

13/95

République Algérienne Démocratique Et Populaire.

Ministère de l'Education Nationale.

المدسة الوطنية للتكنولوجيا
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Ecole Nationale Polytechnique.
Département Hydraulique

Projet de Fin d' Etude

CONTRIBUTION PAR UNE APPROCHE
ANALYTIQUE ET NUMÉRIQUE POUR LE
CALCUL DU POINT D'INCEPTION DANS LES
ÉVACUATEURS DE CRUES EN MARCHES
D'ESCALIER.

Proposé par :

Etudié par :

Dirigé par :

Melle S.BENMAMAR. Mr N.SMAKGHI Melle S.BENMAMAR.
Mr S.MESSAOUDI

- Promotion Juin 1995 -

République Algérienne Démocratique Et Populaire.

Ministère de l'Education Nationale.

المدسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Ecole Nationale Polytechnique.
Département Hydraulique

Projet de Fin d' Etude

CONTRIBUTION PAR UNE APPROCHE
ANALYTIQUE ET NUMÉRIQUE POUR LE
CALCUL DU POINT D'INCEPTION DANS LES
ÉVACUATEURS DE CRUES EN MARCHES
D'ESCALIER.

Proposé par :

Etudié par :

Dirigé par :

Melle S.BENMAMAR.

Mr N.SMAKGHI

Melle S.BENMAMAR.

Mr S.MESSAOUDI

- Promotion Juin 1995 -

DEDICACES

A l'être qui m'est le plus cher dans ce monde... Ma Mère.

A celui qui était plus content que moi le jour où j'ai franchi le Baccalauréat, et qui m'a offert un soutien moral et le bonheur au détriment de ses nécessités, pour me voir aujourd'hui à ses côtés comme étant un cadre... Mon Père.

A ma soeur.

A mes deux frères.

A ma famille.

A mes amis.

Je dédie ce travail.

NABIL.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer à Melle S. BENMAMAR mon attachement pour l'aide efficace et les encouragements qu'elle m'a prodigué le long de ce travail .

Sous sa direction j'ai eu l'occasion d'aborder un problème qui relève encore du domaine de la recherche . Qu'elle veuille bien trouver ici l'expression de mes remerciements et de ma profonde gratitude .

Je remercie également Mr S . MESSAOUDI qui n'a cessé tout au long de l'achèvement de ce travail de me faire bénéficier de ses précieux conseils et suggestions . Qu'il puisse trouver ici l'expression de ma reconnaissance .

Mes remerciements vont également à l'égard de Mr H . ROGAI Ingénieur à INTERAG , Mr N . AMOURA chercheur au département de G . Mécanique à l'ENP , Mr L . BENZAOUI et Mr M . BOUGHABA de l'IGM de Constantine et Mr K . BOUGHIDA de l'Int . INFO de Constantine .

Qu'il me soit permis enfin de témoigner ma reconnaissance à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation .

الهدف من هذه الدراسة هو حساب سماك
الطبقة المتاخمة ونقطة بداية دخول الهواء
في سيلان على هجاري مفرغات الفيضانات ذات شكل
مدرجات .

ABSTRACT :

The presente study consists on the computation of the Bonduray layer thickness and the inception point in the stepped spillways . The subject was started by the establishment of an easy analytical model then by a numerical computation.

RESUME :

La présente étude consiste en le calcul de l'épaisseur de la couche limite et du point d'inception dans les coursiers des évacuateurs de crues en marches d'escalier . le sujet a été abordé par l'établissement d'un modèle analytique , simple puis par un calcul numérique .

SOMMAIRE :

CHAPITRE 0 : Introduction Générale	1
CHAPITRE I : Aperçu Historique	3
CHAPITRE II : Généralités	
II - 1 - 1 Les évacuateurs de crues en marches d'escalier	4
II - 1 - 2 Régimes d'écoulements sur les coursiers	4
II - 1 - 3 Phénomène d'entraînement d'air	7
II - 1 - 4 Point d'inception	7
II - 1 - 5 Avantages des évacuateurs en marches	8
II - 2 Description phenomenologique de la turbulence	10
II - 2 - 1 Définition	10
II - 2 - 2 Propriété de la turbulence	10
II - 3 - 1 Concept de la couche limite	12
II - 3 - 2 Développement de la couche limite	13
II - 3 - 3 Régimes d'écoulements dans la couche limite	13
II - 3 - 4 Equations hydrodynamiques de la couche limite	14
CHAPITRE III : Modèle Analytique	
III - 1 Introduction	17
III - 2 Equations de base de l'écoulement sur le coursier en marches et hypothèses	17
III - 3 Equations de l'écoulement dans la couche limite	19
III - 4 Détermination du point d'inception	23
III - 4 - 1 Epaisseur de la couche limite	24
III - 4 - 2 Calcul de la position du point d'inception	28
CHAPITRE IV : Modélisation Mathématique De La Turbulence	
IV - 1 Introduction	30

IV - 2 Différents modèles de turbulence	31
IV - 3 Les modèles du premier ordre	31
IV - 4 Modélisation de l'écoulement turbulent sur le coursier.	36
CHAPITRE V : Implantation Numérique	
V - 1 Introduction	38
V - 2 La méthode des différences finies	38
V - 3 Discrétisation de l'équation de l'écoulement sur le coursier en marches	38
V - 4 Conditions aux limites	42
V - 5 Calcul de l'épaisseur de la couche limite	42
V - 6 Calcul du point d'inception	43
V - 7 Mise en oeuvre numérique	43
CHAPITRE VI : Applications et Résultats	
VI - 1 Présentation de modèle d'application	46
VI - 2 Les résultats expérimentaux	46
VI - 3 Application du modèle analytique	46
VI - 4 Résultats du modèle analytique	48
VI - 5 Application du modèle numérique	51
CONCLUSION GENERALE	56
ANNEXES :	
Annexe A	57
Annexes B	58
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	59

CHAPITRE 0

INTRODUCTION

GENERALE

" Pour faire de grandes choses , il ne faut pas être un si grand génie , il ne faut pas être au dessus des hommes , il faut être avec eux " .

