F. LENOUAR

Promotion

Juin 1996

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : HYDRAULIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

SIMULATION NUMERIQUE D'UN
ECOULEMENT LAMINAIRE DANS DES
CONDUITES NON CYLINDRIQUES
A MOTIF PERIODIQUE

PROPOSE PAR :

Melle : S. BENMAMAR
Mr : A. BILEK

DIRIGE PAR:

Mr : A. BILEK

ETUDIE PAR

Mr: A. DJERBOUA
Melle : F. LENOUAR

Promotion

Juin 1996

ملخص:

إستعملنا مخطط المشتقات المنتهية لتعيين وسطاء جريان
إنزلاقي ودائر في قناة دورية ذات جوانب جيبيية .

الطريقة تعتمد على حل معادلات Navier-stokes ذات الجاهيل
مركبتي السرعة والضغط .

Résumé:

Un schéma aux différences finies a été utilisé pour déterminer les paramètres d'un écoulement laminaire et permanent dans une conduite périodique à parois sinusoïdales de type convergent - divergent. La méthode est basée sur la résolution des équations de Navier-Stokes dont les composantes de la vitesse et la pression sont inconnues.

Abstract :

A finite difference scheme was utilized to determine laminar and permanent fluid flow characteristics in a converging-diverging corrugated duct. The basis of the method is a resolution of Navier-Stokes equations where the velocity components and pressure are unknown.

DEDICACE



A la mémoire de ma mère ;

A mon père ;

Ma belle mère ;

Mes frères,

Mes soeurs ;

et tous ceux qui me sont chers.

Abdelatif.

DEDICACE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

A mes parents ;

Mon frère ;

Mes soeurs ;

et tous ceux que j'aime

Fatima

REMERCIEMENTS

Nous remercions vivement Mr. A.BILEK qui a bien voulu accepter de diriger ce travail et lui exprimons notre profonde reconnaissance pour ses conseils avisés et ses encouragements qui nous ont aidé à mener à fin cette étude.

Tous nos remerciements à Melle S.BENMAMAR qui malgré la distance et ses occupations n'a jamais cessé de suivre cette étude .Qu'elle trouve ici le témoignage de notre sincère gratitude pour sa collaboration précieuse.

Nos amis (es) sont vivement remerciés pour leur disponibilité et l'aide qu'ils nous ont apportées.

Nous exprimons également nos sincères remerciements aux responsables de la bibliothèque et du centre du calcul de l'ENP.

**TABLE
DES MATIERES**

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

<u>Erreur</u>	<u>correction</u>	<u>Page</u>
Stoks	Stokes	résumé
ar	are	abstract
rotationnels	rotationnels	tab. des mat.
travaux antérieur	antérieurs	" " "
équations et hypothèses	équations et hypothèses	" " "
équation de Navier-Stokes	équations	" " "
hypothèse	hypothèses	" " "
méthodes des différences	méthode	" " "
traitements	traitement	" " "
application	applications	" " "
Louis. Marée - Heurie	Louis - Marie - Heuri	1
Augustin - Louis - Cauchy	Augustin - Louis - Cauchy	1
différences finies et les com- posantes de vitesse	sont les composantes de la vitesse	2
des équations de bases	de base	2
champs	champ	2
les écoulements qui satisfait	l'écoulement	3
rotationnelle	rotationnel	3
champ des vitesses habituelles	habituel	3
de champs	champ	4
moins importantes les for- ces d'inertie	moins importantes que les forces d'inertie	6
perte de pression	pertes	6
il n'y a pas de l'énergie	il n'y a pas de conservation de l'énergie	6
fig [II. 2]	fig [II. 2]	9
sur écoulement	sur écoulement	9
ont développés	ont développé	9
lesquelles	lesquels	9
Faghri	Faghri	9
ont élargi	ont élargi	9

Erreur
 H^+ / R
 lignes des avec des courus
 H^+ / R
 Reynolds
 apparition
 de parois
 angles ν / δ
 calcul présent consistant
 Faghi
 ont utilisées
 et de type
 différents
 zones de recirculations
 fonction de courant la
 vorticité
 ont testés
 parois ondulés
 zones forte courbure
 formulés
 zones de recirculations
 equation de Navier-Stokes
 les caractéristique
 régissent
 a donné lieu de nomb.
 vue
 qui implique
 $-\eta^{b^2 x} / b$
 $\alpha \xi$
 $\partial \partial \eta - \eta \beta \partial \partial u$
 $\eta \left\{ \frac{1}{\rho^2} \dots \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\}$

correction
 H^+ / R
 lignes des constantes ξ, η
 avec des courus arrondis
 H^+ / R
 Reynolds
 apparition
 des parois
 angles ν / δ
 est consistant
 Faghi
 ont utilisé
 et ondulée du type
 différents
 de recirculation
 et la vorticité
 ont testé
 ondulés
 de forte
 formulés
 recirculation
 equations
 caractéristiques
 régissent
 a donné lieu à de nombreux
 ce qui implique
 $-\eta \frac{b^2 x}{b}$
 $\alpha^{1/2}$
 $\partial \partial v - \eta \beta \partial \partial u$
 $\partial \left\{ \frac{1}{\rho^2} \dots \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\}$

11
 11
 12
 12
 12
 12
 13
 13
 13
 13
 14
 15
 15
 15
 16
 17
 19
 21
 21
 22
 24
 25
 25
 26
 27
 29

Erreur

on peut pas
les composantes pour résoudre

de Navier-Stokes
partielles

et al

spéciale

$$(P_{i,j}^n - P_{i,j}^{n+1}) / \Delta t + c^2 \left[\frac{1}{2} \right.$$

$$(u_{i+\frac{1}{2},j}^n - u_{i-\frac{1}{2},j}^n) / \Delta x +$$

$$\frac{1}{b} (u_{2i,j+\frac{1}{2}}^n - u_{2i,j-\frac{1}{2}}^n) / \Delta y$$

$$\left. + \beta/b u_{i,j}^n \right] = 0$$

de stabilité
constantes est

V_0 et U_0

identifique

conçue

$$u = 1,6 \cdot 10^{-6}$$

artificiel

connus

courant recirculation

et de la géométrie

toute les figures

la paroi et ou au

divergent

Navier

correction

on ne peut pas

les composantes de la vitesse
et la pression pour résoudre

de Navier-Stokes
partielles

et al

spéciale

$$(P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n) / \Delta t + c^2 \left[\frac{1}{2} \right.$$

$$(u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}) / \Delta x + \frac{1}{b}$$

$$(u_{2i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{2i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}) / \Delta y$$

$$\left. + \beta/b u_{i,j}^{n+1} \right] = 0$$

de stabilité
constantes et

V_0 et V_1

identifique

conçue

$$\bar{v} = 1,6 \cdot 10^{-6}$$

artificielle

connus

de recirculation

et la géométrie

toutes

et au niveau

divergent

Navier

Page

31

31

32

32

34

35

37

38

38

40

40

44

44

44

45

46

46

46

46

58

58

TABLE DES MATIERES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

CHAPITRE I : INTRODUCTION GENERALE :

Introduction :	1
I - 1 - Plan de travail.	2
I - 2 - Définitions et généralités.	2
I - 2 - 1 - Ecoulements permanents et écoulements non permanents	2
I - 2 - 2 - Ecoulements <u>rotationnels</u> et écoulements irrotationnels.	3
I - 2 - 3 - Ecoulements laminaires et écoulements turbulents.	3
I - 2 - 4 - Lignes de courant, fonction de courant ..	5
I - 2 - 5 - Vecteur tourbillon.	5
I - 2 - 6 - Nombre de Reynolds.	6
I - 2 - 7 - Pertes de charge et pertes de pression.	6

CAPITRE II : TRAVAUX ANTERIEURS.

Introduction.	8
II - 1 - Travaux antérieurs.	8
II - 2 - Conclusion	19

CHAPITRE III : EQUATION RT HYPOTHESES DE BASE

Introduction.	20
III - 1 - Equations de base.	20
III - 1 - 1 - Equations du fluide..	20
III - 1 - 2 - Equation de continuité.	20
III - 1 - 3 - Equation de Navier- <u>stokes</u> .	21
III - 2 - Hypothèse de base.	22
III - 3 - Conclusion	22

CHAPITRE IV : MODELISATION MATHEMATIQUE.

Introduction	24
IV - 1 - Transformation géométrique.	24
IV - 2 - Conditions initiales et conditions aux limites.	29
IV - 2 - 1 - Les conditions initiales.	29
IV - 2 - 2 - Les conditions aux limites.	30
IV - 3 - Conclusion	31

CHAPITRE V : MODELISATION NUMERIQUE.

Introduction	32
V - 1 - Méthodes des différences finies.	32
V - 1 - 1 - Notion de consistance, convergence, stabilité.	33
V - 1 - 2 - Schéma explicite et schéma implicite.	34
V - 2 - Méthode de compressibilité artificielle.	34
V - 2 - 1 - Description de la méthode.	35
V - 2 - 2 - Discrétisation de la méthode.	38
V - 2 - 3 - Convergence vers l'état permanent.	38
V - 2 - 4 - Traitements des conditions aux limites.	39
V - 3 - Conclusion.	42

CHAPITRE VI : APPLICATIONS ET RESULTATS.

Introduction.	44
VI-1/ Application	44
VI - 1 - 1 - Première application.	44
a - Présentation de l'application	44
b - Résultats et analyses.	45
VI - 1 - 2 - Deuxième application.	45
a - Présentation de l'application.	45
b - Résultats et analyses.	46

CHAPITRE VII : CONCLUSION GENERALE.

CHAPITRE I

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION

Au 19^{ème} siècle, l'analyse mathématique continue de contribuer au progrès de l'hydraulique parallèlement aux études expérimentales.

Louis-Marcé-Henri Navier (1785-1836) chercha à analyser le mouvement de fluide en tenant compte d'une attraction ou d'une répulsion hypothétique entre les molécules voisines.

Les conceptions de Navier furent reprises par le baron Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) et Siméon-Denis Poisson (1781-1840) mais c'est finalement le mathématicien anglais Sir George Gabriel Stokes (1819-1903) qui introduisit, dans les équations de Navier, le coefficient de viscosité dynamique μ et qui aboutit aux équations classiques de Navier - Stokes concernant l'écoulement des fluides visqueux. Ces équations qui peuvent se condenser en une équation vectorielle unique :

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } \vec{P} = \vec{F} - \vec{\gamma} + \nu \Delta \vec{V}$$

Si on savait intégrer les équations de Navier - Stokes, compte-tenu des conditions aux limites exprimées en fonction du temps, en particulier, en tenant compte des forces de paroi, on pourrait résoudre analytiquement les problèmes d'hydrodynamique.

Mais l'intégration de ces équations se heurte à des difficultés inextricables dès que les termes relatifs à la viscosité ($\nu \Delta \vec{V}$) et les termes relatifs à l'accélération $\vec{\gamma}$ sont du même ordre de grandeur, or, c'est précisément ce qui se produit au voisinage des parois dans la plupart des écoulements que l'on rencontre dans la pratique.

On est donc le plus souvent obligé d'avoir recours à l'expérience pour faciliter l'étude des conditions de l'écoulement ou à la simulation numérique qui propose de résoudre le problème numériquement en le discrétisant c'est à dire en le remplaçant par un problème discret censé lui être proche en un certain sens. On peut réaliser cette approximation par différences finies, par éléments finis, par une méthode particulière ou spectrale...

Notre travail est l'étude d'un écoulement laminaire et permanent dans une conduite périodique à parois sinusoïdales de type convergent divergent. Cette étude est basée sur la résolution numérique des équations de Navier - Stokes en utilisant un schéma aux différences finies et les composantes de vitesse et la pression comme inconnues.

I-1/ PLAN DE TRAVAIL :

Ce travail est subdivisé en six chapitres dont les deux derniers constituent l'originalité de cette étude.

Le 1^{er} chapitre donne un aperçu historique sur l'établissement des équations de Navier -Stokes et la nécessité de l'utilisation de l'analyse numérique pour les résoudre. Ainsi que des définitions des termes qu'on rencontre souvent dans le domaine d'hydraulique.

Le 2^{ème} chapitre est consacré aux travaux antérieurs élaborés et développés sur les écoulements périodiques.

Le 3^{ème} chapitre est conçu pour l'établissement des équations de base de l'écoulement étudié.

Le 4^{ème} chapitre décrit le modèle mathématique et les conditions aux limites du problème.

Le 5^{ème} chapitre, contient les outils numériques qui vont servir de base pour élaborer le programme de calcul.

Le 6^{ème} chapitre présente les résultats obtenus ainsi que les différentes conclusions tirées de cette étude.

I - 2 - DEFINITIONS ET GENERALITES:

I - 2 - 1 - Ecoulements permanents et écoulements non permanents :

i - Ecoulements permanents :

Un écoulement est "permanent " lorsque le champs de vitesse ainsi que la pression et la masse volumique ne dépendent pas du temps. Il s'ensuit alors que :

- U,V,W sont fonctions que de x,y, z seulement.
- les lignes de courant sont des courbes fixes, confondues avec les trajectoires.

Elles ne dépendent pas du temps ce qui permet d'écrire $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

ii - Ecoulements non permanents :

En général, la vitesse \vec{V} en un point M change avec le temps, les lignes de courant changent donc de forme avec le temps. L'écoulement est dit "non permanent" et $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$

I - 2 - 2 - Ecoulements rotationnels et écoulement irrotationnels

i - Ecoulements irrotationnels :

Considérons un écoulement dont les lignes de courant sont des cercles concentriques et la vitesse est donnée par $V = \omega r$

Les écoulements qui satisfont la propriété $\text{rot} \vec{V} = 0$ est appelé écoulement irrotationnel en tout point son vecteur tourbillon $\vec{T} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V}$ est nul.

Si donc il en est ainsi, il existe une fonction $\psi(x, y, z)$ telle que

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad V = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad W = \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

C'est à dire $\vec{V} = \text{grad} \psi$

L'écoulement est dit encore "à potentiel des vitesses" ou tout simplement "écoulement potentiel".

ii - Ecoulements rotationnels :

Lorsque le vecteur tourbillon est différent de zéro, l'écoulement est dit "rotationnel". On l'étudie en associant au champ des vitesses habituelles le champ des vecteurs tourbillons.

I - 2 - 3 - Ecoulements laminaires et écoulements turbulents :

i - Ecoulements laminaires :

Lorsque les forces d'inertie sont nulles ou négligeables devant les forces de viscosité, cela correspond au cas où le nombre de Reynolds est petit, et peut se produire en particulier :

- si le fluide est de grande viscosité cinématique,
- si les vitesses d'écoulement sont relativement lentes,
- s'il s'agit du mouvement d'un corps de dimensions réduites ou des écoulements dans des conduites de dimensions transversales faibles.

- Écoulement de Poiseuille :

On désigne sous le nom "écoulement de Poiseuille", l'écoulement laminaire se produisant entre deux plaques planes. Les lignes de courant sont des droites parallèles à l'axe. La répartition des vitesses est donnée par l'expression suivante :

$$W = \frac{a}{4\mu} (R^2 - r^2) = W_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

qui représente un paraboloïde de révolution ayant son sommet sur l'axe de la conduite. Cette répartition est la même le long de la conduite. La répartition des pressions le long de la conduite est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{dP}{dz} = -a$$

$$P = -az + \text{constante.}$$

La pression décroît donc linéairement le long de la conduite tout en restant constante dans une même section droite.

On peut encore écrire :

$$P_1 - P_2 = al$$

$$a = \frac{P_1 - P_2}{l} = \frac{\Delta P}{l}$$

ΔP est appelée différence de pression.

ii - Écoulements turbulents :

Lorsque les vitesses d'écoulement augmentent, le nombre de Reynolds de l'écoulement augmente et devient supérieur à une valeur critique caractéristique du type d'écoulement $Re \geq 2000$; le mouvement d'un fluide cesse d'être laminaire pour devenir turbulent.

Note : Il existe une zone de transition entre l'écoulement laminaire et l'écoulement turbulent.

I - 2 - 4 - Lignes de courant et fonction de courant :

A l'instant t , on peut définir en chaque point de l'espace le vecteur \vec{V} qui est celui de la vitesse de la particule qui y passe à ce moment. L'ensemble de ces vecteurs constitue un champ de vitesse.

On appelle "ligne de courant" une courbe tangente en chacun de ces points au vecteur vitesse en ce point.

