

M. M. BENMAMAR  
10/95

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة الجامعات والبحث العلمي

Ministère aux Universités et de la Recherche Scientifique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة  
BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**

**Département d' Hydraulique**

**Projet de Fin D' Etudes**

**THEME**

**CONTRIBUTION A L' OPTIMISATION  
DES RESEAUX MAILLES  
DE DISTRIBUTION D' EAU**

Proposé par :

Mr . T. MERABTENE

Mr . M. CHERARED

Etudie par :

Mr. A. LEFKIR

Mr. B. SADEK

Dirigé par :

Mr. T. MERABTENE

**PROMOTION 1995**

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة الجامعات والبحث العلمي

Ministère aux Universités et de la Recherche Scientifique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHÈQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**

**Département d' Hydraulique**

**Projet de Fin D' Etudes**

**THEME**

**CONTRIBUTION A L' OPTIMISATION  
DES RESEAUX MAILLES  
DE DISTRIBUTION D' EAU**

Proposé par :

Mr . T. MERABTENE  
Mr . M. CHERARED

Etudie par :

Mr. A. LEFKIR  
Mr. B. SADEK

Dirigé par :

Mr. T. MERABTENE

**PROMOTION 1995**

## REMERCIEMENT

*Nous remercions vivement M. TAREK MERABTENE, prometteur de ce travail, de nous avoir suivies, orientées et guidées tout au long de l'année, pour mener à bien ce projet.*

*Nous destinons notre vive gratitude à tous les enseignants qui ont contribues à notre formation.*

*Nous remercions tous le personnel de la bibliothèque, particulièrement SALAH, KARIM, KRIMO.*

*Nos sincères remerciement s'adressent à tout les amis et collègues.*

**ABDELOUAHAB . LEFKIR**

**BADREDINE . SADEK**

## *DEDICACE*

*Je dédie ce travail à ceux qui m'ont mis au monde, et qui ont consacré leurs jeunesse pour me bien élevé, mes très chères parents .*

*A tous mes frères et Soeurs, à mes nièces SARAH et ASMAA et à mon neveu SAID .*

*En fin, à tous les miens, proches et éloignés par de la des réseaux de barrières réelles et fictives .*

*A. LEFIKIR*

## **DEDICACE**

*Je dédie ce modeste travail :*

*- A mes parents, particulièrement ma mère de m'avoir encouragé et donnée la volonté nécessaire pour aller aussi loin que possible dans mes études .*

*- A mes frères et ma soeur .*

*- A mon cousin MUSTAPHA*

*- A tous les miens, proches et éloignés .*

**B. SADEK .**

الموضوع : مساهمة في تجويد شبكات توزيع المياه  
المخلص : يتمثل هذا العمل المتواضع في إنجاز نموذج رقمي لتجويد شبكات  
توزيع المياه ، المطلوب إذاً هو إيجاد الأقطار الجيدة للفتحات  
بغرض تقليص تكاليف الشبكة مع مراعاة الشروط الهيدروليكية  
من سرعة و ضغط ، وكذا التجارية ( المعايير التجارية للاقطار ) .  
بعد طرح الإشكالية رهيباً تم تقديم عرضه شامل لمختلف النماذج  
المتعلقة بتجويد الشبكات ، قمنا بإيجاد نموذج رقمي  
وذلك بإستعمال طريقة « النهرج الخطي » .  
تمثل النتائج العددية لشبكات حقيقية وأخرى أكاديمية  
دليلاً على امتثانية تطبيق هذه النظرية عملياً .

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة - BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

Subject : Contribution to the optimisation of water distribution looped network .

Abstract : this work deals with elaborate a numerical model of water distribution system optimization .

We have to determine the optimal conduit diamitres so that the total cost of the network is minimum by imposing certain constraints on the node pressures and the flow rate in the conduits and a commercial constraints ( commercial range of diameters )

After the presentation of mathematical formulation of the problem, we have to elaborate a numerical model for the linear

programming gradient method ( LPGM ) .

the numerical results relating to real and academic networks illustrate the practical advantage of this method .

Sujet : Contribution à l'optimisation des reseaux maillés de distribution d'eau .

Résumé : Ce travail consiste à élaboré un modele numérique d'optimisation des reseaux de distribution d'eau. Il s'agit de déterminer les diamètres optimaux des conduites, de manière à minimiser le coût du reseau, tout en imposant certaines contraintes hydrauliques ( pression et vitesse) et commerciales ( gomme commerciale des diametres ) .

Après avoir, présenter la formulation mathématique du problème, ainsi que les différentes méthodes d'optimisation, nous avons élaboré un modèle numérique relatif à la méthode du gradient linearisée ( LPGM ) .

L'intérêt pratique de cette méthode est illustré par des résultats numériques relatifs à des reseaux réels et académiques :

## *SOMMAIRE*

	<b>Page</b>
<b>INTRODUCTION</b>	<b>2</b>
<b>Chapitre I - Formulation du problème d'optimisation des réseaux maillés</b>	
A-Introduction	5
B- La fonction coût du réseau	6
C- Les contraintes du problème	8
D- Récapitulation et discussion du problème	10
Conclusion .	13
<b>Chapitre II - Aspect mathématique d'un problème d'optimisation</b>	
A- Introduction	15
B- La programmation linéaire	15
C- La programmation non linéaire	24
D- La programmation dynamique	27
E- Difficultés d'un problème d'optimisation	27
<b>Chapitre III - Les méthodes d'équilibrage des réseaux mailles</b>	
A- Introduction	29
B- Formulation du problème	29
C- Calcul du débit de consommation	31
D- Méthode de HARDY- CROSS	32
E- Méthode de linéarisation de l'équation de perte de charge	34
F- Méthode de Newton-Raphson	36

## Chapitre IV - Présentation de quelques méthodes d'optimisation

A-Introduction	40
B- Méthodes des conduites équivalentes	41
B-1- Méthode des longueurs équivalentes ( 1961 )	41
B-2- Méthode des longueurs équivalentes ( 1966 )	44
B-3- Méthodes des diamètres équivalentes	45
C- Optimisation des réseaux de distribution d'eau	47
par JACOBY ( 1968 )	
D- Méthode d'optimisation des réseaux de distribution	50
( par CENEDESE et MELE 1978 )	
E- Méthode de ( FEATERSTONE et EL-JUMAILY 1983 )	54
F- Optimisation des R-M ( par MORGAN- GOULTER- 1985 )	57
G- Méthode de LABY ( 1963 )	59
H-Modèle d'optimisation des R-M( par LANSEY MAYS 1990 )	61

## Chapitre V - La méthode du gradient linéarisé

A- Introduction	66
B- Formulation du problème	66
C- Procède de résolution	69
D- Amélioration apportée à la méthode	71
E- Algorithme BFGS	75
F- L'estimation du pas de déplacement	75
G- Extension de la méthode pour un système complexe	77



## Chapitre VI - Description générale du programme LPGM-95

A- Introduction	81
B-Description du programme	81
B-1- La première partie	81
B-2- La deuxième partie	83
B-3- La troisième partie	85

## Chapitre VII - Applications

A- Application 1 : réseau académique	88
B- Application 2 : réseau de testeur	100
C- Conclusions .	108

Conclusion générale	110
ANNEXE	112
Bibliographie	117

# INTRODUCTION

## *Introduction*

Le domaine d'optimisation des réseaux de distribution, a connue et continue à connaître de nombreux développements et améliorations, aussi bien de la part des hydrauliciens, en introduisant des modèles d'équilibrage plus précis, que des mathématiciens, par introduction des méthodologies de recherche opérationnelles ; cela, à fin de s'approcher à un dimensionnement optimum, correspondant à un coût minimum, tout en satisfaisant les exigences hydrauliques de pression et de vitesse .

L'intérêt pratique du problème d'une part, et son caractère dual ( hydraulique, mathématique ) d'autre part, nécessite la coordination des travaux des deux disciplines . Ce qui explique notre intérêt sur ce sujet .

L'objet donc de ce projet, est l'élaboration d'un modèle numérique d'optimisation des réseaux de distribution, basé sur un procédé itérative de résolution dit " méthode du gradient linéarisée " , tout en intégrant le modèle d'équilibrage de Newton - Raphson, à fin de s'approcher plus vite à la solution .

Le présent mémoire est divisé en Sept chapitres :

- Dans le premier chapitre nous présentons et formulons le problème qu'on se propose de traiter, et nous montrons la complexité du programme mathématique qui en découle .

- Le second chapitre consiste à donner un aperçu générale sur l'aspect mathématique du problème d'optimisation et les différentes formes de programmes mathématiques existants, ainsi que les algorithmes de résolution qui leurs correspondent.

- Le troisième chapitre est une présentation des différents modèles d'équilibrage, dont nous détaillons celui de " Newton - Raphson " .

- Le quatrième chapitre est consacré à l'étude bibliographique des travaux antérieurs dans le domaine de l'optimisation des réseaux maillés .

- Le cinquième chapitre est consacré à une étude descriptive détaillée de la méthode du gradient linéarisée, ainsi que les différentes améliorations apportées au sein de la méthode, et nous montrons son intérêt par rapport aux autres méthodes .

- Le sixième chapitre consiste à donner une description générale concernant le programme LPGM - 95 qu'on a élaboré .

- En fin, le dernier chapitre est consacré à l'application du programme LPGM - 95 sur des réseaux de distribution réels, suivie d'une interprétation des résultats obtenus.

Suite à la Conclusion générale de l'étude et aux références bibliographiques, une annexe est consacrée à certaines définitions mathématiques .

# *Chapitre 1*

## **FORMULATION DU PROBLÈME D'OPTIMISATION DES RÉSEAUX MAILLÉS**

## Formulation du problème d'optimisation des réseaux de distribution

### A-introduction :

Afin d'établir la formulation mathématique du problème d'optimisation des réseaux de distribution d'eau, un certain nombre d'hypothèses simplificatrices seront prises en compte, à savoir:

\* le réseau R considéré connexe<sup>(1)</sup> et à source unique, est constitué de (n) noeuds et (t) conduites orientés arbitrairement.

\* le réservoir situé à un noeud de référence (1) débite une certaine quantité d'eau  $q_1$

\* en chaque noeud  $J=2..n$  un débit  $q_j$  est récupéré ( les débits  $q_j$  sont supposés concentrés aux noeuds ).

Connaissant les caractéristiques du réseau tel que, les cotes des (n) noeuds ainsi que les débits  $b_j$  qui leur sont associés, les longueurs des (t) conduites, et posons une série de contraintes sur la vitesse d'écoulement ainsi que sur les pressions au noeuds, afin de garantir un bon fonctionnement du réseau.

Le problème réside donc dans la détermination dans une gamme commerciale les diamètres optimaux des conduites de manière à minimiser le coût total du réseau (R),

toutes en respectant au maximum possible les contraintes mentionnées ci-dessus. Pour une résolution aussi simple que possible du problème, deux approches différentes peuvent être envisagées.

---

(1) voir annexe (1)

***L'approche discrète :***

Où les diamètres appartiendront à l'ensemble discret de la gamme commerciale, et qui conduira à un problème de programmation non linéaire en nombre entiers dont le domaine réalisable est généralement vide, et ce, dans le cas de pressions aux noeuds fixées. Lorsque les pressions sont bornées, on aboutit par cette approche à un problème de programmation non linéaire mixte ( non convexe<sup>(2)</sup> ).

Une telle approche nous conduit toujours donc à un problème extrêmement lourd et pratiquement insoluble .

***L'approche continue :***

Où les diamètres seront astreint à appartenir à un intervalle continue [  $d_{\min}$  ,  $d_{\max}$  ] de (  $R^+$  ) cette approche ayant l'avantage de simplifier nettement le problème , on se ramènera alors à un problème de minimisation d'une fonctionnelle ( convexe ou concave ), et ce à pression fixé, et à un problème de programmation non linéaire (non convexe ) lorsque les pressions sont bornées .

Il est à noter que l'approche continue, bien qu'elle simplifie le problème " discret " elle conduit à une distribution " théorique " des diamètres , cette solution irréalisable en pratique, doit être corrigée selon des techniques appropriées à fin de la rendre réalisable .

***B- La fonction coût du réseau :***

Le coût d'un tronçon ( i ) portant les diamètres  $D_{ik}$  sur les longueurs  $L_{ik}$  est :

$$C_i = \sum_K P_{ik} L_{ik}$$

avec  $P_{ik}$ : le coût par unité de longueur de la conduite de diamètre  $D_{ik}$  .

le coût total est alors égale à

---

(2) voir annexe

$$FO = \sum_{i=1}^I P_i = \sum_i \sum_R C_{ik} L_{ik} \quad (I.1)$$

La fonction coût, ou fonction objective, à minimiser prend donc des valeurs discrètes en un nombre fini de points, elle est donc non dérivable.

Dans le cas où on choisira l'approche continue, on aura à considérer une fonction coût continue définie dans tout l'intervalle  $[d_{\min}, d_{\max}]$ , et ce en effectuant un lissage sur les points de la série commerciale.

La forme de cette fonction d'approximation adoptée par la plupart des praticiens est du type :

$$C_{ik} = A + B D_{ik}^e$$

avec  $A, B, e$  : des coefficients positifs à déterminer généralement, en utilisant la méthode des moindres carrés.

soit donc :

$$C_i = A \sum C_{ik} + B \sum L_{ik} D_{ik}^e$$

en exprimant les diamètres ( $D_{ik}$ ) en fonction du débit  $Q_i$ , en utilisant la formule de H Williams, le problème de minimisation de  $C_i$  revient à minimiser la fonction suivante :

$$P_i = B \left( \frac{CHW_{ik}^{1/\delta} \cdot (Q_i)^{\gamma/\delta}}{|J_k(Q_i)|^{1/\delta}} \right)^e L_{ik} \quad (I.2)$$

avec  $CHW_{ik}$  : coefficient de H. Williams du tronçon ( $ik$ ).

$J_k$  : le gradient hydraulique.

$\delta, \gamma$  : constantes déterminées par la formule de H. Williams.



**C- Contraintes du problème :**

À fin d'avoir un bon fonctionnement du réseau, on est ramené à imposer certaines contraintes, à savoir :

**C - 1/ Les équations d'équilibre :****équilibre des mailles :**

Après avoir choisi, pour chaque conduite, une orientation " arbitraire " on définit à partir du réseau ( R ) un ensemble de ( m ) mailles orientées .

m : le nombre cyclométrique du graphe associé à R .

$$( m = t - nn + 1 ) .$$

pour chaque maille la somme algébriquement des pertes de charge le long des conduites la constituant est nulle, soit :

$$\sum_i E_{ij} Dh_j = 0 \quad i=1 \quad \text{à} \quad m, J=at$$

avec:  $\varepsilon_{ij} = \pm 1$

soit sous forme matricielle

$$M \Delta H = 0 \quad ( I . 3 )$$

M = ( E<sub>ib</sub> ) : matrice à (m) lignes et (t) colonnes .

$\Delta H = ( \Delta h_s )$  : vecteur de perte de charge à (t) lignes.

**Equilibre des noeuds :**

en chaque noeud la somme algébrique des débits entrant et sortant est nulle :

$$\sum e_{ij} Q_j = q_i \quad i = 1 \text{ à } h$$

$$J = 1 \text{ à } t$$

où :  $e_{ij} = 0$  si la conduite n'arrive pas au noeud i

$e_{ij} = +1$  si le débit  $Q_s$  entre dans le noeud  $i$

$e_{ij} = -1$  si le débit  $Q_j$  sort du noeud  $i$

soit sous une forme matricielle :

$$NQ = q \quad (I. 4)$$

avec :  $N = (e_{ij})$  : matrice à  $(nn - 1)$  lignes et  $t$  colonnes

$Q = (Q_j)$  : vecteur débit à  $(t)$  lignes

$q = (q_j)$  : vecteur des débits soutirés au noeud à  $(nn - 1)$  lignes .

en assemblant les équations ( I. 3 ) et ( I. 4 ) on obtient :

$$AQ = B \quad (I. 5)$$

avec  $A$  : une matrice à  $(2t)$  lignes et  $(t)$  colonnes obtenus par l'assemblage de  $M$  et  $N$

$B$  : vecteur à  $(t)$  colonnes formé de  $q$  et  $O$ .

#### Remarque :

Dans le cas d'un réseau à réservoirs multiples  $(n_r)$  le problème se ramène à un nouveau réseau  $R'$

ayant  $t + n_r - 1$  conduite et  $m + n_r - 1$  mailles et ce en introduisant la notion de conduite fictives reliant les réservoirs et on écrira que la perte de charge pour chacune d'elles est égale à la différence de charge entre les deux réservoirs qu'elle relie .

#### **C - 2/ contraintes sur les pressions :**

En chaque noeud du réseau et pour satisfaire un meilleur service, on se fixe une charge minimale au dessous de laquelle, on considère que le réseau est défaillant. La valeur de cette pression est fixé de façon à éviter la détérioration de la conduite par de pression et d'assurer l'alimentation des points les plus défavorables. Une pression maximale est parfois imposée : à fin d'éviter l'éclatement de la conduite par surpression soit donc :

$$P_{\min_i} < P_i < P_{\max_k_i} \tag{I.6}$$

**C - 3/ Contraintes sur la vitesse :**

Il arrive dans la plupart des cas, qu'on impose des bornes sur la vitesse, pour des questions de sécurité du réseau (lutte contre les dépôts et la cavitation).

$$V_{\min} < |V_i| < V_{\max} \tag{I.7}$$

**C - 4/ Contrainte sur les diamètres :**

Sur le plan pratique la gamme des diamètres disponibles sur le marché est un ensemble discret de dimension finie (nombrable).

$$d_i \in \{d_1, \dots, d_s\} \tag{I.8}$$

$$i = 1 \text{ à } s$$

**D) Récapitulation et discussion du problème :**

Compte tenu des expressions (I.1) à (I.8) on obtient le programme mathématique suivant :

$$(PO) \left\{ \begin{array}{ll} \text{min imiser} & P = \sum P_{ik} L_{ik} \\ \text{sujet à:} & AQ = q \\ & M \Delta h = 0 \\ & V_{\min} \leq |V_i| \leq V_{\max} \quad i = 1 \text{ à } t \\ & d_k \in \{d_1, \dots, d_j\} \\ & P_j > P_{j \min} \quad J = 1 \text{ à } n-1 \end{array} \right.$$

Le programme obtenue est un problème de programmation non linéaire non convexe que la majorité des auteurs évitent de résoudre sous cette forme.

En effet on distingue ici deux cas différents :

**D - 1/ Les débits sont fixes :**

Dans ce cas le programme ( P<sub>0</sub> ) se ramène à un programme linéaire ( P<sub>1</sub> ) dont les variables principales sont les tronçons L<sub>ik</sub>. Le sous ensemble des diamètres D<sub>ik</sub> qui peuvent être portés par le tronçon i sont sélectionnés à partir des conditions de vitesse ie

$$V_{\min} < |V_i| \leq V_{\max} \Rightarrow \frac{\Pi V_{\min}}{4|Q_i|} \leq D_{ik}^2 \leq \frac{\Pi V_{\max}}{4|Q_i|}$$

soit :  $D_{ik} \in [\underline{d}_i, \bar{d}_i]$

soit :

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser} \quad P = \sum_{i \in I} \sum_k P_{ik} L_{ik} \\ \text{sujet à :} \\ \sum_{i \in M} E_i \sum_k J_i f_k(Q_i) \bullet L_{ik} = 0 \quad m = 1, \dots, m \\ \sum_{i \in L} \sum_k J_{ik}(Q_i) \bullet L_{ik} \leq \Delta Z_{\min} \quad \text{pour chaque chemin} \\ \sum L_{ik} = L_i \quad i = 1 \dots t \end{array} \right.$$

**D - 2/ Les débits ( Q<sub>i</sub> ) sont inconnues :**

La particularité de P<sub>0</sub> est l'apparition des valeurs absolues dans les contraintes non linéaire d'égalité  $\Delta h = f(|J_k(Q_i)|, |Q_i|)$ .

Cela correspond au fait que le sens de circulation effectifs sont inconnus .

J<sub>k</sub> ( Q<sub>i</sub> ) prend le même signe de Q<sub>i</sub> :

On déduit que pour un point M<sub>i</sub> ( Q<sub>i</sub>, J<sub>k</sub> ( Q<sub>i</sub> ) ) se trouve dans un domaine D constitué par la réunion du 1<sup>er</sup> et 3<sup>ème</sup> quadrant. Le domaine D = D<sup>+</sup> ∪ D<sup>-</sup> étant non convexe ce qui provient la première difficulté correspondant à la résolution d'un programme non convexe . ( Voir fig. I . 1 ).

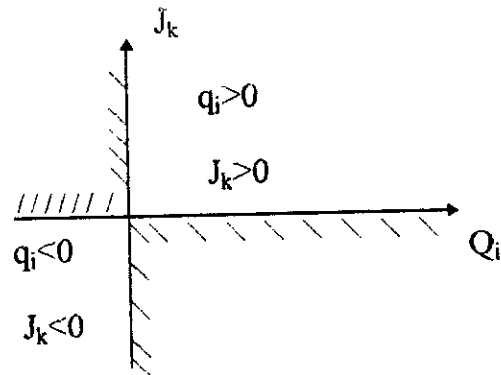


fig I . 1

Une deuxième difficulté du problème ( P<sub>0</sub> ) réside dans le fait que la fonction objective à minimiser donnée par l'équation (I.2) n'est pas convexe ni de Q<sub>i</sub> ni de J<sub>k</sub> (Q<sub>i</sub>).

En fin une troisième difficulté c'est que le domaine de solution réalisable est un ensemble non convexe, pour démontrer ceci, examinant la contrainte de vitesse à respecter. Soit :

$$V_{\min} < |V_i| < V_{\max}$$

avec :

$$|V_i| = \pi q_i / D_{ik}^2$$

en exprimant le diamètre en fonction du débit et de la perte de charge et en injectant dans l'inégalité si dessus, on en résulte que le domaine D' des solutions réalisables est compris entre (C<sub>1</sub>) et (C<sub>2</sub>) d'équations :

$$|Q_i| = \left( \frac{V_{\min}^\gamma}{|J_k(Q_i)|^2} \right)^{(\gamma-2\delta)^{-1}} \quad \text{pour } (C_1)$$

$$|Q_i| = \left( \frac{V_{\max}^\gamma}{|J_k(Q_i)|^2} \right)^{(\gamma-2\delta)^{-1}} \quad \text{pour } (C_2)$$

avec :  $V_{\min} = f_{ik} \pi \frac{V_{mn}}{4}$      $V_{\max} = f_{ik} \frac{\pi V_{\max}}{4}$

Il est bien clair dans la figure I.2 que le domaine  $D'$  est non convexe .

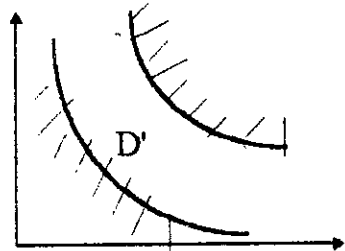


Fig I . 2

**Conclusion :**

Le programme mathématique tel qu'il a été formulé ; est généralement non convexe et donc pratiquement insoluble, il est donc plus commode de simplifier le problème en utilisant des procédés itératifs de résolution basés essentiellement sur la résolution d'un programme linéaire puis une correction par un modèle choisie préalablement, à fin de s'approche vers la solution optimale ( si elle existe ).