Montesquieu.

INTRODUCTION GENERALE :

Au besoin qui ne cesse de s'accroître en matière de stockage des eaux, s'est accompagnée la construction de barrages de plus en plus grands, notamment dans les pays développés.

Les coûts exorbitants, ainsi que les dégâts pouvant porter grand préjudice tant à la structure qu'à son environnement, nécessitent des études de conception et d'exécution extrêmement délicates, tenant compte de tous paramètres.

La création de crues par une remontée du niveau des eaux devra être contrôlée avec grande vigilance à cause des débits importants à évacuer. Par son importance et sa puissance cette eau nécessite la construction d'un ouvrage particulier : l'évacuateur de crues.

L'expérience a montré que les vitesses d'écoulement sur le coursier de l'évacuateur peuvent atteindre (50 [m/s]) [1]. Dans ces conditions les dommages dus à l'érosion par cavitation sont inacceptables. Pour parvenir à ralentir l'effet de cette érosion, il est possible d'utiliser des bétons spéciaux (à haute résistance), des revêtements d'acier, des surfaçages en résine polymère ou époxy.

Malheureusement ces solutions sont coûteuses et ne sont pas satisfaisantes pour des vitesses supérieures à 30 [m/s].

En outre l'énergie cinétique importante des eaux évacuées s'avère nuisible vis-à-vis du pied aval du barrage, son environnement et éventuellement la structure même du barrage.

D'une manière classique, les moyens les plus courants pour obtenir la diminution brutale de cette énergie cinétique sont les sauts de ski, les ressauts et par jets croisés. Ces ouvrages sont cependant source de problèmes ; en effet dans la majorité des cas, ils sont endommagés après quelques mois de fonctionnement. Le dommage le plus fréquent est l'arrachement de dalles entières sous l'action des forces de sous-pression.

Dans les canaux lisses à forte pente, il a été observé l'apparition, à une certaine distance de la crête, d'eau fortement aérée, et l'écoulement devient biphasique. Cette présence d'air dans l'écoulement permet de réduire l'effet de l'énergie libérée par l'implosion des cavités.

Toutefois, il a été constaté qu'un fond rugueux provoque une concentration en air moyenne plus élevée qu'un fond lisse. D'où l'intérêt de placer des marches le long du coursier qui forment une macro-rugosité qui accélère le processus d'entraînement d'air.

Ainsi la zone de l'écoulement aéré apparaît nettement plus haut dans le coursier en marches que dans le profil lisse et le coursier est d'autant moins agressé.

Ce type de coursiers offre une prédissipation importante de l'énergie cinétique de l'écoulement qui permet une réduction considérable des dimensions du bassin de dissipation et de l'effet destructeur de cette eau .

L'objet de cette thèse est le calcul de l'épaisseur de la couche limite sur un coursier en marches d'escalier, en vue de la détermination de la position du point d'incéption.

Le plan de l'étude est le suivant :

Nous avons commencé par un bref aperçu historique dans le premier chapitre .

Le second chapitre traite de quelques généralités nécessaires pour le reste du développement. Une première partie a été consacrée à la présentation des évacuateurs de crues en gradins, les différents régimes d'écoulement et le phénomène d'entraînement d'air. Puis une description phénoménologique de la turbulence est faite . Enfin, nous nous sommes intéressé au concept de la couche limite, puis les équations de bases de l'écoulement à couche limite sont abordées .

Dans le troisième chapitre, nous avons modélisé l'écoulement en couche limite sur le coursier en gradin. Une loi de puissance a été adoptée pour le profil des vitesses dans la couche limite. L'intégration des équations de cette dernière nous a permis le calcul de son épaisseur et la position du point d'incéption.

Le quatrième chapitre a été consacré à la modélisation de la turbulence dans le cas d'une approche statistique. La constatation qui a été faite est que les modèles courants de turbulence ne constituent pas un outil intéressant dans le cas de notre problème, vue leur complexité et leur incapacité à refléter la réalité d'un écoulement avec recirculation .

Dans le chapitre cinq une résolution numérique directe des équations de Navier-Stokes simplifiées a été effectuée pour le calcul de l'épaisseur de la couche limite. Le point d'incéption est déterminé par l'intersection de la couche limite avec la ligne d'eau.

Le chapitre six concerne l'application des équations obtenues dans le chapitre trois et le programme élaboré en chapitre cinq sur plusieurs débits simulés expérimentalement sur modèle réduit. Le résultats sont comparés à ceux de l'expérience , analysés et interprétés.

En dernier lieu , une conclusion générale sur tout le travail est faite.

CHAPITRE 1

APERCU

HISTORIQUE

APERÇU HISTORIQUE :

Un grand nombre d'auteurs indiquent que la conception des évacuateurs des crues en marches d'escalier pour la dissipation de l'énergie était récente, apparue avec le développement de nouvelles techniques de constructions notamment le béton compacté au rouleau. D'autres ont démontrés que cette conception a été connue depuis l'antiquité.

Les deux évacuateurs en marches les plus anciens du monde sont ceux des barrages Adjilah et Khosr en Iraq. Ces deux barrages ont été construits aux environs de 694 Aj par le roi Assyrien Sennacherib . Ils étaient destinés à approvisionner la ville Assyrienne en eau .

Ce type d'ouvrages a été largement utilisé dans l'empire romain; en faite les ruines retrouvées en Syrie, Lybie et Tunisie en sont témoins.

Après la chute de l'empire romain les ingénieurs musulmans acquièrent l'expérience des romains . Ceci leur a permis de construire des barrages avec des évacuateurs de crues en marches en Iraq , en Arabie Saoudite et en Espagne.