Les lignes de courant sont fournies par les équations :

$$\frac{\partial x}{U} = \frac{\partial y}{V} = \frac{\partial z}{W}$$

ou

$$\frac{\partial x}{U} = \frac{\partial y}{V} = \frac{\partial z}{W}$$

Si par ailleurs, nous considérons la fonction Ψ telle que :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = U$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -V$$

On aura le long d'une ligne de courant :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = 0$$

La fonction Ψ est appelée "fonction de courant" sa valeur est constante le long d'une ligne de courant, et cette constante indique la côte de la ligne de courant.

I - 2 - 5 - Vecteur tourbillon :

Soit le vecteur \vec{T} des composantes (t_1, t_2, t_3) tels que :

$$t_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

$$t_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right)$$

$$t_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

Le vecteur \vec{T} est appelé "vecteur tourbillon" du champ de vitesse, est égal à la moitié du vecteur rotationnel.

$$\vec{T} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V}$$

I - 2 - 6 - Nombre de Reynolds :

C'est le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité qui s'exercent sur une particule de fluide.

$$R_e = \frac{\text{Forces d'inertie}}{\text{Forces de viscosité}} = \frac{UD}{\nu}$$

Ce nombre adimensionnel peut servir à caractériser le régime d'écoulement .

Dans un écoulement à faible nombre de Reynolds, les forces visqueuses sont dominantes c'est à dire que les forces de viscosité sont bien supérieures aux forces d'inertie. Le profil d'écoulement résulte d'un équilibre entre les forces de frottement visqueuses et le gradient de pression. Il s'agit généralement d'un écoulement très stable appelé écoulement laminaire et Re est inférieur à 2000. Dans les équations de Navier - Stokes cela conduit à négliger les termes en $\rho dU/dt$ devant les termes $\mu \nabla^2 U$.

Dans un écoulement à grand nombre de Reynolds ($R_e \geq 2000$), les forces visqueuses sont moins importantes les forces d'inertie et l'écoulement correspondant est beaucoup moins stable c'est l'écoulement turbulent.

I - 2 - 7 - Pertes de charge et pertes de pression :

Quand un écoulement s'effectue avec frottement, il n'y a pas de l'énergie mécanique. Les frottements font en effet apparaître de l'énergie calorifique aux dépens de l'énergie mécanique. Cette dernière diminue au cours du mouvement. on

dit qu'il se produit une "perte de charge". On peut dire alors que la perte de charge représente en hauteur de fluide, la perte d'énergie mécanique totale de l'unité de poids de fluide entre deux points.

La perte de pression représente en unités de pression la perte d'énergie mécanique de l'unité de volume de fluide entre deux points.

CHAPITRE II

TRAVAUX ANTERIEURS

INTRODUCTION :

L'étude aussi bien numérique qu'expérimentale des écoulements dans les conduites à déformations périodiques a été élaborée et développée par plusieurs investigateurs. Les écoulements sont établis et périodiques loin des extrémités des conduites, dont la section varie périodiquement dans le sens du déplacement de fluide. Cette particularité permet de ramener l'étude de ce type d'écoulement à celle d'un module isolé de longueur égal à la distance entre deux sections identiques.

II -1 - TRAVAUX ANTERIEURS :

PATANKER et al [11] ont développé un concept général établi et périodique, illustré sur la figure [II-1], qui est un diagramme schématisé des plaques positionnées transversalement à la direction de l'écoulement.

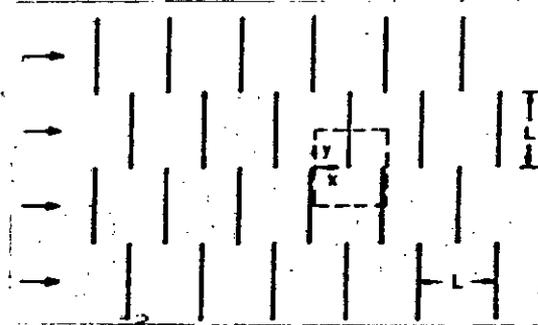


Fig [II-1] diagramme schématisé de la plaque traversée.

Les calculs sont réalisés pour les deux nombres de Reynolds $Re=140$ et $Re=1040$

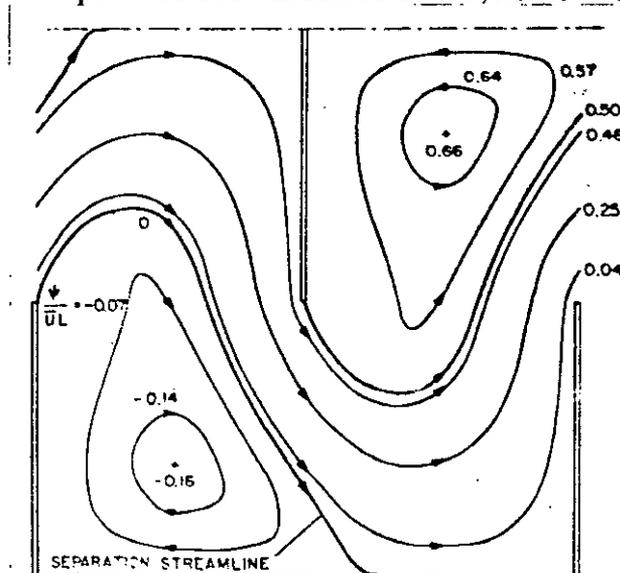
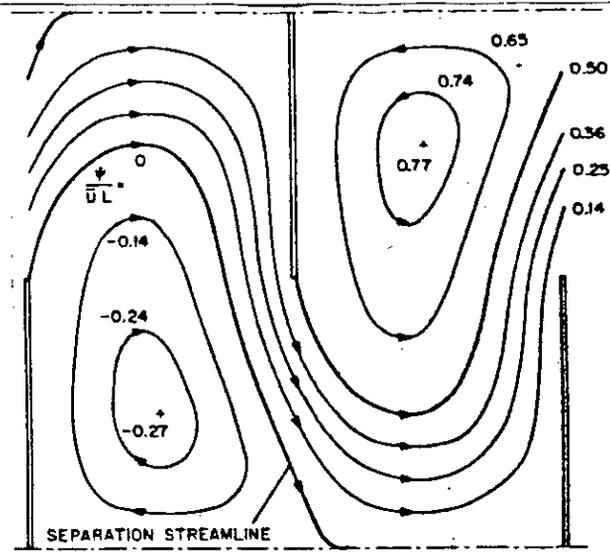


Fig [II-2-a] lignes de courant $Re=140$

Fig [II-2-b] lignes de courant $Re = 1040$

Les profils de lignes de courant représentées sur les fig [11-2] pour $Re = 140$ et $Re = 1040$ respectivement, sont obtenus à partir de la fonction de courant.

$\psi = \int U dy$ On remarque deux phénomènes dominants dans le champ d'écoulement :

- Le premier est la rapidité du fluide de tourner à cause du blocage imposé par les façades des plaques.
- Le deuxième est la zone de recirculation massive située à l'aval de chaque plaque, la dimension de cette zone est un peu plus grande pour des nombres de Reynolds importants.

IZUM et al, ont reportés la solution numérique pour un écoulement laminaire dans une conduite corruguée à deux angles droits coudés, et ont étudiés l'effet des coudes sur les caractéristiques d'écoulement de fluide.

AMANO a aussi étudié numériquement les mêmes conduites pour un écoulement laminaire et un écoulement turbulent. Il a comparé les résultats avec les travaux expérimentaux fait par IZUM et al.

FAGHRI et al, ont développés une méthodologie de résolution des problèmes dans lesquelles une paroi de l'enceinte, enfermant le fluide n'est pas parallèle aux lignes de coordonnées.

ASAKO et FAHGRI [1] ont élargis le champ d'application de ce travail au cas plus général ou les deux parois ne sont pas parallèles aux lignes de coordonnées. La méthode repose sur l'utilisation d'une transformation non

orthogonale de coordonnées qui change le domaine physique du fluide en un domaine rectangulaire de calcul.

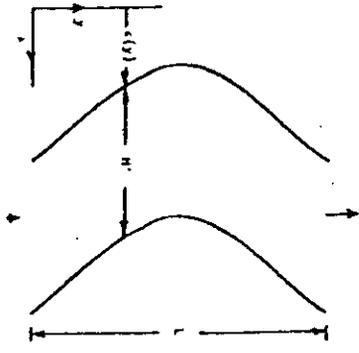


Fig (II-3-a) illustration générale du problème

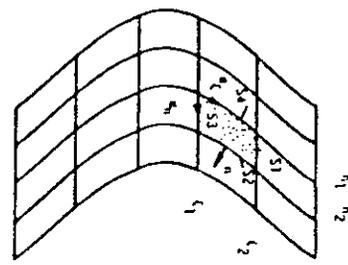


Fig (II-3-b) les lignes de constantes dans le domaine physique. 2

Les résultats numériques sont les suivants pour différents nombre de Reynolds :

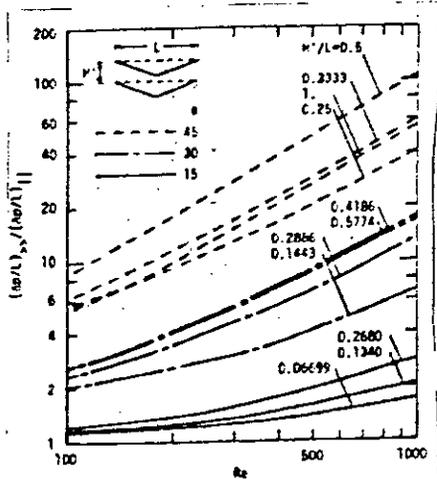


Fig (II-4) comparaison de perte de charge pour une conduite ondulée et une conduite lisse

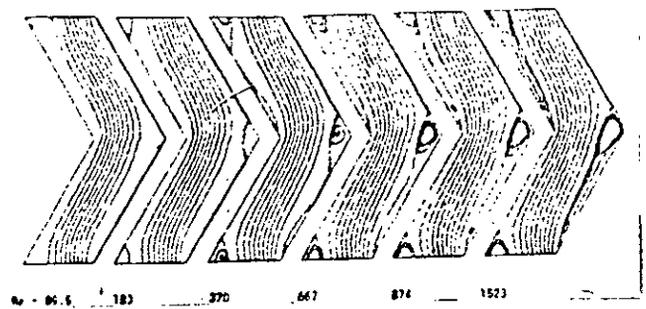


Fig (II-5-a) les lignes de courant pour $\frac{H^D}{l} = 0,2886$, $\theta = 30^\circ$.

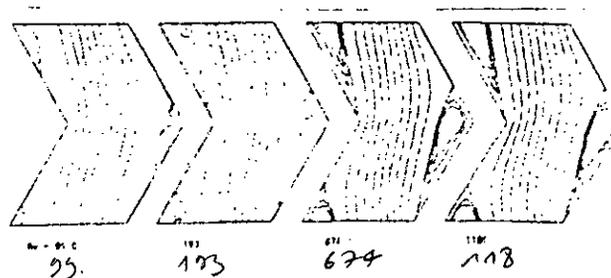


Fig (II-5-b) les lignes de courant pour $\frac{H^D}{l} = 0,5774$ et $\theta = 30^\circ$.

ASAKO, NAKAMURA et FAGHRI [3] ont déterminés numériquement les caractéristiques de perte de charge pour une conduite ondulée avec des coins arrondis. Les frontières sont approchées par des fonctions cosinus.

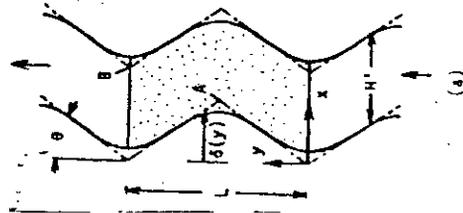


Fig (II-6-a) schéma de la conduite ondulée arrondis

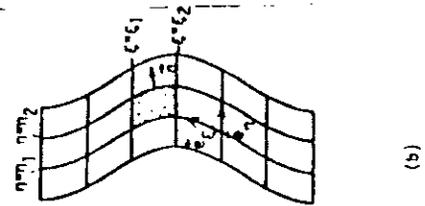


Fig (II-6-b) lignes des avec des coins constantes ξ, η dans le domaine physique.

Les calculs concernent un domaine de nombre de Reynolds allant de 100 à 1000 pour trois angles d'ondulation $15^\circ, 30^\circ$ et 45° .

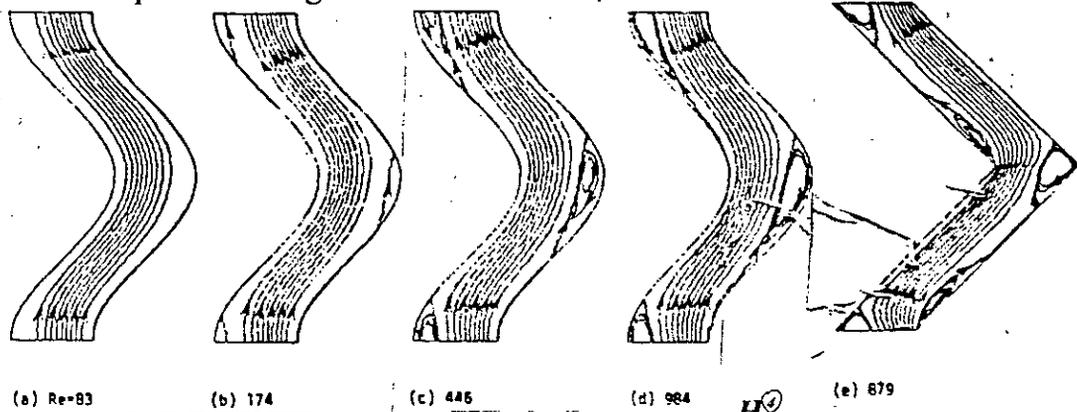


Fig (II-7) les lignes de courant pour $\frac{H^D}{l} = 0,25 \theta = 45^\circ$ [3].

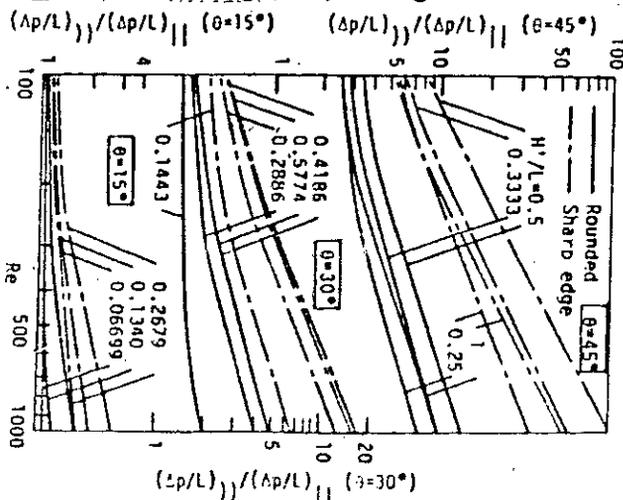


Fig (II-8) comparaison de perte de charge pour une conduite ondulée et une conduite lisse

Dans les figures (II-5-a), (II-7) on remarque une petite déformation de lignes de courant au sommet pour des nombres de Reynolds faibles. Quand le nombre de Reynolds augmente il y a déformation des lignes de courant et apparition des zones de recirculation dans les zones de forte courbure de côté de la paroi. Ce phénomène s'accroît le long du nombre de Reynolds parce que le fluide est incapable de tourner brusquement en suivant la paroi dans ce cas.

On remarque une seule zone de recirculation de côté de parois des conduites à angles arrondis et deux zones de recirculation de côté des parois des conduites à angles vifs.

Les résultats des proportions de perte de charge sont représentés en fonction de nombre de Reynolds sur les figures (II-4), (II-8) avec H'/L et θ (paramètres de courbure). Ces proportions sont déterminées numériquement en devisant ΔP de la conduite ondulée par la valeur correspondante de la conduite cylindrique (écoulement plan de poiseuille) avec un égal de largeur H' pour que le taux de débit massique dans les deux conduites soit le même, la perte de charge dans la conduite à angles arrondis est moindre que celle dans la conduite à angles vifs.