# *Chapitre 2*

## ASPECT MATHÉMATIQUE D'UN PROBLÈME D'OPTIMISATION

## Aspect mathématique d'un problème d'optimisation

### A- Introduction :

D'une façon générale, un programme mathématique est un problème d'optimisation d'une fonction, appelée fonction objective, sous contraintes dans  $\mathbb{R}^n$  ; un problème d'optimisation consiste donc à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser (ou maximiser) } f(x) \text{ sous contraintes} \\ g_i(x) (> ; = ; <) 0 \quad i = 1, \dots, m \\ X \in S \subset \mathbb{R}^n \\ X: \text{variable de décision.} \\ \left. \begin{array}{l} X \in S \\ g_i(x) \end{array} \right\} \text{ contraintes du problème.} \end{array} \right.$$

suivant les propriétés de la fonction  $f$  celles des fonctions  $g_i$  et suivant la définition du sous-ensemble  $S$  de  $\mathbb{R}^n$ , on distingue trois types de programmation mathématique<sup>(1)</sup>

### B - La programmation linéaire :

La programmation linéaire (PL) est l'une des nombreuses techniques de la programmation mathématique très connue du fait de sa simplicité théorique malgré les quelques réflexions techniques qu'impose sa mise sur ordinateur et son application à des problèmes physiques de grande taille.

Le programme linéaire s'écrit d'une manière très précise, il consiste en une fonction objective unique, c'est une fonction linéaire des variables du problème, qui présente l'objectif souhaité ; dans notre cas on souhaite de minimiser le coût des conduites.

(1) Voir annexe (tableau A - 1).



La PL est appliquée aussi pour résoudre les problèmes de qualité et de quantité d'eau, pour la qualité de l'eau l'objectif courant est la minimisation du coût des traitements des eaux.

### B - 1 / Formulation générale :

Trouver l'optimum d'une fonction  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  les variables étant liées par certaines relations :  $g_i(x_1, \dots, x_n) (\leq = \geq) 0 \quad i \in (1, \dots, m)$

Comme vous le savez, il est beaucoup plus délicat de travailler avec des inégalités qu'avec de égalités. Pour résoudre analytiquement les problèmes de (PL), nous convertirons donc les inégalités des contraintes en égalités.

Cette étape est expliquée comme suit :

pour résoudre algébriquement un problème de (PL) il faut tout d'abord l'écrire sous forme canonique à la forme standard, se fait comme suit :

- Une inéquation du type :

$$a_{i1} x_1 + \dots + a_{ij} x_j + \dots + a_{in} x_n \leq b_i$$

Se ramène à une équation, en introduisant dans le premier membre une variable, dite variable d'écart  $x_{n+i}$ , l'inéquation est en effet équivalente au système :

$$\begin{cases} x_{n+i} \geq 0 \\ a_{i1} x_1 + \dots + a_{ij} x_j + \dots + a_{in} x_n + x_{n+i} = b_i \end{cases}$$

Si l'inéquation est de sens inverse :

$$a_{i1} x_1 + \dots + a_{ij} x_j + \dots + a_{in} x_n \geq b_i$$

le système équivalent s'écrira :

$$\begin{cases} x_{n+i} \geq 0 \\ a_{i1} \cdot x_1 + \dots + a_{ij} \cdot x_j + \dots + a_{in} \cdot x_n - x_{n+i} = b_i \end{cases}$$

**B - 2 / Méthode de résolution :**

Diverses méthodes peuvent être utilisées pour résoudre un programme linéaire (PL).

a) - méthodes graphique : cette méthode n'est utilisable que lorsqu'il n'y a que deux (ou trois) variables structurelles.

b) - méthodes de dénombrement des solutions de base : pour des problèmes pratiques, cette méthode est en fait très longue de plus elle fournit la solution de base réalisable optimale, mais pas nécessairement la solution optimale.

c) - algorithme du simplexe, cette méthode permet de voir si le PL a au moins une solution réalisable et, dans l'affirmation, elle fournit une solution optimale après un nombre fini d'itérations.

Nous examinerons la méthode algébrique, <sup>ce</sup> n'est pas une méthode pratique, mais elle nous aidera à mieux comprendre les concepts de la méthode du simplexe.

Pour résoudre algébriquement un problème de (PL) il faut tout d'abord l'écrire sous sa forme standard, si le problème impose un objectif de minimisation, il suffit de multiplier la fonction objective par -1 pour la transformer en fonction à maximiser.

On peut utiliser l'algèbre linéaire avec des contraintes d'égalité.

Souvenez-vous que la solution optimale se trouve à l'une des extrémités du domaine réalisable. C'est ce que l'on appelle une solution de base.

On trouve une solution de base en donnant la valeur zéro à certaines variables et résolvant le problème avec les variables restantes.

Dans un problème à  $n$  variables et  $m$  contraintes d'égalité ( $n$  supérieur ou égal à  $m$ ), on trouvera une solution de base en rendant nulles ( $n - m$ ) variables (variables dites hors base) et en déterminant les valeurs des  $m$  variables restantes (dites variables de base).

Chaque solution de base correspond à l'intersection de  $m$  contraintes dans un espace de dimension  $m$ , certaines des intersections se trouveront dans le domaine réalisable et constitueront donc des solutions possibles .

### **B - 3 / Méthode de simplexe :**

#### *Principe de l'algorithme :*

Lorsque l'ensemble des solutions réalisable du PL est un polyèdre convexe, la solution optimale est un sommet de ce polyèdre ; pour l'atteindre, seuls les sommets doivent être examinés . Puisqu'il y a identité entre les notions de sommet et de solution de base réalisable, il suffit, pour atteindre l'optimum, d'examiner ces solutions de base, le principe est le suivant :

a)- déterminer une première solution de base .

b)- cheminer de solution de base réalisable vers une autre solution de base réalisable en rapprochant la fonction économique vers l'optimum .

c)- arrêter la procédure lorsqu'il n'est plus possible d'accroître ou de déterminer la fonction économique ; la dernière solution de base réalisable obtenue est des lors solution optimale .

La résolution d'un programme linéaire par la méthode de simplexe est généralement présentée sous forme de tableaux successifs, appelés tableau simplexe .

On vient donc de découvrir l'importance de la détermination des solutions de base dans la résolution d'un programme linéaire , bien sur toutes les solutions de base ne sont pas admissibles, en général . Il faudra donc en éliminant quelques unes, pour éliminer les calculs initiaux, l'algorithme de recherche de la solution devra contenir une condition d'admissibilité, ainsi qu'une condition d'optimalité pour savoir si la solution rencontrée est optimale .

**La condition d'admissibilité :**

Pour déterminer la variable sortant de la base, on divise les éléments de la colonne des variables de base par les éléments correspondants de la colonne de la variable qui va entrer dans la base, le critère est le suivant :

Si on a  $b_i \geq 0$  le pivot doit être l'élément positif de la colonne d'inconnue à introduire en base qui réalise :

-  $X_r$  Sort Si :

$$b_r / a_{rk} = \min_i \left( \frac{b_i}{a_{ik}} ; a_{ik} > 0 \right)$$

-  $X_k$  entre si :

$$C_k - Z_k = \max_j \left( (C_j - Z_j) ; C_j - Z_j > 0 \right)$$

avec :

$$X_j \begin{cases} j \in (1, \dots, m) = B: \text{Vecteur de base} \\ j \in (m+1, \dots, n): \text{Vecteur hors - base} \end{cases}$$

$b_i$   $i \in (1, \dots, m)$  : Terme indépendant de la  $i^{\text{ème}}$  contrainte ( valeur de la  $i^{\text{ème}}$  variable de la solution de base considérée )

$C_j$   $j \in (1, \dots, n)$  : Coefficient de  $X_j$  dans la fonction économique  $Z$

$a_{ij}$  : Coefficient de la  $i^{\text{ème}}$  variable .

$$Z_j \quad j \in (1, \dots, n) \quad Z_j = \sum_{i \in B} C_i^* a_{ij}$$

**Condition d'optimalité :**

Nous avons montré que la solution optimal, si elle existe, est une solution de base.

Dans une première étape il faudrait exprimer les variables de base, notées :

$X_i^*$  ( $i \in [1, \dots, m]$ ) en fonction des variables hors base

$$X_i^* = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j$$

$$X_j \geq 0$$

$$X_i^* \geq 0$$

On exprime la fonction objective en fonction des variables hors base .

$$Z = Z_0 + \sum_{j=m+1}^n (C_j - Z_j) X_j \quad (\text{II.1})$$

avec :

$$Z_0 = \sum_{i=1}^m C_i^* b_i$$

- donc la solution de base optimale est obtenue lorsque tous les coefficients

$(C_j - Z_j)$  des variables hors base sont négative

- soit  $X$  la solution admissible de base si dans une colonne  $S$  pour laquelle la différence  $C_s - Z_s > 0$  ; on a  $a_{is} \leq 0$  alors le problème n'a pas de solution optimale ; c'est à-dire que la fonction  $Z$  n'est pas bornée supérieurement sur l'ensemble des solutions admissibles .

**Cas particulier :**

un cas particulier de la relation ( II - 1 ) est la formule de changement de base :

$$\begin{aligned}
Z &= Z_0 + \sum_{j=1}^n X_j (C_j - Z_j) = \sum_{i=1}^m C_i^* b_i + \sum_{i=1}^m C_i^* (b_i - a_{ik}) \\
&= \sum_j C_j X_j + \sum_j C_j^* X_j \\
&= C_k X_k + \sum_{j \neq r} C_j^* X_j \\
&= C_k X_k + \sum_j C_j^* X_j \\
&= C_k X_k + \sum_j C_j^* \left( b_i - a_{ik} \frac{b_r}{a_{rk}} \right)
\end{aligned}$$

On obtient à la fin :

$$Z = Z_0 - \frac{b_r}{a_{rk}} (Z_k - C_k)$$

$$Z = Z_0 + \frac{b_r}{a_{rk}} (C_k - Z_k) \quad (\text{II.2})$$

### Organigramme de l'algorithme de simplexe :

1)- On détermine une solution de base réalisable .

2)- On calcule  $C_j - Z_j$

3)- On examine  $C_j - Z_j \leq 0$  on a deux résultats possible .

a -  $C_j - Z_j \leq 0 \Rightarrow$  la solution trouvée est optimale

b -  $\exists C_j - Z_j > 0 \Rightarrow$  on passe à 4) .

4)- On examine les colonnes des indices qui vérifient 3) -b

a- pour tous  $j (C_j - Z_j) > 0 \Rightarrow$  au moins un  $a_{ij} > 0$  en ce cas il suit 5)-

b-  $\exists j$  avec  $C_j - Z_j > 0$  ; et  $a_{ij} \leq 0$  l'algorithme s'arrête il n'existe pas de solution optimale .

5)- On choisit un  $J$  de 3)-b et on cherche :

$$\min \frac{b_i}{a_{ik}} ; a_{ik} > 0$$

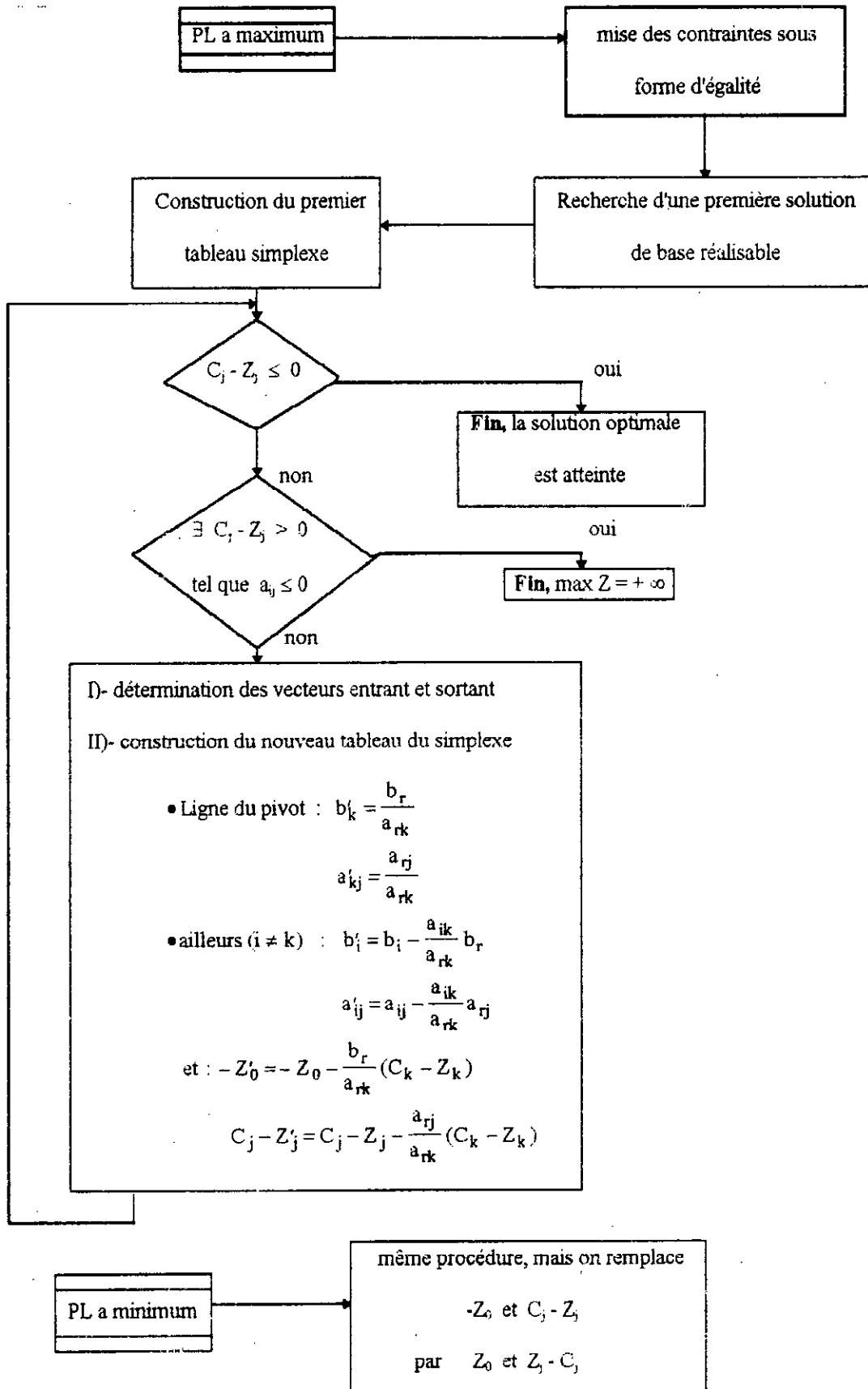
$$a - \text{Si } \exists \text{ un seul } i = k \text{ tel que } \frac{b_k}{a_{kj}} = \min \left( \frac{b_i}{a_{ik}} ; a_{ik} > 0 \right)$$

on suit 6)-

b- S'il existe plusieurs  $i$  réalisent le minimum alors on applique la règle de dégénérescence pour choisir la ligne minimale .

6)- On fait le changement du tableau au tour du pivot  $a_{kj}$  et on reprend 2)- .

**Organigramme :**





**Méthode de trouver une solution de base réalisable :**

Le même déroulement , mais au lieu de résoudre le (PL) avec

$$Z = \sum_{j=1}^n C_j X_j - \sum_{i=1}^m X_{n+i}$$

On introduit un coefficient M ( arbitrairement grand ) tel que :

$$Z = \sum_{j=1}^n C_j X_j - \sum_{i=1}^m M X_{n+i} \quad (\text{II.3})$$

avec la condition de convergence que tous les  $X_{n+i}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) doit être égale à zéro .

**C - La programmation non linéaire :**

Il s'agit d'un programme mathématique avec la particularité que :

$f(x)$  : linéaire ou non .

$g(x)$  : non linéaire .

En générale , dans un ( PNL ) l'existence, voir même l'unicité de la solution, n'est pas assurée a cause de la non convexité du problème .

La plupart des méthodes existantes en programmation non linéaire sous contraintes peut se rattacher à deux grandes familles .

**C - 1 / Les méthodes primales :**

Se caractérisent par le fait qu'elles opèrent directement sur le problème donnée (Primal ), elles engendrent une séquence de solution en assurant une décroissance monotone de la fonction a minimiser .

nous citons , a titre indicatif :

- la méthode du gradient projeté .

- la méthode du gradient réduit .

- les méthodes de linéarisation .

Ces méthodes présentent l'avantage que, si le processus itératif est interrompu, elles procurent une solution approchée satisfaisant les contraintes , par contre , elles ont généralement l'inconvénient d'être de mise au point délicate , et la propriété de convergence globale est souvent difficile à obtenir .

### C - 2 / Les méthodes utilisant la notion de dualité :

Leurs principe commun consiste à ramener le problème initial, à la résolution d'une suite de problèmes d'optimisation sans contrainte .

Contrairement aux méthodes primales, les méthodes duales sont plus robustes et la convergence globale est souvent plus facile à obtenir, en contre partie, elles présentent l'inconvénient de ne fournir une solution primale réalisable qu'en fin de convergence .

#### 1)- Optimisation non linéaire sans contraintes :

On cherche à résoudre : 
$$\begin{cases} \text{Min } f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Dans l'hypothèse où  $f$  est continue et différentiable, les méthodes d'optimisation sans contraintes dans  $\mathbb{R}^n$  consistent à recherché un point  $x^*$  stationnaire ( $\nabla f(x^*)=0$ ).

Il s'agit des procédures itératives où l'on engendre une suite de points  $x^0, x^1, \dots, x^k$  convergeant vers un optimum local de  $f$ ; à chaque étape  $k$ ,  $x^{k+1}$  est définie par :

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k d_k$$

où  $d_k$  est une direction de déplacement qui peut être calculée par :

\* Soit le gradient de  $f$  en  $x^k$

\* Soit à partir du gradient : nous citerons à titre d'exemple la méthode quasi-Newton dont l'algorithme BFGS prend lieu .

\* Soit choisie de façon (arbitraire) à condition que ce soit une direction de descente, ie  $\nabla f(x^k) d_k < 0$ .

$\lambda_k$  : le pas de déplacement dans la direction  $d_k$  qui peut être évalué par une méthode d'optimisation unidimensionnelle.

### 2)- Méthode de pénalité :

Consiste à ramener le problème avec contraintes au problème d'optimisation sans contraintes suivant :

$$\begin{cases} \text{minimiser } \varphi(x) = f(x) + H(g_i(x)) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

avec :

$$H = \sum_{i=1}^m h(g_i(x))$$

( Dans le cas d'une pénalité extérieure on a  $h(g_i(x)) = r [g_i(x)]^2$  )

### 3)- Méthode de dualité lagrangienne :

Consiste à ramener le problème à un problème dual (D) de programmation non linéaire sans contraintes, soit :  $D \begin{cases} \min \{ f(x) + \sum \lambda_i g_i(x) \} = \min(L(x, \lambda)) \\ \lambda_i \in \mathbb{R}^{n+} \end{cases}$

$\lambda_i$  : multiplicateur de lagrange .

$L(x, \lambda)$  : fonction de lagrange .

### 4)- Lagrangien généralisé (augmenté) :

Pour remédier aux inconvénients des méthodes de pénalité et de dualité Hestenes , Powellé (1969) à proposer une méthode basé sur la combinaison des deux approche (dualité + pénalité) .

**D - /La programmation dynamique :**

La programmation dynamique permet de traiter des problèmes complexes, en les décomposant en plusieurs étapes où périodes : chaque étape comprend un certain nombre d'états .

La programmation dynamique permet de prendre une séquence de décisions mutuellement reliées entre elles, a fin d'optimiser une fonction économique connue, elle est basée sur le principe d'optimalité de BELLMAN qui énonce qu'une politique optimale à la propriété suivante :

Les décisions futures doivent constituer une politique optimale, quelles que soient les décisions prises pour atteindre un état particulier .

**E -/Difficultés d'un problème d'optimisation :**

Plusieurs problèmes d'optimisation présentent des difficultés nuisibles au analystes, à savoir :

\* L'existence de plusieurs fonction à optimiser, dont le mathématicien ne peut pas résoudre, il faut donc avoir une seul fonction à optimiser .

\* Parfois, il est impossible d'imaginer un modèle complet d'optimisation par conséquent , on opte pour une sous optimisation (PD) qui risque de provoquer des perturbations dans des domaines connexes .

\* Un critère d'optimisation peut se dégrader où être périmée lorsque le temps passe , cela est dû à la flexibilité du monde économique, et à la succession des saisons (ce qui est conseiller en été peut être à rejeter en hiver ) .

## *Chapitre 3*

# LES MÉTHODES D'ÉQUILIBRAGE DES RÉSEAUX MAILLÉS

## Les méthodes d'équilibrage des réseaux maillés

### *A/ Introduction :*

Dans le cadre des écoulements en régime permanent des fluides sous pression l'étude des réseaux dits mailles tient une place importante due à ces applications pratiques surtout dans le domaine de la distribution d'eau potable .

Ce genre de problème ou il s'agit de déterminer les débits et pressions dans le réseau était résolu avant l'événement des calculateur surtout par des techniques de simulation où le réseau hydraulique était simulé par un réseau électrique " équivalent " En 1936 Hardy cross a mis au point une méthode numérique quoique laborieuse mais utilisable manuellement .

Pour cela on adopte les techniques de l'équilibrage de Hardy-cross, la méthode de linearisation de l'équation de perte de charge et enfin la méthode de Newton-Raphson .

### *B/ Formulation du problème :*

Le problème consiste à déterminer ( sous certains hypothèses et données de base ) les débits qui transitent dans chaque tronçon ainsi que les pressions disponibles aux noeuds du réseau .

Cette analyse conduit à une formulation théorique aisée dont les équations de base sont :

a- les équations de perte de charge

$$J_{ij} = R_{ij} Q_{ij}^{\alpha} \quad ( III . 1 )$$

$J_{ij}$  : différence de charge entre les noeuds

$Q_{ij}$  : le débit dans les conduites ij

$R_{ij}$  : résistance hydraulique

b- les équations de continuité aux noeuds :

$$\sum Q_{ij} + q_i = 0 \quad (\text{III. 2})$$

(une équation par Noeud )

$q_i$  : débit de consommation au Noeud i

c- les équations de conservation d'énergie

$$\sum J_{ij} = 0 \quad (\text{III. 3})$$

( une équation par maille )

Un sens positif arbitraire doit être donné à la maille,  $J_{ij}$  sera positif si le sens du débit dans la branche ( ij ) est le sens de la maille .

Les équations ( III . 1 ) , ( III . 2 ) et ( III.3 ) sont les expressions de base qui forment le système d'équations non-linéaires à résoudre pour l'étude de l'équilibrage des réseaux maillés .

$$\begin{cases} J_{ij} = R_{ij} Q_{ij}^\alpha \\ \sum Q_{ij} + q_i = 0 \\ \sum J_{ij} = 0 \end{cases}$$

Pour résoudre le problème d'équilibrage dont certain nombre d'hypothèses doivent être prises en compte .

A ces hypothèses sera associé une série de contraintes sur les pressions aux noeuds et sur les vitesses d'écoulement dans les conduites, ces contraintes sont imposées dans le but de garantir un bon fonctionnement du réseau, dont le rôle d'adduction et de distribution de l'eau doit être rempli dans les meilleures conditions .

a- contraintes sur la vitesses :

$$V_{\min} \leq V \leq V_{\max}$$

V : Vitesse d'écoulement .

b- contrainte sur les pressions :

$$P_{\min} \leq H \leq P_{\max}$$

$P_{\min}$  : pression minimale

$P_{\max}$  : pression maximale

**C/ Calcul du débit de consommation ( $q_i$ ):**

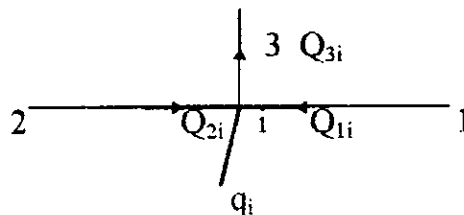
On a le débit de pointe  $Q_p$  et la longueur total du reseau  $L_R$  , donc le débit par unité de longueur :

$$Q_L = \frac{Q_p}{L_R}$$

La prochaine étape est d'attribuer un débit pour chaque longueur de conduite .

$$Q_{ij} = Q_L \times L_{ij}$$

Le débit de consommation  $q_i$  c'est la somme des débit entrant vers le noeud i



$$q_i = Q_{2i} + Q_{1i}$$

le débit de pointe  $Q_p$  est calculée par la méthode classique ( en fonction du nombre d'habitants ) ceci entrainerait un surdimensionnement du réseau car les débits qui transitent sur un grand nombre de tronçons, ont une probabilité très faible d'être dépassée puisque l'ouverture des prises est une phénomène aléatoire .