Après la conquête de l'Espagne les ingénieurs espagnoles ont conçu des évacuateurs en marches (Almansa, Alicante, Bararueco de Abajo). Et en 179,1 ils ont construit le plus grand barrage de l'époque dont le coursier de l'évacuateur était en marche (Barrage de Puentes).

Avant 1850, les ingénieurs espagnoles possédaient les meilleurs connaissances dans le domaine des constructions hydrauliques. Ils étaient à l'origine de la construction de nombreux barrages avec des évacuateurs en marches dans le centre du Mexique pendant le 18ème et le 19ème siècle, certains étaient fonctionnels jusqu 'au début du 20ème siècle.

Malgré l'ancienneté de cette conception, jusqu 'au 20ème siècle les ingénieurs hydrauliciens n'avaient aucune information concernant les propriétés de l'écoulement sur les coursiers en marches. Ce n 'est que récemment que de nouveaux progrès sur le comportement hydraulique des canaux en marches étaient accomplis grâce aux travaux de Essery and Horner (1978), Sorensen (1985) , Rajarathnam (1990) et Peyras (1991).

CHAPITRE 2

GENERALTES

II - 1 - 1 LES EVACUATEURS DE CRUES EN MARCHES D'ESCALIER :

Jusqu'à une époque très récente tous les coursiers des évacuateurs des crues étaient aussi lisses que possible et toute l'énergie du jet devait être dissipée à l'aval.

C'est avec l'apparition du béton compacté au rouleau (BCR) qu'a vu le jour une nouvelle conception, matérialisée pour la première fois au barrage d'Upper - Stillwater (USA 1987), cette technique consiste à la mise en place du béton en couches minces, d'où l'aisance d'organiser l'extrémité aval de ces couches en marches d'escalier sur les quelles l'eau perd une partie importante de son énergie, permettant de réduire d'autant les ouvrages de dissipation au pied aval.

Les évacuateurs en marches d'escalier, doivent leur nom, donc, à la forme de leur coursier. ce dernier se compose d'une succession de marches reliant la crête du barrage au bassin d'amortissement, lui donnant ainsi l'allure d'un escalier.

Selon le type, les dimensions du barrage et la valeur du débit de la crue de projet, la hauteur des marches varie généralement entre 0,3 [m] et 1 [m].

II - 1 - 2 - REGIMES D'ECOULEMENTS SUR LES COURSIERS EN MARCHES :

Les différentes études expérimentales sur modèles réduits ont permis de mettre en évidence deux types d'écoulements : les écoulements en nappe et les écoulements très turbulents [4].

II - 1 - 2 - 1 Les écoulements en nappe :

Pour de faibles à moyens débits, la lame d'eau déversante frappe le giron de la marche inférieure, d'abord totalement puis partiellement, et on parle alors respectivement de nappe isolée et de nappe partielle.

a - Ecoulement en nappe isolée :

Deux régimes hydrauliques sont alors possibles : un premier caractérisé par une alternance des régimes fluvial et torrentiel, et un second totalement torrentiel.

a - 1 Alternance des régimes fluvial et torrentiel :

Ce régime ne peut être observé qu'avec une contre pente ou un contre seuil, où un ressaut hydraulique s'amorce en aval immédiat de l'impact de la lame déversante.

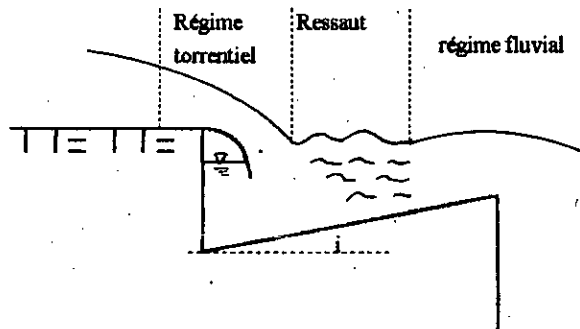


Figure (II - 1) : Ecoulement en nappe isolée avec alternance des régimes fluvial et torrentiel.

a - 2 Régime torrentiel :

En absence de contre pente ou de contre seuil, la vitesse de l'eau demeure très forte et le ressaut hydraulique est chassé en aval de la marche. Un fort bouillonnement en aval de la zone d'impact est à l'origine du régime torrentiel tout le long du coursier.

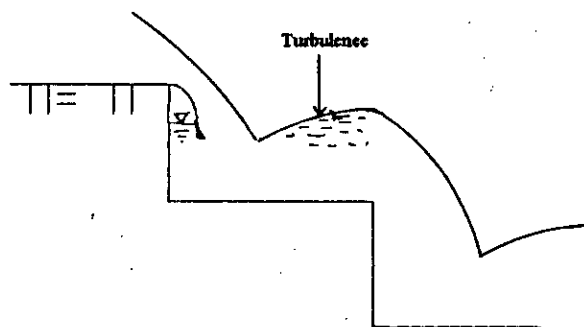


Figure (II - 2) : Ecoulement en nappe isolée avec régime constant torrentiel.

b- Ecoulement en nappe partielle :

La lame déversante frappe en partie la giron de la marche inférieure et l'éclatement du jet à chaque gradin provoque un fort bouillonnement. Le régime reste torrentiel tout le long des gradins.

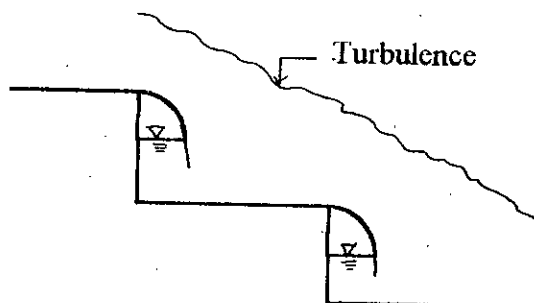


Figure (II - 3) : Ecoulement en nappe partielle .