Les données expérimentales de NISHIMURA et al ont été comparées avec ces calculs dans la fig (II-9) ci-dessous:

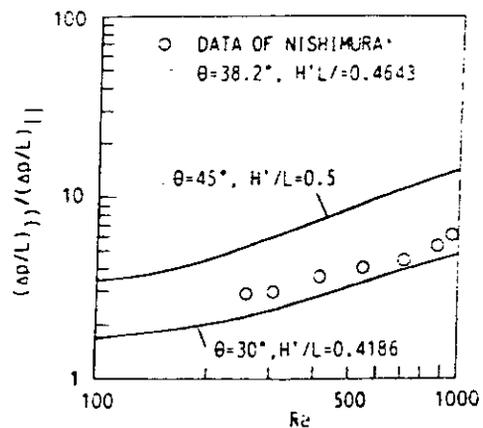


Fig (II-9) comparaison de perte de charge avec les données expérimentales

Les données expérimentales sont pour une conduite $\frac{H'}{l} = 0.4643$ et $\theta = 38,2^\circ$ et les résultats numériques pour une conduite $H'/l = 0.5$ et $\theta = 45^\circ, H'/l = 0.4186$ et $\theta = 30^\circ$

On remarque que le calcul présent consistant avec l'expérience ASAKO et FAHRI [2] ont utilisées un schéma aux différences finies pour déterminer les caractéristiques d'un écoulement dans une conduite périodique et de type convergent-divergent aux sommets d'angles vifs.

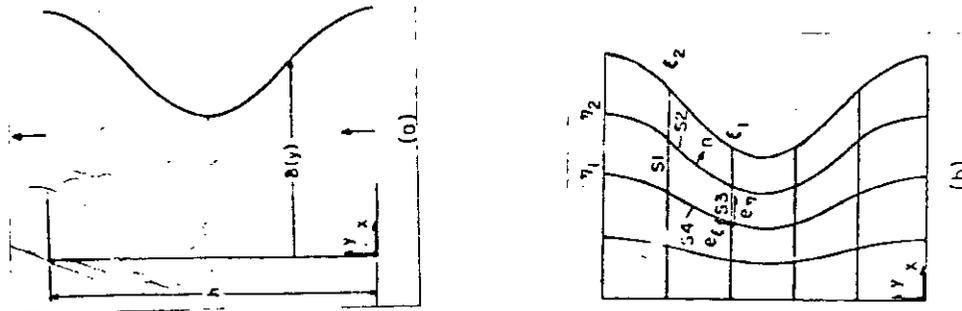


Fig (II-10-a) illustration générale du problème, les lignes de constante ξ, η dans le domaine physique.

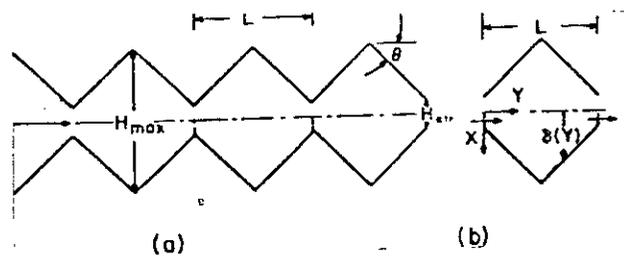


Fig (II-10-b) schéma de la conduite convergent-divergent.

Les résultats obtenus sont illustrés sur les figures suivantes : pour différent nombre de Reynolds.

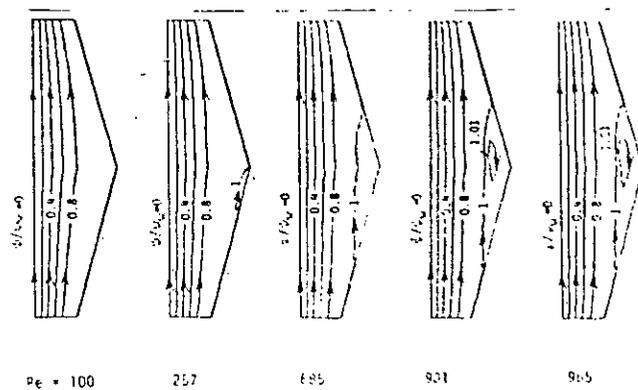


Fig (II-11) les lignes de courant pour $\frac{H_{max}}{H_{min}} = 2$ et $\theta = 15^\circ$

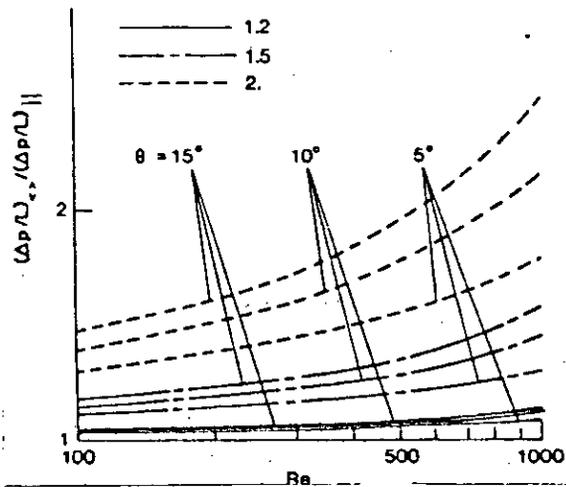


Fig (II-12) comparaison de perte de charge pour une conduite périodique et une conduite cylindrique

Sur la figure (II-11), on remarque une petite déformation des lignes de courant à des nombres de Reynolds qui ne sont pas assez importants, cette déformation s'accroît avec la présence des zones de recirculations aux sommets si le nombre de Reynolds est important.

La figure (II-12) montre que les proportions de perte de charge augmentent avec l'augmentation du nombre de Reynolds, l'angle du sommet est le rapport H_{max}/H_{min} ainsi que la perte de charge dans la conduite périodique est plus grande que celle dans la conduite cylindrique.

HASSAINE, DAGUENET et MENGY [10] ont fait l'étude numérique d'un écoulement bidimensionnelle laminaire et permanent dans une conduite à parois sinusoidales.

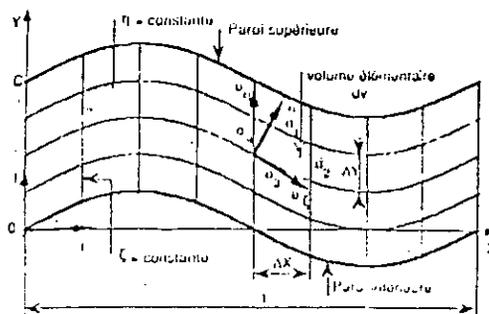


Fig (II-13) domaine physique d'écoulement

Ils ont éliminés la pression dans les équations de Navier-Stokes en introduisant la fonction de courant la vorticité. Ils ont testés la validité du modèle mathématique et du programme informatique en les appliquant à l'écoulement entre deux plaques planes, les deux fluides ayant fait l'objet des calculs sont l'eau et l'air.

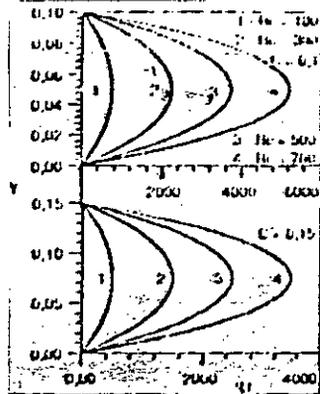


Fig (II-14) profil de la vitesse pour $A = 0$

La figure (II-14) montre qu'on obtient un profil parabolique de la composante horizontale de la vitesse. Les calculs donnent une composante verticale nulle. Les lignes de courant sont parallèles aux parois.

Pour la conduite à parois ondulés, les résultats sont donnés sur les figures suivantes :

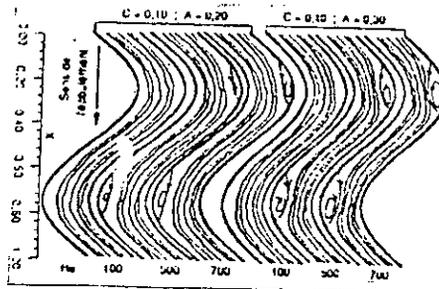


Fig (II-15) les lignes de courant

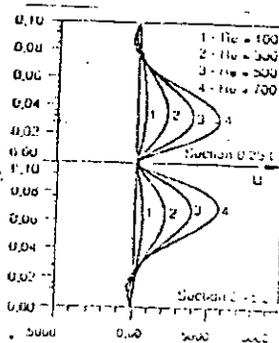


Fig (II-16-a) composante de U de la vitesse pour $C = 0.1$ et $A = 0,3$

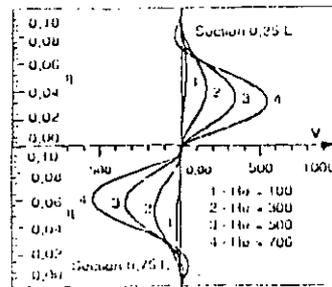


Fig (II-16-b) composante V de la vitesse pour $C=0,1$ et $A=0,3$.

Sur la figure (II-15) pour la représentation des courbes, la hauteur de la conduite a été multipliée par le rapport A/L .

Cette figure montre l'apparition d'une déformation des lignes de courant dans les zones forte courbure du côté de la paroi qui participe le plus au changement de la direction de l'écoulement du fluide, cette déformation s'accroît avec l'augmentation de A et Re . Dans ces zones apparaissent des poches de recirculation qui se situent entre les points de décollements et de réattachement du fluide aux parois.

Les figures (II-16) montrent que les composantes U, V de la vitesse changent d'orientation dans ces zones de forte courbure, cet état de fait confirme la présence d'un courant de recirculation dans ces poches de fluides, cette recirculation est d'autant plus intense que les valeurs de Re et A sont grandes. La juxtaposition des courbes de U au niveau des sections $0,25 L$ et $0,75 L$ fait apparaître une parfaite symétrie axiale entre elles, cela signifie que les profils de U au voisinage de la paroi au niveau d'une section donnée, se répètent au voisinage de la paroi opposée, au niveau d'une section distante $0,5 L$. La juxtaposition des courbes de V présente une symétrie centrale, les profils de V sont donc suivis le même phénomène de répétition ; de plus il y a changement d'orientation de cette composante de la vitesse en raison du changement d'inclinaison des parois.

Ces résultats concordent parfaitement avec la géométrie de la conduite.

AZZI et al [4] ont traité l'écoulement visqueux d'un fluide incompressible dans une conduite ondulée depuis les bords d'entrée jusqu'à la zone d'établissement complet du régime.

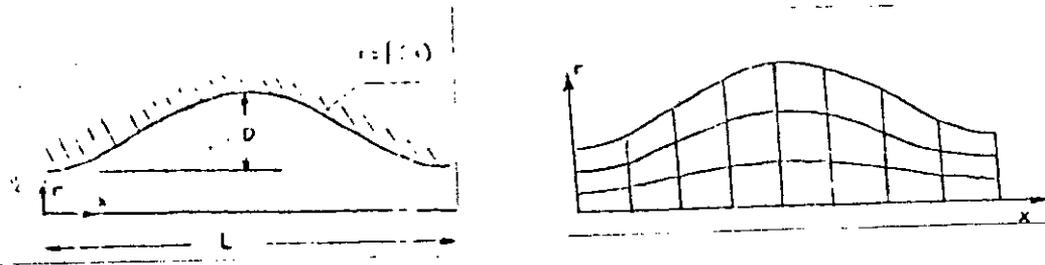


Fig (II-17) géométrie et système de coordonnées.

Les équations de Navier-Stokes formulés en vorticité et fonction de courant sont résolues par un schéma aux différences finies. L'amplitude adimensionnelle est prise égal   2 alors que la longueur d'onde vaut 10. Le nombre de Reynolds varie entre 5 et 100.

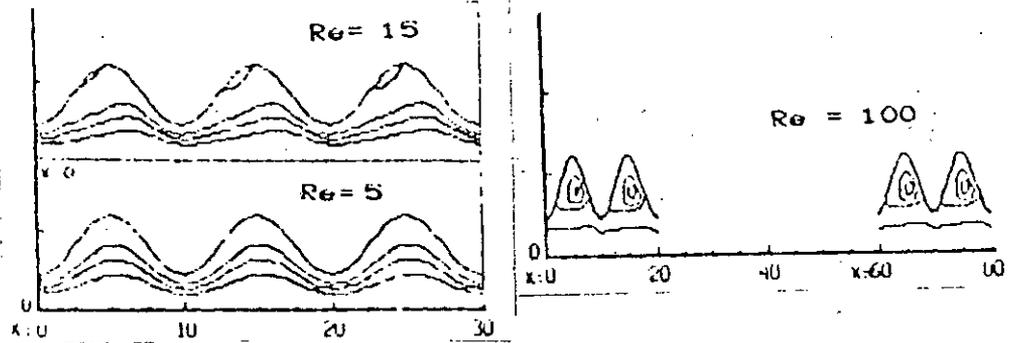


Fig (II-18) lignes de courant

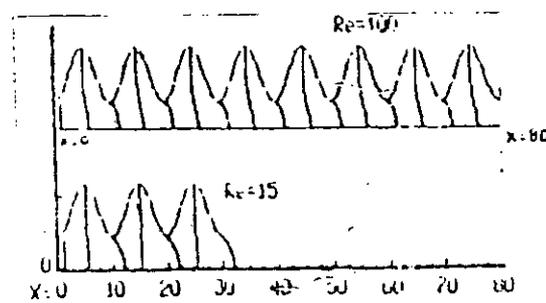


Fig (II-19) profil de la vitesse axiale

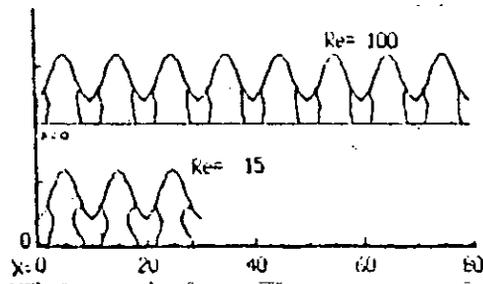


Fig (II-20) profil de la vitesse radiale

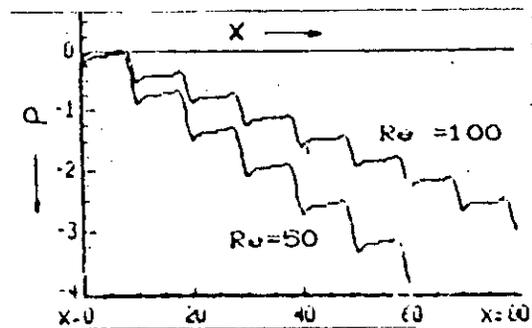


Fig (II-21) distribution de la pression sur la paroi.

La figure (II-18) représente les lignes de courant pour $Re = 5$, $Re = 15$ et $Re = 100$. On remarque que pour les deux premières variantes l'écoulement est complètement développé à partir de la deuxième ondulation, alors que pour $Re = 100$ il ne l'est qu'à partir de la septième ondulation, les zones de recirculation à l'intérieur du creux n'apparaissent qu'à partir de $Re = 15$.

Les figures (II-19), (II-20) représentent les deux composantes de la vitesse pour $Re = 15$ et 100 , on observe des composantes radiales négatives dans les zones des étranglements et positives dans les zones d'élargissements, les valeurs de ces composantes radiales diminuent avec le nombre de Reynolds.

La figure (II-21) représente la distribution de la pression sur la paroi pour $Re = 50$ et 100 .

II - 2 - CONCLUSION :

Dans les différents types des conduites périodiques, on remarque la présence des zones de recirculations du fluide dans les zones de fortes courbures, ces zones ont fortement influencées par l'accroissement du nombre de Reynolds et de l'amplitude de l'ondulation.

Notre travail consiste à résoudre les équations de Navier-Stokes par une méthode numérique aux différences finies.

CHAPITRE III

EQUATIONS ET HYPOTHESES DE BASE

INTRODUCTION

L'écoulement d'un fluide est défini par le vecteur de vitesse \vec{V} qui a les composantes U , V et W dans les directions x , y et z respectivement d'un repère orthogonal, la pression P et la masse volumique ρ pourvu que les propriétés du fluide soient connues par exemple μ (la viscosité dynamique).

Pour déterminer les variables U , V , W , P , ρ on dispose des équations suivantes :

III.1 : EQUATIONS DE BASE :

III.1.1 : Equation de fluide :

Cette équation est appelée aussi équation d'état. Elle définit la nature du fluide. Pour un écoulement incompressible, elle est donnée par l'équation suivante:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (\text{III.1})$$

La densité de chaque particule de fluide reste invariable le long de sa trajectoire .