D'où la méthode de CLEMENT pour le débit de pointe qui est basée sur le modèle probabiliste que envisage de desservir des logements (foyer ) et non chaque habitant, avec l'unité de consommation est le foyer .



**D/ Méthode de Hardy- cross :**

C'est une méthode itérative mise au point en 1936 par H. cross .

servant à l'origine pour résoudre les problèmes de résistance des systèmes reticulés hyperstatiques, elle fut étendue aux réseaux maillés en hydraulique se prêtant bien au calcul manuel, elle continue d'être assez largement utilisée après l'événement des ordinateurs .

Nous traitons la méthode dite des mailles ( par opposition à celle des noeuds ou les inconnues sont non pas les débits dans les tronçons mais les charges aux noeuds ) .

Connaissant les débits aux noeuds, on se propose donc de déterminer les débits dans tous les tronçons du réseau .

a- Choisissons une distribution initiale d'équilibre pour les débits  $Q^{\circ}$  ( vérifiant les équations de continuités aux noeuds ) .

$$\sum Q_{ij}^{\circ} + q_i = 0$$

b- Isolons une mailles du réseau, l'équilibre des pertes de charge étant à priori non vérifié on aura :

$$\sum J_{ij} ( Q^{\circ} ) \neq 0$$

Afin d'avoir l'équilibre convenons de corriger les débits dans les tronçons de la maille de la même quantité  $\Delta Q$  supposée assez faible qui permet de se rapprocher de la bonne solution, d'où :

$$\sum J_{ij} ( Q_{ij}^{\circ} + \Delta Q ) = 0$$

En développant en série de Taylor ( au voisinage de  $Q_{ij}^{\circ}$  ) et en négligeant les termes d'ordre supérieur à deux on obtient :

$$\Delta Q = - \frac{\sum J_{ij} ( Q_{ij}^{\circ} )}{\sum J'_{ij} ( Q_{ij}^{\circ} )}$$

On doit ainsi calculer  $\Delta Q$  pour chaque maille du réseau .

c - On met à jour les débits dans les tronçons du réseau en reprenant les mailles une par une, d'où la nouvelle répartition  $Q^1$  :

$$Q^1 = Q^0 + \Delta Q^0$$

d- on revient à a) avec  $Q^1$  et ainsi de suite tant qu'un critère d'arrêt fixé à priori n'a pas été vérifié .

on aura donc à la fin de l'étape ( r ) :

$$\Delta Q^r = - \frac{\sum J_{ij} (Q_{ij}^r)}{\sum J_{ij} (Q_{ij}^r)}$$

$$J (Q_{ij}^r) = \alpha R_{ij} Q_{ij}^{\alpha-1} = \alpha R_{ij} \frac{Q^\alpha}{Q_{ij}}$$

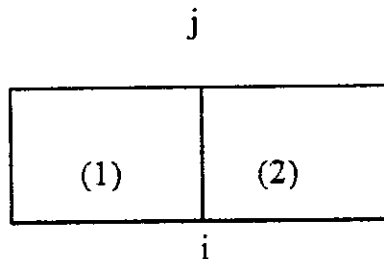
$$= \alpha J_{ij} (Q_{ij}^r) / Q_{ij}^r$$

$$\Delta Q^r = - \frac{\sum J_{ij} (Q_{ij}^r)}{\alpha \sum J_{ij} (Q_{ij}^r) / Q_{ij}^r}$$

et:

$$Q^{r+1} = Q^r + \Delta Q^r$$

Si une canalisation est commune à deux maille, la correction relatives à cette conduite sera la somme algébrique des corrections concernant les deux mailles .



$$Q_{ij}^{r+1} = Q_{ij}^r + \Delta Q_1^r - \Delta Q_2^r$$

$\Delta Q_1$  : de la maille ( 1 )

$\Delta Q_2$  : de la maille ( 2 )

Rappelons que ces calculs ne concernent pas les tronçons antennes (i.e. n'appartenant à aucune maille) pour lesquels le débit initiale est la solution.

Se qui concerne la méthode des noeuds ; on se fixe dans ce cas les valeurs des charges  $H_i$  en chaque noeud  $i$  de façon à respecter la loi des mailles.

Donc la correction à apporter ( a la charge  $H_i$  ) a fin de satisfaire la condition d'équilibre des débits en chaque noeud.

$$H_i^{r+1} = H_i^r + \Delta H^r$$

avec :

$$\Delta H^r = \frac{\alpha \sum (Q_{ij}^r + q_i)}{\sum \frac{Q_{ij}^r}{J_{ij}(Q_{ij}^r)}}$$

### *E/ Méthode de linearisation de l'équation de perte de charge :*

La méthode de linéarisation de l'équation de perte de charge tente de reduire les inconvenients des méthodes que necessite une repartition initiale des débits.

Cette technique est simplement basé sur une linearisation de l'équation de conservtion de l'énergie :

$$J_{ij} = R_{ij} Q_{ij}^2$$

On substitue :

$$J_{ij} = R_{ij} Q_{ij}$$

Cette technique permet de résoudre directement le système d'équation des (m) mailles et (n) noeuds.

le processus de résolution est constitue des étapes suivantes :

a- Détermination d'une répartition initiale des débits en resolvant un système à t équations linéaires.

$$K_0 \vec{Q} = \vec{D}$$

$K_0$  : matrice des données avec  $m$  rangées relatives aux équations de mailles, elle renseigne sur des coefficients de résistance  $R_{ij}$  et  $(t - m)$  lignes relatives aux équations de continuité aux noeuds .

$\vec{D}$  : Vecteur dont les composantes valent zéro, s'il s'agit d'une équation de maille ou d'une valeur  $q_i$  s'il s'agit d'une équation de continuité .

Donc la première solution  $Q^0$  qui est plus ou moins éloignée de la solution exacte .

$$\vec{Q}^0 = K_0^{-1} \vec{D}$$

qui est corrigée par un processus itératif :

$$R_{ij}^1 = R_{ij}^0 Q_{ij}^0$$

On obtient ainsi les nouvelles valeurs des débits :

$$\vec{Q}^1 = K_1^{-1} \vec{D}$$

Donc pour la  $K^{\text{ème}}$  itération on a :

$$R_{ij}^k = R_{ij}^0 Q_{ij}^{k-1}$$

$$\vec{Q}^k = K_k^{-1} \vec{D}$$

le processus itératif est arrêté quand le maximum de la différence des débits aux itérations  $k$  et  $k+1$  est inférieur à une tolérance fixée préalablement .

$$| Q^{k+1} - Q^k | \leq \varepsilon$$

Moins un calcul sur ordinateur demande de temps et d'espace mémoire plus il est économique, donc réduire le temps de calcul et l'espace mémoire .

Il paraît dès lors de choisir une numérotation des conduites et des mailles qui permet de minimiser la bande de la matrice des données  $[ K ]$  pour pouvoir inverser la matrice  $[ K ]$ , sans difficultés et d'une manière économique (temps de calcul) .

**F/ Méthode de Newton - Raphson :**

La méthode de Newton- Raphson est basée sur la détermination des racines du polynome  $f(x) = 0$ , supposé continu et dérivable, la méthode consiste à se fixer une valeur initiale,  $x_i$  et de générer successivement d'autres points jusqu'à trouver une racine approchée.

$$\text{alors on a } f_i(Q) = \sum R_{ij} Q_{ij}^2 = 0$$

le système à résoudre :

$$F(Q) = \begin{cases} f_i(Q) = \sum R_{ij} Q_{ij}^2 = 0 \\ i = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

On se donne une valeur  $Q^0$  si cette valeur ne satisfait pas le système  $F(Q^0) = 0$ , il faut apporter à  $Q^0$  la correction  $\Delta Q$  telle que :

$$F(Q^0 + \Delta Q) = 0$$

On développe en série de Taylor la fonction  $F(Q^0 + \Delta Q)$  autour du point  $Q^0$ , en négligeant les termes d'ordre supérieur à un.

$$F(Q^0 + \Delta Q) = F(Q^0) + J \Delta Q = 0$$

donc :  $J \Delta Q = -F(Q^0)$

$$\Delta Q = J^{-1} F(Q^0)$$

J : matrice Jacobiéenne, ou matrice des dérivées premières du système calculer.

$$\begin{cases} \Delta Q^i = J^{-1} F(Q^{i-1}) \\ Q^i = Q^{i-1} + \Delta Q^{i-1} \end{cases}$$

alors :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial Q_0} & \frac{\partial f_1}{\partial Q_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial Q_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial Q_0} & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial Q_0} & & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial Q_n} \end{bmatrix}$$

Ce processus se répète jusqu'à ce qu'une précision suffisante soit atteinte, c'est à dire que l'évaluation des équations  $F(Q) = 0$  respecte le niveau de précision  $\varepsilon$  que l'on se fixe .

$$| Q^{i+1} - Q^i | \leq \varepsilon$$

Dans ce qui concerne la méthode des noeuds par la méthode de Newton- Raphson sera formulé a partir des équations de continuité .

$$F(H_i) = \sum Q_{ij} + q_i = 0$$

$$Q_{ij} = f(H_i - H_j)$$

même procedure que la méthode des mailles

$$\Delta H_i = - J^{-1} F(H_i) \quad (\text{III. 4})$$

et

$$H^{r+1} = \Delta H + H^r$$

la convergence jusqu'a avoir :

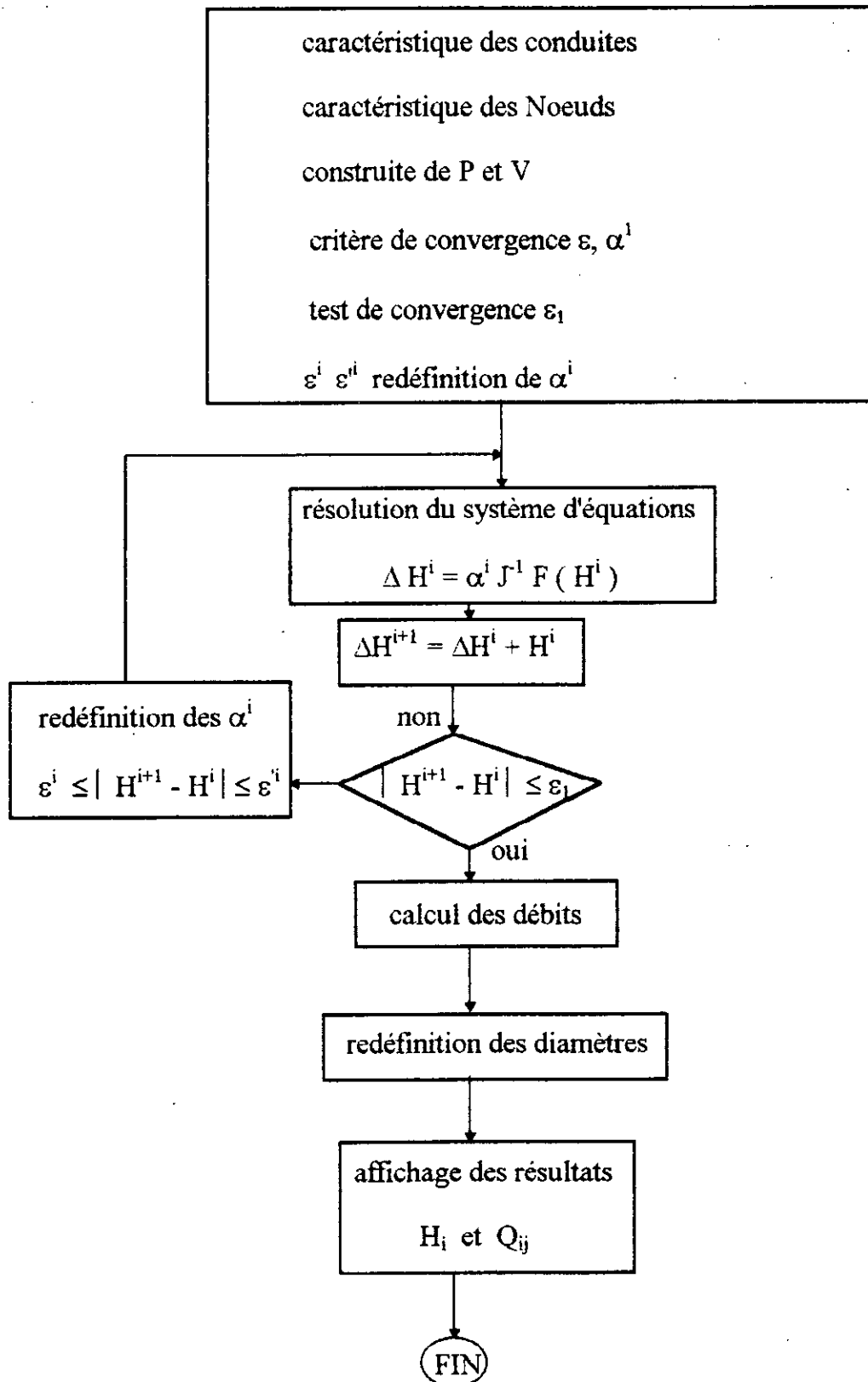
$$| H^{r+1} - H^r | \leq \varepsilon$$

Si le système ne converge pas après trois itération, nous introduisant dans la relation ( III 4 ) un facteur d'acceleration  $\alpha$  de façon à avoir :

$$\begin{cases} \Delta H^r = - \alpha^r J^{-1} F(H^r) \\ H^{r+1} = H^r + \alpha^r \Delta H^r \end{cases}$$

Pour la première itération , où le risque de divergence est plus grand, on adopte habituellement une valeur  $\alpha^1$  de l'ordre de 0,2, à la fin du calcul  $\alpha^1$  peut prendre des valeurs proches de l'unité .

Organigramme



# *Chapitre 4*

## PRESENTATION DE QUELQUES MÉTHODES D'OPTIMISATION



## Présentation de quelques méthodes d'optimisation

### A/- Introduction :

Le problème de la recherche d'un dimensionnement économique des réseaux est fort ancien, à la fin du siècle dernier, l'ingénieur Bress a développé une formule simple permettant d'estimer le diamètre ( $d$ ) en fonction du débit véhiculé ( $q$ ), à la suite de ces travaux, plusieurs types de formulations conduisant à des résolutions particulières et précises sont envisagées.

Développée par " Tong et AL " en ( 1961 ) puis par RAMAN en ( 1966 ), modifiée par Deb en ( 1971 ), l'approche du " réseau équivalent " souffre de rigueur et de justifications acceptables, bien qu'elle constitue le pas initial original.

D'autres chercheurs, aussi bien mathématiciens qu'hydrauliciens ont appliqué le concept de la programmation mathématique et de la théorie des graphes en général, et de la programmation linéaire en particulier, en partant du fait que le problème d'optimisation d'un réseau, n'est qu'un problème de flots ( débit dans les conduites ) et des tensions ( charges aux noeuds ) de coût minimal. En effet, nous avons vu que dans le cas de pressions fixées, on se ramène à un problème de flots de coût minimal, et dans le cas de pressions bornées on peut ramener le problème à une suite de problèmes de flots de coût minimal, et de tension de coût minimal.

Dans cet axe de recherche on citera, à titre indicatif, les travaux de : JACOBY (1968) qui ramène le problème discret à un problème continu qu'il ressoûde par une méthode de pénalisation.

ALPEROVITES ( 1977 ) qui propose une décomposition hiérarchique du problème en deux sous problèmes .

Ainsi que les travaux d'autres chercheurs qu'on va développer si après .

### **B/- METHODE DES CONDUITES EQUIVALENTES :**

Les méthodes des conduites équivalentes sont essentiellement basés sur la méthode de HARDY - CROSS comme modèle d'analyse.

Les charges aux noeuds étant fixées, on cherche les inconnues qui sont les diamètres et les débits.

Pour ce faire, on définit le concept de conduite équivalente à partir duquel, on pose une condition de maille à satisfaire pour obtenir la solution du coût minimum qui correspond à des diamètres optimaux.

Ces méthodes possèdent les caractéristiques communes suivantes :

- Elles ne peuvent s'appliquer qu'a des réseaux maillés .
- Dans une maille , le débit est positif s'il coule dans le sens horlogique, négatif, dans le cas contraire .
- La perte de charge dans une conduite est du même signe que le débit.

Etant donnée les caractéristiques géométriques et hydrauliques d'un réseau ( consommation , topographie, ...etc) et en se fixant les débits initiaux, on cherche dans ce qui suit à déterminer les inconnues du problème en se basant sur les trois méthodes relatives aux conduites équivalentes.

#### **B-1)- Méthode des longueurs équivalentes : (par Tong et A 1961) [28] :**

La longueur équivalente est définie comme étant la longueur d'une conduite de diamètre égal à 200mm et de coefficient de HAZEN - WILLIAMS de 100 et qui donnerait la même perte de charge pour un même débit :

$$L_e = L \cdot \left(\frac{100}{CW}\right)^{1,85} \cdot \left(\frac{200}{D}\right)^{4,86} \quad (\text{IV.1})$$

$L_e$  : longueur équivalente (m).

$L, D$  : longueur(m) et diamètre (mm) respectivement.

$CW$  : coefficient de HAZEN-WILLIAMS.

En introduisant cette équation dans la formule de HAZEN - WILLIAMS on obtient la relation :

$$L_e = \frac{\Delta H}{0,19Q^{1,85}} \quad (\text{IV.2})$$

Les contraintes à respecter sont donc :

$$\text{pour chaque noeud :} \quad \sum Q = 0 \quad (\text{IV.3})$$

$$\text{pour chaque maille :} \quad \sum \Delta H = 0 \quad (\text{IV.4})$$

$$\text{la condition de maille à satisfaire :} \quad \sum_{i \in M_p} L_{e_i} = 0 \quad (\text{IV.5})$$

$M_p$  : ensemble des tronçons appartenant à la maille  $p$ .

Si l'équation (IV . 5) n'est pas satisfaite, il faudra alors effectuer une correction sur les débits tels que :

$$\sum L_e = f((Q_i + \Delta Q)_{i \in M_p}) = 0 \quad (\text{IV.6})$$

En développant en série de TAYLOR et en négligeant les termes d'ordre supérieur à un l'équation (IV . 6) s'écrit :

$$f((Q_i)_{i \in M_p}) + \left( \sum_{i \in M_p} \frac{\partial f_i}{\partial Q_i} \right) \Delta Q = 0 \quad (\text{IV.7})$$

$$\text{avec : } \frac{\partial f_i}{\partial Q_i} = -1,85 \cdot \frac{L_{e_i}}{Q_i}$$

La combinaison des équations (IV.2), (IV.6), (IV.7), (IV.8) fournit le facteur de

$$\text{correction : } \Delta Q = \frac{\sum L_{e_i}}{1,85 \sum \left( \frac{L_{e_i}}{Q_i} \right)} \quad (\text{IV.9})$$

Le calcul itérative continue jusqu'à se que la condition de convergence ( $\sum L_{e_i} < \epsilon$ ) soit satisfaite.

Connaissant les valeurs des longueurs équivalentes, on calcul les diamètres optimaux pour chaque conduite par l'expression :

$$D_i = 200 \cdot \left( \frac{L_i}{L_{e_i}} \right)^{0,21} - \left( \frac{100}{CW_i} \right)^{0,38} \quad (\text{IV.10})$$

Les diamètres ainsi calculés doivent être ajusté pour correspondre aux diamètres commerciaux disponible, il est donc nécessaire de recalculer les charges et les débits correspondant à ces nouveaux diamètres.

#### **Conclusion des auteurs :**

- Cette méthode permet de déterminer directement les dimensions à donner aux conduites.

- Elle n'est applicable qu'a des réseaux composés d'un réservoir et d'un réseau maillé de conduites, dans lequel, l'eau s'écoule par gravité.

**B-2)- Méthode des longueurs équivalentes :****( par V. RAMAN et SRAMAN 1966) [16]**

La méthode d'optimisation proposée, est fortement semblable à celle de Tong et AL, les équations de base et le processus de résolution sont identiques, seules la condition de maille et la valeur du facteur de correction qui en découle qui sont différentes. la condition de convergence pour chaque maille donnée par RAMAN :

$$\sum_M \left( \frac{L_{e_i}}{Q_i} \right) = 0$$

de la même manière que celle développée dans (IV.I) . une nouvelle valeur du facteur de correction ( $\Delta Q$ ) est donné par :

$$\Delta Q = \frac{\sum \left( \frac{L_{e_i}}{Q_i} \right)}{2,85 \left( \sum \frac{L_{e_i}}{Q_i^2} \right)}$$

après avoir donné les mêmes avantages et inconvénients, les auteurs affirment que les solutions obtenues avec leur méthode sont plus économiques que celles obtenues par Tong et AL, en s'appuyant sur un exemple traité avec les deux méthodes.

***Critique des méthodes (Le) ( par SWAMEE et KHANN) :***

L'optimum obtenue par les deux méthodes est un optimum local, une analyse approfondie a conduit à la conclusion que le coût des conduites est une fonction décroissante du diamètre ce qui est inconcevable.

**B-3)- Méthode des diamètres équivalents : (par Deb et SARKAR 1971) [16]**

Le diamètre équivalent est définie comme étant le diamètre d'une conduite de (100m) de longueur et de coefficient de HAZEN - WILLIAMS égal à (100) et qui pour un même débit donne la même perte de charge que la conduite réelle :

$$D_e = D \left( \frac{CW}{100} \right)^{0,381} \left( \frac{100}{L} \right)^{0,206} \quad (IV.11)$$

$D_e$  : diamètre équivalent (m)

$D$  : Diamètre (m)

$CW$ : Coefficient de H. Williams

$L$  : Longueur (m).

En introduisant cette équation dans la formule de H. Williams on obtient la relation reliant le diamètre équivalent au débit et à la perte de charge :

$$D_e = 0,73 \frac{Q^{0,381}}{\Delta H^{0,206}} \quad (IV.12)$$

En adoptant le raisonnement des multiplicateurs de lagrange ( Voir chapitre I ).

Deb et SERKAR détermine une fonction objective reliant le coût d'une conduite , en fonction de sa longueur et son diamètre équivalent :

$$F_{o_i} = K(0,73)^m \frac{Q_i^{0,381m}}{\Delta H^{0,206m}} \quad (IV.13)$$

$K, m$  : des constantes.

$F_{o_i}$  : coût d'une conduite.

Le coût total du réseau est donnée par :

$$F_o = \sum F_{o_i} \quad (IV.14)$$

On cherche donc à minimiser pour chaque maille, le coût des conduites équivalentes qui le composent, par conséquent on obtient la condition de convergence qui correspond à la dérivée nulle.

$$\text{Soit :} \quad \sum \frac{D_{e_i}^m}{Q_i} = \frac{F_o}{0,381 K} \quad (IV.15)$$

$$\text{avec :} \quad F_o = \frac{dF_o}{dQ_1}$$

On se fixe des débits initiaux dans chaque conduite que l'on corrige au moyen de facteur de correction donnée comme suit :

$$\Delta Q = \frac{A - \sum \left( \frac{D_{e_i}^m}{Q_i} \right)}{(0,381 m - 1) \cdot \sum \left( \frac{D_{e_i}^m}{Q_i^2} \right)} \quad (IV.16)$$

Le processus itérative est arrêté si la condition (IV. ) est satisfaite .