II - 1 - 2 - 2 - Les écoulements très turbulents :

Observés pour les moyens à forts débits, on ne peut plus distinguer alors la lame d'eau et le déversoir est totalement immergé dans un courant fort et relativement lisse. Deux zones sont observées dans l'écoulements :

- Une première zone transitoire sur les premières marches, où l'écoulement s'accélère pour atteindre une vitesse V_{max} , à partir de laquelle apparait le phénomène d'entraînement d'air, dans cette phase l'écoulement n'est pas très turbulent.
- Une deuxième phase où l'écoulement atteint la vitesse V_{max} d'apparition de l'entraînement d'air. Les particules d'air se mêlent alors au courant d'eau et un fort bouillonnement intense se prolonge en s'amplifiant jusqu'au pied du coursier. Le coussin d'eau au pied des gradins a laissé place à un rouleau du fond dans lequel on aperçoit la rotation des bulles d'air entraînées. la présence de l'air dans l'écoulement modifie considérablement ces caractéristiques, l'épaisseur de la lame d'eau augmente et l'eau devient écumeuse.

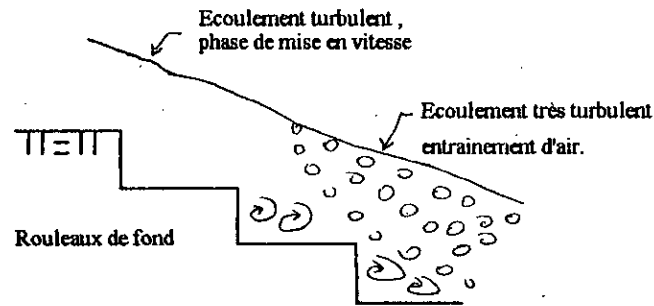


Figure (II - 4) : Ecoulement très turbulent.

II - 1 - 3 PHENOMENE D'ENTRAINEMENT D'AIR :

Ce phénomène trouve son origine dans la grande vitesse acquise par le fluide. En effet, la forte turbulence auprès de la surface libre de l'eau cause l'entraînement de l'air dans l'eau, c'est l'aération naturelle.

II - 1 - 4 POINT D'INCEPTION :

A la sortie de la retenue, l'écoulement est initialement peu turbulent. Ce dernier s'accélère, et une couche limite turbulente se développe jusqu'à atteindre la surface libre du fluide. A partir de ce point ; les vitesses de fluctuations turbulentes deviennent suffisamment importantes pour entraîner de l'air dans l'écoulement.

Le point de début d'entraînement d'air est appelé point d'inception ou point d'apparition de l'eau blanche .

A l'aval de ce point l'écoulement est graduellement varié, puis c'est le régime uniforme qui s'établira si la pente et la rugosité du canal ne varient pas.

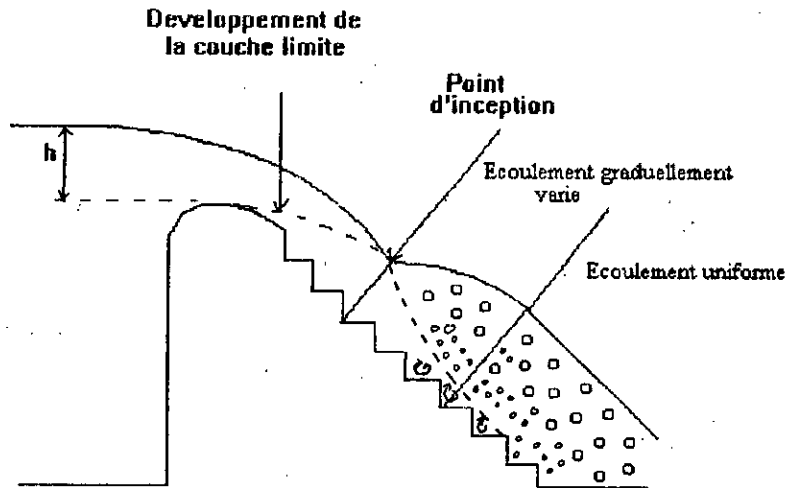


Figure (II - 5) : Développement de l'écoulement très turbulent sur le coursier en marches.

II - 1 - 5 AVANTAGES DES EVCUATEURS EN MARCHES :

Le phénomène d'entraînement d'air dans les évacuateurs de crues en marches est à l'origine d'avantages multiples de ce type de structures hydrauliques.

En fait, la présence d'air réduit considérablement les dangers dus à l'érosion par cavitation, car une concentration d'air supérieure à 6 - 8 [%] dans l'écoulement permet de stopper cette érosion.

En outre, diverses études expérimentales ont mis en évidence l'intérêt qu'offre la présence des marches sur les coursiers. Les résultats d'expériences sur modèles réduits de PEYRAS et Col [5] ont conduit à une économie de 10 à 30% sur la longueur du bassin de dissipation. L'intérêt économique se situe donc entre 5 et 10% sur l'ensemble du projet.

Après une synthèse concernant plusieurs travaux expérimentaux sur modèles réduits, A.GOUBET [4] conclue : "De toutes façons les résultats sont spectaculaires, les taux de dissipation au pied du coursier s'échelonnent de 60 à 95% en tenant compte également,

semble - t - il, de la dissipation singulière qui s'effectue immédiatement au pied du barrage dans l'émulsion. Les ouvrages de dissipation sont sensiblement réduits et pourraient, peut-être, être supprimés dans les meilleurs des cas."

En dernier lieu, il est à noter que le phénomène d'entraînement d'air s'avère d'une grande utilité dans la ré-oxygénation des rivières et cours d'eau pollués.