Il n'est pas nécessaire que toutes les particules aient la même densité. Considérons par exemple un mélange d'huile et d'eau, un fluide hétérogène, qui peut être traité comme incompressible, bien que la densité ne soit pas constante dans l'espace. La relation (III-1) implique seulement que la densité de chaque particule ne change pas durant son mouvement. Par conséquent si à un instant initial (1) est vérifiée, alors la densité de la particule considérée reste invariable au cours du temps. Il s'ensuit que si le fluide est homogène (respectivement hétérogène) à un instant initial il restera homogène (respectivement hétérogène). Ainsi pour le fluide homogène et incompressible on admet que :

$$\rho = \text{constante} \quad (\text{III.2})$$

III - 1 - 2 : Equation de continuité :

(1) Professeur INGEL RYHMING . Dynamique des fluide P 29

Elle traduit le principe de conservation de la masse de la particule de fluide, qui permet d'établir une relation entre certaines caractéristiques du fluide et ses mouvements, indépendamment des causes qui les provoquent.

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (\text{III.3.A})$$

$$\text{avec: } \operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

comme l'écoulement est incompressible,

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

Il suit que :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.3.B})$$

III - 1 - 3 - Equation de Navier-Stokes :

Elles traduisent le principe de mécanique (loi de Newton), qui permet d'établir des relations entre les caractéristiques du fluide, celles de ses mouvements et les causes qui les produisent (forces). Cette loi est appliquée à des particules d'un fluide incompressible et visqueux.

$$\frac{dU}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta U \quad (\text{III.4.A})$$

$$\frac{dV}{dt} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta V \quad (\text{III.4.B})$$

$$\frac{dW}{dt} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \Delta W \quad (\text{III.4.C})$$

les dérivées particulières sont données par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} \\ \frac{dW}{dt} &= \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} \end{aligned}$$

L'opérateur Δ est défini par :

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}$$

III.2 : HYPOTHESES DE BASES :

- La viscosité dynamique μ est constante.
- Le fluide est incompressible ($\rho = \text{cste}$).
- Les forces de volume régissant l'écoulement sont négligées.
- L'écoulement est bidimensionnel ($W = 0$).
- L'écoulement est isotherme.
- Les parois de la conduite ne se déforment pas.

D'après ces hypothèses, les équations de base se simplifient aux équations suivantes:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.5.A})$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta U \quad (\text{III.5.B})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta V \quad (\text{III.5.C})$$

III - 3 - CONCLUSION :

D'après cette description schématique des équations et des hypothèses de base, il est évident qu'on dispose des équations nécessaires pour déterminer les variables inconnues U, V et P

Il faut encore ajouter les conditions aux limites et les conditions initiales afin d'obtenir une formulation complète du point de vue mathématique.

Dans le chapitre qui suit, nous établirons ces équations pour un écoulement laminaire dans une conduite non cylindrique à motifs périodiques de type convergent-divergent sous forme sinusoidale définie par :

- l : Longueur d'onde ou bien le tronçon de la conduite qui se répète chaque période.
- d_0 : Diamètre moyen de la conduite.
- a_0 : Amplitude de la paroi de la conduite.
- $b(x)$: Allure de la courbe de la paroi de la conduite.

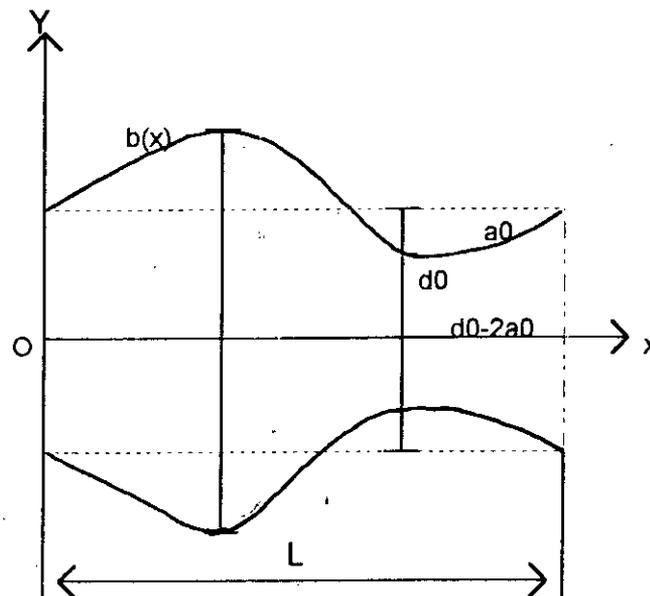


Figure III.1 : Schema de la conduite.

CHAPITRE IV

MODELISATION MATHEMATIQUE

INTRODUCTION : [14]

La résolution des équations de Navier-Stokes a donné lieu de nombreux algorithmes qui utilisent comme inconnues :

- Soit les composantes de la vitesse et la pression (U, V, P).
- Soit le vecteur tourbillon et la fonction de courant (T, Ψ).
- Soit les composantes de la vitesse et la fonction de courant (U, V, Ψ).

L'objet de ce chapitre est de décrire le modèle mathématique pour résoudre ces équations ainsi que les conditions aux limites mises en oeuvre en utilisant les composantes de la vitesse et la pression comme inconnues.

IV - 1 - TRANSFORMATION GEOMETRIQUE : [1,2,3,10,11]

La section de la conduite se répète toutes les longueurs d'onde (fig III-1). De ce fait à partir d'une distance suffisamment grande de l'entrée, l'écoulement devient périodique. Par conséquent, le problème sera ramené à l'étude d'un écoulement dans une conduite de longueur égale à une longueur d'onde, et comme celle-ci est symétrique on prend la moitié du domaine.

Afin de simplifier l'expression des conditions aux limites sur les parois, il est plus convenable de transformer le domaine physique en un domaine rectangulaire de calcul.

On considère les coordonnées (ξ, η) définies par :

$$\begin{cases} \xi = \frac{x}{l} & \text{IV - 1} \\ \eta = \frac{y}{b(x)} & \text{IV - 2} \end{cases}$$

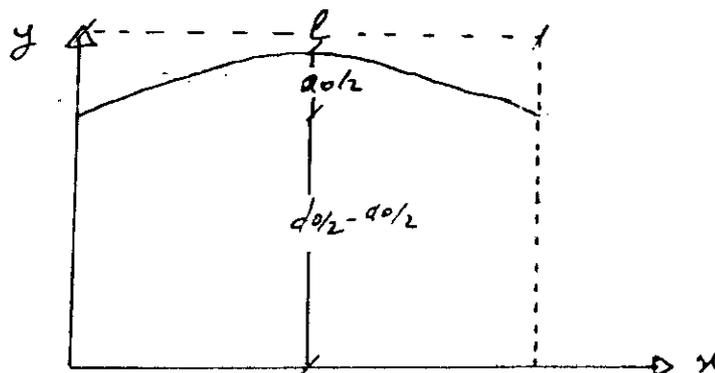


Fig (IV-1) Domaine physique d'écoulement

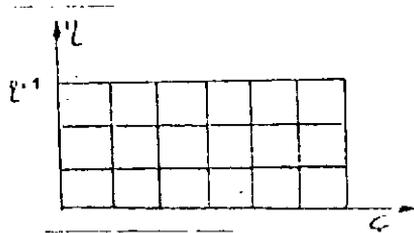


Fig (IV-2) Domaine rectangulaire de calcul

Nous déduisons l'intervalle de variations de coordonnées (ξ, η) :

$$0 \leq \xi \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad \text{IV-3}$$

Il est évident que le volume de contrôle contenu entre les lignes $\eta = \eta_j$ et $\eta = \eta_{j+1}$, $\xi = \xi_i$ et $\xi = \xi_{i+1}$ est un élément curviligne avec des faces non orthogonales.

Les vecteurs unitaires \vec{e}_ξ et \vec{e}_η qui demeurent le long des lignes de la constante ξ et la constante η dans le système en coordonnées physiques ne sont pas perpendiculaires, et \vec{e}_ξ change la direction avec sa position, alors que \vec{e}_η reste parallèle à \vec{e}_y qui implique que :

$$\vec{e}_\eta = \vec{e}_y \quad \text{IV-4-a}$$

Pour déterminer \vec{e}_ξ , considérons le vecteur \vec{n} normal à la ligne de la constante η , le gradient de η est normal à cette ligne d'où :

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} \eta}{|\vec{\nabla} \eta|}$$

$$\text{où} \quad \vec{\nabla} \eta = \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b_1}{b} \\ \frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

$$|\vec{\eta}| = \frac{(1 + \eta^2 b_x^2)^{\frac{1}{2}}}{b}$$

on pose $\beta = \frac{\partial b}{\partial x}$ et $\alpha = 1 + \eta^2 \beta^2$

on aura : $\vec{n} = \frac{(-\eta\beta\vec{e}_x + \vec{e}_y)}{\alpha^{\frac{1}{2}}}$

$\vec{n} \cdot \vec{e}_\xi = 0$ d'ou :

$$\vec{e}_\xi = \frac{(\vec{e}_x + \eta\beta\vec{e}_y)}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \quad \text{IV-4 - b}$$

Les composantes de la vitesse dans l'élément en coordonnées (ξ, η) sont déterminées comme suit :

$$\vec{V} = U\vec{e}_x + V\vec{e}_y = U_\xi\vec{e}_\xi + U_\eta\vec{e}_\eta$$

Mais $\vec{e}_x = \alpha^{\frac{1}{2}}\vec{e}_\xi - \eta\beta\vec{e}_\eta$

$$\vec{V} = U(\alpha^{\frac{1}{2}}\vec{e}_\xi - \eta\beta\vec{e}_\eta) + V\vec{e}_\eta$$

$$= U\alpha^{\frac{1}{2}}\vec{e}_\xi + (V - \eta\beta U)\vec{e}_\eta$$

d'où :

$$U_\xi = U\alpha^{\frac{1}{2}} \quad \text{IV-5-a}$$

$$U_\eta = V - \eta\beta U \quad \text{IV-5-b}$$

Les équations de Navier-Stokes sont écrites dans un repère cartésien suivant les directions des vecteurs unitaires \vec{e}_x et \vec{e}_y respectivement. En multipliant ces équations par \vec{e}_x et \vec{e}_y écrits en fonction de \vec{e}_ξ et \vec{e}_η puis en faisant leur somme et leur projection suivant \vec{e}_ξ , \vec{e}_η on aura :

$$\vec{e}_\xi : \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta U \quad \text{IV-6-a}$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_\eta : \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} - \eta\beta \left[\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right] \\ = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial P}{\partial y} - \eta\beta \frac{\partial P}{\partial x} \right] + \nu \Delta V - \eta\beta \nu \Delta U \end{aligned}$$

En introduisant la composante U_η dans cette dernière équation on aura :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\eta}{\partial t} + U \frac{\partial U_\eta}{\partial x} + V \frac{\partial U_\eta}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial P}{\partial y} - \eta\beta \frac{\partial P}{\partial x} \right] + \nu \Delta U_\eta - U^2 \frac{\partial \eta\beta}{\partial x} - UV \frac{\partial \eta\beta}{\partial y} \\ + 2\nu \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \eta\beta}{\partial x} + 2\nu \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \eta\beta}{\partial y} + \nu U \Delta \eta\beta \end{aligned} \quad \text{IV-6b}$$

Pour représenter les équations aux dérivées partielles par rapport aux données ξ, η , on donne [7] :

i) Dérivée première :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } [J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \eta\beta \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = [j] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } [j] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\eta\beta \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$$

ii) Dérivée deuxième :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial y^2} \\ \frac{\partial}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = [T1] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} + [T2] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$[C_1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} J_{11} & \frac{\partial}{\partial \xi} J_{12} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} J_{21} & \frac{\partial}{\partial \eta} J_{22} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} J_{11} + \frac{\partial}{\partial \xi} J_{21} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} J_{12} + \frac{\partial}{\partial \xi} J_{22} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \eta \beta l^2 - \eta \frac{\beta}{lb} \\ 0 & 0 \\ 0 & \beta l \end{bmatrix}$$

avec :

$$[T_2] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & 2J_{11}J_{12} \\ J_{21} & J_{22} & 2J_{21}J_{22} \\ J_{11}J_{21} & J_{12}J_{22} & J_{11}J_{22} + J_{12}J_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l^2} & \eta^2 \frac{\beta^2}{b^2} & -2\eta \frac{\beta}{lb} \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & -\eta \frac{\beta}{b^2} & \frac{1}{lb} \end{bmatrix}$$

$$[T_1] = -[T_2][C_1][j]$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial y^2} \\ \frac{\partial}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\eta \frac{\beta}{b} - 3\eta \frac{\beta^2}{b^2} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{1}{l^2} \frac{\partial}{\partial \xi^2} + \eta^2 \frac{\beta^2}{b^2} \frac{\partial}{\partial \eta^2} - 2\eta \frac{\beta}{lb} \frac{\partial}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{1}{b^2} \frac{\partial}{\partial \eta^2} \\ \frac{\beta}{b^2} \frac{\partial}{\partial \eta} - \eta \frac{\beta}{b^2} \frac{\partial}{\partial \eta^2} + \frac{1}{lb} \frac{\partial}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix}$$

A l'aide de ces dérivées, on obtient les équations de mouvement régissant l'écoulement dans le domaine de calcul .

- Equation de continuité :

$$\frac{1}{l} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{1}{b} \frac{\partial U_n}{\partial \eta} + \frac{\beta}{b} U = 0 \quad \text{IV-7-a}$$

- Equation de mouvement suivant \vec{e}_ξ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{l} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{U_n}{b} \frac{\partial U}{\partial \eta} &= -\frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{l} \frac{\partial P}{\partial \xi} - \eta \frac{\beta}{b} \frac{\partial P}{\partial \eta} \right] + \\ \checkmark \quad \underline{\eta} \left\{ \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\alpha}{b^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - 2\eta \frac{\beta}{lb} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} - \left(\eta \frac{\beta}{b} - 3\eta \frac{\beta^2}{b^2} \right) \frac{\partial U}{\partial \eta} \right\} & \quad \text{IV-7-b} \end{aligned}$$

- Equation de mouvement suivant \vec{e}_η :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_n}{\partial t} + \frac{U}{l} \frac{\partial U_n}{\partial \xi} + \frac{U_n}{b} \frac{\partial U_n}{\partial \eta} &= -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\alpha}{b} \frac{\partial P}{\partial \eta} - \eta \frac{\beta}{l} \frac{\partial P}{\partial \xi} \right] + \\ \checkmark \quad \underline{\eta} \left\{ \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2 U_n}{\partial \xi^2} + \frac{\alpha}{b^2} \frac{\partial^2 U_n}{\partial \eta^2} - 2\eta \frac{\beta}{lb} \frac{\partial^2 U_n}{\partial \xi \partial \eta} - \left(\eta \frac{\beta}{b} - 3\eta \frac{\beta^2}{b^2} \right) \frac{\partial U_n}{\partial \eta} \right\} & \quad \text{IV-7-c} \\ \frac{\beta}{b} U U_n - \eta \beta U^2 + U \underline{v} \Delta \eta \beta + 2 \underline{v} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \eta \beta}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \left(\beta \frac{\alpha}{b^2} - \eta^2 \frac{\beta \beta}{b} \right) \frac{\partial U}{\partial \eta} \right\} & \end{aligned}$$

IV - 2 - CONDITIONS INITIALES ET CONDITIONS AUX LIMITES : [5]

D'une manière générale une équation aux dérivées partielles admet une infinité de solutions. La solution particulière désirée est déterminée à partir de certaines conditions appelées conditions initiales et conditions aux limites.

IV - 2 - 1 - Les conditions initiales :

Elles sont utilisées dans le cas instationnaire (non permanent). On se fixe des valeurs initiales pour notre problème à l'instant $t = t_0$.

IV - 2 - 2 - Les conditions aux limites:

Elles portent sur le comportement particulier de la solution sur une courbe qu'on appelle frontière ou limite. Les principales conditions aux limites rencontrées sont les suivantes :

- Conditions de CAUCHY : On impose la valeur de la fonction ainsi que la dérivée normale.
- Conditions de DIRICHLET : on impose les valeurs de la fonction .
- Conditions de NEWMANN : On impose les valeurs de la dérivée normale de la fonction.
- Conditions mixte : On impose les conditions de Dirichlet sur une partie de la frontière et des conditions de Newmann sur l'autre partie
- Conditions de Fourier : On donne une combinaison lineaire entre la fonction et la dérivée normale.

i) Les conditions sur les parois :

Dans notre étude le fluide est homogène et visqueux et les parois ne se déforment pas ce qui nous permet d'écrire les relations suivantes :

$$U(x, b(x)) = U(\xi, 1) = 0 \quad \text{IV-8-a}$$

$$V(x, b(x)) = V(\xi, 1) = 0 \quad \text{IV-8-b}$$

ii) Les conditions sur l'axe :

Par raison de symetrie géométrique on a :

$$V(x, 0) = V(\xi, 0) = 0 \quad \text{IV-9-a}$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{x,0} = \left. \frac{\partial U}{\partial \eta} \right|_{\xi,0} = 0 \quad \text{IV-9-b}$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{x,0} = \left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_{\xi,0} = 0 \quad \text{IV-9-c}$$

iii) Les conditions amont et aval (conditions de périodicité):

Vue la géométrie de la conduite, la section se répète périodiquement (chaque longueur d'onde), l'écoulement devient périodique à une distance suffisamment grande de l'entrée de la conduite.