#### **Conclusion des auteurs :**

La méthode permet de déterminer directement les diamètres optimaux des conduites .

Des fonctions coût ont été définie, permettant de calculer le coût des conduites ainsi que celui du réservoir, de la pompe et de l'entretien .

Toute fois, cette méthode possède des inconvénients selon SWANNE et KANNE à savoir :

- La fonction coût est inversement proportionnel aux longueurs des conduites ce qui semble illogique.
- La condition à satisfaire conduit à une maximisation du coût plutôt qu'à une minimisation.

### **C/- OPTIMISATION DES RESEAUX DE DISTRIBUTION D'EAU :**

**(PAR JACOBY 1968) [16]**

Le modèle de Jacoby [16] utilise comme variable de décision les trois paramètres principaux ; le diamètre , le débit et les pertes de charge , basant sur la méthode du gradient à pas prédéterminé .

Cette méthode s'applique à des réseaux incluant ; un réservoir et une pompe d'adduction.

La fonction objective comprend le coût de l'ensemble des conduites et celui des opérations de pompage.

$$F_0 = \sum_i (K_1 D_i^3 + K_2 D_i^2 + K_3 D_i + K_4) \cdot L_i + \frac{C \rho g Q_p \Delta H_p \Delta t}{\eta_p}$$

$K_1, K_2, K_3, K_4$  : constantes

$C$  : coût du Kwh

$\rho$  : densité de l'eau

$Q_p$  : débit de la pompe

$\Delta t$  : durée de vie de la pompe

$\eta_p$  : Rendement de la pompe



d'où le programme mathématique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min Fo \\ \text{sous les contraintes} \\ \sum \varepsilon_i Q_{ij} = q_j \\ \sum \varepsilon_i \Delta H_i = 0 \\ V \min \leq V_i \leq V \max \\ P \min \leq P_j \leq P \max \end{array} \right.$$

D'après les équation de base et la fonction objective FO à minimiser, on est devant un problème d'optimisation non linéaire et discret, du fait que les diamètres ne peuvent prendre que les valeurs disponible sur le marche ( gamme commerciale) .

La résolution du problème est basée sur la minimisation de la fonction objective sujette aux contraintes de fonctionnement du réseau comme suit :

$$Fo = \sum_{i=1}^l (K_1 D_i^3 + K_2 D_i^2 + K_3 D_i + K_4) \cdot L_i + \frac{C \rho g Q_p \Delta H_p \Delta t}{\eta_p} + \sum_{j=1}^n A_j \cdot \left( \sum_j Q_i + q_i \right) + \sum_{k=1}^m B_k \cdot \left( \sum_k \Delta H_i \right)$$

La fonction objective FO peut être exprimée en fonction de deux paramètres ( $Q_i$ ,  $D_i$ ) ou ( $\Delta H_i$ ,  $D_i$ ) .

En remplaçant :

$$\Delta H = \frac{K_i |Q_i| Q_i}{D_i^5}$$

$$F_o(Q, D) = \sum_{i=1}^l (K_1 D_i^3 + K_2 D_i^2 + K_3 D_i + K_4) \cdot L_i + \frac{C \rho g Q_p \Delta H_p \Delta t}{\eta_p} \\ + \sum_j A_j \cdot (\sum Q_i + q_i) + \sum_k B_k \cdot \left( \frac{K_i |Q_i| Q_i}{D_i^5} \right)$$

ou :

$$F_o(\Delta H, D) = \sum_i (K_1 D_i^3 + K_2 D_i^2 + K_3 D_i + K_4) \cdot L_i + \frac{C \rho g Q_p \Delta H_p \Delta t}{\eta_p} \\ + \sum_j A_j \cdot \left( \sum_j \frac{\Delta H_i D_i^5}{K_i} + q_j \right) + \sum_k B_k \cdot \left( \sum_k \Delta H_i \right)$$

$A_j$  et  $B_k$  : constantes .

L'utilisation de la méthode du gradient a par prédéterminer implique le choix d'un point arbitraire  $p^o$  dans l'espace a  $2L$  ( $L$ : nombre dimension) dimension ;  $P^o = (Q^o, D^o)$  ou  $P^o = (\Delta H^o, D^o)$ .

Si a ce point  $P^o$  la fonction objective n'est pas minimal on cherche une direction de descente dans l'espace réalisable de telle sorte que la valeur prise pour la fonction au point suivant soit plus petite que celle prise au point considère .

$$F_o(P^1) < F_o(P^o)$$

En se déplaçant dans la direction du minimum c'est a dire dans la direction du gradient de  $F_o$ , on aura :

$$P^{i+1} = P^i - \lambda_i \frac{\text{grad } F_o(P^i)}{\|\text{grad } F_o(P^i)\|}$$

La longueur du pas choisi dans la direction peut varier également , elle peut être réduite ou augmenté suivant la valeur de  $F_o$ .

Afin d'éviter le minimum local, on peut aussi recommencer la procédure en partant d'un autre point initiale.

Lorsqu'on arrive à minimiser la fonction objective les diamètre des conduites sont arrondis suivant la gamme commerciale.

Si cela conduit au non respect d'une des contraintes on applique une méthode d'équilibrage pour rééquilibrer le réseau .

#### **D)- METHODE D'OPTIMISATION DES RESEAUX DE DISTRIBUTION (PAR CENEDESE ET MELE 1978) [5]**

La méthode est basée sur l'utilisation des débits de circulation et les charges aux noeuds comme variable de décision, avec cette méthode on peut calculer une solution désirable avec un temps de calcul acceptable .

La fonction objective présente le prix total des conduites. On utilise une formule continue en fonction du diamètre par unité de longueur, donc :

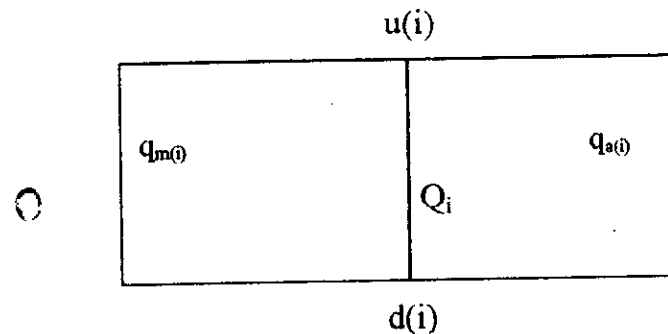
$$F_o = \sum_i a D_i^\gamma L_i$$

$$\gamma \in [1 \quad 2]$$

On déduit le diamètre de l'équation de perte de charge et on l'introduit dans la fonction objective :

$$F_o = \sum_i a \left( \frac{b |Q_i'| Q_i|}{H_{u(i)} - H_{d(i)}} \right)^{\gamma/\beta} \cdot L_i^{(1+\gamma/\beta)}$$

On prend en compte l'équation de continuité et on s'inspire de la méthode de Cross et on introduit comme variable  $q$  le débit de circulation pour chaque maille.



$$Q'_i = Q_i + q_{m(i)} - q_{a(i)}$$

$M(i)$  : indice de la boucle principale

$a(i)$  : indice de la boucle adjacente

$q_m$  : débit de circulation de la maille principale

$q_a$  : débit de circulation de la maille adjacente

Donc :

$$F_0 = \sum_i a_i \left[ \frac{b_i |Q_i + q_{m(i)} - q_{a(i)}| \cdot (Q_i + q_{m(i)} - q_{a(i)})}{H_{u(i)} - H_{d(i)}} \right]^{\gamma/\beta} \cdot L_i^{(1+\gamma/\beta)}$$

De plus la direction du débit doit être conforme avec l'équation de perte de charge, cette contrainte doit être introduite dans la fonction objective en ajoutant un terme de pénalité quand l'écoulement et la perte de charge sont en sens opposé, donc la fonction objective s'écrit :

$$F_o = \sum_i \left[ Z_i \cdot a \cdot \left[ \frac{b|Q_i + q_{m(i)} - q_{a(i)}| \cdot (Q_i + q_{m(i)} - q_{a(i)})}{H_{u(i)} - H_{d(i)}} \right]^{\gamma/\beta} \right. \\ \left. L_i^{(1+\gamma/\beta)} + (1-Z_i) \cdot \left[ a \cdot \left( \frac{b(Q_i + q_{m(i)} - q_{a(i)})^2}{J_0 \cdot L_i} \right)^{\gamma/\beta} \right] \right. \\ \left. L_i^{(1+\gamma/\beta)} + K \cdot |Q_i + q_{m(i)} - q_{a(i)}| \cdot \left( |H_{u(i)} - H_{d(i)}| + J_0 L_i \right) \right]$$

Le second terme qui a été ajouter donne le coût de pompage de  $H_u$  vers  $H_d$  avec la connaissance du gradient  $J_0$ .

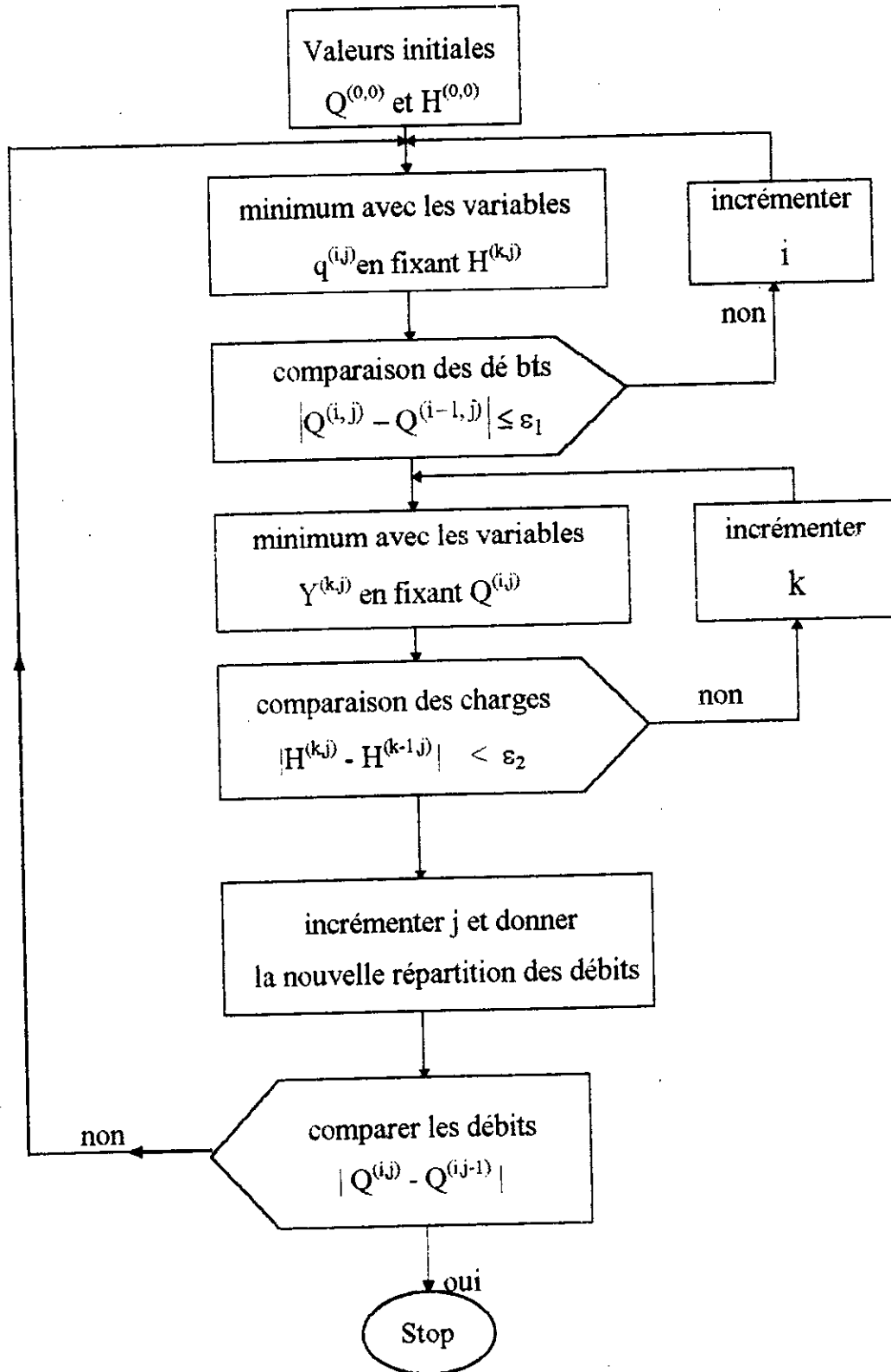
$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{lorsque la perte de charge et le débit ont la même direction} \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

La résolution de ce problème suggérée par les auteurs est basée sur l'étude de la variation de la fonction objective en fonction des débits de circulations en fixant les charges aux noeuds et aussi de la même manière, sa variation en fonction des charges aux noeuds en fixant les débits de circulation.

Afin de calculer la courbe de variation de FO en fonction de  $q$  et aussi la courbe FO en fonction de  $H$ , on peut déterminer  $H^*$  ( valeur optimale) qui implique les nouvelles valeurs de la répartition des débits.

La résolution est clairement développée dans l'algorithme suivant :

Organigramme :



**E)- METHODE DE FEATERSTONE ET EL - JUMAILY (1983) : [9]**

Cette méthode est basée sur la méthode de HARDY - CROSS ou celle des noeuds, pour le calcul hydraulique du réseau .

Une modification des diamètres à chaque itération basée sur l'hypothèse que la solution la plus économique correspond à une perte de charge unitaire unique et constante , est suivie d'un calcul hydraulique, jusqu'à ce que la valeur d'une fonction coût , comprenant le coût des conduites du pompage et des réservoirs (voir chapitre II ), soit minimum.

**E-1- Evaluation du facteur de correction :**

Les pertes de charge dans une conduite sont donnée par l'équation de DARCY :

$$J = 0,08 \lambda Q^2/D^5 \quad (IV.17)$$

avec : J : perte de charge par unité de longueur .

$\lambda$  : coefficient de perte de charge exprimé par l'équation de Colebrook et White .

Q : débit m<sup>3</sup> / sec .

D : diamètre (m)

De l'équation (IV.17) on déduit l'expression du diamètre qu'on introduit dans l'équation ( I.2 ) puis, en injectant le résultat dans l'équation ( I.1 ), on obtient le coût total du réseau exprimé en fonction de la variable  $J_0$  soit :

$$FO = a_1 \sum_i K_i^{a_3} \frac{L_i^{a_2} \cdot Q_i^{0,4a_3}}{J_0^{0,2a_3}} + b_1 Q_p^{b_2} \Delta H_p^{b_3} + \frac{\rho g Q_p \Delta H_p T.E.A}{1000 \eta_p} + d_1 V^{d_2} \quad (IV.18)$$

avec :  $a_1, a_2, a_3, d_1, d_2, b_1, b_2, b_3$  : constantes déterminées par la méthode des moindres carrées .

- $Q_p$  : débit de pompage .  
 $V$  : volume du réservoir .  
 $L_i$  : longueur de la conduite  $i$   
 $Q_i$  : débit dans la conduite  $i$   
 $A$  : nombre d'années de travail de la pompe .  
 $E$  : coût du Kwh .  
 $T$  : nombre d'heures de pompage par an .  
 $K_1 = (0,08\lambda)^{0,2}$  ;  $\eta_p$  : rendement de la pompe .

Le coût  $F_0$  est minimum lorsque  $\frac{\partial F_0}{\partial J_0} = 0$  ce qui permet de déduire la valeur

de  $J_0$  optimal :

$$J_0 = \left[ \frac{0,2a_3 \sum K_2 L_i^{a_2} Q_i^{0,4a_3}}{K_3} \right]^{(0,2a_3+1)^{-1}} \quad (\text{IV.19})$$

avec :

$$K_2 = a_1 K_1^{a_3} ; K_3 = \frac{\rho g Q_p d \cdot T \cdot A \cdot E}{1000 \cdot \eta_p}$$

$d$ : la plus courte distance évaluée le long des conduites séparant le réservoir du noeud où la charge est minimum (m).

En utilisant l'équation de DARCY, on peut évaluer les diamètres correspondant à  $J_0$ .

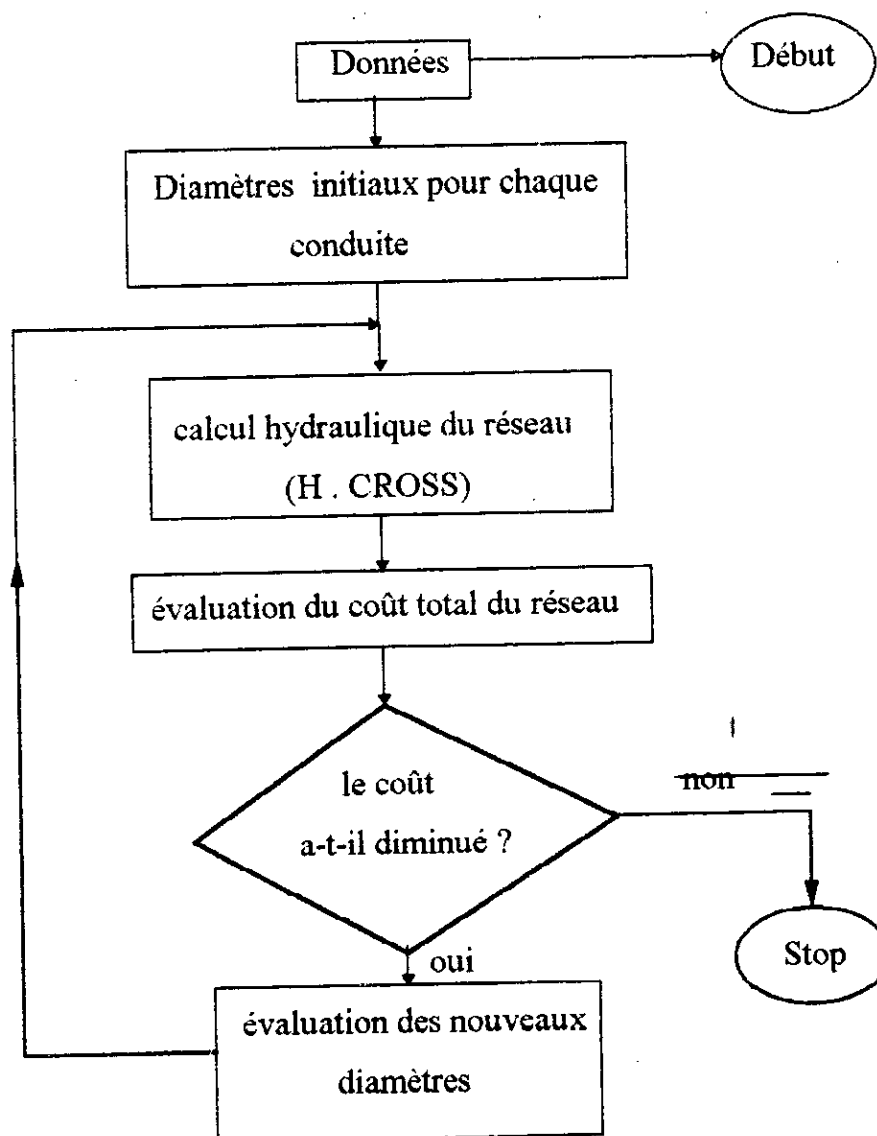


**Conclusion des auteurs :**

- Cette méthode peut être appliquée à des réseaux mailles ou ramifiés quelles que soient leurs dimensions.

- La méthode utilise la longueur réel des conduites et détermine les diamètres réels.

- La fonction coût tient compte du coût d'installation ainsi que celui d'utilisation.

**Organigramme de la méthode :**

**F)- OPTIMISATION DES RESEAUX URBAINS DE DISTRIBUTION D'EAU:  
( PAR MORGAN - GOULTER -1985- ) [24]**

Le modèle dans cette méthode d'optimisation est basée sur une approche entre le tracer correspondant à un coût minimum et l'étude du réseau maillé de distribution d'eau potable .

MORGAN et GOULTRE [24] démontre que cette méthodologie est bien appliquée a l'étude des nouveaux reseaux et aussi a l'extension des reseaux déjà existant .

Après avoir déterminer les débits et les charges aux noeuds par la méthode de HARDY - CROSS suit a une répartition initiaux des variables, ont les affecte a une procédure de modification des diamètres des conduites, si la pression est inférieur a une valeur minimal, donc il faut remplacer la conduite par une conduite de diamètre plus grand , contrairement, si la pression est supérieur a une valeur minimal alors on remplace la conduite par un plus petit diamètre pour maintenir la pression critique, bien entendu ce changement se fait sur la condition d'avoir un coût minimum .

Alors que la nouvelle configuration des grondeurs des conduites est élaborée on les affecte de nouveau dans la technique de HARDY - CROSS .

Le programme linéaire de cette procédure est formulée comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fonction objective :} \\ \min \sum_{j=1}^n (K_{jdr} x_{jdr} + K_{jds} x_{jds}) \\ \text{sous les contraintes :} \\ \sum_{j \in P_i} (W_{ij} G_{jdr} x_{jdr} + W_{ij} G_{jds} x_{jds}) \leq (H_{\min} - H_i) \\ x_{jdr} \leq L_j \\ x_{jds} \leq L_j \end{array} \right.$$

$K_{jdr}$  :coût unitaire de changement dans le tronçon j de la d<sup>ème</sup> conduite à une conduite de grand diamètre de N° r ( $K_{jdr} > 0$ ) .

$K_{jds}$  : coût unitaire du changement dans le tronçon  $j$  de la conduite de  $N^{\circ} d$  a une conduite du plus petit diamètre de  $N^{\circ} s$  ( $K_{jds} < 0$ ).

$X_{jdr}$  et  $X_{jds}$  : variable de décision: longueur de la conduite de diamètre de  $N^{\circ} d$  dans le tronçon  $j$  remplacer par la conduite du diamètre de  $N^{\circ} r$  ou  $s$  respectivement :

$$K_{jdr} = C_r - C_d$$

$$K_{jds} = C_s - C_d$$

$C_j$  : coût par unité de longueur du diamètre de  $N^{\circ} j$ .

$G_{jdr}$  et  $G_{jds}$  : le changement du gradient lors du changement des diamètre .

$W_{ij}$  : pourcentage de débit qui arrive du tronçon  $j$  vers le noeud de l'ensemble des débits qui arrivent à ce noeud.

$$W_{ij} = W_j = \left( \frac{Q_j}{I_m} \right) \cdot W_m$$

$I_m$  : somme des débit entrant vers le noeud  $m$ .

Si le tronçon  $x_j$  est composant de deux conduite de diamètre différent, il faut ajouter une contrainte comme suit :

$$\begin{aligned} x_{jdr} &\leq l_{1j} \\ x_{jds} &\leq l_{2j} \\ l_{1j} + l_{2j} &= L_j \quad \forall j \end{aligned}$$

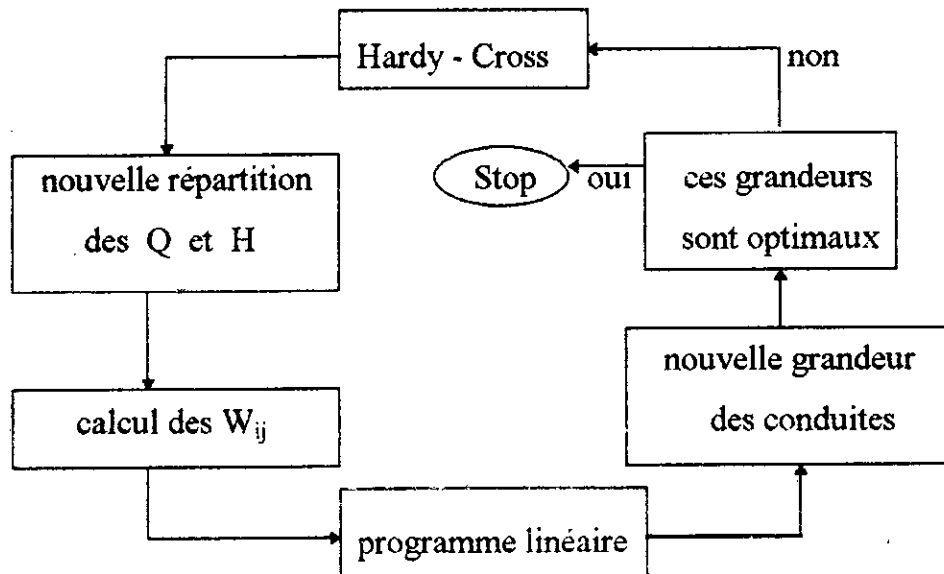
Après avoir calculer la nouvelle répartition des débits , on les utilise pour un calcul simple de  $W_{ij}$  qu'on injecte dans le programme linaire.