Conclusion du chapitre :

Après aperçu des différents régimes d'écoulements sur les coursiers en gradins et l'influence de la présence d'air sur les caractéristiques de l'écoulement, en découle l'importance d'une étude d'un écoulement très turbulent, notamment le développement de la couche limite et la détermination du point d'inception .

II - 2 DESCRIPTION PHENOMENOLOGIQUE DE LA TURBULENCE :

II - 2 - 1 Définition :

Le mot "turbulent " n'est pas la propriété des scientifiques . Ainsi , tout un chacun sait que l'on entend par "un enfant turbulent".

Dans l'édition de 1982 du Petit Robert , on peut lire la signification suivante :

" Qui est porté à s'agiter physiquement, qui est souvent dans un état d'excitation bruyante".

Voyons maintenant, ce que peuvent nous apprendre à ce sujet les scientifiques qui se sont penchés sur la question. Citons par exemple :

- LANDAU et LIFCHITZ [20] :

" Le mouvement turbulent d'un fluide est, pour des valeurs suffisamment grandes du nombre de REYNOLDS , caractérisé par l'existence d'une variation extrêmement irrégulière , chaotique de la vitesse au cours du temps en chaque point du flux.

La vitesse oscille sans cesse autour d'une certaine valeur moyenne, et indiquons ici même que l'amplitude de ces pulsations n'est pas en général petite par rapport à la grandeur de la vitesse elle même.

L'irrégularités des variations de la vitesse se repère d'un point à l'autre du flux considéré à l'instant donné . Les trajectoires des particules fluides dans le flux turbulent sont extrêmement complexes , d'où brassage intense du fluide " .

- M . LESSIEUR [20] :

"Il est difficile de donner une définition précise de ce que l'on entend par turbulence , et ceci est à l'origine de bien de malentendus . On peut cependant très grossièrement définir la turbulence par opposition à ce que l'on appelle un écoulement "laminaire", c'est à dire un écoulement bien organisé , tel que celui d'un large fleuve calme. Un écoulement turbulent apparaît comme une superposition de mouvements en apparence incohérents, qu'il semble difficile, voir impossible de prévoir " .

II - 2 - 2 Propriétés de la turbulence :

Un écoulement turbulent est caractérisé par :

Son aspect irrégulier (ou aléatoire):

La vitesse, la pression et toutes les grandeurs physiques caractérisant l'écoulement présentent des fluctuations extrêmement irrégulières, à la fois en temps et en espace.

Son aspect rotationnel :

Un écoulement turbulent ne peut être irrotationnel, et le rotationnel présente des fluctuations aussi irrégulières que les autres grandeurs.

Son aspect diffusif :

Un champ turbulent diffuse fortement toute quantité transportable comme la température ou un colorant.

Son aspect tridimensionnel :

Les mouvements turbulents fluctuants sont toujours tridimensionnels et instationnaires. Signalons qu'il existe toutefois une turbulence dite "bidimensionnelle" que l'on rencontre dans des situations très spécifiques.

Son aspect dissipatif :

Un écoulement turbulent est beaucoup plus dissipatif qu'un écoulement laminaire, en raison d'une augmentation considérable du frottement interne dû aux fluctuations irrégulières de la vitesse.

Il convient finalement de signaler que la turbulence est une propriété de l'écoulement et non du fluide.

III - 3 - 1 CONCEPT DE LA COUCHE LIMITE :

Jusqu'à la fin du 19ème siècle, il n'y avait pas de restrictions concernant les vitesses tangentielles au niveau de la paroi, on utilisait la vitesse potentielle u_∞ de l'écoulement.

A cause des forces d'attraction moléculaires, le fluide au voisinage de la paroi y reste attaché, c'est à dire qu' à cet endroit, la vitesse est nulle, c'est la condition de non glissement.

Pour un fluide visqueux (réel), la vitesse près de la paroi diminue de u_∞ jusqu' à s'annuler au niveau de celle - ci, il y a donc existence d'un gradient de vitesses dans cette région d'écoulement, c'est la couche limite.

Ce concept a été introduit par PRANDTL en 1904, les effets de viscosité sont concentrés principalement dans la couche limite, au delà de celle ci ils sont souvent décrits négligeables et l'écoulement est considéré comme potentiel. Conventionnellement , on définit l'épaisseur de la couche limite à l'endroit où le rapport $u(y) / u_\infty = 0,99$.

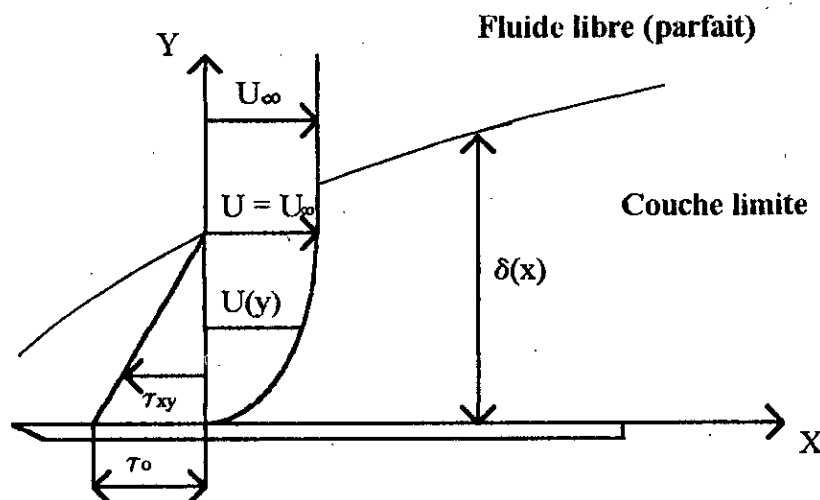


Figure (III - 6): Répartition des vitesses et des tensions locales dans une couche limite sur une plaque plane lisse

Dans la couche limite les gradients de vitesses sont élevés, et les forces de viscosité mises en jeu sont importantes.