Pour la vitesse, cette périodicité se traduit par les relations suivantes [10]

$$U(x, y) = U(x+l, y) = U(x+2l, y) = \dots \quad \text{IV-10-a}$$

$$V(x, y) = V(x+l, y) = V(x+2l, y) = \dots \quad \text{IV-10-b}$$

Mais pour la pression on peut pas déterminer cette condition de périodicité, sauf si on l'exprime [1,2,3,11] :

$$P(x, y) = - \lambda_p x + P'(x, y)$$

où λ_p est une constante défini par :

$$\lambda_p = [P(x, y) - P(x+l, y)] / l$$

$P'(x, y)$ est le terme périodique de la pression :

$$P'(x, y) = P'(x+l, y) = P'(x+2l, y) = \dots \quad \text{IV-10-c}$$

Par la suite le problème sera ramené à l'étude d'un module isolée de longueur égale à une longueur d'onde . Et comme la conduite est symétrique, on prend la moitié du domaine .

IV - 3 - CONCLUSION :

Le modèle mathématique est basé sur une transformation non orthogonale de coordonnées qui change le domaine physique complexe du fluide en un domaine rectangulaire de calcul.

de vitesses et la pression.

Ce modèle utilise les composantes pour résoudre les équations de Navier-Stokes. Celles-ci seront discrétisées dans le chapitre suivant selon une approche en différences finies.

CHAPITRE V

MODELISATION NUMERIQUE

INTRODUCTION

L'emploi rationnel, par les scientifiques des moyens de calcul modernes n'est pas aussi naturel qu'il y paraît. En effet, un mécanicien, un physicien ou un ingénieur..., c'est d'abord un spécialiste d'une discipline dont il connaît les lois et les modèles. Certes, il a appris, comme l'exigent aujourd'hui toutes les écoles et les universités, au moins un langage de programmation scientifique. Mais, on ne passe pas directement d'un modèle physique qui se traduit souvent par une équation différentielle, une équation intégrale ou une équation aux dérivées partielles, à l'écriture d'un programme.

En effet, la résolution d'un problème signifie l'obtention des valeurs d'une (ou plusieurs) inconnue(s) en fonction des variables qui prennent une infinité de valeurs possibles. Or l'ordinateur tout comme l'homme qui l'a créé est "fini" dans toutes les directions : il est limité en place-mémoire en précision, en durée de fonctionnement. Il faut donc "discrétiser" le problème, i.e le remplacer par un problème discret censé lui être "proche" en un certain sens. On peut réaliser une approximation par plusieurs méthodes. Ces méthodes sont nombreuses, mais leur choix ou leur emploi représente tout un art : c'est l'analyse numérique. Et c'est l'objet du présent chapitre, dans lequel on traite les équations du Navier-Stokes par une méthode aux différences finies dont les inconnues sont les composantes de vecteur vitesse (U, V) et la pression P.

V - 1 - METHODE DES DIFFERENCES FINIES [5] :

C'est une ancienne méthode, qui permet la résolution des équations différentielles et les équations aux dérivées partielles. Elle donne une solution approchée à ces équations en remplaçant chaque dérivée par une différence de valeurs d'inconnues basée sur le développement de Taylor.

V - 1 - 1 - NOTION DE CONSISTANCE, DE CONVERGENCE ET DE STABILITE:

a/ Stabilité d'un schéma aux différences finies:

Etant donné une équation aux dérivées partielles $F(U, V, P)$ on notera :

\tilde{f}_i^n : la solution analytique exacte

F_i^n : la solution exacte du schéma aux différences

f_i^n : la solution numérique trouvée.

La quantité $S_i^n = |F_i^n - f_i^n|$ est l'erreur de stabilité du schéma aux différences.

Il s'agit d'une erreur locale au noeud (i, j, n) cette erreur résulte de l'accumulation des erreurs d'arrondi.

Nous admettons qu'un schéma aux différences finies est stable si la valeur maximum $|F_i^n - f_i^n|$ tend vers zéro avec les dimensions du maillage, et ne croit pas exponentiellement

b - Consistance d'un schéma aux différences finies :

On dit qu'un schéma est consistant si l'erreur de troncature (qui est le terme négligé dans le développement de Taylor d'une fonction) tend vers zéro lorsque les dimensions du maillage tendent vers zéro.

c - Convergence d'un schéma aux différences finies :

Un schéma est dit convergent quand :

$d_i^n = |\bar{f}_i^n - F_i^n|$ tend vers zéro quand les dimensions du maillage tendent vers zéro.

d_i^n est l'erreur de discrétisation.

V-1-2/ SCHEMA EXPLICITE ET SCHEMA IMPLICITE :

a/ Schéma explicite :

Si chaque valeur approchée de la solution au temps $t + \Delta t$ et au point x est décrite à partir des valeurs de la solution précédente au temps t . Cette valeur est donc explicitement fonction des valeurs connues déjà calculées, et s'obtient directement pour chaque x .

b- Schéma implicite :

Si la valeur approchée en un point au temps $t + \Delta t$ est écrite en fonction de la solution précédente au temps t et les valeurs voisines au temps $t + \Delta t$. Il s'agit donc d'une liaison implicite entre toutes les valeurs au temps $t + \Delta t$, qui se résoud globalement.

V-2/ METHODE DE COMPRESSIBILITE ARTIFICIELLE [12]

Les principales difficultés associées à la résolution des équations de Navier-Stokes dont les inconnues sont la vitesse et la pression sont :

- la présence de la contrainte $\nabla V = 0$ qu'il faut satisfaire à chaque instant, ne permet pas l'utilisation d'une méthode explicite simple.
- il y a un manque de conditions aux limites pour la pression.

Dans le cas permanent, la difficulté $\nabla V = 0$ peut être surmontée en utilisant la méthode de compressibilité artificielle.

V - 2 -1.- DESCRIPTION DE LA METHODE :

La méthode de compressibilité artificielle a été introduite indépendamment sous différentes formes par Vladimirova *et al* (1965) et par Chorin (1967).

La méthode de Chorin est établie en écrivant en premier l'équation de continuité perturbée:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + C^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0 \quad (V-1)$$

Où C^2 est une constante arbitraire.

Cette équation n'a pas un sens physique avant que la condition $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ soit atteinte. La contrainte $\nabla V = 0$ est satisfaite seulement à la convergence.

Le paramètre C^2 doit être choisi pour assurer la convergence ; i.e assurer l'existence de la solution numérique permanente du système d'équations (équations de moment - équation de continuité) avec les conditions aux limites et les conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \vec{V}_0 \text{ à } t = t_0 \\ P &= P_0 \text{ à } t = t_0 \\ \vec{V}_0 \text{ et } P_0 &\text{ sont arbitraires} \end{aligned}$$

V - 2 - 2 - DISCRETISATION DE LA METHODE :

La discrétisation speciale utilise la maille Marker-And-Cell (MAC) introduite par Harlow et Welsh (1965). On considère une discrétisation très simple dans le temps. L'approximation des équations de mouvement dans les coordonnées (x, y) est :

suivant \bar{e}_x :

$$\frac{1}{\Delta t}(U_{i+1/2,j}^{n+1} - U_{i+1/2,j}^n) + a_{i+1/2,j}^n + \frac{1}{\rho} \Delta_x^l P_{i+1/2,j}^n = \nu \nabla_h U_{i+1/2,j}^n \quad (\text{V-2-a})$$

suivant \bar{e}_y ,

$$\frac{1}{\Delta t}(V_{i,j+1/2}^{n+1} + V_{i,j+1/2}^n) + b_{i,j+1/2}^n + \frac{1}{\rho} \Delta_y^l P_{i,j+1/2}^n = \nu \nabla_h V_{i,j+1/2}^n \quad (\text{V-2-b})$$

l'équation de continuité :

$$\frac{1}{\Delta t}(P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n) + C^2(\Delta_x^l U_{i,j}^{n+1} + \Delta_y^l V_{i,j}^{n+1}) = 0 \quad (\text{V-2-c})$$

Les opérateurs Δ_x^l, Δ_y^l , et Δ_h sont définis par :

$$\Delta_x^l f_{l,m} = \frac{1}{\Delta x}(f_{l+1/2,j} - f_{l-1/2,j})$$

$$\Delta_y^l f_{l,m} = \frac{1}{\Delta y}(f_{l,m+1/2} - f_{l,m-1/2})$$

$$\nabla_h^2 f_{l,m} = \Delta_{xx} f_{l,m} + \Delta_{yy} f_{l,m}$$

$$\nabla_{xx} f_{l,m} = \frac{1}{\Delta x^2}(f_{l+1,m} - 2f_{l,m} + f_{l-1,m})$$

$$\nabla_{yy} f_{l,m} = \frac{1}{\Delta y^2}(f_{l,m+1} - 2f_{l,m} + f_{l,m-1})$$

Les termes $a_{i+1/2,j}^n$ et $b_{i,j+1/2}^n$ sont des approximations définies par :

$$a_{i+1/2,j}^n = U_{i+1/2,j}^n \Delta_x^p U_{i+1/2,j}^n + \hat{V}_{i+1/2,j}^n \Delta_y^p U_{i+1/2,j}^n$$

$$b_{i,j+1/2}^n = \hat{U}_{i,j+1/2}^n \Delta_x^p V_{i,j+1/2}^n + V_{i,j+1/2}^n \Delta_y^p V_{i,j+1/2}^n$$

ou

$$\hat{U}_{i,j+1/2}^n = \frac{1}{4} (U_{i+1/2,j}^n + U_{i+1/2,j+1}^n + U_{i-1/2,j}^n + U_{i-1/2,j+1}^n)$$

$$\hat{V}_{i+1/2,j}^n = \frac{1}{4} (V_{i+1,j+1/2}^n + V_{i,j+1/2}^n + V_{i,j-1/2}^n + V_{i+1,j-1/2}^n)$$

$$(\hat{U}^2)_{i,j}^n = \frac{1}{4} (U_{i+1/2,j}^n + U_{i-1/2,j}^n)^2$$

$$(\hat{V}^2)_{i,j}^n = \frac{1}{4} (V_{i,j+1/2}^n + V_{i,j-1/2}^n)^2$$

$$(\hat{UV})_{i,j}^n = \frac{1}{4} (U_{i+1/2,j+1}^n + U_{i+1/2,j}^n) (V_{i+1,j+1/2}^n + V_{i,j+1/2}^n)$$

$$\Delta_x^p f_{l,m} = \frac{1}{2\Delta x} (f_{l+1,m} - f_{l-1,m})$$

$$\Delta_y^p f_{l,m} = \frac{1}{2\Delta y} (f_{l,m+1} - f_{l,m-1})$$

D'après le schéma, on peut discrétiser nos équations écrites dans les coordonnées (ξ, η) comme suit :

suivant \vec{e}_ξ

$$\frac{U_{i+1/2,j}^{n+1} - U_{i+1/2,j}^n}{\Delta t} + \frac{U_{i+1/2,j}^n}{l} \left(\frac{U_{i+3/2,j}^n - U_{i-1/2,j}^n}{2\Delta \xi} \right) +$$

$$\frac{1}{4b} (U_{i+1,j+1/2}^n + U_{i,j+1/2}^n + U_{i,j-1/2}^n + U_{i+1,j-1/2}^n) \frac{U_{i+1/2,j+1}^n - U_{i+1/2,j-1}^n}{2\Delta \eta} = -$$

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{l} \frac{P_{i+1,j}^n - P_{i,j}^n}{\Delta \xi} - \frac{\eta \beta}{b} \frac{P_{i+1/2,j+1/2}^n - P_{i+1/2,j-1/2}^n}{\Delta \eta} \right) + v \left(\frac{1}{l^2} \left(\frac{U_{i+3/2,j}^n - 2U_{i+1/2,j}^n + U_{i-1/2,j}^n}{\Delta \xi^2} \right) + \right.$$

$$\left. \frac{\alpha}{b^2} \left(\frac{U_{i+1/2,j+1}^n - 2U_{i+1/2,j}^n + U_{i+1/2,j-1}^n}{\Delta \eta} \right) - \frac{2\eta \beta}{lb} \left(\frac{U_{i+1,j+1/2}^n - U_{i+1,j-1/2}^n - U_{i,j+1/2}^n + U_{i,j-1/2}^n}{\Delta \xi \Delta \eta} \right) - \right.$$

$$\left. \left(\frac{\eta \beta'}{b} - \frac{3\eta \beta^2}{b^2} \right) \left(\frac{U_{i+1/2,j+1}^n - U_{i+1/2,j-1}^n}{\Delta \eta} \right) \right) \quad (V-3-a)$$

suivant e_{η} :

$$\begin{aligned} & \frac{U_{\eta_i,j+1/2}^{n+1} - U_{\eta_i,j+1/2}^n}{\Delta t} + \frac{1}{4l} (U_{i+1/2,j}^n + U_{i+1/2,j+1}^n + U_{i-1/2,j}^n + U_{i-1/2,j+1}^n) \frac{U_{\eta_{i+1,j+1/2}}^n - U_{\eta_{i-1,j+1/2}}^n}{2\Delta\xi} \\ & \frac{U_{\eta_i,j+1/2}^n}{b} \left(\frac{U_{\eta_{i,j+3/2}}^n - U_{\eta_{i,j-1/2}}^n}{2\Delta\eta} \right) = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\alpha P_{i,j+1}^n - P_{i,j}^n}{b \Delta\eta} - \frac{2\eta\beta P_{i+1/2,j+1/2}^n - P_{i-1/2,j+1/2}^n}{l \Delta\xi} \right) \\ & v \left(\frac{1}{l^2} \frac{U_{\eta_{i+1,j+1/2}}^n - 2U_{\eta_{i,j+1/2}}^n + U_{\eta_{i-1,j+1/2}}^n}{\Delta\xi^2} + \frac{\alpha}{b^2} \frac{U_{\eta_{i,j+3/2}}^n - 2U_{\eta_{i,j+1/2}}^n + U_{\eta_{i,j-1/2}}^n}{\Delta\eta^2} \right. \\ & \left. \frac{2\eta\beta U_{\eta_{i+1/2,j+1}}^n - U_{\eta_{i,j+1/2}}^n - U_{\eta_{i-1/2,j+1}}^n + U_{\eta_{i-1/2,j}}^n}{lb \Delta\xi\Delta\eta} - \left(\frac{\eta\beta'}{b} - \frac{3\eta\beta^2}{b^2} \right) \frac{U_{\eta_{i,j+3/2}}^n - U_{\eta_{i,j-1/2}}^n}{\Delta\eta} \right) \\ & 2v \left(\frac{1}{l} \left(\eta\beta' - \frac{\eta\beta^2}{b} \right) \frac{U_{i+1,j+1/2}^n - U_{i-1,j+1/2}^n}{2\Delta\xi} + \left(\frac{\alpha\beta}{b^2} - \frac{\eta^2\beta\beta'}{b} \right) \frac{U_{i,j+3/2}^n - U_{i,j-1/2}^n}{2\Delta\eta} \right) \\ & + \frac{v\eta}{4b^2} (\beta' b^2 + 2\beta^2 - 3\beta\beta' b) (U_{i+1/2,j}^n + U_{i+1/2,j+1}^n + U_{i-1/2,j}^n + U_{i-1/2,j+1}^n) \\ & + \frac{\beta}{4b} (U_{i+1/2,j+3/2}^n + U_{i+1/2,j+1/2}^n) (U_{\eta_{i+1,j+1}}^n + U_{\eta_{i,j+1}}^n) - \frac{\eta\beta'}{4} (U_{i+1/2,j+1/2}^n + U_{i-1/2,j+1/2}^n)^2 \end{aligned} \quad (v-3-b)$$

l'equation de continuité :

$$\frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n}{\Delta t} + C^2 \left(\frac{1}{l} \frac{U_{i+1/2,j}^{n+1} - U_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta\xi} + \frac{1}{b} \frac{U_{\eta_{i,j+1/2}}^{n+1} - U_{\eta_{i,j-1/2}}^{n+1}}{\Delta\eta} + \frac{\beta}{b} U_{i,j}^{n+1} \right) = 0 \quad (V-3-c)$$