Ce processus se répète itérativement jusqu'à une solution optimal qui est adoptée par la condition :

$$W_{ij} > 0,5$$

Le déroulement de cette résolution est clairement présenter par l'organigramme suivant :

**Organigramme :**



### G)- METHODE DE LABYE (1963)

(AMELIORE PAR LABDI 1985) [19]

#### G-1- Introduction :

Cette méthode profite du fait qu'une ossature principale ramifiée  $R'$  de longueur minimal est associée à un réseau maille  $R$  et dont les diamètres sont fixés, et /ou, pour les appelles aléatoires, le débit est stable.

Elle prend en considération l'incidence de la longueur sur les prix, ainsi que la nécessité d'introduire les paramètres hydrauliques et économiques des tronçons fermant les mailles.

Il est nécessaire, avant d'entamer le processus de la méthode, de définir la notion de l'arbre de longueur minimal ( $R'$ ).

Un réseau maille  $R(N, T)$  est un graphe connexe dont :

$T = (t_1, \dots, t_n)$  : l'ensemble des tronçons  $R$

$N = (n_1, \dots, N_n)$  : l'ensemble des noeuds.

avec :  $\text{card } T = t$   
 $\text{card } N = n$

On peut extraire de R un arbre  $R' (N, T') \in R$  de longueur minimale tel que :

$T' \in T$   
 et  $\text{card } T' = m - 1$   
 $m$  : nombre de mailles .

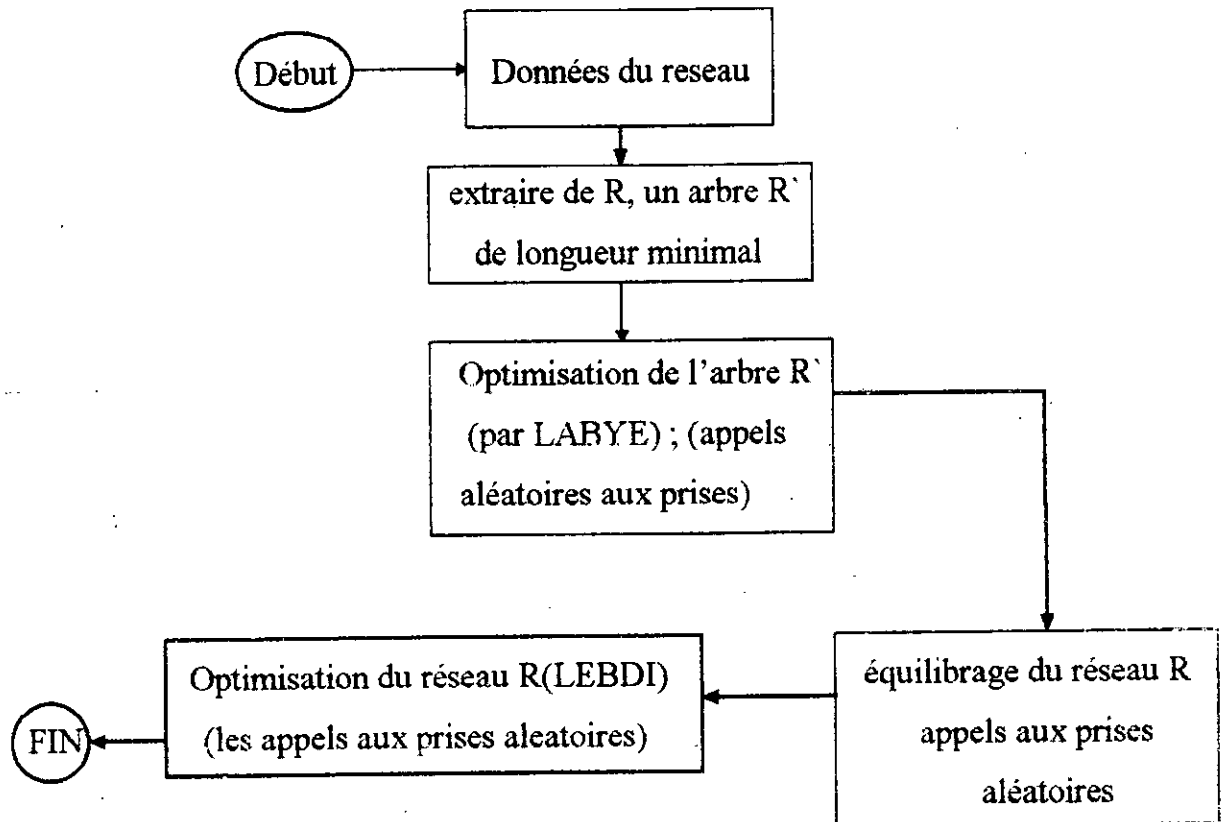
### *G-2- Principe de la méthode :*

En extrayant du réseau R un réseau ramifié R' de longueur minimal considéré comme ossature optimal, si non proche de l'optimal, nous déterminons une distribution des débits aux prises ( $Q_p^\circ$ ) a partir de la méthode de clément , qui est basée sur la répartition probabiliste de l'ouverture des prises .

Pour la distribution des débits aux prises ( $Q_p^\circ$ ) nous optimisons l'arbre par la méthode de LABYE, et par conséquent nous obtenons une distributions optimale des diamètres sur les tronçon de l'arbre .

Nous fixons plusieurs distributions de diamètres des tronçon maillants, a chacune d'entres elles, correspond une séquence d'optimisation, correspondent aux étapes suivantes :

- Connaissant une distribution de diamètres, sur tous les tronçons du réseau nous procédons a son équilibrage, pour en déduire une distribution de débit .
- Connaissant une nouvelle distribution de débit , fixe sur R, nous procédons a son optimisation par un algorithme développée par LEBDI donnant une distribution optimal de diamètres, avec leurs longueurs respectives, sur tous les tronçons .

**Organigramme :****H)- MODELE D'OPTIMISATION DES RESEAUX DE DISTRIBUTIONS****D'EAU : (PAR LANSEY - MAYS -1990-) [20]****H-1- Introduction :**

C'est une nouvelle méthodologie daté de 1990 a pour but l'optimisation des réseaux de distributions d'eau potable .

Utilisé un couple de résolution qui est la technique du programmation non linéaire et aussi l'existence d'une répartition des débits dans le réseau .

LANCEY et MAYS [20] utilise la procédure du gradient réduit généraliser qui consiste à réduire la complexité du problème par la résolution implicite des équations de conservation de masse et d'énergie.

### H-2- Description générale :

Dans cette méthode la variable de décision c'est le paramètre D qui définit les diamètres pour chaque conduite et aussi les dimensions pour chaque composant dans le réseau par exemple : grandeur d'une pompe et le volume ou l'élévation d'un réservoir.

Tout problème d'optimisation peut être déclaré mathématiquement en terme de charge à chaque nœud et la variable de décision D, comme suit :

$$S1 \left\{ \begin{array}{l} \min f(H, Q) \\ \text{sous les contraintes} \\ \left. \begin{array}{l} \text{conservation d'énergie} \\ \text{conservation de masse} \end{array} \right\} \Rightarrow G(H, D) = 0 \\ \text{contraintes de pression} \Rightarrow H_{\min} \leq H \leq H_{\max} \\ \text{perte de charge} \Rightarrow J_{\min} \leq J(D) \leq J_{\max} \\ \text{contraintes générales} \Rightarrow W_{\min} \leq W(H, D) \leq W_{\max} \end{array} \right.$$

Cette contrainte générale est un ensemble qui inclut en terme de fonction les pressions à chaque nœud et la variable de décision D.

Le problème S1 peut être transformé pour réduire le nombre de contraintes en introduisant un changement de variable qui est la charge en fonction de D ;  $H = H(D)$  d'où le nouveau problème d'optimisation :

$$S2 \left\{ \begin{array}{l} \min f(H(D), D) \\ \text{sous les contraintes} \\ G(H(D), D) = 0 \\ H_{\min} \leq H(D) \leq H_{\max} \\ J_{\min} \leq J(D) \leq J_{\max} \\ W_{\min}(H(D), D) \leq W(H(D), D) \leq W_{\max}(H(D), D) \end{array} \right.$$

Le  $H(D)$  est déterminé par un modèle de simulation (équilibrage) après avoir fixé le paramètre  $D$  préalable.

Le programme S2 est une présentation non linéaire, est basée sur le gradient de la fonction objective, cette notion du gradient réduit est basée sur l'incrémentation des paramètres de décision  $D$ .

Pour la résolution du programme non linéaire LANSEY et MAYS [20] utilise une technique dite "lagrangien généralisé" où les variables de base sont incluses dans la fonction objective.

Donc la nouvelle fonction objective appelée "fonction objective augmentée" est de la forme :

$$\min AL(H, D, \mu, \sigma) = f(H, D) + \frac{1}{2} \sum_i \sigma_i \min\left(0, C_i - \frac{H_i}{\sigma_i}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_i \frac{H_i^2}{\sigma_i}$$

$\sigma_i$  : paramètre de pénalité

$\mu_i$  : multiplicateur de Lagrange

$C_i = \min(a, b)$

$a = H_i - H_{\min}$

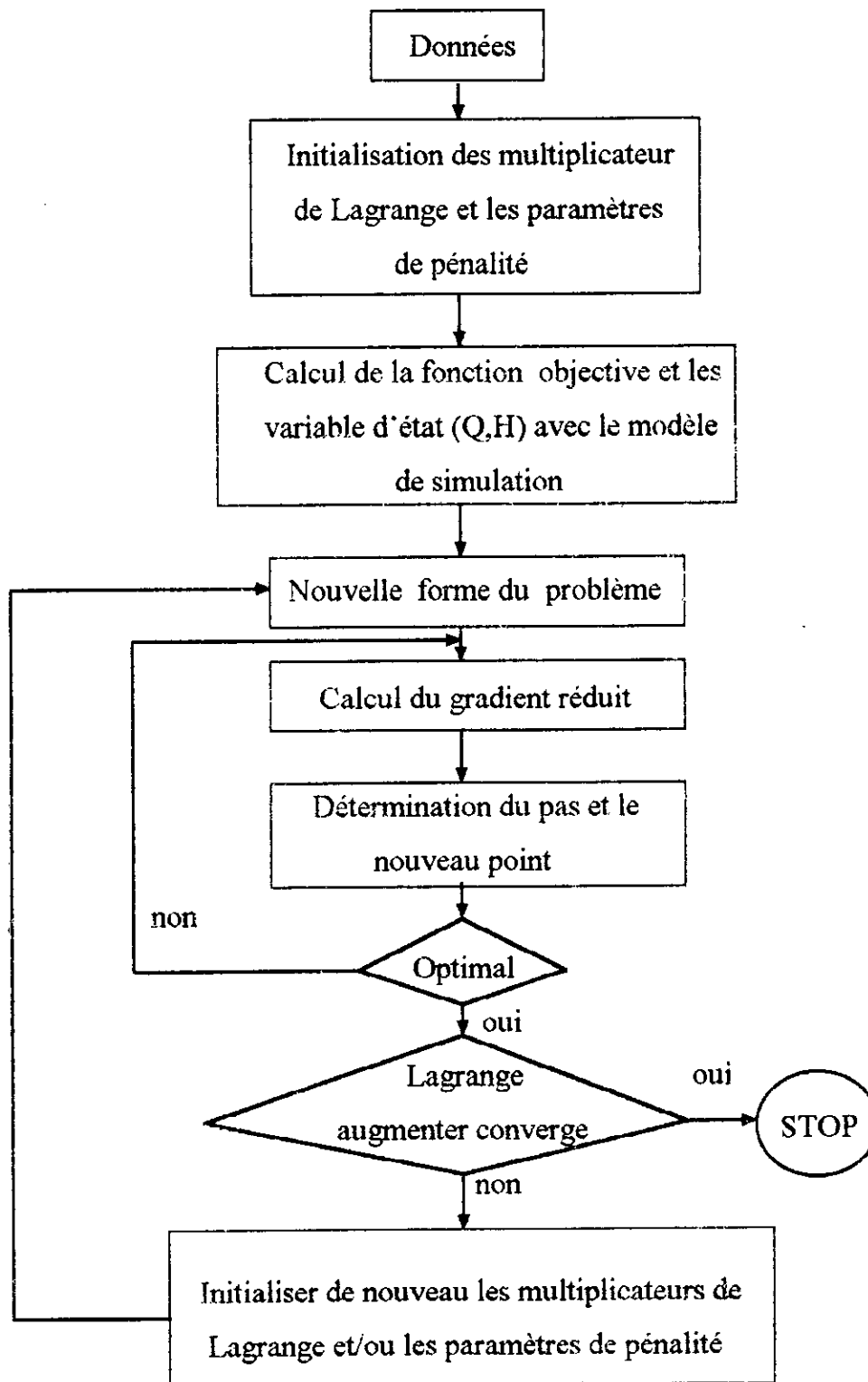
$b = H_{\max} - H_i$

On applique la technique de réduction des paramètres par  $H = H(D)$ , donc :

$$AL(H, D, \mu, \sigma) = AL(H(D), D, \mu, \sigma) = AL(D, \mu, \sigma)$$



Organigramme :



# *Chapitre 5*

## LA MÉTHODE DU GRADIENT LINÉARISÉE

## La méthode du gradient linéarisée

### *A) - Introduction :*

Nous avons, au chapitre précédent, développé et critiqué quelques méthodes d'optimisation des réseaux de distribution d'eau potable. Nous allons, dans ce chapitre, faire l'analyse complète concernant la méthode du gradient linéarisée (LPGM) qui a connue et continue à connaître des améliorations et des modifications jusqu'à nos jours.

Cette méthode a été proposée en premier lieu par ALPEROVITS et SHAMIR [1977] tout en donnant des résultats remarquables.

Différemment des méthodes exposées au chapitre précédent, la méthode du gradient linéarisé (LPGM), prend comme variable de décision la longueur d'un segment de conduite au lieu du débit, cette nouvelle perspective, permet de prendre en considération l'aspect pratique du problème; en intégrant préalablement une gamme des diamètres commerciaux comme contrainte supplémentaire, tout en garantissant l'optimalité de la solution si elle existe.

Le passage facultatif par le modèle d'équilibrage est un avantage supplémentaire de la méthode, quoique le modèle d'équilibrage permet de se rapprocher vers la solution réalisable (diminution du nombre d'itération).

Plusieurs modifications ont été portées au sein de la méthode afin de se rapprocher vers l'optimum global, tout en réduisant le temps de calcul.

On cite à titre indicatif les travaux de Quindry et AL [1979], Groulter et AL [1986], FUJIWARA et AL [1987] et KESSELER et SHAMIR [1989].

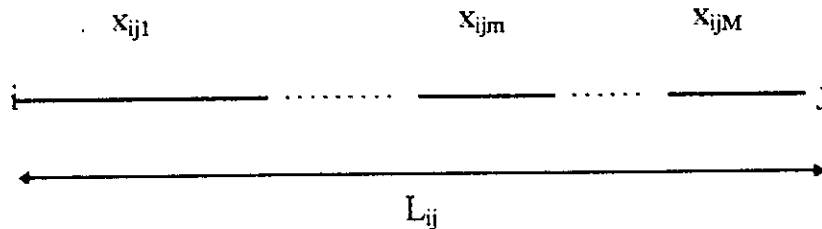
### *B)- Formulation du problème :*

#### **B. 1/ Principe de la méthode :**

La procédure adoptée par ALPEROVITS et SHAMIR [1977] est basée sur la sélection d'une gamme de diamètre commerciale  $D_{ij}$  pour chaque conduite  $(ij)$ , et

donc associé à chaque diamètre  $d_{ijm} \in D_{ij}$  une longueur  $x_{ijm}$  qui sera prise comme variable de décision .

Considérons une conduite ( ij ) de longueur  $L_{ij}$  avec un débit circulant  $Q_{ij}$  :



$$m = 1 \dots\dots\dots M$$

$$i,j = 1 \dots\dots\dots nm$$

$$\text{avec } \sum x_{ijm} = L_{ij} \tag{V.1}$$

La gamme de diamètres  $D_{ij}$  est obtenue en respectant la gamme de vitesse  $[V_{\min}, V_{\max}]$  :

$$V_{\min} \leq V_{ij} \leq V_{\max}$$

$$V_{\min} \leq \frac{4 Q_{ij}}{\Pi (d_{ijm})^2} \leq V_{\max}$$

$$\sqrt{\frac{4 Q_{ij}}{\Pi V_{\max}}} \leq d_{ijm} \leq \sqrt{\frac{4 Q_{ij}}{\Pi V_{\min}}} \tag{V.2}$$

la gamme  $D_{ij}$  est donc construite, en balayant la gamme commerciale disponible sur le marché tout en respectant l'équation ( V . 2 ) .

Après avoir associé a chaque conduite ( ij ) une gamme  $D_{ij}$  est donc une suite de longueur (  $x_{ijm}$  )  $m \in M_{ij}$  , la perte de charge est donc calculée par :

$$\Delta H_{ijm} = J_{ijm} x_{ijm}$$

$J_{ijm}$  : gradient hydraulique calculé par la formule de Hazen - Williams .

$$J = \lambda (Q / C)^{1,852} D^{-4,67}$$

$\lambda$  : Coefficient fonction des unités utilisées

$$\lambda = 10,69 \text{ pour : } Q [\text{m}^3 / \text{s}]$$

C : Coefficient de H. Williams

### B. 2/ Contraintes du problème :

*Contrainte de chemin :*

à chaque noeud ( k ) du réseau R, on associe une contrainte de chemin , qui satisfait un service meilleur avec un minimum d'énergie dissipée ; par conséquent le bilan énergétique entre la source et le noeud k vérifie la contrainte suivante :

$$H_{\min k} \leq H_s \pm \sum_{ij} \sum_m J_{ijm} x_{ijm} \leq H_{\max k} \quad (\text{V. 3})$$

Le chemin entre le noeud s ( source ) et noeud k est choisie d'une manière arbitraire .

*Contrainte des mailles :*

Comme on a vu au chapitre ( I ), une contrainte sur les mailles est associée au problème et qui traduit l'équilibre énergétique dans chaque maille :

$$\sum_{ij} \sum_m x_{ijm} J_{ijm} = b \quad (\text{V. 4})$$

b : différence de charge entre le noeud d'origine et le noeud de destination .

b = 0 pour un chemin fermé ( Maille )

b ≠ 0 pour un chemin ouvert .

### B. 3/ Fonction objective :

La forme de la fonction d'approximation du cout adopté par la méthode est du type :

$$F_o = \sum_{ij} \sum_m C_{ijm} x_{ijm} \quad (V.5)$$

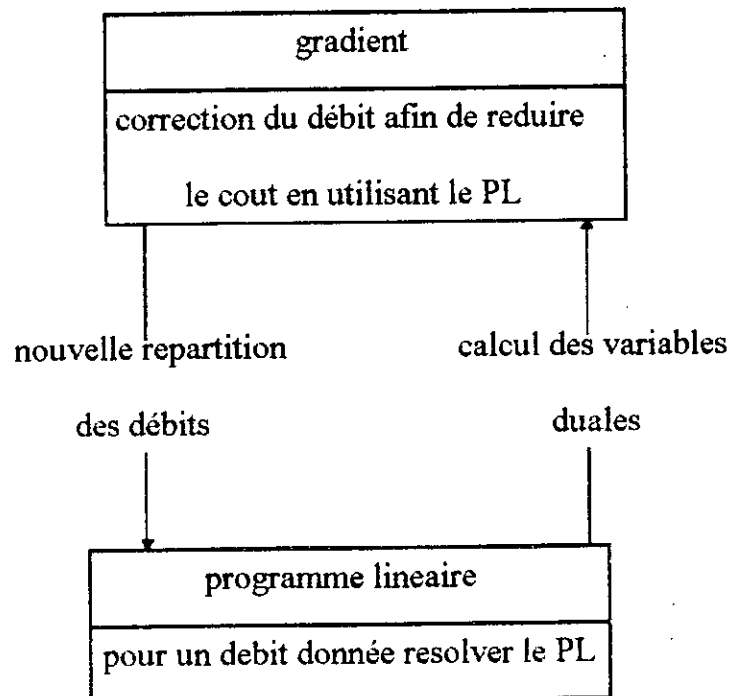
$$x_{ijm} \geq 0$$

$C_{ijm}$  : le cout unitaire correspondant au diamètre  $d_{ijm}$

C) - procédé de résolution :

$$(P.V) \left\{ \begin{array}{l} \min FO = \min \left( \sum_{ij} \sum_m C_{ijm} x_{ijm} \right) \\ \sum_m x_{ijm} = L_{ij} \\ H_{\min} \leq H_s \pm \sum_{ij} \sum_m J_{ijm} x_{ijm} \leq H_{\max} \\ \sum_{ij} \sum_m J_{ijm} x_{ijm} = b \\ x_{ijm} \geq 0 \end{array} \right.$$

ALPEROVITS et SHAMIR ont proposé une décomposition " hiérarchique " du problème en deux étapes :



La première étape consiste à formuler un programme linéaire en partant d'un débit initial arbitraire ( ou bien élaborée par le modèle d'équilibrage ) qui sera résolue par un algorithme de résolution de la programmation linéaire .

L'étape qui s'en suit consiste à élaborer un modèle de correction du débit basé essentiellement sur le gradient de la fonction objective ainsi que le pas de déplacement ( $\alpha$ ) dans la direction de descente ( $d$ ) qui garantit la décroissance de la fonction objective .

$$FO(Q + \alpha \Delta Q) < FO(Q)$$

Le pas de déplacement ( $\alpha$ ) est un paramètre décisif en terme de convergence de la méthode, il doit être choisi d'une manière judicieuse afin de satisfaire la condition :

$$\text{Min} ( FO(Q + \alpha \Delta Q) )$$

$$\alpha \geq 0$$

Le gradient de la fonction objective ( GOF ) élaborée par APEROVITS et SHAMIR [1977] est donnée par :

$$\frac{\partial(FO)}{\partial \Delta Q} = \frac{\partial(FO)}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial \Delta Q}$$

$$\frac{\partial(FO)}{\partial \Delta Q} = \pi_p \cdot \frac{\partial b}{\partial \Delta Q} \quad (V.6)$$

$\pi_p$  : variables duales correspondant à la contrainte des mailles .