L'épaisseur de la couche limite, $\delta(x)$, croît le long de la paroi dans le sens de l'écoulement du fluide.

Il est nécessaire de noter que l'écoulement dans la couche limite peut aussi être laminaire que turbulent.

III - 3 - 2 DEVELOPPEMENT DE LA COUCHE LIMITE :

Le développement de la couche limite est très bien aperçu par l'étude d'un écoulement sur un plateau. On constate qu'à partir du bord d'attaque O , l'écoulement reste laminaire, mais qu'à partir d'une certaine distance, $x_c = OO'$, l'écoulement peut devenir turbulent. Le passage entre ces deux régimes d'écoulement se fait dans une zone de transition. On remarque, à l'intérieur de l'écoulement turbulent, tout près de la paroi la naissance d'une couche très mince appelée sous couche visqueuse.

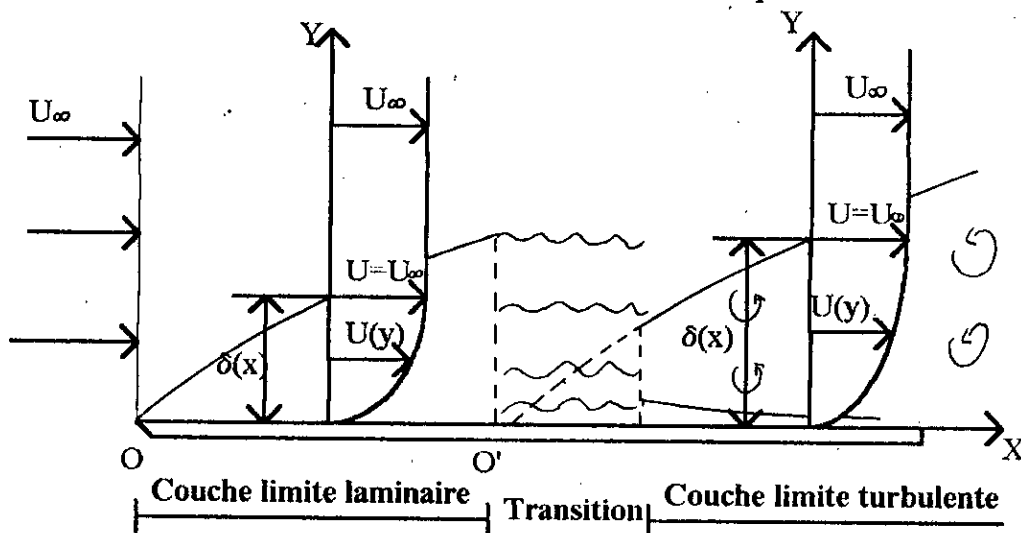


Figure (III - 7) : Développement de la couche limite sur une plaque lisse

III - 3 - 3 REGIMES D'ÉCOULEMENTS DANS LA COUCHE LIMITE :

Les écoulements des fluides visqueux peuvent être divisés en deux grandes classes : écoulements laminaires et écoulements turbulents.

Il est très important de noter un nombre adimensionnel :

Le nombre de Reynolds : $Re = V.L. / \nu$ où :

L : Longueur de la plaque.

V : Vitesse d'écoulement.

ν : Coefficient de viscosité cinématique du fluide.

Dans le cas des conduites on a : $Re = V \cdot D / \nu$

avec : D : Diamètre de la conduite.

Ce nombre adimensionnel exprime le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité (frottement), il permet de délimiter les écoulements laminaires et turbulents.

a - Ecoulement laminaire :

Dans le cas où les forces de viscosité sont plus importantes comparées aux forces d'inertie, l'écoulement est dit laminaire (généralement pour $Re < 2000$ à 2300).

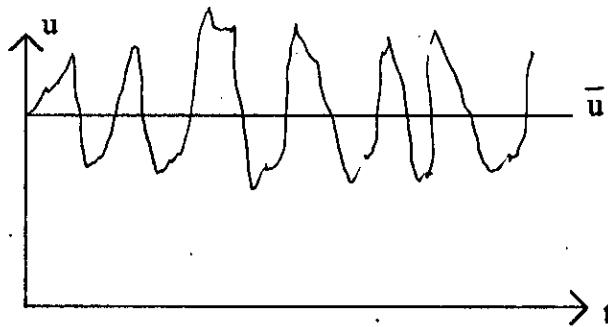
Cet écoulement se fait sans mouvement latéral où les couches du fluides semblent glisser les unes sur les autres.

b - Ecoulement turbulent :

Quand les forces d'inertie sont plus importantes comparées aux forces de viscosité, l'écoulement est dit turbulent.

Ce type d'écoulement présente, un certain nombre de caractéristiques uniques, la plus visible est l'irrégularité. Cette dernière est typique quand il s'agit de la variation de vitesse.

En fait l'enregistrement de la vitesse en fonction du temps dans un écoulement turbulent à débit constant présente l'allure suivante :



III-3-4- EQUATIONS HYDRODYNAMIQUES DE LA COUCHE LIMITE:

a - Couche limite laminaire :

L'écoulement est décrit par deux équations fondamentales à savoir :

- Les équations de Navier-Stokes.
- L'équation de continuité.

Les équations de Navier-Stokes peuvent s'écrire en adoptant la convention d'Einstein sous la forme :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad i, j = 1, 3$$

Pour un écoulement incompressible, l'équation de continuité sera :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 3$$

avec :

ν : Coefficient de viscosité cinématique [m^2/s].

ρ : Masse volumique du fluide [Kg/m^3].

f_i : Représente les composantes de la force de gravité selon les trois axes [m/s^2].

b- Couche limite turbulente :

Les équations de Navier-Stokes précédentes ne sont utilisables que pour un écoulement laminaire, où les contraintes de frottement d'origine visqueuse seront données par :

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

Où :

μ : Coefficient de viscosité dynamique [$N.S/m^2$].