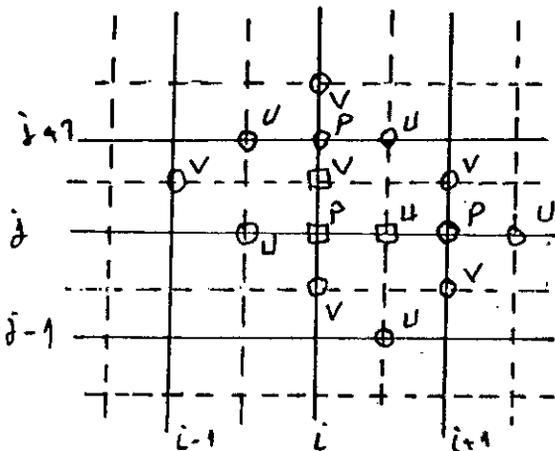


Fig (V-1) maille MAC utilisée pour le schéma de compressibilité artificielle dans les coordonnées (x, y)

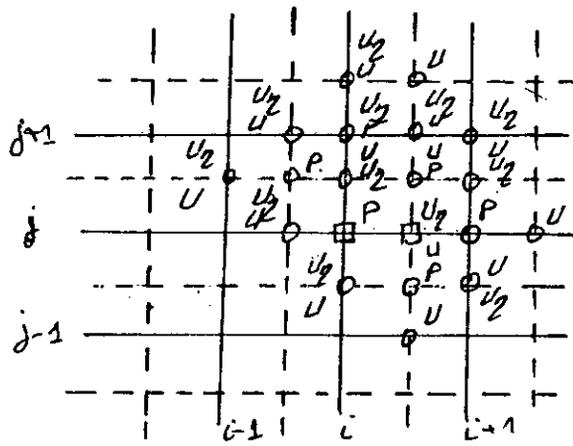


Fig (V-2) maille MAC utilisée pour le schéma de compressibilité artificielle dans les coordonnées (ξ, η)

V - 2 - 3 - CONVERGENCE VERS L'ETAT PERMANENT :

L'objectif de la méthode de compressibilité artificielle est d'obtenir la solution permanente caractérisée par :

$$\max\left(\frac{1}{\Delta t}|U^{n+1} - U^n|, \frac{1}{\Delta t}|V^{n+1} - V^n|, \frac{1}{C^2 \Delta t}|P^{n+1} - P^n|\right) \leq \varepsilon \quad (\text{V-4})$$

Pour établir la stabilité, une analyse approximative linéaire est faite. On pose :

$$\begin{aligned} U_{i+1/2,j} &= \hat{U}_{i,j+1/2} = U_0 \quad (\text{constante}) \\ V_{i,j+1/2} &= \hat{V}_{i+1/2,j} = V_0 \quad (\text{constante}). \end{aligned}$$

La première étude est faite en négligeant le terme de pression dans notre système d'équations (V-2). D'où les deux équations de mouvement sont de type :

$$f_{i,j}^{n+1} = \left(I - \Delta t (U_0 \mathcal{L}_x + V_0 \mathcal{L}_y - \frac{1}{Re} \nabla_h^2) \right) f_{i,j}^n$$

ou I est un opérateur d'identité.

Les conditions de stabilité de ce schéma sont :

$$\frac{1}{2}(U_0^2 + V_0^2) \Delta t \leq 2\nu \quad (\text{V-5-a})$$

$$\frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{4} \quad (\text{V-5-b})$$

Dans le cas général, le critère de stabilité associé à l'équation suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + A \frac{\partial f}{\partial x} + B \frac{\partial f}{\partial y} - \nu \nabla^2 f = 0$$

ou A, B et ($\nu > 0$) sont des constantes est :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{4\nu + (|A| + |B|)\Delta x} \quad (\text{V-5-c})$$

ou $\Delta x = \Delta y$

La deuxième analyse approximative de stabilité peut être accomplie en négligeant le terme ($U_0 = V_0 = \theta$) et en conservant le terme de pression

$$\begin{aligned}
 U_{i+1/2,j}^{n+1} &= (I - \frac{\Delta t}{Re} \nabla_h^2) U_{i+1/2,j}^n - \Delta t \Delta_x^1 P_{i+1/2,j}^n \\
 V_{i,j+1/2}^{n+1} &= (I - \frac{\Delta t}{Re} \nabla_h^2) V_{i,j+1/2}^n - \Delta t \Delta_y^1 P_{i,j+1/2}^n \\
 P_{i,j}^{n+1} &= P_{i,j}^n - \Delta t C^2 (\Delta_x^1 U_{i,j}^{n+1} + \Delta_y^1 V_{i,j}^{n+1})
 \end{aligned}$$

Ce système peut être écrit sous la forme :

$$[G]^{n+1} = [M][G]^n$$

Pour que ce schéma soit stable il faut et il suffit que le rayon spectral associé à la matrice [M] soit inférieur ou égal à 1

$$\rho(M) = \text{Max} |\lambda_i| \leq 1$$

λ_i sont les valeurs propres obtenues en résolvant l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 \det(M - \lambda I) &= 0 \\
 \frac{4 \Delta t}{\Delta x^2} \left(\frac{1}{Re} + \frac{\Delta t C^2}{2} \right) &\leq 1 \quad C^2 \geq 0 \quad (V-5-d)
 \end{aligned}$$

V - 2 - 4 - TRAITEMENT DES CONDITIONS AUX LIMITES :

Soit Γ la limite de domaine des calculs $\vec{V}_\Gamma = (U_\Gamma, V_\Gamma)$

Si V_j est calculée de l'équation, les approximations de $b(U, V)$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ entraînent la valeur V_0 qui se trouve en dehors de domaine de calcul. Cette valeur peut être définie par plusieurs méthodes.

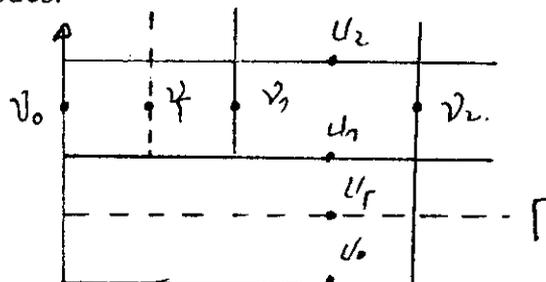


Figure (V-3) mailla MAC près de la limite Γ

La première technique consiste à écrire la vitesse V_r sur Γ en fonction de V_0 et $\underbrace{U_0}_{\sqrt{\Delta}}$

$$V_0 = 2V_r - V_1 \quad (\text{V-6-a})$$

V_0 est définie par une extrapolation linéaire.

La deuxième technique est partiellement identique à la précédente.

Elle consiste l'approximation des dérivées au point 1 Fig (V-3) avec le 1er ordre de différences décentré. Donc, pour le premier ordre dérivatif

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_1 = \frac{1}{2\Delta x} (V_2 - V_1 - 2V_r) \quad (\text{V-6-b})$$

et pour le second ordre dérivatif :

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_1 = \frac{4}{3\Delta x^2} (V_2 - 3V_1 + 2V_r) \quad (\text{V-6-c})$$

En fait, de point de vue programmation, au point 1 on peut utiliser l'approximation générale centrée et les formules (V-6) pour définir la valeur extérieure V_0

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_1 = \frac{V_2 - V_0}{2\Delta x} = \frac{1}{2\Delta x} (V_2 + V_1 + 2V_r)$$

Cette égalité donne une valeur V_0 identique à (V-6-a). De la même manière l'équation :

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_1 = \frac{V_2 - 2V_1 + V_0}{\Delta x^2} = \frac{4}{3\Delta x^2} (V_2 + 3V_1 + 2V_r)$$

donne

$$V_0 = \frac{1}{3} (V_2 - 6V_1 + 8V_r)$$

Finalement, si un second ordre de différences décentré est utilisé nous aurons les formules :

$$V_0 = \frac{1}{3} (V_2 - 6V_1 + 8V_r) \quad \text{pour} \quad \frac{\partial V}{\partial x} \quad (\text{V-7-a})$$

et

$$V_0 = -\frac{1}{5} (V_3 - 5V_2 + 15V_1 - 16V_r) \quad \text{pour} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad (\text{V-7-b})$$

On peut déterminer les valeurs fictives d'une autre manière en considérant chaque frontière (limite) à part :

a - valeurs fictives à l'axe :

pour raison de symétrie [2-11] ont a :

$$V = 0 \text{ d'ou } U_{\eta} = 0.$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{b} \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{b} \frac{\partial P}{\partial \eta} = 0$$

d'ou

$$U_{\eta_{i,-1/2}} = -U_{\eta_{i,1/2}}$$

$$U_{\eta_{i,-1}} = -U_{\eta_{i,1}}$$

$$U_{i,-1/2} = U_{i,1/2}$$

$$U_{i,-1} = U_{i,1}$$

$$P_{i,-1/2} = P_{i,1/2}$$

$$P_{i,-1} = P_{i,1}$$

b - valeurs fictives à la paroi :

on a la condition suivante :

$$U = V = U_{\eta} = 0$$

d'ou

$$U_{i,n+1/2} = -U_{i,n-1/2}$$

$$U_{i,n+1} = -U_{i,n-1}$$

$$U_{\eta_{i,n+1/2}} = -U_{\eta_{i,n-1/2}}$$

$$U_{\eta_{i,n+1}} = U_{\eta_{i,n-1}}$$

c - valeurs fictives à l'amont

pour raison de périodicité de l'écoulement on a

$$U_{-1,j} = U_{n-1,j}$$

$$U_{-1/2,j} = U_{n-1/2,j}$$

$$U_{\eta_{-1},j} = U_{\eta_{n-1},j}$$

$$U_{\eta_{-1/2},j} = U_{\eta_{n-1/2},j}$$

$$P_{-1,j} = P_{n-1,j}$$

$$P_{-1/2,j} = P_{n-1/2,j}$$

d - valeurs fictives à l'aval

en appliquant la condition de périodicité

$$U_{n+1,j} = U_{1,j}$$

$$U_{n+1/2,j} = U_{1/2,j}$$

$$U_{\eta_{n+1},j} = U_{\eta_{1},j}$$

$$U_{\eta_{n+1/2},j} = U_{\eta_{1/2},j}$$

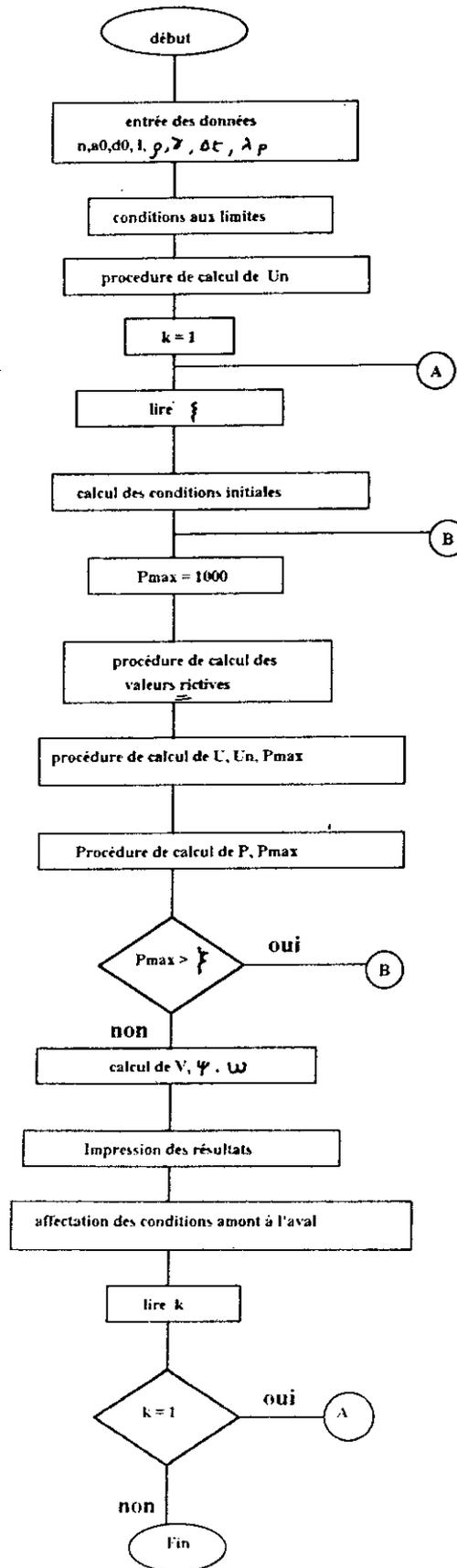
$$P_{n+1,j} = P_{1,j}$$

$$P_{n+1/2,j} = P_{1/2,j}$$

V - 3 - CONCLUSION

On a élaboré le programme de résolution des équations de Navier-Stokes permanentes en discretisant ces dérivées selon une méthode aux différences finies appelé "méthode de compressibilité artificielle". Cette méthode appliquée à chaque pas de temps est basée sur la perturbation de l'équation de continuité en introduisant une constante C^2 choisie afin d'assurer la convergence

Organigramme général



CHAPITRE VI

APPLICATIONS

ET

RESULTATS

Introduction.

C'est à l'ingénieur et au physicien qu'il appartient de définir les équations qui représentent convenablement le problème posé mais il ne faut pas trop espérer à les résoudre à la main! or l'ordinateur a été conçu à l'origine pour des calculs scientifiques. Il permet de résoudre par voie numérique tous les problèmes susceptibles d'être exprimés par des équations.

VI-1 Applications

Les conditions de l'écoulement étudiés sont les suivantes .

- Le fluide ayant fait l'objet du calcul est l'eau $\underline{u}_v = 1,6 \cdot 10^{-6}$.
- A l'entrée de la conduite la répartition de la composante U de la vitesse est uniforme, la composante V de la vitesse est nulle et la répartition de la pression est uniforme.
- Le coefficient de compressibilité artificiel $C = 50$.
- Le nombre de Reynolds Re varie entre 99 et 1000.

VI-1.1 Première application .**a) Présentation de l'application.**

Cette application consiste à tester la validité du modèle mathématique et du programme informatique en les appliquant à l'écoulement dans une conduite cylindrique. Pour cela il suffit de prendre $a_0 = 0$.

On utilise une grille à mailles uniformes 10×10 et un pas de temps $\underline{Dt} = 0,02$ s.

- La longueur de la conduite $L = 0,1$ m
 - Le diamètre de la conduite $d_0 = 0,01$ et $0,015$ m.
-

b) Résultats et analyses.

Les figures VII1 et VI2 montrent qu'on obtient des profils paraboliques de la composante horizontale de la vitesse U. Ces profils augmentent avec l'augmentaion du nombre de Reynolds, et diminuent lorsque le diamètre de la conduite augmente.

Les calculs donnent une composante verticale de la vitesse V nulle.

Les lignes de courant sont parallèles aux parois.

Ainsi on retrouve les résultats connuent de l'écoulement établi dans une conduite cylindrique dans la zone située loin des extrémités.

VI.1.2: Deuxième application .

Analyse de l'écoulement dans une conduite ondulée du type convergent - Divergent.

a) Présentation de l'application

Cette application consiste a déterminer les profils des composantes de la vitesse dans les différentes sections de la conduite ainsi que la répartition de la pression .

Les calculs sont réalisés pour:

- Une valeur d'amplitude a_0 égale à 0,06698 m
- Un diamètre d_0 égale à 0,04019 m

On utilise une grille à mailles uniformes 16 x 10 et un pas de temps égale à 0,02s

On prend en considération les pertes de pression le long de la conduite.

b) Résultats et analyses

Les figures (VI5, VI6) montrent que les composantes U et V de

vitesse changent d'orientation dans la zone de forte courbure (section 0,51) du côté des parois qui participent au changement de la direction de l'écoulement. Cet état confirme la présence d'un courant recirculation qui se situe entre les points de décollement et de rattachement du fluide aux parois. Cette recirculation est d'autant plus intense que la valeur du nombre de Reynolds est grande parceque le fluide est incapable de tourner brusquement en suivant la paroi dans ce cas.

Les Figures (VI7, VI8) montrent que loin de la zone de changement de direction (Section 0,751) les profils des composantes U et V de la vitesse ne font pas état de valeurs négatives, ce qui confirme qu'il n'ya pas de courant de recirculation dans cette zone.

Les figures (VI3, VI4) montrent que les calculs donnent une valeur très petite de composante V devant la composante U (Section 0,251) cela est dû à la zone de recirculation et de la géométrie de la conduite (convergent).