On a :

$$\begin{aligned} b &= \sum_{ij} \sum_m J_{ijm} x_{ijm} \\ &= \sum_{ij} \sum_m \left[ \lambda Q_{ij}^{1,852} C_{ij}^{-1,852} D_{ijm}^{-4,87} x_{ijm} \right] \end{aligned}$$

Alors :

$$\frac{\partial b}{\partial \Delta Q} = \frac{\partial b}{\partial Q} = \sum_{ij} \sum_m 1,852 \left( \frac{\Delta H_{ijm}}{Q_{ij}} \right)$$

$$\frac{\partial(\text{FO})}{\partial \Delta Q} = G_p = \pi_p (1,852) \sum_{ij} \frac{1}{Q_{ij}} \sum_m \Delta H_{ijm} \quad (\text{V.7})$$

$G_p$  : gradient de la fonction objective pour chaque maille P

### *D - Amélioration apporté à la méthode :*

Le modèle de correction établie par Alperovits et Sharnir [ 1977 ] présente des inconvénient du fait qu'il est basée sur un choix heuristique du pas de déplacement et de ne considéré que les contraintes de maille pour l'évaluation du gradient de la fonction objective .

A cause de ces insuffisances de la méthode, plusieurs amélioration ont était faitent a fin de se rapproché vers l'optimum global .

- L'expression du gradient de la fonction objective ( GOP ) qui a était proposer par Goulter, Lussier et Morgan [ 1986 ] dans le calcul de la direction ( changement  $\Delta Q$  ) est basée sur les variables duales associer aux deux équations , des chemins et des mailles .

$$\frac{\partial(\text{FO})}{\partial H_{\min}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial(\text{FO})}{\partial b}$$

Alors :

$$G = \frac{\partial(\text{FO})}{\partial \Delta Q} = -\pi_p \sum \frac{\Delta H_{ij}}{Q_{ij}} + \sum \pm \pi_r \sum \frac{\Delta H_{ij}}{Q_{ij}} \quad (\text{V.8})$$



$\pi_p$  : Variable dual associée à la contrainte des mailles .

$\pi_r$  : Variable dual associée à la contrainte des chemins .

- La formulation du problème et l'expression du gradient ( GOF ) qui a été adoptée par Alperovits et Shamir [ 1977 ] et Gouter et AL [ 1986 ] est presque totalement révisée par FUJIWARA, JENCHAIMAHAKOON et EDIRESINGHE [1987]

La méthode ( LPGM ) adoptée par Alperovits et Shamir, en utilisant la direction de descente pour le calcul du changement du débit  $\Delta Q$ , exige un nombre élevé d'itération ; pour éliminer cette contrainte, FUJIWARA utilise la méthode quasi-NEWTONIENNE qui consiste essentiellement à une généralisation de la forme itérative de NEWTON .

Une extension naturelle consiste à remplacer  $[\nabla^2 f(x^k)]^{-1}$  par une matrice  $H^k$  définie positive dite la sécante de la matrice Hessein, donnant la direction de descente à partir du gradient :

$$d^k = - H^k G^k \quad ( V. 9 )$$

$d^k$  : direction de descente à l'itération  $k$  .

Le calcul de la Sécant de la matrice Hessein est élaborée par un algorithme de Broyden, Fletcher, Goldfarb et Shanno dit algorithme ( BFGS ) .

Le calcul de la longueur du pas pour chaque itération  $\alpha^k$  est choisie de telle manière à minimiser  $f(\alpha^k) = f(x^k + \alpha^k d^k)$  ; par une méthode d'interpolation cubique ou quadratique .

La correction du débit circulant dans la maille se fait comme suit :

$$\Delta Q = - \alpha^k H^k G^k \quad ( V. 10 )$$

À l'itération  $k$ , une nouvelle valeur du pas de déplacement optimal ( $\alpha^{k \text{opt}}$ ) est calculée par la méthode d'interpolation ( cubique ou quadratique ) puis un changement sur la sécante de la matrice Hessein et porté par la méthode ( BFGS ) ; ainsi le

processus itératif continué jusqu'à ce qu'une des deux conditions de convergence soit vérifié :

- le changement du débit doit décroître la valeur de la fonction objective dans la direction d .

- un test de convergence basé sur le gradient ( voir chapitre VI )

- En fin et en ( 1989 ), Kessler et Shamir ont porté un nouveau support à la méthode en élaborant une formulation matricielle plus développée, tout en gardant l'expression du gradient ( GOF ) développée par FUJIWARA .

La formulation matricielle du problème ( P V ) conduit au problème suivant :

$$(P V)' \left\{ \begin{array}{l} \min \{c^t X\} = FO(Q) \\ \text{Sous les contraintes :} \\ LIJ(Q) = 0 \\ PIJ(Q) X \leq \Delta h \\ IX = a \\ X \geq 0 \end{array} \right.$$

$$J_{ij} = \begin{cases} \lambda C_i^{-1,852} & d_i^{-4,87} & Q_i^{1,852} & \text{si } i = j \\ 0 & & & \text{si non} \end{cases}$$

La matrice I est définie comme suit :

$$I_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si } (i-1)M_i \leq j \leq (i)M_i \\ 0 & \text{Si non} \end{cases}$$

Les matrices signe pour les contraintes des mailles et des chemins L et P

$$L_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Le sens arbitraire de la maille est le même sens que le Q} \\ -1 & \text{Sens opposé} \\ 0 & \text{Conduite j n'appartient pas à la maille} \end{cases}$$

Pour la matrice P, c'est de la même manière que la matrice L .

a : Vecteur des longueurs des conduites .

L'écriture matricielle du gradient de la fonction objective ( GOF ) est donnée par :

$$\frac{d(F_0)}{dQ} = -\Pi_p^T L S L_1^T - \Pi_r^T P S L_1^T \quad (V. 11)$$

S : matrice de résistance :

$$S = \frac{\partial \Delta H}{\partial Q}$$

$$S_{ij} = \begin{cases} \frac{\partial \Delta H}{\partial Q_j} & i=j \\ 0 & \text{Si non} \end{cases}$$

$L_1^T$  : Transposer delà i<sup>ème</sup> ligne de la matrice signe L

$\Pi_p^T$  et  $\Pi_r^T$  : transposés de  $\Pi_p$  et  $\Pi_r$ .

Finalement l'expression de GOF, déduit par la combinaison des deux termes de l'expression ( V . 11 ) :

$$G = -\Pi^T \begin{pmatrix} P \\ L \end{pmatrix} S L^T \quad (V. 12)$$

$\begin{pmatrix} P \\ L \end{pmatrix}$  : Assemblage entre la matrice L et P

$(\Pi^T)$  : Assemblage entre le vecteur  $\Pi_p^T$  et  $\Pi_r^T$

La valeur initial de  $\Pi_0$  est calculé comme suit :

$$\Pi_0 = C_b^T A_b^{-1} \quad (V. 13)$$

$A_b$  : base optimal de la matrice de contrainte .

$C_b$  : vecteur coût correspondant à la matrice  $A_b$  .

Il faut noter que la valeur initial de GOF reste constante le long du processus itératif .

**E)- Algorithme BFGS :**

Cet algorithme, développé indépendamment par BROYDON ( 1970 ), FLETCHER (1970), GOLDFARB ( 1970 ), et SHANNO ( 1969 ) utilise, pour construire une approximation de l'inverse du hessien, une formule de correction de rang 2 directement dérivée de la formule qui a été déduit de l'algorithme de DAVIDON - FLETCHER - POWELL ( DEP ).

L'algorithme BFGS se déduit alors directement de l'algorithme DEP avec la formule de correction :

$$H_{k+1} = H_k + \left[ 1 + \frac{\gamma_k^T H_k \gamma_k}{\delta_k^T \gamma_k} \right] \frac{\delta_k \delta_k^T}{\delta_k^T \gamma_k} - \frac{\delta_k \gamma_k^T H_k + H_k \gamma_k \delta_k^T}{\delta_k^T \gamma_k} \quad (V.14)$$

$$\delta_k = \Delta Q^{k+1} - \Delta Q^k$$

$$\gamma_k = G^{k+1} - G^k$$

la supériorité de l'algorithme BFGS sur l'algorithme DEP semble reconnue par la plupart des auteurs . la raison essentielle en est que BFGS est beaucoup moins sensible que DEP aux imprécisions dans la procédure de recherche unidimensionnelle .

Ceci permet l'utilisation des méthodes d'optimisation unidimensionnelles " économiques " qui ne nécessitent qu'un très petit nombre d'évaluations de la fonction à chaque itérations sans pour cela que la vitesse de convergence de l'algorithme en soit affectée .

**F) - L'estimations du pas de déplacement : (  $\alpha$  )**

Il existe plusieurs algorithme pour la recherche d'un pas efficace, des méthodes utilisant les dérivées et les méthodes n'utilisant pas les dérivées .

Les raisons de notre choix qui est la méthode d'optimisation unidimensionnelles dite " économique ", visaient à obtenir une approximation plus ou moins précise, de l'optimum ( où d'un optimum local ) .

En fait, la convergence de certains algorithmes d'optimisation non linéaire, (plus forte pente, algorithme de BFGS), peut être déterminée obtenue sans qu'il soit nécessaire de déterminer un point proche de l'optimum ( ou d'un optimum local ) de FO dans la direction  $d$  .

Cet algorithme adopte essentiellement deux type de procédures : la règle de Goldstein ( 1967 ) qui s'applique lorsque le gradient de la fonction ne peut être évalué (ou est trop coûteux à obtenir ) et une procédure suggéré par Wolfe ( 1969 ) et Powell (1976 ) qui nécessite l'évaluation du gradient chaque fois que la fonction est calculée .

le principe commun entre toutes ces méthodes est que :

- $\alpha$  ne doit pas être choisi trop grand ( sinon l'algorithme risque d'avoir un comportement oscillatoire ) .
- $\alpha$  ne doit pas être petit ( sinon l'algorithme risque de converger prématurément ) .

La mise en oeuvre des règles de GOLDSTEIN ( G ) où de WOLF - POWELL ( WP ) est particulièrement simple, la procédure type est la suivante :

a) définir  $\alpha_{\min} = 0$  ,  $\alpha_{\max} = + \infty$

déterminer  $F'(0) = G \cdot d$

et attribuer une valeur initial a  $\alpha$

b) calculer  $F(\alpha) = FO(x + \alpha d)$

si  $F(\alpha) \leq F(0) + m_1 \alpha F'(0)$

aller en ( C ) .

si non poser  $\alpha_{\max} = \alpha$  et aller en ( c )

c) calculer  $F'(\alpha) = G(x + \alpha d) \cdot d$   
 puis comparer  $F'(\alpha)$  et  $m_3 F'(0)$   
 Si  $F'(\alpha) \geq m_3 F'(0)$  : FIN  
 Si  $F'(\alpha) < m_3 F'(0)$  aller en (d) } (WP)

Comparer  $F(\alpha)$  et  $F(0) + m_2 \alpha F'(0)$   
 Si  $F(\alpha) \geq F(0) + m_2 \alpha F'(0)$  : FIN  
 Si non aller en (d) } (G)

(d) Poser  $\alpha_{\min} = \alpha$

(e) Rechercher une nouvelle valeur de  $\alpha$  dans l'intervalle  $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$   
 et retourner en (b)

$m_1$  : Coefficient choisi dans  $]0, 1[$

$m_2$  : Coefficient choisi dans  $]m_1, 1[$

$m_3$  : Choisie dans  $]m_1, 1[$

Pour initialiser la valeur de  $\alpha$  en (a) il faut, chaque fois que cela est possible, utiliser les informations fournies par l'algorithme d'optimisation dans lequel la procédure est insérée.

### G) - Extension de la méthode pour un système complexe :

Différent types de variables n'apparaissent pas dans la formulation précédente, nous allons les introduire une par une et voir la formulation de base de la méthode pour un système hydraulique générale.

#### Plusieurs réservoirs :

Chaque réservoir à sa distribution initiale de débit qui satisfait la continuité aux noeuds, donc la formulation de l'équation (V. 4) et (V. 7) se fait pour chaque réservoir ; l'équation (V. 7) peut être formulée par le point de plus haut niveau vers le plus bas, ainsi les contraintes de chaque réservoirs avec la contrainte de longueur (équation (V. 1)) forment le programme linéaire.

Puisque la distribution des débits est arbitraire, il existe au moins un réservoir qui ne peut pas satisfaire toutes les contraintes de chemin, pour surmonter cette difficulté, nous introduisons deux nouvelles variables pour chaque réservoir qui joue le rôle des clapets anti-retour fictifs.

Ces variables donnent une grande pénalité dans la fonction objective, et l'algorithme essaiera de les éliminer après avoir la solution, si c'est possible, et donc avoir une solution acceptable sans ces clapets, leurs introduction donc sert seulement pour trouver une solution réalisable du programme linéaire ; si non un clapet est obligatoire dans le système hydraulique.

*une pompe :*

Lors d'existence d'une pompe dans le système, l'étude se fait de telle manière qu'une charge supplémentaire de la pompe sera ajoutée à la charge du réservoir, si on note par  $XP$  la charge ajoutée par la pompe donc les équations ( V . 4 ) et ( V . 7 ) deviennent :

$$H_{\min} \leq H_S \pm \sum_t XP(t) \pm \sum_{ij} \sum_m J_{ijm} x_{ijm} \leq H_{\max}$$

La sommation sur  $XP$  lors d'existence plusieurs pompes (  $t$  : nombre de pompe )

$$\sum_{ij} \sum_m J_{ijm} x_{ijm} \pm \sum_t XP(t) = b_p$$

La variable de décision  $XP$  doit être introduite linéairement dans la fonction objective, si on veut que le problème reste un programme linéaire.

Donc :

$$h_p = \gamma Q XP / \eta$$

$\gamma$  : coefficient

$\eta$  : rendement

Si on assure un rendement fixe, alors le débit à travers la pompe sera supposé fixe, l'équation devient :

$$h_p = K \cdot XP$$

$$K = \text{constant}$$

On a aussi que le prix de la pompe est linéairement proportionnel par rapport à XP

*Clapets et clapets anti-retour :*

Les clapets peuvent être situés dans chaque conduite ; si on note par XC la perte de charge attribuée par le clapet, les équations de contraintes vont contenir la variable XC de la même manière que XP .

le prix du clapet doit être incorporée dans le prix de la conduite qui contient le clapet .

*Combinaison du système :*

Un réseau peut demander tout les types d'éléments : pompe, plusieurs réservoirs et clapets, donc chaque contrainte de chemin comportera les éléments expliqués précédemment, et la solution donnera simultanément les valeurs optimales des variables de décision :

le diamètre, capacité de la pompe et l'opération de pompage et clapet .

*Extension d'un réseau existant :*

Quand une part d'un réseau déjà existant, c'est la nouvelle part qui doit être étudiée, les composantes existantes seront supposées fixes, et le programme résolve le reste.

Pour chaque conduite existante, la gamme qui leur sera attribuée contient seulement leur ancien diamètre .

Lors d'existence d'une pompe la valeur XP est contrainte d'être moins que sa valeur actuelle, donc la fonction objective doit contenir seulement le prix de l'opération de pompage à l'horizon prochain .



# *Chapitre 6*

## DÉSCRIPTION GÉNÉRALE DU PROGRAMME LPGM-95

## Déscription générale du programme

### LPGM-95

#### *A)- Introduction :*

En comparant les résultats donnés par les différentes modifications apportées à la méthode ( LPGM ), on remarque que celle de FUJIWARA ( 1987 ), s'approche mieux de l'optimum, ce qui justifie notre choix .

Mais comme la formulation matricielle suggérée par SHAMIR ( 1989 ) est la seule développée dans la modeste bibliographie qu'on dispose, on a opté pour cette formulation tout en gardant la structure " Hiérarchique " développée par FUJIWARA.

Il faut noter aussi que la méthode de recherche du pas de déplacement optimum choisie est une méthode de recherche unidimensionnelle dite " économique ", alors que FUJIWARA a appliqué une méthode d'interpolation, une justification plus détaillée de ce choix est développée dans le chapitre ( V ).

#### *B)- Description du programme :*

Le programme d'optimisation des réseaux de distribution ( LPGM - 95 ) qu'on a établi, comporte trois grandes parties :

##### *B-1/ La première partie :*

La première partie du programme est composée de deux Blokes distinctes :

**BLOCK 1 :** Comporte tous les fichiers de données nécessaires pour la suite des procédures, à savoir :

- Fichier des mailles

- Fichier des chemins

- Fichier des diamètres commerciaux disponibles sur le marché ainsi que leurs coûts .

- Fichier des noeuds

- Fichier des conduites .

**BLOCK 2** : Consiste à faire une analyse des données, dans le but d'extraire le maximum d'informations utiles par la suite, tel que :

- Les débits initiaux (  $Q_0$  ) obtenuent à partir d'une procedure d'équilibrage ( Voir chapitre III ) .

- Le gradient hydraulique de chaque tronçon ainsi que la gamme de diamètres commerciaux possibles qui lui est associée, et ce, en respectant, pour chaque tronçon, la gamme de vitesses exigée .

- Construction du vecteur second membre ainsi que le vecteur coût associé au vecteur des variables de decision (  $X$  ) .

- Construction de la contrainte (  $V - 1$  ) .

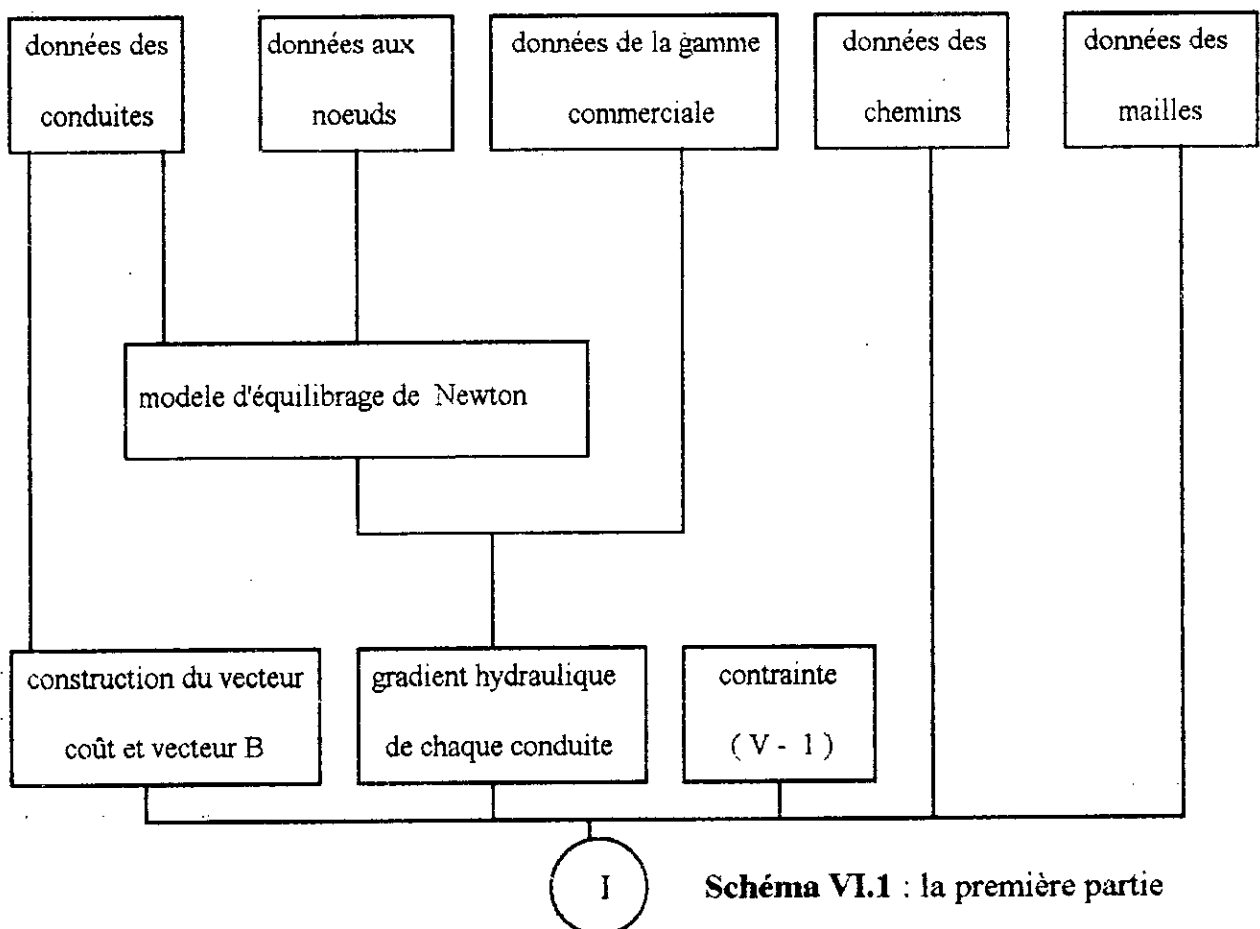


Schéma VI.1 : la première partie

**B-2/ La deuxième partie :**

Après avoir mis tous les outils nécessaires pour la formulation du programme linéaire, et donc construire la matrice ( A ) relative aux équations de chemin et celles des mailles, ainsi que les vecteurs second membre ( B ) et le vecteur coût ( C ), on injecte ces matrices dans la procédure du simplexe ( Voir chapitre II ) à fin d'avoir les variables de décisions X ainsi que le coût associée .

- La procédure GOF permet d'estimer le vecteur gradient de la fonction objective en utilisant les procedures de Block III .

**BLOCK 3 :** Le block III contient tous les procedures nécessaires pour le calcul de GOF , en se basent sur l'équation ( V.12 ) .

- Construire ( P / L )
- Construire S
- Inverse d'une matrice
- Construire la matrice  $A_b$
- Construire le vecteur  $C_b$
- Construire le vecteur des variables duales  $\pi$  .

Il faut noter que cette partie est la plus importante du programme ( LPGM - 95 ) tant au point de vue quantité de travail qui nous à nécessité qu'au point de vue efficacité et exactitude du programme tout entier .

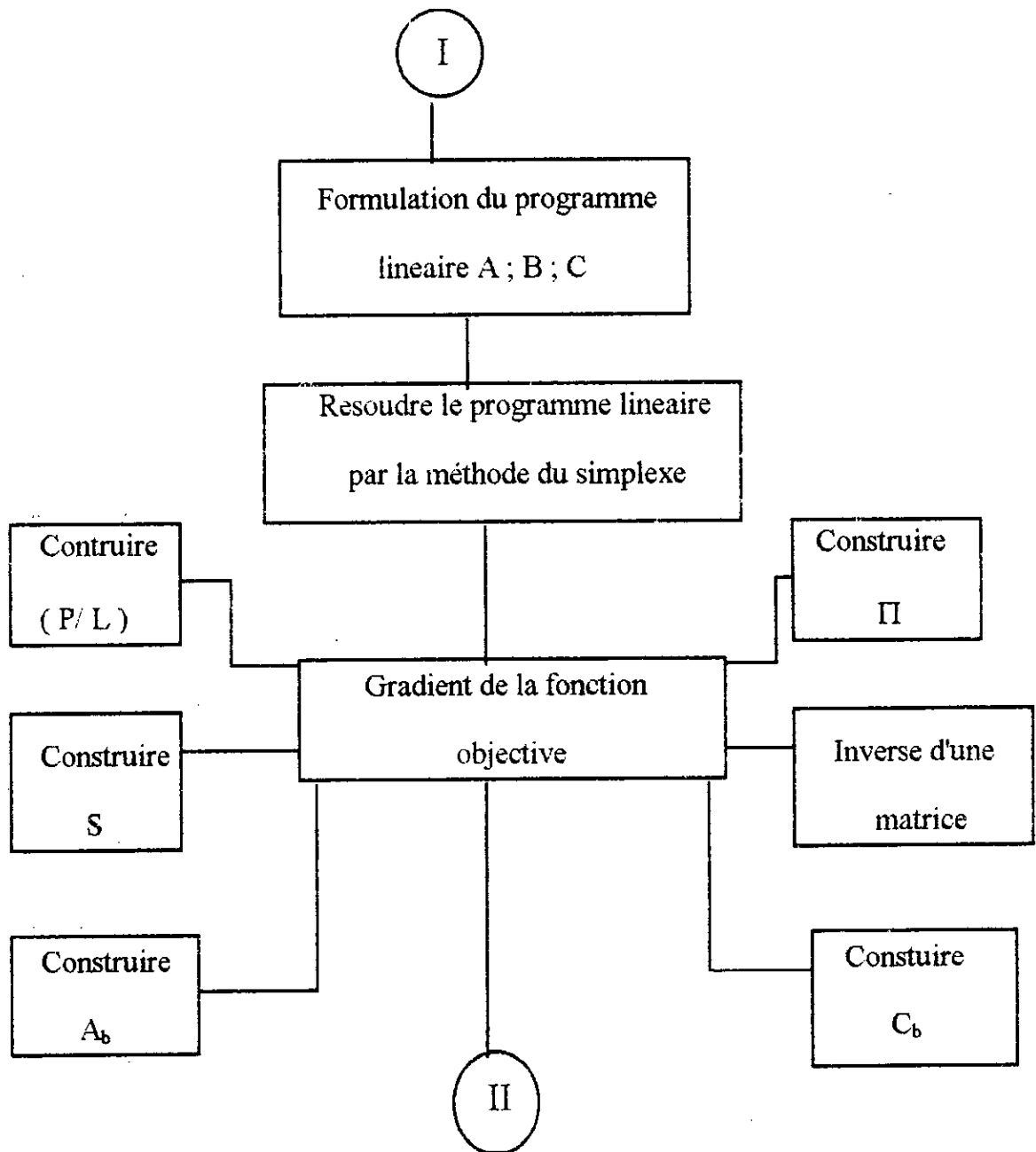


Schéma VI . 2 : La deuxième partie

**B- 3/ La troisième partie :**

Après avoir obtenue une solution initial  $X_0$  associée au débit  $Q_0$  par l'équilibrage, et le gradient de la fonction objective (  $g$  ), on choisie un pas de déplacement maximum, et une sécante de la matrice Hessienne initial (  $H_0$  ) ( la matrice identité ).