Pour les écoulements turbulents, Reynolds fût le premier à utiliser le modèle avec les fluctuations des paramètres en posant : $u = \bar{u} + u'$, $v = \bar{v} + v'$,

$w = \bar{w} + w'$ et $p = \bar{p} + p'$ dans les équations de Navier - Stokes pour ressortir un terme connu sous le nom de contrainte de Reynolds :

$$\tau_T = -\rho \overline{u'_i v'_j}$$

Les équations du mouvement seront :

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u_i u_j} \right) \quad i, j = 1, 3$$

L'équation de continuité :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 3$$

On remarque dans les équations précédentes la présence d'inconnues supplémentaires.

CHAPITRE 3

MODELE

ANALYTIQUE

III-1- INTRODUCTION :

Les travaux de STRAUB et ANDERSON [10] ont bien montré que le phénomène d'entraînement d'air commence à partir du point où la couche limite atteint la surface libre de l'écoulement, autrement dit quand l'écoulement atteint un niveau suffisamment turbulent.

Partant de là, nous allons essayer de mettre en équation l'écoulement à couche limite le long du coursier en marche et de proposer une méthodologie pour le développement d'une équation liant le point d'apparition de l'eau blanche au débit évacué.

Cependant, la modélisation des écoulements turbulents dans la recherche d'une solution analytique dans tout problème de mécanique des fluides s'avère très délicate, et c'est pour cela qu'on se trouve contraint de traiter avec les équations de Navier-Stokes pour l'établissement d'un modèle analytique simple.

III-2- EQUATIONS DE BASE DE L'ÉCOULEMENT SUR LE COURSIER EN MARCHES ET HYPOTHESES :

L'écoulement de l'eau sur le coursier, peut être assimilé à l'écoulement d'un fluide visqueux et incompressible sur un profil rugueux et par conséquent régit par les équations de Navier - Stokes :

$$\frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta u \quad \dots\dots(III-1-a)$$

$$\frac{dv}{dt} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta v \quad \dots\dots(III-1-b)$$

$$\frac{dw}{dt} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \Delta w \quad \dots\dots(III-1-c)$$

Et l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots(III-2)$$

Avec :

ν : Coefficient de viscosité cinématique du fluide [m^2/s]

ρ : Masse volumique du fluide [Kg/m^3]

X, Y, Z : Respectivement composantes de la gravité par unité de masse selon les axes x, y, z [m/s^2].

U, V, W : Respectivement composantes de la vitesse selon les axes x, y, z [m/s].

Les dérivées totales sont données par :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad \dots(\text{III-3-a})$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \quad \dots(\text{III-3-b})$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad \dots(\text{III-3-c})$$

L'opérateur Δ est défini par :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \dots(\text{III-4-a})$$

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad \dots(\text{III-4-b})$$

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad \dots(\text{III-4-c})$$

L'écoulement sur le coursier se fera à débit constant dans le temps, c'est à dire que l'écoulement sera considéré permanent, soit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

En plus on admet que le coursier est suffisamment large pour que l'écoulement ne soit pas influencé par les parois latérales, on peut donc négliger la composante normale au plan de l'écoulement ($w=0$). Par conséquent, l'écoulement sera régit par deux équations, selon x et y.

La projection des forces de volume par unité de masse selon les axes x et y donne :

$$X = g \cdot \sin i$$

$$Y = -g \cos i$$

Avec : i Pente du coursier

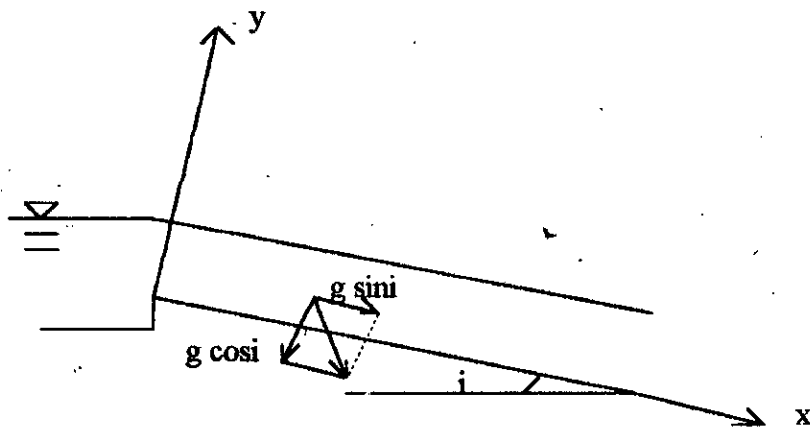


Figure (III-1) : Décomposition de la force de gravité

On obtient alors les deux équations suivantes :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots(III-5-a)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = g \cos i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots(III-5-b)$$

En plus de l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(III-6)$$

III-3 - EQUATIONS DE L'ÉCOULEMENT DANS LA COUCHE LIMITE :

On se propose de rechercher les simplifications que peut apporter les caractères de la couche limite. En suivant une méthode due à PRANDTL, nous allons étudier l'ordre de grandeur des différents termes de ces équations pour n'y retenir que les termes d'ordre supérieur.

Pour cela, nous introduirons au cours de ce raisonnement les grandeurs caractéristiques suivantes selon les axes x et y :

- Longueurs caractéristiques : l et δ .
- Vitesses caractéristiques : u et v_δ .
- Pressions caractéristiques : Π_x et Π_y .