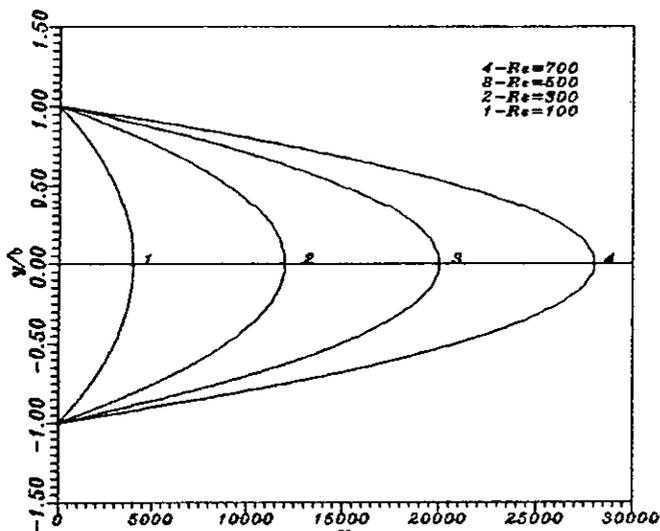
Toutes les figures présentent une symétrie axiale pour la composante U et une symétrie centrale pour la composante V.

Pour des valeurs de Reynolds supérieures à 1000 figures (VI9, VI10, VI11) le modèle n'est plus valide.

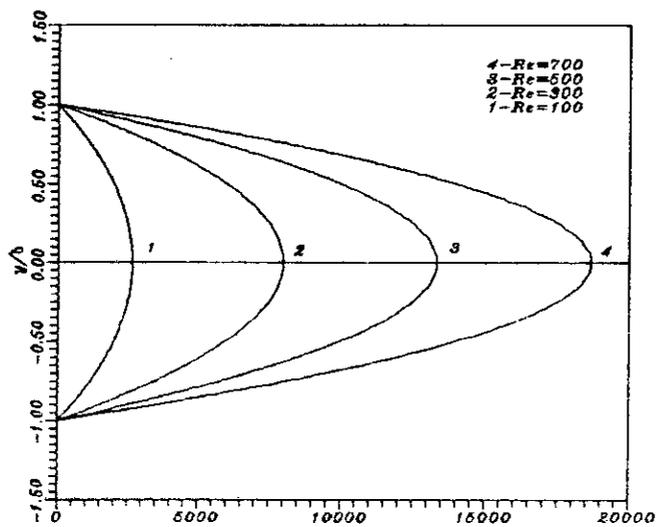
Les figures (VI12, VI13, VI14, VI15) expriment la distribution de la pression au niveau de la paroi et au niveau de l'axe sur huit longueurs D'ondes.

La pression au niveau de la paroi est supérieure à celle au niveau de l'axe. Cela est dû au fait que la pression augmente avec l'augmentation de la hauteur.

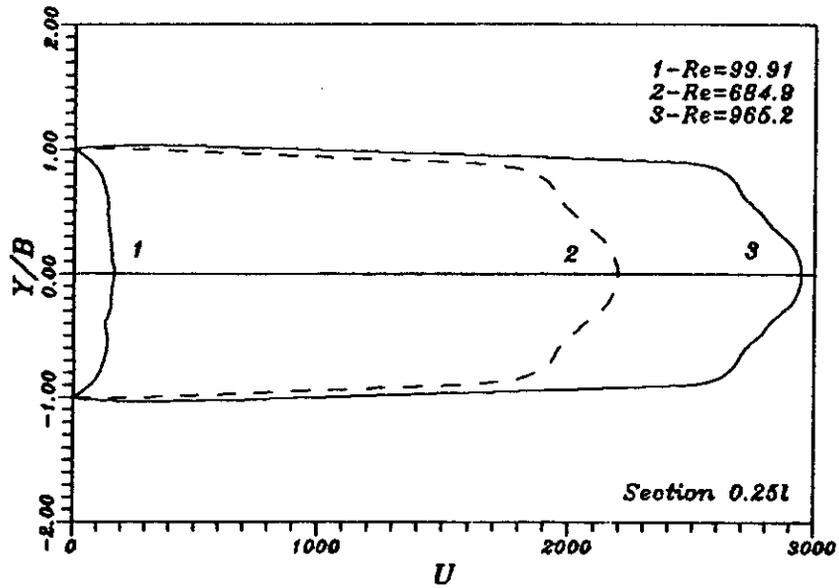
La pression diminue lorsque le nombre de Reynolds augmente.



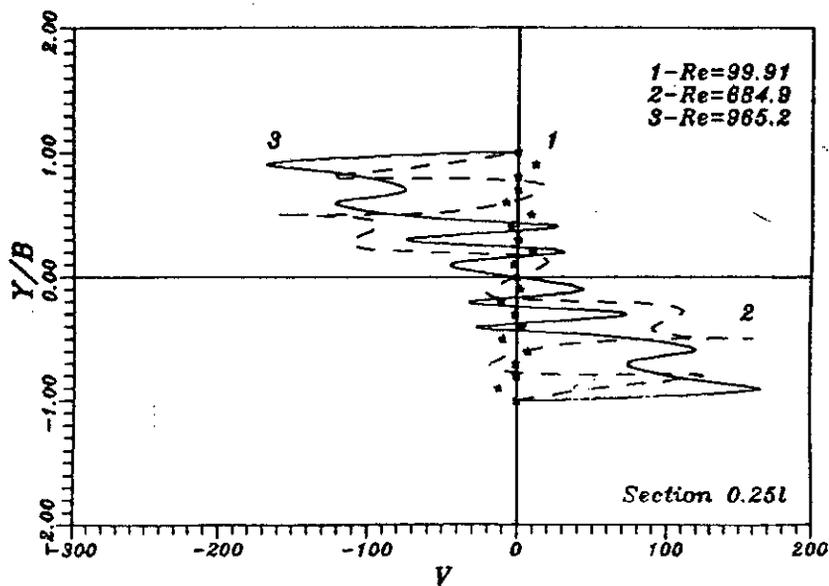
Fig(VI-1-) Profil de la vitesse (U) pour $A=0$ et $C=0.1$



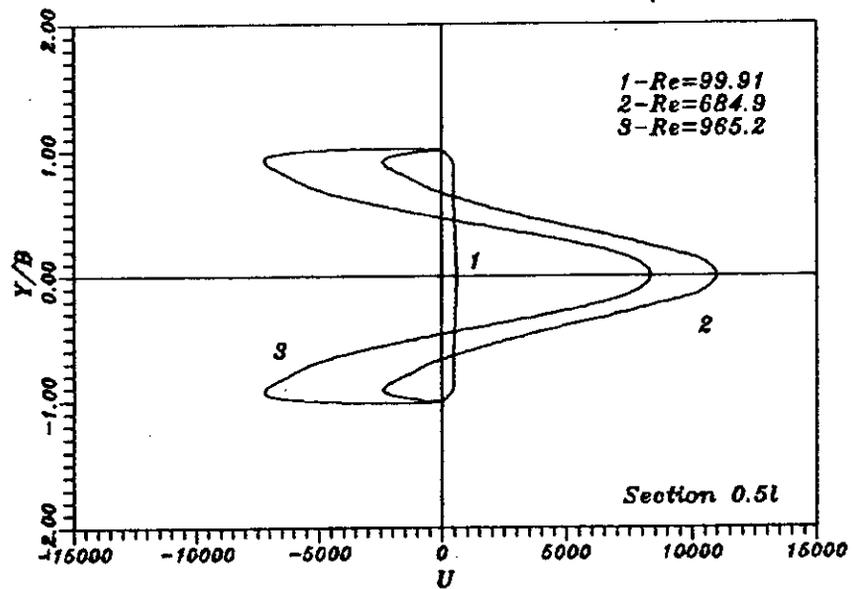
Fig(VI-2-) profil de la vitesse (U) pour $A=0$ et $C=0.15$



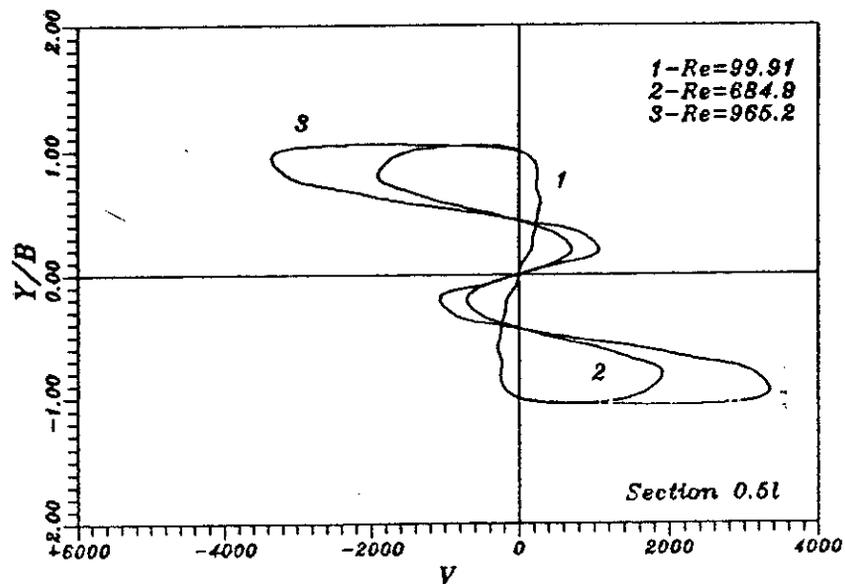
Fig(VI-3) Profil de la vitesse U pour $d_0=0.4019, \alpha_0=0.06698$ et $l=1$



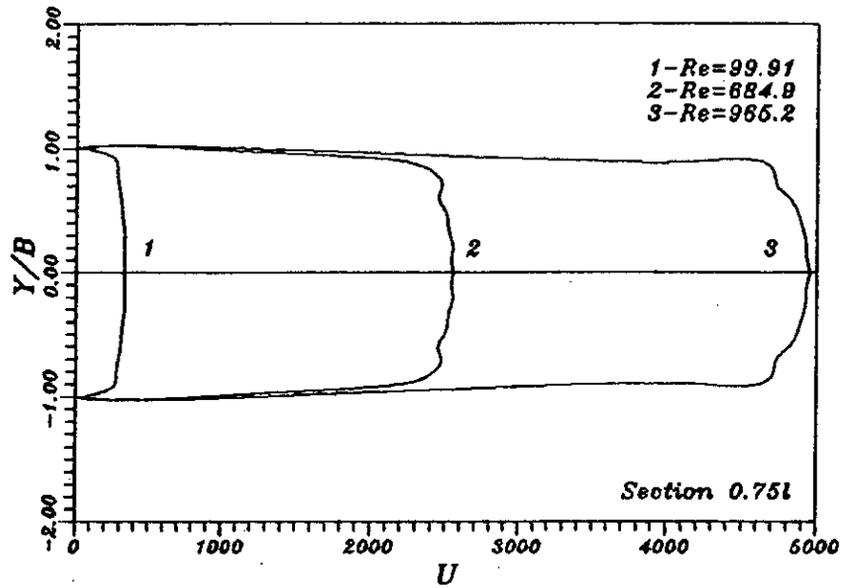
Fig(VI-4) Profil de la vitesse V pour $d_0=0.4019, \alpha_0=0.06698$ et $l=1$



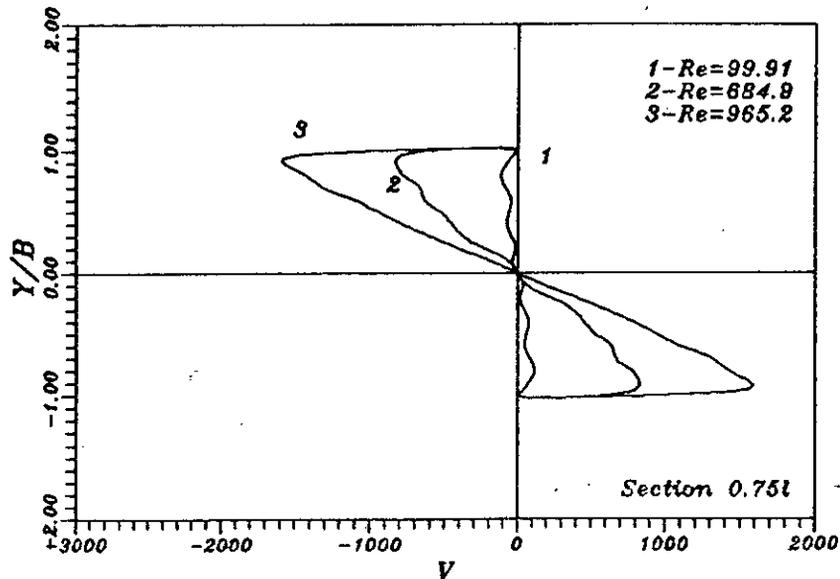
Fig(VI-5) Profil de la vitesse U pour $d_0=0.4019, \alpha_0=0.06698$ et $l=1$



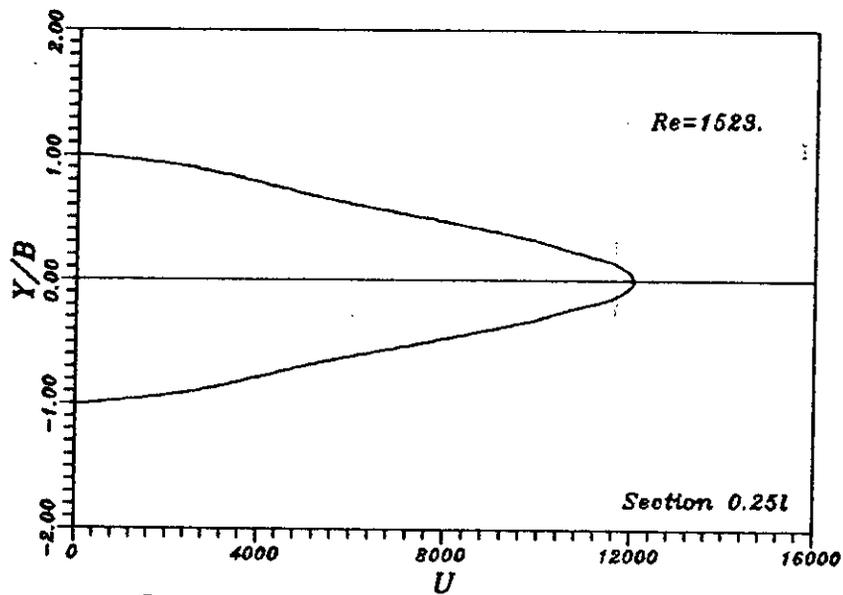
Fig(VI-6) Profil de la vitesse V pour $d_0=0.4019, \alpha_0=0.06698$ et $l=1$



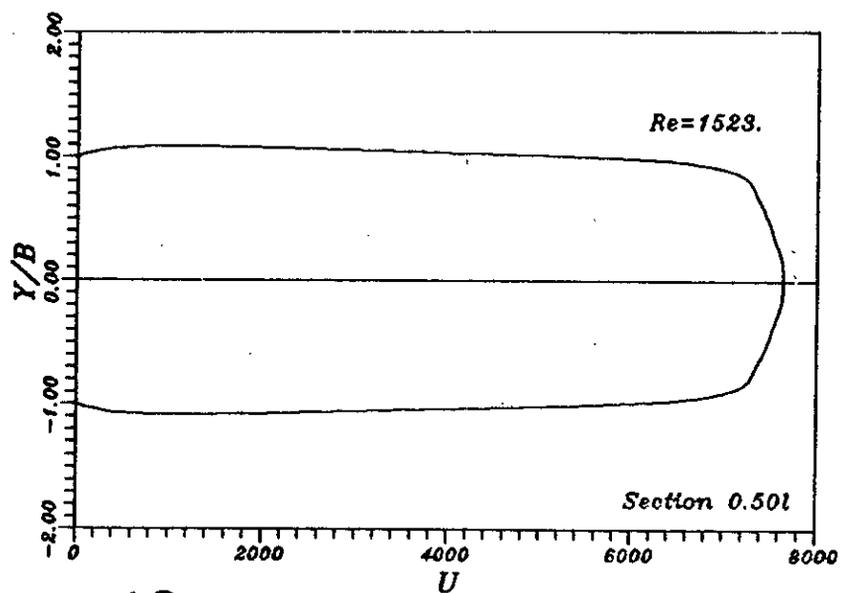
Fig(VI-7) Profil de la vitesse U pour $d_0=0.4019, a_0=0.06698$ et $l=1$