- Une correction du débit est apportée par le débit circulant dans les mailles  $q_L$

avec :

$$q_L = - \text{Step} \cdot H \cdot g$$

- Le nouveau débit est injecté dans la partie II . Pour voir si la solution est réalisable ou non, si non on fait une correction du pas de déplacement jusqu'à l'obtention d'une solution réalisable .

- La procédure Step - optimal permet d'obtenir un pas de déplacement optimum en utilisant l'algorithme de recherche unidimensionnelle " économique ", dont un nombre de programmes linéaires sont formulée puis résolue .

- Une correction du débit, cette fois ci par le pas de déplacement optimum dans la direction de descente (  $d_r = - H \cdot g$  ).

- Ce débit est injecté dans la partie II pour avoir les nouveau variables de decision (  $X$  ) et un nouveau ( GOF ).

- En fin une correction de la sécante (  $H$  ) est assurée par la procedure BFGS .

- Le processus itératif continue jusqu'a ce que une des deux conditions soit vérifié.

$$\text{Step} \leq \text{eps}_1$$

$$\| \| g \| \|_2 \leq \text{eps}_2$$

avec:  $\text{eps}_1, \text{eps}_2$  : constante de convergence

$$\| \| \cdot \| \|_2 : \text{norme de type 2 .}$$

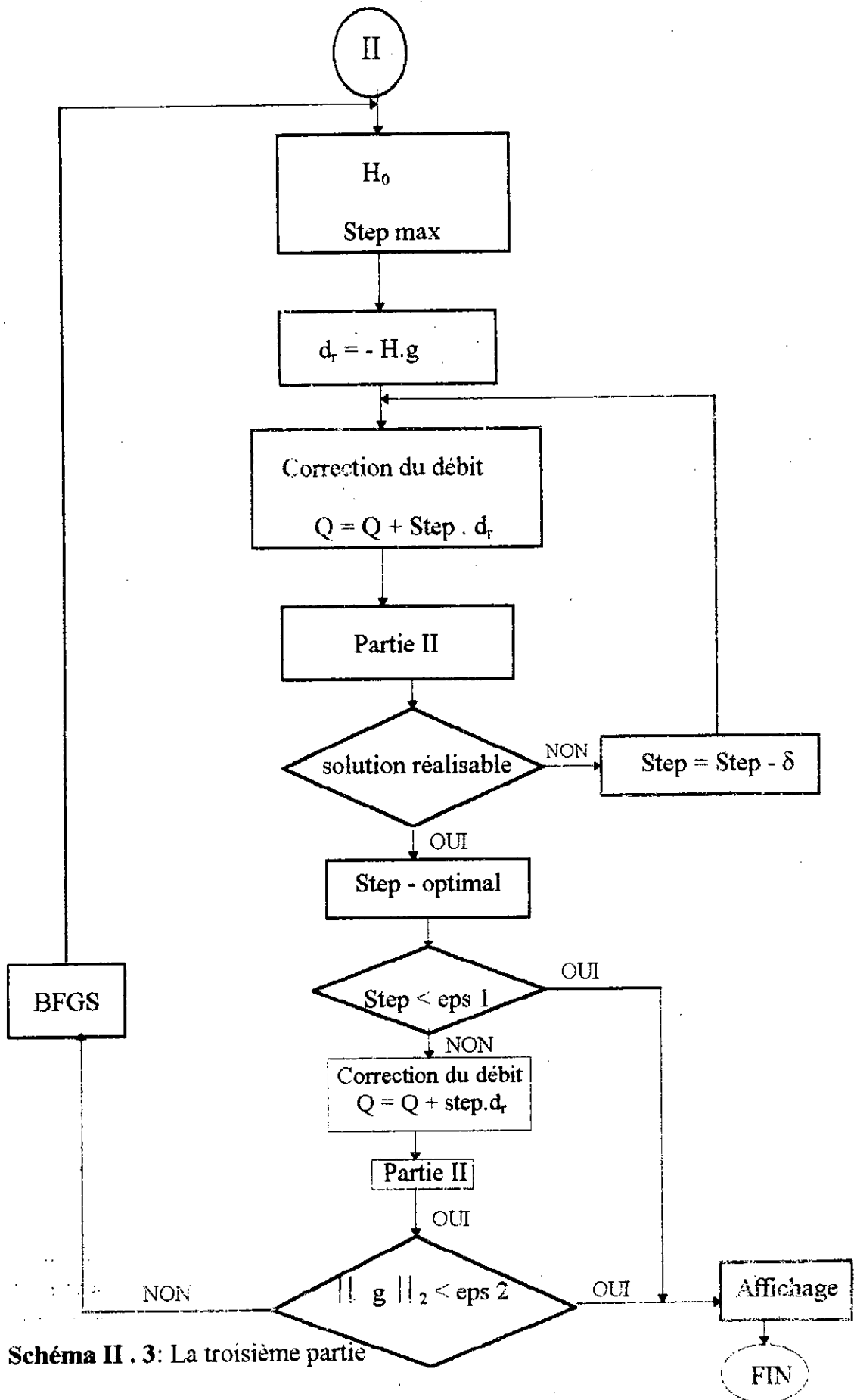


Schéma II.3: La troisième partie

# *Chapitre 7*

## **APPLICATIONS**



## Applications

Nous vous proposons dans ce chapitre de présenter et commenter l'ensemble des expérimentations numériques qui ont été effectuées par le programme LPGM - 95 sur une série de réseau dont nous disposons des données nécessaires :

- un réseau très simple a but académique
- un réseau provenant de la ville de testour situées en Tunisie .

Le seul et unique matériel dont nous avons pu disposer était un Micro - ordinateur ( 286 ).

### *A - Application 1 :*

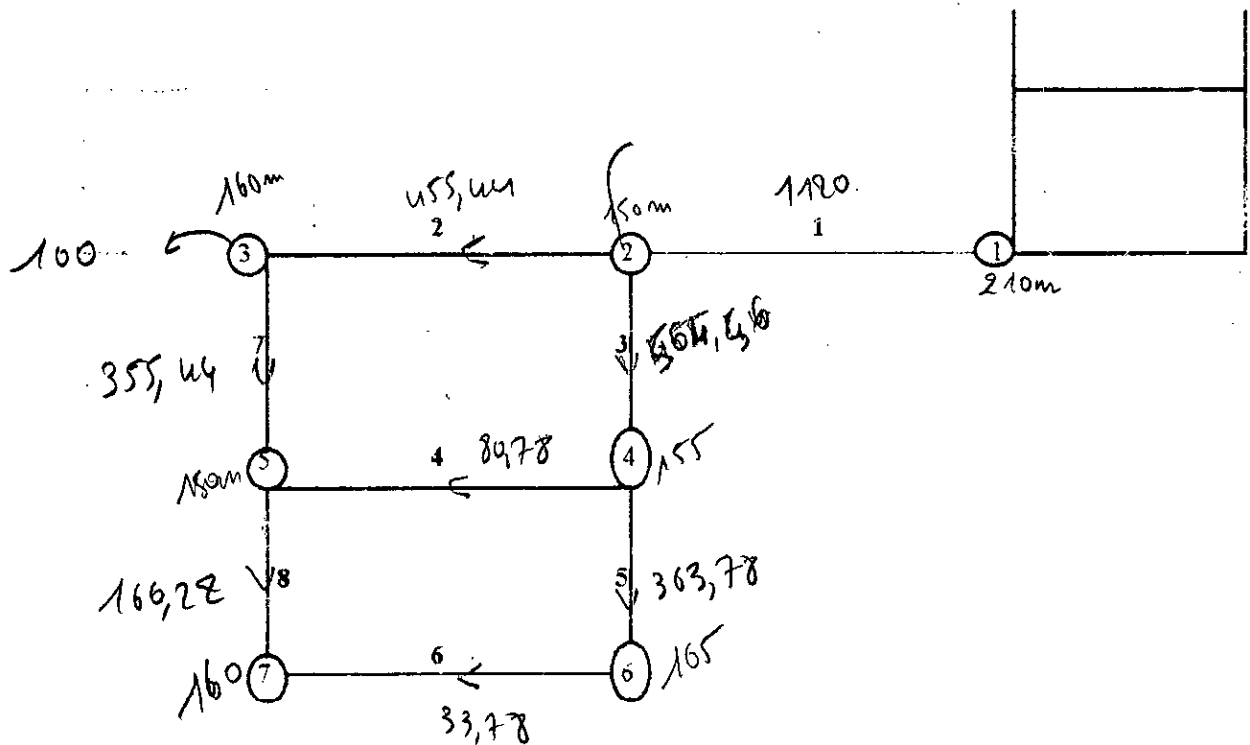
Considérant le réseau établi par ALPEROVITS et SHAMIR [ 1977 ] et qui a été aussi étudiée par GOULTER et AL [ 1986 ], FUJIWARA et AL [ 1987 ] et KESSLER et SHAMIR [ 1989 ] .

En utilisant les mêmes unités que l'article de [ 1977 ] pour pouvoir comparer les résultats élaborée par notre programme LPGM - 95 et l'article de [ 1977 ], donc la valeur du coefficient  $\lambda$  de la formule de perte de charge égale à  $1,625 \cdot 10^2$  pour le débit en [  $m^3 / h$  ] et le diamètre en [ inches ] .

La gamme commerciale voir Annexe ( Tableau A - 3 ).

Le réseau est composée de 08 conduites et 02 mailles, avec la charge minimale dans chaque noeuds est égale a 30 m .

A - 1 Le tracé :



- 08 tronçons
- 07 Noeuds
- 02 mailles

A - 2 Données :

Tableau des conduites

Noeuds I	Noeud J	Diamètre ( in )	CHW	Longueur ( m )
1	2	18	130	1000
2	3	16	130	1000
2	4	12	130	1000
4	5	8	130	1000
4	6	12	130	1000
6	7	12	130	1000
3	5	10	130	1000
7	5	10	130	1000

Tableau des Noeuds :

Noeuds	consommation [ m <sup>3</sup> / h ]	élévation ( m )
1	- 1120,0	210
2	100,0	150
3	100,0	160
4	120,0	155
5	270,0	150
6	330,0	165
7	200,0	160

AA 20

**A - 3 Résultats après équilibrage :**

- Nombre d'itération : 14
- Nom du réseau : Académique
- Précision sur le débit : 0,00010 [ 1/s ]
- Nombre de tronçons : 8
- Nombre de noeuds : 7

Tronçon	diam (in)	longueur [ m ]	débit [ m <sup>3</sup> /h ]	P.D.C [ m ]	vitesse [ m/s ]
1 => 2	18	1000	1120,00	5,33	1,90 ?
2 => 3	16	1000	455,44	1,79	0,98
2 => 4	12	1000	564,56	10,78	2,15 ?
4 => 5	8	1000	80,78	2,12	0,69
4 => 6	12	1000	363,78	4,78	1,38
6 => 7	12	1000	33,78	0,06	0,13
3 => 5	10	1000	355,44	11,11	1,95
7 <= 5	10	1000	- 166,22	2,72	0,91

**Tableau VII . 1**

Noeud	consommation [ m <sup>3</sup> /h ]	altitude [ m ]	cote piezo [ m ]	pression [ m ]
1	- 1120,00	210,00	210,00	0,00
2	100,00	150,00	204,67	54,67
3	100,00	160,00	202,88	42,88
4	120,00	155,00	193,89	38,89
5	270,00	150,00	191,77	41,77
6	330,00	165,00	189,11	24,11
7	200,00	160,00	189,05	29,05

**Tableau VII . 2**

**A - 4 Résultats après optimisation :**

Nombre d'itération = 1

Tableau des variables de décision

N° tronçon	Q [ m <sup>3</sup> /h ]	X [ m ]	D [ m ]	V [m/s ]	Remarque
1	1120,000	602,0	16,000	2,40	
		398,0	18,000	1,90	
2	443,0113	0,0	10,000	2,43	
		1000,0	14,000	1,24	
3	576,9887	0,0	12,000	2,20	
		1000,0	14,000	1,61	
4	96,9864	101,4	6,000	1,48	
		898,6	8,000	0,83	
5	347,5773	0,0	10,000	1,91	
		1000,00	14,000	0,97	
6	17,5773	0,0	2,000	2,41	
		122,6	3,000	1,07	
		877,4	4,000	0,60	
7	343,0113	271,5	10,000	1,88	
		728,5	12,000	1,31	
8	182,422	0,0	8,000	1,56	
		1000,0	10,000	1,00	

**Tableau VII . 3**

Tableau des charges aux noeuds

N° Noeud	H ( m )
1	210,0
2	202,3
3	199,1
4	197,0
5	193,2
6	195,0
7	190,0

Tableau VII . 4

le coût optimal : 3,9595263060E+05 \$

- Variation du coût lors de la recherche du pas de déplacement optimal .

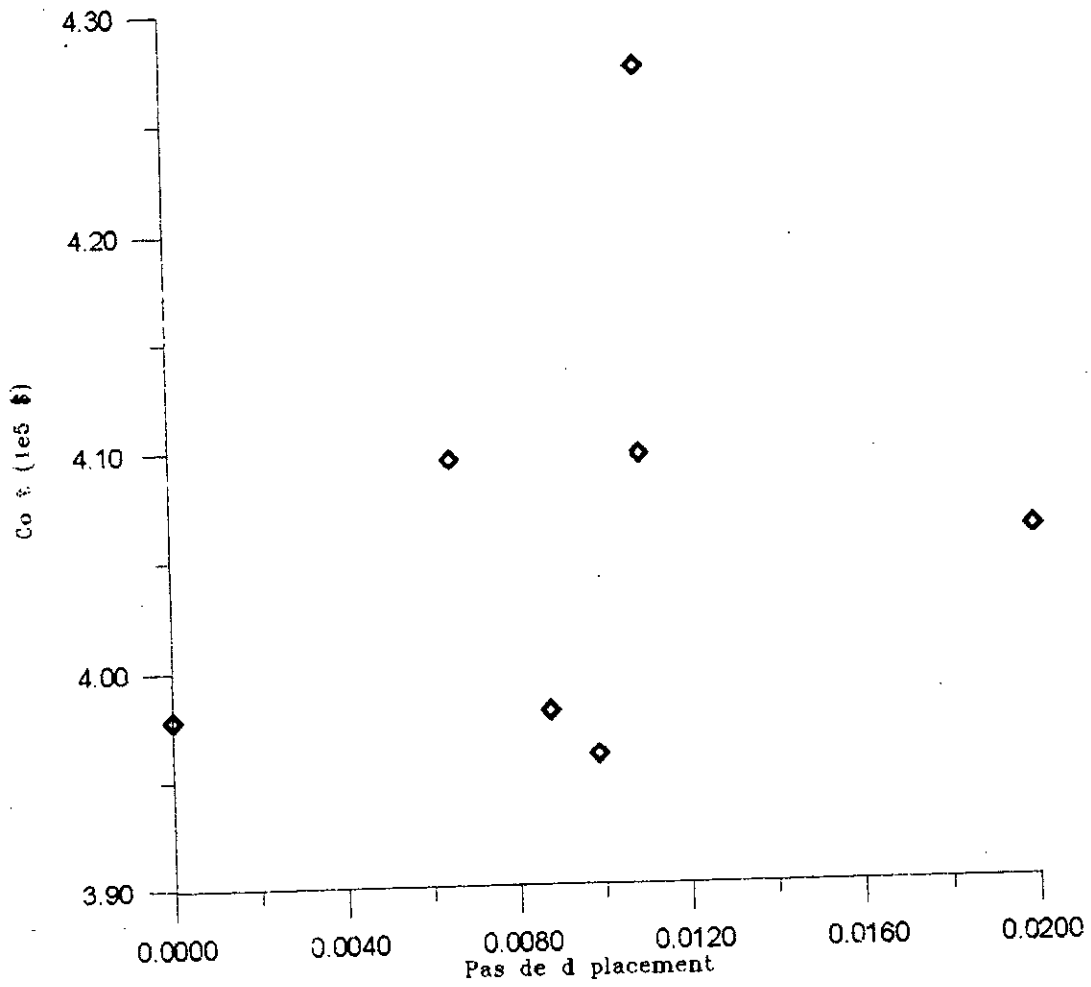


FIG.VII.1: Variation de la fonction coût lors de la recherche du pas de déplacement



- Nous choisissons le diamètre correspondant au plus long segment comme diamètre de la conduite considérée, par exemple :

- La conduite N° 1 : composée de deux segments de longueurs 602 (m ) et 398 (m ) correspondant au diamètre 16 in et 18 in respectivement

- Nous choisissons le diamètre 16 (in ) comme diamètre de la conduite N° 1

- Les diamètres optimaux du réseau sont :

N° tronçon	Diamètre ( in )
1	16
2	14
3	14
4	8
5	14
6	4
7	12
8	10

Tableau VII . 5

Le coût optimal après rectification =  $3,86 \cdot 10^5$  \$



A - 5 Histogramme des résultats obtenue par les différentes articles appliquée sur le réseau académique .

N°	l'approche	coût ( \$ )	Gain %
1	Alperovits et Shamir ( 1977 )	$4,79525 \cdot 10^5$	0
2	Quindry et AL ( 1979 )	$4,41522 \cdot 10^5$	7,92
3	Goulter et AL ( 1986 )	$4,25297 \cdot 10^5$	11,3
4	Fujiwara et AL ( 1987 )	$4,152271 \cdot 10^5$	13,4
5	Kessler et Shamir ( 1989 )	$4,175 \cdot 10^5$	12,93
6	LPGM - 95 ( 1995 )	$3,86 \cdot 10^5$	19,5

Tableau VII . 6

*Conclusion*

Une représentation graphique du tableau VII.6 est donnée par la fig.VII.2

**remarque:**

les gains sont calculé par rapport à l'approche ( 1977 )

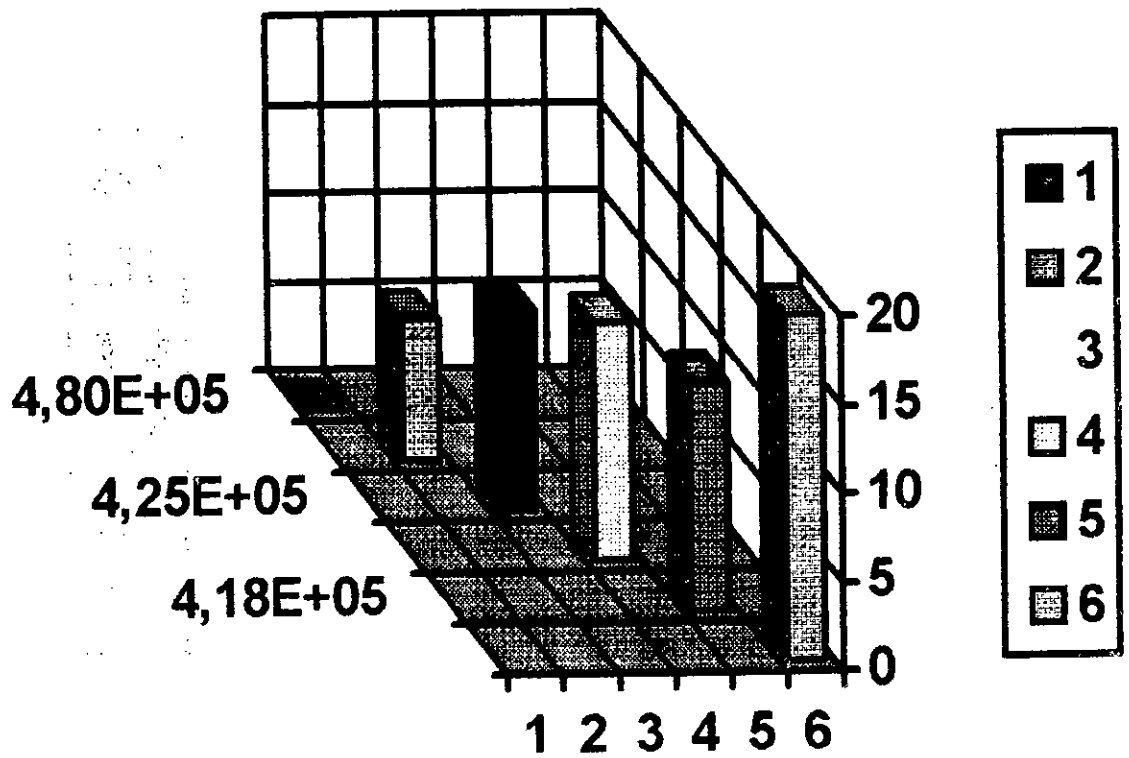


fig.VII.2. Résultats des différents articles  
- réseau académique -

#### A- 6 Résultat d'équilibrage après optimisation :

En appliquant le modèle d'équilibrage sur le dimensionnement final du réseau après optimisation on obtient les résultats suivantes :

- Nombre d'itération : 9
- Nom du réseau : académique
- Précision sur le débit : 0,0001 [ l/s ]
- Nombre de tronçons : 8
- Nombre de noeuds : 7

Tronçon	diamètre ( in )	longueur [ m ]	débit [ m <sup>3</sup> /h ]	P.D.C [ m ]	Vitesse [ m/s ]
1 => 2	16	1000	1120,00	9,46	2,40
2 => 3	14	1000	455,54	3,42	1,27
2 => 4	14	1000	564,46	5,09	1,58
4 => 5	8	1000	95,95	2,91	0,82
4 => 6	14	1000	348,51	2,08	0,97
6 => 7	4	1000	18,51	4,03	0,63
3 => 5	12	1000	355,54	4,58	1,35
7 <= 5	10	1000	- 181,49	3,20	0,99

Tableau VII . 7

Noeud	consommation [ m <sup>3</sup> /h ]	altitude [ m ]	côte piezo [ m ]	pression [ m ]
1	- 1120,00	210,00	210,00	0,00
2	100,00	150,00	200,54	50,54
3	100,00	160,00	197,12	37,12
4	120,00	155,00	195,45	40,45
5	270,00	150,00	192,54	42,54
6	330,00	165,00	193,37	28,37
7	200,00	160,00	189,34	29,34

Tableau VII . 8

### *A - 7 Interprétations des résultats :*

Après application du modèle d'équilibrage sur le dimensionnement initial ( aléatoire), on a constaté une violation de vitesse ( conduite 6  $\rightarrow$  7 ) et de pression ( Noeud 7 ).

Cette défaillance ne sera pas prise en compte, car elle sera rectifiée par le modèle d'optimisation . Le coût optimal du réseau académique établie par le programme LPGM - 95 est de  $3,95952 \cdot 10^5$  \$ et sans violation des contraintes hydraulique ( Vitesse, pression aux Noeuds ).

Lors de la recherche du pas de déplacement (  $\alpha$  ) optimal, on a constaté que le domaine réalisable est discret par rapport à  $\alpha$  ce qui explique les oscillations de la fonction objective dans l'intervalle de variation de  $\alpha$  .

Le prix après rectification a diminué jusqu'à  $3,86 \cdot 10^5$  \$ soit un gain de 7,05 % par rapport à la meilleure approche donnée par les articles ( FUJIRAWA - 1987 ) avec une légère diminution de pression ( Noeud - 6 ).

**B - Application 2 :**

En essayant d'augmenter le nombre de maille, en utilisant le réseau de Testour (Tunisie) qui a été étudiée par le docteur LEBDI FETHI.

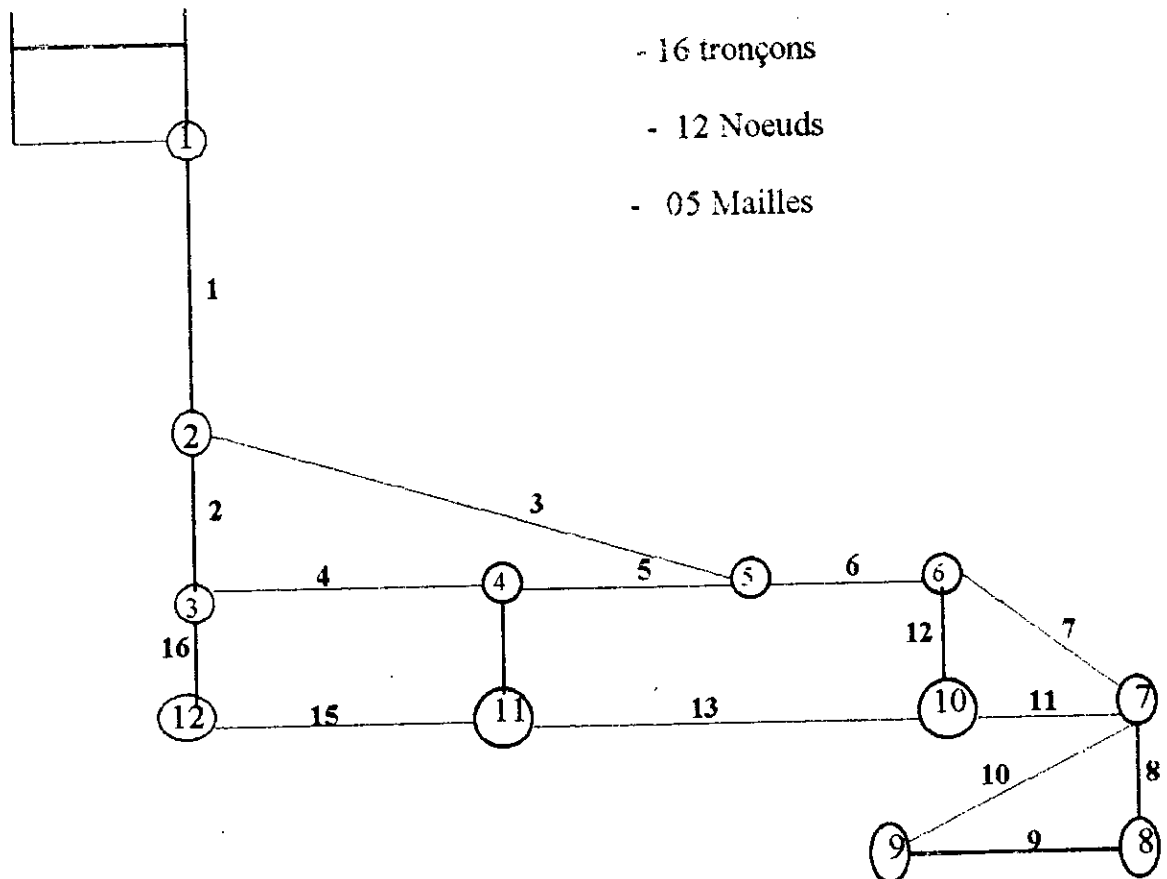
Avec la gamme réel en dinar Tunisien ( Voir Annexe Tableau A - 2 ).

La valeur du coefficient  $\lambda$  dans ce cas est prise égale a 10,69 pour le débit en  $[m^3/s]$  et les diamètres en  $[m]$ .

La charge minimal  $H_{\min}$  qui a été exigée dans chaque noeud :

Noeuds	$H_{\min}$ ( m )
1	/
2	10,7
3	18,74
4	23,34
5	28,44
6	33,74
7	38,24
8	46,35
9	44,80
10	32,56
11	32,82
12	38,52

B - 1 - Le tracé :



- 16 tronçons
- 12 Noeuds
- 05 Mailles

B - 2 / Données :

Tableau des conduites

Noeuds I	Noeud J	Diamètre ( m m )	CHW	Longueur ( m )
1	2	200	106	200
2	3	200	106	350
2	5	150	106	610
3	4	125	106	100
4	5	125	106	230
5	6	100	106	260
6	7	100	106	480
7	8	100	106	600
8	9	100	106	770
7	9	100	106	420
7	10	100	106	300
6	10	100	106	390
10	11	100	106	400
4	11	100	106	280
11	12	100	106	400
3	12	100	106	400

Tableau des Noeuds

Noeuds	Consommation l/s	Élévations
1	-66,46	141
2	8,31	127
3	6,02	115
4	5,17	109
5	6,56	102,5
6	4,56	95
7	7,98	88,5
8	5,74	78
9	5,07	80
10	8,21	96,2
11	6,74	96,2
12	3,81	89,3

**B - 3 - Résultats après équilibrage :**

- Nombre d'itération : 3
- Nom du réseau : testour
- Précision sur le débit : 0,01000 [ 1/s ]
- Nombre de tronçons : 16
- Nombre de noeuds : 12

tronçon	diamètre [ mm ]	longueur [ m ]	Débit [ 1/s ]	P.D.C [ m ]	Vitesse [ m/s ]
1 => 2	200	200	66,46	6,30	2,12
2 => 3	200	350	38,13	3,94	1,21
2 => 5	150	610	20,17	8,56	1,14
3 => 4	125	100	22,20	4,07	1,81
4 => 5	125	230	4,81	0,55	0,39
5 => 6	100	260	18,42	22,17	2,35
6 => 7	100	480	8,95	10,75	1,14
7 => 8	100	660	4,83	4,71	0,61
9 => 8	100	770	0,91	0,25	0,12
7 => 9	100	420	5,98	4,46	0,76
10 => 7	100	300	9,75	7,87	1,24
6 => 10	100	390	4,91	2,88	0,63
11 => 10	100	400	11,58	14,43	1,47
4 => 11	100	280	12,22	11,16	1,56
12 => 11	100	400	6,10	4,41	0,78
3 => 12	100	400	9,91	10,82	1,26

**Tableau VII . 8**



Noeud	Consommation [ l/s ]	Altitude [ m ]	Cote piezo [ m ]	Pression [ m ]
1	-66,46	141,00	141,00	0,00
2	8,16	127,00	134,70	7,70
3	6,02	115,00	130,76	15,76
4	5,17	109,00	126,70	17,70
5	6,56	102,50	126,15	23,65
6	4,56	95,00	103,93	8,98
7	7,89	88,50	93,23	4,73
8	5,74	78,00	88,52	10,52
9	5,07	80,00	88,77	8,77
10	6,74	96,20	101,10	4,90
11	6,74	96,20	115,54	19,34
12	3,81	89,30	119,94	30,64

Tableau VII . 9

## B - 4 Résultats après optimisation :

tronçon	débit (m/s)	X [ m ]	diamètre [ mm ]	vitesse [ m/s ]	remarque
1	0,0665	200	250	1,34	
2	0,026	350	200	0,83	
3	0,0323	0,4	150	1,83	
		609,6	200	1,03	
4	0,0198	100	150	1,12	
5	0,0047	16,8	80	0,93	
		213,2	100	0,59	
6	0,0183	260	150	1,03	
7	0,0118	79,2	125	0,96	
		400,8	150	0,67	
8	0,0062	660	125	0,51	
9	-0,0005	770	80	0,09	Dmin
10	0,0046	1,2	80	0,91	
		418,80	100	0,59	
11	0,0069	300	125	0,56	
12	0,002	390	80	0,41	Dmin
13	0,0117	400	150	0,66	
14	0,0124	20,9	100	1,58	
		259,1	125	1,01	
15	0,0085	400	125	0,96	
16	0,0123	94,9	125	1,0	
		305,1	150	0,7	

Tableau VII . 10

le coût optimal =  $9,94341 \cdot 10^4$  DT

Noeud	H [ m ]
1	141,00
2	138,84
3	136,84
4	135,46
5	133,90
6	130,97
7	127,63
8	124,97
9	124,80
10	129,09
11	131,16
12	133,89

Tableau VII . 11

On effectue une rectification des diamètres de la même manière que l'application 1

Les nouveaux diamètres optimaux :

Tronçon	Diamètre (mm)
1	250
2	200
3	200
4	150
5	100
6	150
7	150
8	125
9	80
10	100
11	125
12	80
13	150
14	125
15	125
16	150

Tableau VII.12

**B - 5 Interprétation des résultats :**

Sur cet exemple de Testour, le coût optimal obtenu par notre programme LPGM-95 est de  $9,9666 \cdot 10^4$  DT avec un gain de 6,10 % par rapport à la solution existante qui est de  $10,613 \cdot 10^4$  DT, soit 6464 DT de bénéfices.

En élaborant un tableau de comparaison des différents auteurs qui ont testés le réseau de TESTOUR ; on obtient :

AUTEURS	Prix ( DT )
MAHDJOUR	$9,5330 \cdot 10^4$
L/BDI	$9,2148 \cdot 10^4$
LPGM - 95	$9,9666 \cdot 10^4$

Notre modèle, bien que le coût obtenu est plus élevé que celui des deux auteurs, a cependant l'avantage de garder les contraintes hydrauliques de pression et de vitesse intactes. )))

On conclut donc qu'on peut tolérer des variations de 18 % autour de la vitesse, à l'exception de la conduite N° 9 qui jouera le rôle d'une conduite de sécurité lors d'un mauvais fonctionnement du réseau ou une panne (cassure) d'une conduite dans le réseau.

**Conclusion :**

En analysant le graphe de la figure A-1, on conclut que la fonction qui associe à tout pas de déplacement ( $\alpha$ ), une solution (S) est une fonction non convexe <sup>(1)</sup>, par conséquent un nombre élevé de programmes linéaires ( 9 à 10 ) sont formulés puis résolus, ce qui présente un inconvénient de la méthode .

En introduisant le modèle d'équilibrage, on arrive non seulement à remédier à cet inconvénient, mais ça permet aussi d'aboutir à des solutions très satisfaisantes telles que celles du réseau académique .

Etant donnée que la solution n'est optimale que pour le programme mathématique formulé; et que l'approche adaptée par Mahdjoub ne tient compte que des contraintes de pression, contrairement à notre modèle qui exige en plus des contraintes de vitesse, la solution obtenue par notre programme, concernant le réseau de "testour" est très satisfaisante, en terme de chiffres, un gain de 2,73% soit un bénéfice de 2794 DT (  $\approx 30.734$  FF ) <sup>(2)</sup>, ainsi on peut constater jusqu'à quel point une étude d'optimisation peut améliorer toute solution commerciale existante .

Ces résultats significatifs permettent de conclure que l'approche qu'on a adapté, conduit à des réductions sensibles des coûts des réseaux étudiés avec de faibles frais de calcul .

---

(1) Voir annexe

(2) en 1984 : 1 DT  $\approx$  11 FF

# CONCLUSION GÉNÉRALE

## CONCLUSION

L'optimisation des réseaux de distribution de fluide ( l'eau en particulier ) est un domaine très important et d'un intérêt pratique indéniable .

Le programme mathématique qui découle de la formulation mathématique du problème est en effet un programme non linéaire, généralement insolvable sous sa forme canonique .

De ce fait, et pour remédier à ce problème, la méthode du gradient linéaire, que nous avons étudié et programmé, effectue une décomposition " Hiérarchique " du modèle en deux sous problèmes :

- le premier, partant d'une répartition des débits, consiste à formuler et résoudre un programme linéaire( nombre de PL peut aller jusqu'à 10 ) .

- le second consiste à établir un modèle de correction du débit en se basant sur notion des variables duales ; la première constatation qui peut être inscrite, c'est que (conformément à la théorie) le gradient de la fonction objective reste inchangée ( à des erreurs près ) .

La méthode du gradient linéaire ( LPGM ), avec l'intégration du modèle d'équilibrage, demeure la meilleur approche qui permet de donner une solution (optimale) réalisable sur le plan pratique et ce en respectant les contraintes hydrauliques ; les résultats numériques révèlent une preuve incontestable .

En fin, et pour conclure ce travail, nous dirons que le problème d'optimisation des réseaux mailles de distribution reste de compte ouvert dans la mesure où chaque nouvelle étude constitue un apport permettant de mettre en évidence de nouvelles méthodes; selon ce point de vue et à cause de l'efficacité constatée du modèle d'équilibrage dans les modèles d'optimisation, nous proposons comme perspective de ce travail, un modèle d'optimisation basé sur le même principe que la méthode LPGM, mais cette fois ci, la correction des débits se fait par un modèle d'équilibrage .

# ANNEXE



## ANNEXE

**Ensembles convexes :**

On dit que  $S \in \mathbb{R}^r$  est un ensemble convexe si et seulement si  $\forall x, y, \in S$ ,  
 $\gamma \in [0,1] \Rightarrow \gamma x + (1-\gamma)y \in S$ .

D'une manière plus simple,  $S$  est convexe se et seulement si :

$\forall x, y, \in S$  le segment  $[x, y]$  tout entier est contenue dans  $S$ .

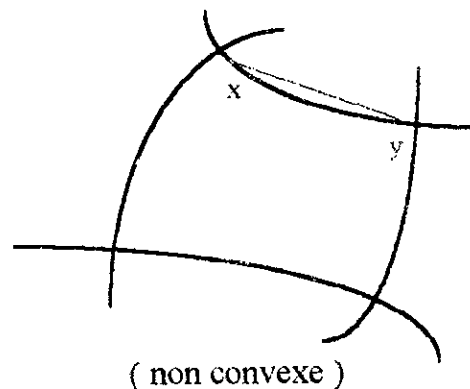
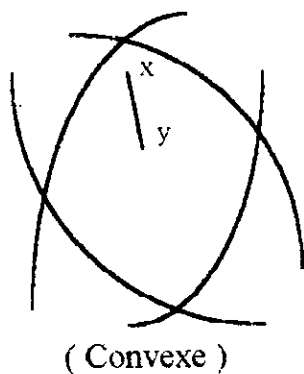


Fig. 1 . A

**Fonction convexe :**

Une fonction convexe  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur  $S$  convexe, est convexe, si la condition suivante est satisfaite :

$\forall x, y, \in S, \quad \forall \gamma \in [0, 1] \rightarrow f(\gamma \cdot x + (1-\gamma)y) \leq \gamma f(x) + (1-\gamma)f(y)$  il résulte que  $f$  est convexe sur  $S \in \mathbb{R}^n$  convexe, si et seulement si,  $\forall x, y \in S$ ,  $g(\theta) = f(x+\theta(y-x))$  est convexe de  $\theta. 0 < \theta < 1$ .

**Programme convexe :**

un programme mathématique est convexe si et seulement si :

$$\begin{cases} f \text{ est convexe} \\ g_i \quad i=1, \dots, m \quad \text{convexe} \\ S \in \mathbb{R}^n \quad \text{convexe} \end{cases}$$

On démontre que pour un programme convexe tout optimum local est un optimum global .

**réseau ( ou graphe ) connexe :**

Un graphe connexe est un espace topologique tel qu'il en existe aucune partition en deux parties fermées non vides ou en deux parties ouvertes non vides .

( liaison de circuit ( maille ) = connexion )

" les principales classes de problèmes en programmation mathématique "

Tableau A-1 : Les principes classes de problèmes en programmation mathématique :

Fonctions $f_i$	Fonctions $g_i$	Ensemble $S$	Terminologie employée
Continues, non linéaires quelconques		continu, compact $\mathbb{C}\mathbb{R}^n$	Programmation mathématique continue
Non linéaires quelconques ( pas nécessairement continues )		discret ( exemple: ensemble des points à coordonnées entières contenu dans un compact )	Programmation mathématique discrète ( si $S \subset \mathbb{Z}^n$ , programmation non linéaire en nombre entiers )
Continue, non linéaire, quelconque	$m = 0$	$S = \mathbb{R}^n$	Optimisation ( non linéaire ) continue sans contraintes
Non linéaire quelconque ( pas nécessairement continue )	$m = 0$	$S = \mathbb{Z}^n$	Optimisation ( non linéaire ) en nombres entiers sans contraintes
Non linéaires quelconques et convexes		$S \subset \mathbb{R}^n$ convexe	programmation mathématique non linéaire convexe
Linéaires		$S$ pavé de $\mathbb{R}^n$ ( exemple : $\mathbb{R}^{n+}$ )	Programmation linéaire
Linéaires		$S \subset \mathbb{Z}^n$	Programmation linéaires en nombres entiers

Tableau A - 2 : Prix des diametres commerciaux en Dinars tunisien .

N°	Diamètre ( m )	C ( DT )
1	0,080	13,3
2	0,100	14,2
3	0,150	16,4
4	0,200	19,0
5	0,250	23,9
6	0,300	29,6
7	0,400	52,5
8	0,500	61,4
9	0,550	65,4
10	0,600	72,3
11	0,800	96,0
12	0,125	15,3

Tableau A - 3 : Prix des diametres commerciaux en \$

Diamètre ( in )	coût ( unité )
1	2,0
2	5,0
3	8,0
4	11,0
6	16,0
8	23,0
10	32,0
12	50,0
14	60,0
16	90,0
18	130,0
20	170,0
22	300,0
24	550,0

# BIBLIOGRAPHIE

## **BIBLIOGRAPHIE**

- [ 1 ] - ALPEROVITZ . E et SHAMIR .U ; Design of water distribution systèmes. water resources RESEARCH, Vol 13 N° 6, P. 885 - 900 , 1977
- [ 2 ] - BAZARAA .M.S et JARVIS . J . J, Linéar programming and Network flows, J. WILEY et SOUS, New - york 1977
- [ 3 ] - BOUMAH RAT . M et GOURDIN . A. Methodes Numériques Appliquées, OPU, Octobre 1991 .
- [ 4 ] - CUDRAZ . H . M, Contribution à l'optimisation d'un reseau urbain de distribution d'eau I , II Annales des ponts et chaussées N° 42 , 1987 .
- [ 5 ] - CENEDESE . A et MELE . P , Optimal design of water distribution Networks, Journal of the Hydraulics DIVISION, ASCE, Vol 104, P. 236 - 247, 1978 .
- [ 6 ] - CHURCHMAN . C . W et ACKOFF . R . L, éléments de recherche opérationnelle, Dunod, 1961 .
- [ 7 ] - DROESBEKE . F, HALLIN . M et LEFEVRE . CL. Programmation linéaire par l'exemple, ELLIPSES, 1986 .
- [ 8 ] - DUPONT . A, Hydraulique urbaine, EYROLLES, 1978 .
- [ 9 ] - FEATHERSTONE et EL - JUMAILY, optimal diameter selection for PIPE Networks, Journal of Hydraulics Engineering. ASCE. Février 1983 .

- [ 10 ] - FUJIWARA . O, JENCHAIMAHAKOON . B et EDIRISINGHE .  
N.C.P A Modified linéaire programming gradient method  
for optimal Design of looped water distribution Networks,  
water resources RESEARCH, vol 23 N° 6, P. 977 - 982,  
Juin 1987 .
- [ 11 ] - GHARBI . T, Contribution à l'optimisation des réseaux mailles de  
distribution d'eau, PFE 1992, ENP .
- [ 12 ] - W GILL . PE, Murray et Wright . M. H, pratical optimisation,  
Académique press, 1981 .
- [ 13 ] - GOULTER . IAN . C, Lussier .B.M et Morgan .D.R, implications of  
head loss path choice in the optimization of water  
Distribution Net works, water Ressources RESEARCH,  
Vol 22 N° 5, P. 819 - 822, Mai 1986 .
- [ 14 ] - GUERARD.C, Progamation lineaire, les presses de l'iniversite de  
MONTREAL, EYROLLES - PARIS, 1976 .
- [ 15 ] - HELIS . A et YAHIAOUI .A.A, optimisation des réseaux mailles par la  
notion de l'arbre minimal ( LABYE ), PFE 1993, ENP .
- [ 16 ] - HUBERLIANT .B et LIOT .G, Calcul et optimisation des réseaux de  
distribution d'eau, PFE 1984, LOUVAIN - LA - NEUVE .
- [ 17 ] - KESSLER . A et SHAMIR .U, Analyses of the linear programing  
gradient Method of optimal Design of water supply Net  
works, water ressources RESEARCH, Vol 25 N° 7, P. 1469  
- 1480, Juillet 1989 .
- [ 18 ] - KUESTER . J.L, optimization techniques with FORTRAN, McGraw -  
HILL, 1973 .

- [ 19 ] - **LEBDI . F**, Recherche d'une methode d'optimisation des réseaux mailles sous pressions, these de doctorat, INP TOULOUSE . 1985
- [ 20 ] - **LANSEY .K.E** et **MAYS.L.W**, optimization MODEL For water Distribution system design, jornal of Hydraulic Engineering, ASCE , Vol 115 N° 10, Octobre 1989 .
- [ 21 ] - **MAHDHOUB.Z**, Contribution à l'étude de l'optimisation des réseaux mailles sous pression, these de doctorat, INP TOULOUSE, 1983 .
- [ 22 ] - **MERABTENE.T**, Contribution à l'étude du dimensionnement des réseaux mailles de distribution d'eau potable, thèse majister ENP 1990 .
- [ 23 ] - **MINOUX.M**, programmation mathématique tome 1, DUNOD 1983 .
- [ 24 ] - **MORGAN.D.R** et **GOOULTER. I.C** , optimal URBAN water Distribution Design, water Ressources RESEARCH, Vol 21 N° 5, P. 642 - 652, Mai 1985 .
- [ 25 ] - **OPRIS.G.H**, programmation linéaire, OPU , 1983 .
- [ 26 ] - **MALEK.A** et **BEDOU.O.S**, optimisation des réseaux de distribution d'eau, PFE, ENI DE TUNIS 1989 .
- [ 27 ] - **SHAMIR.U**, optima Design and ooperation of water distribution systems, water resources RESEARCH, Vol. 10 N° 1, Février 1974 .
- [ 28 ] - **TONG.A.L**, **OCONNOR.T.F**, **sterns.D.E** et **Lynch.W.O**, Analysis of distribution Networks by balancing équivalent pipe lengths, Journal of the American water works association, Vol . 53, N° 2 P. 192- 210, Février 1961 .