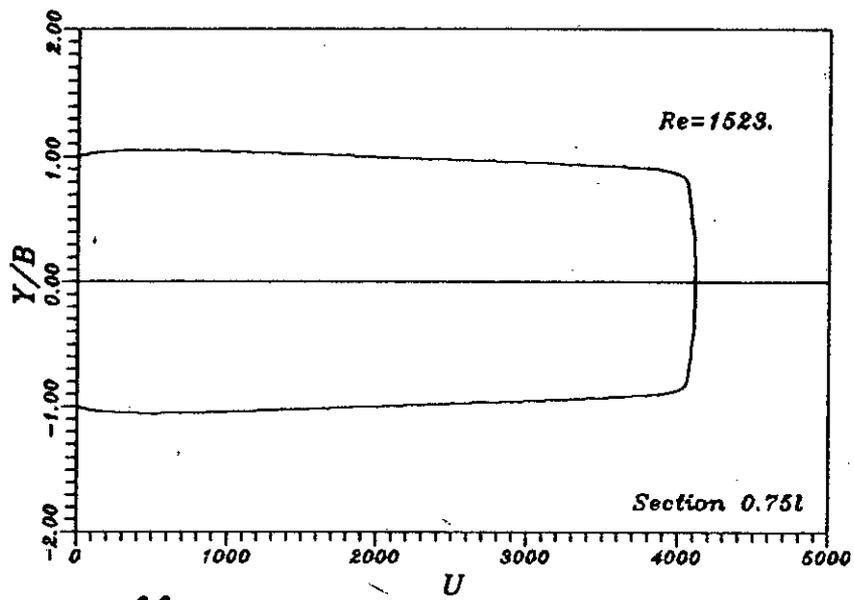
Fig(VI-8) Profil de la vitesse V pour $d_0=0.4019, a_0=0.06698$ et $l=1$



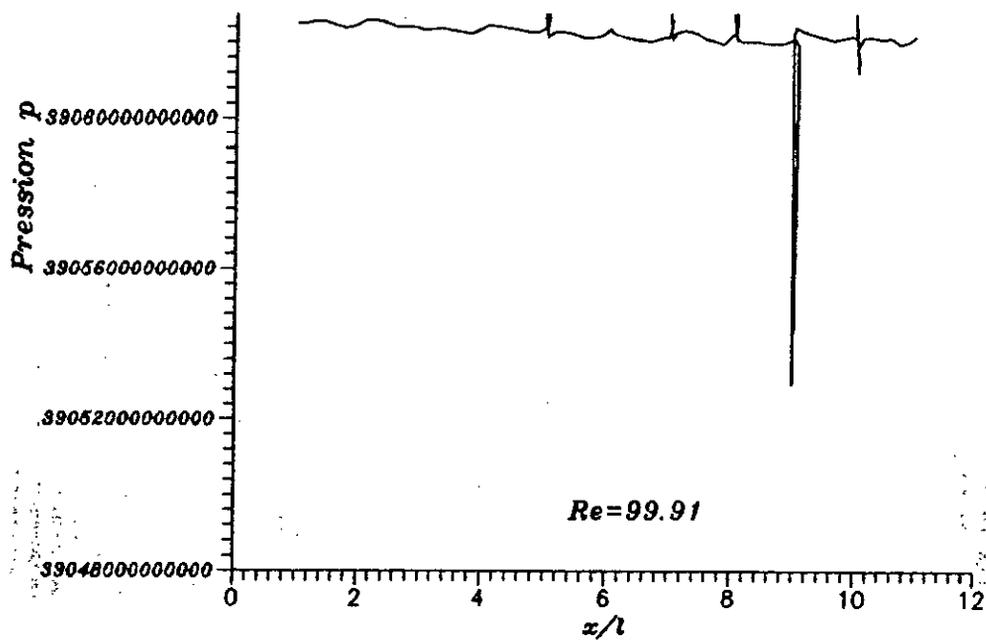
Fig(VI-9) Profil de la vitesse U pour $d_0=0.4019, a_0=0.06698$ et $l=1$



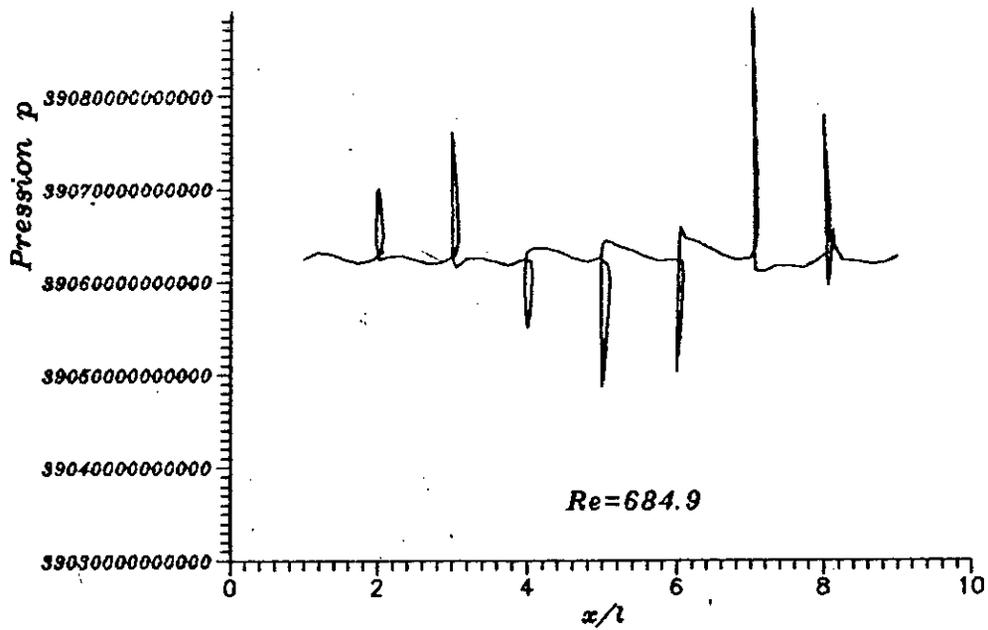
Fig(VI-10) Profil de la vitesse U pour $d_0=0.4019, \alpha_0=0.06698$ et $l=1$



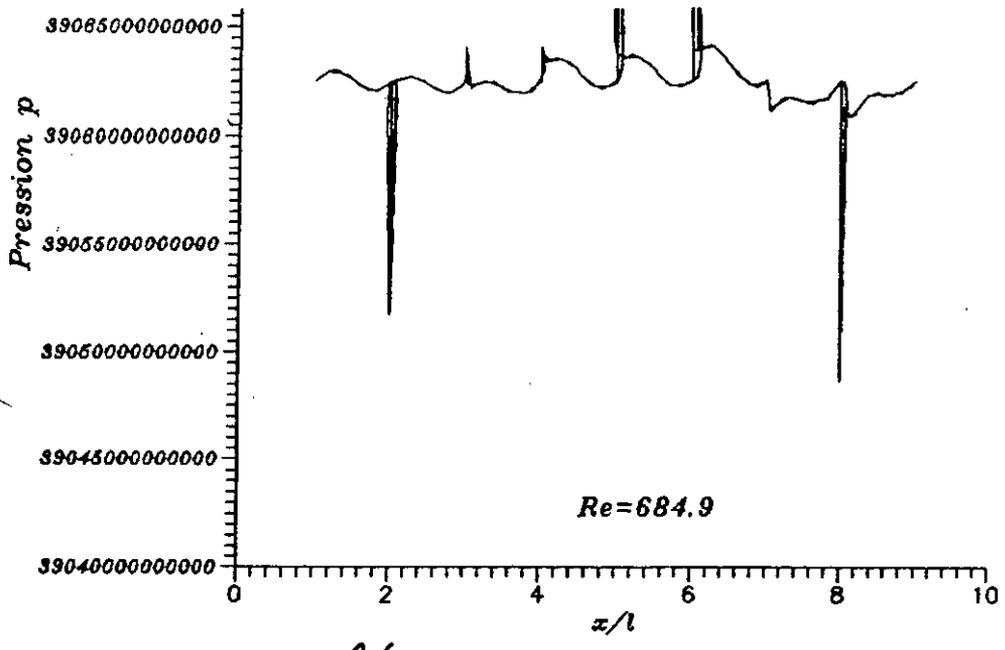
Fig(VI- 11) Profil de la vitesse U pour $d_0=0.4019, a_0=0.06698$ et $l=1$



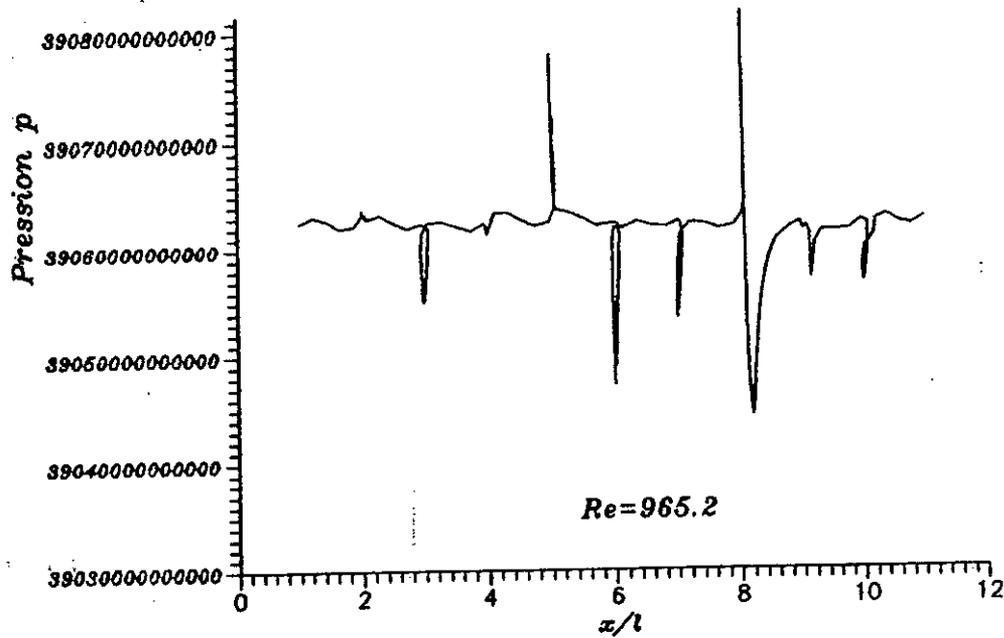
Fig(VI-12) Distribution de la pression
au niveau de la paroi



Fig(VI-13) Distribution de la pression
au niveau de la paroi



Fig(VI-74) Distribution de la pression
au niveau de l'axe



Fig(VI-15) Distribution de la pression au niveau de l'axe.

CHAPITRE VII

CONCLUSION

GENERALE

Conclusion generale

Dans le present travail, nous avans établi un modèle pour modéliser et simuler l'écoulement laminaire et permanent loin des extrimités d'une conduite périodique du type convergent divergeant.

L'adaptation d'une méthode numérique "méthode de compressibilité artificielle" basée sur une transformation non orthogonale de coordonnées et d'un schéma aux différences finies nous ont permis la résolution des équations de Navier-Stokes incompressible dont les composantes de la vitesse et la pression sont inconnues.

Le modèle mathématique et le programme informatique appliqués à l'écoulement dans la première partie ont permis de retrouver les principales caractéristiques connues de cet écoulement, justifiant ainsi leur validité.

La présence des courants de récirculation du fluide dans les zones de forte courbure de coté de la paroi impliquent des déformations des lignes de courant.

Ces récirculations et ces déformations s'accroissent le long du nombre de Reynolds parce que le fluide est incapable de tourner brusquement en suivant la paroi dans ce cas.

ces resultats ont été déjà observés dans des études de configurations géométriques proches.

Néanmoins, nous comptons toujours la poursuite de cette étude en prenant en compte les conditions aux limites car elles portent sur le comportement particulier de la solution et en adaptant un maillage non uniforme. Ce maillage doit être raffiné dans les zones de fortes courbures et de côté des parois ou en choisissant d'autres méthodes numériques de résolution plus puissantes et plus précises malgré que l'expérience numérique montre que cette méthode est très efficace pour des nombres de Reynolds inférieures à 1000 accordés à un choix de maillage et de coefficient de compressibilité raisonnables car ces deux facteurs sont trop sensibles pour la stabilité et la convergence.

ANNEXES

Symboles :

a_0 : amplitude de la conduite [m]

$b(x)$: allure de la paroi de la conduite [m]

d_0 : diamètre de la conduite [m]

\bar{e}_x, \bar{e}_y : vecteurs unitaires dans les directions x, y

$\bar{e}_\xi, \bar{e}_\eta$: vecteurs unitaires dans les directions ξ, η

g : accélération de la pesanteur [m/s^2]

l : longueur d'onde de la conduite [m]

\bar{n} : vecteur unitaire normal à un élément de surface

P : pression [Pas]

P' : terme périodique de la pression [Pas]

t : temps [S]

U

V

W

composantes de la vitesse en coordonnées cartésiennes (x, y, z)

respectivement [m/s]

U_ξ, U_η composantes de la vitesse en coordonnées transformées (ξ, η) respectivement
[m/s]

x

y

z

Coordonnées cartésiennes [m]

\bar{T} : Vecteur tourbillon

\bar{V} : Vecteur vitesse

X

Y

Z

Composantes du force de volume par unité de masse suivant les

directions x, y, z , respectivement [m/s^2]

$[j]$: inverse de la matrice Jacobienne

$[J]$: matrice Jacobienne de la transformation géométrique

Re : nombre de Reynolds [adimensionnel]

α : fonction géométrique

β : fonction géométrique
 ε : précision de la solution

$\left. \begin{array}{l} \xi \\ \eta \end{array} \right\}$ coordonnées transformées [m]

λ_p : perte de pression unitaire [Pa/m]

μ : viscosité dynamique [Kg/m/s]

ν : viscosité cinématique [m²/s]

ρ : masse volumique [kg/m³]

$\rho(M)$: rayon spectral

ψ : fonction potentiel des vitesses

Ψ : fonction de courant

ω : vitesse angulaire (rad/s).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. ASAKO

M. FAGHRI

Finite volume solutions for laminar flow and heat transfer in a corrugated duct.

J. Heat Transfer Vol 109/627-634 August 1987.

[2] Y. ASAKO

M. FAGHRI

Numerical détermination of heat transfer and pressure drop characteristics for a converging-diverging flow channel

J. Heat Transfer Vol 109/606-612 August 1987.

[3] Y. ASAKO

M. FAGHRI

H. NAKAMURA

Heat transfer and pressure drop characteristics in a corrugated duct with rounded corners.

Int. J Heat Transfer Vol 31 N°6/1237-1244 1988.

[4] A. AZZI

M. ABIDAT

M. DAGUENET

O. IMINE

Etude numérique de l'écoulement à l'entrée d'un tube ondulé de section droite circulaire

Colloque Maghrébien.

[5] C. BOISSON

B. GAY

M. GOTTELAND

Différences finies - quelques applications en mécanique des fluides

Ecole Centrale de Lyon.

[6] R. COMOLET

Mécanique expérimentale des fluides Tome : I. II. III

Masson 1982.

[7] G. DHATT

G. TOUZOTT

Une représentation de la méthode des éléments finies

2^{ème} édition Maloine 1984.

[8] D. EUVRARD

Résolution numérique des équations aux dérivées partielles, différences finies, éléments finies, méthodes des singularités.

Ed. Masson 1990.

[9] E. GUYON

J.P HALIM

L. PETIT

Hydrodynamique physique

2^{ème} tirage corrigé CNRS 1994.

[10] A. HASSAINE

M. DAGUENET

G.MENGUY

Etude du champ des vitesses et du transfert thermique dans un canal à paroi sinusoïdales soumises à un flux de chaleur de densité constante

Int. J. Heat Mass Transfer Vol 37 n°5 717-725 1994.

[11] S.V. PATANKAR

C.H.LIU

EM. SPARROW

Fully developed flow and heat transfert in ducts having streamwise-periodic variations of cross-sectional area.

J. Heat Transfer Vol 99/180-186 May 1977.

[12] R. PEYRET

Computational methods for fluid flow

Springer Verlag 1990.

[13] I. RYHMING

Dynamique des fluides

Press Polytechniques Romandes 1985.

♠ [14] PL.VIOLLET

A.KERAMSI

J.P.BENQUE

Modélisation bidimensionnelle d'écoulements en charge d'un fluide incompressible
non isotherme

J. Mécanique Vol 20 n°3, 557-558 1981.