L'épaisseur de la couche limite étant mince par rapport aux distances longitudinales, on peut écrire :

$$\delta / l \ll 1$$

On considère ensuite pour chacune des équations, l'ordre de grandeur de chaque terme.

i/ Equation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots (III-7)$$

$$\frac{u_\infty}{l} + \frac{v_\delta}{\delta} = 0$$

L'ordre de grandeur de ces deux termes doit être le même, par conséquent :

$$v_\delta \sim u_\infty \cdot \delta / l$$

Etant donné que $(\delta/l \ll 1)$, on a $(v_\delta / u_\infty \ll 1)$.

On peut dire donc que l'écoulement dans la couche limite est presque parallèle au fond (v est très petite par rapport à u).

ii/ Equation de Navier - stokes selon x :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{u^2}{l} \quad v_{\delta} \frac{u_{\infty}}{\delta} \sim \frac{u^2_{\infty}}{l} \quad \frac{\pi x}{\rho l} \quad \nu \frac{u_{\infty}}{l^2} \quad \nu \frac{u_{\infty}}{\delta^2}$$

On remarque que les deux termes dus aux forces d'inertie sont de même ordre de grandeur .

Les deux termes dus aux forces de frottement sont d'un ordre de grandeur différent, étant donné que $(\delta/l \ll 1)$, le premier terme suivant x peut être négligé par rapport au deuxième.

Compte tenu des remarques précédentes, on a :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \dots\dots\dots(III-7)$$

iii/ Equation de Navier - stokes selon y :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - g \cos i$$

$$u_{\infty} \frac{v_{\delta}}{l} \sim u_{\infty}^2 \frac{\delta}{l^2} \quad \frac{v_{\delta}^2}{\delta} \sim u_{\infty}^2 \frac{\delta}{l^2} \quad \frac{\Pi_y}{\rho \delta} \quad \nu \frac{v_{\delta}}{l^2} \sim \nu \frac{u_{\infty}^2 \delta}{l^3} \quad \nu \frac{v_{\delta}}{\delta^2} \sim \nu \frac{u_{\infty}}{l \delta}$$

On constate que les deux termes dus aux forces d'inertie sont de même ordre de grandeur, étant donné que $(\delta/l \ll 1)$, les deux termes peuvent être négligés.

Les deux termes de forces de frottements sont d'un ordre de grandeur différent, on peut négliger le premier par rapport au deuxième qui reste également très petit.

On aura finalement selon y :

$$0 = -g \cos(i) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \dots\dots\dots(III-8)$$

En résumé, l'écoulement en couche limite sur le coursier est décrit par le système :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \dots\dots(\text{III-9-a})$$

$$0 = -g \cos i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \quad \dots\dots(\text{III-9-b})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots(\text{III-9-c})$$

En dehors de la couche limite :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Le système (III-9) se réduit donc à :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = g \sin i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad \dots\dots(\text{III-10-a})$$

$$0 = -g \cos i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \quad \dots\dots(\text{III-10-b})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots(\text{III-10-c})$$

On remarque que l'équation selon y est aussi bien valable pour l'écoulement en couche limite que pour l'écoulement en dehors de la couche limite.

En intégrant cette équation entre la surface libre est un point quelconque à une profondeur y:

$$\int_p^{P_{\text{surface}}} \frac{1}{\rho} \partial P = \int_y^H (-g \cos i) \partial y$$

avec : $P_{\text{surface}} = P_{\text{atm}} = 0$ (pression atmosphérique relative).

$$\text{D'où : } P = \rho \cdot g \cdot \cos i (H - y) \quad \text{.....(III-11)}$$

$$\partial P / \partial x = 0 \quad \text{.....(III-12)}$$

C'est une répartition de pression hydrostatique .

Le système (10) se réduit donc à :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin i + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{.....(III-13-a)}$$

$$0 = -g \cos i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{.....(III-13-b)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{.....(III-13-c)}$$

On ne retiendra que l'équation suivant x qui est suffisante pour décrire l'écoulement :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin i + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{.....(III-14-a)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{..... (III-14-b)}$$

En faisant l'hypothèse que les pertes de charges sont négligeables en dehors de la couche limite et que la vitesse d'approche est nulle, la vitesse du fluide libre peut être donnée par le théorème de Bernoulli :

$$u_{\infty} = \sqrt{2 \cdot g (x \cdot \sin i + h)} \quad \text{.....(III-15)}$$

Où :

h : épaisseur de la lame déversante.

x : Distance comptée à partir de la crête.

Le système (III - 14) représente les équations hydrodynamique de la couche limite laminaire bidimensionnelle, ou équations de PRANDTL valables dans la couche limite ($y < \delta$), avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} u = v = 0 & \quad \text{pour } y = 0 \\ u = u_{\infty}(x) & \quad \text{pour } y \geq \delta \end{aligned}$$

III-4 - DETERMINATION DU POINT D'INCEPTION :

Le point d'inception est défini comme étant le point d'intersection de la couche limite est la surface libre du fluide.

Pour cela, nous allons intégrer le profil des vitesses dans la couche limite pour obtenir le débit de cette dernière, au point d'incéption, ce débit sera égal à celui réellement évacué.

CHEN [12] a montré que pour les écoulements dans les canaux hydrauliquement très rugueux, le profil des vitesses dans la couche limite peut bien être représenté par la loi de puissance suivante :

$$\frac{u}{u_{\infty}} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \dots(\text{III-16})$$

$$\text{avec } n = k \sqrt{\frac{8}{f}} \quad \dots(\text{III-17})$$

Où :

k : Constante de Von Karman prise égale à 0,41.

f : Coefficient de frottement de DARCY - WEISBACH.

Pour le calcul de f, RAJARATHNAM [13] propose la formule suivante :

$$f = \frac{8 \cdot y_0^3 \cdot g \cdot \sin i}{q^2} \quad \dots\dots\dots (\text{III-18})$$

Où :

y_0 : Hauteur de l'écoulement uniforme [m].

q : Débit évacué par unité de largeur [m^2/s].

i : Pente du canal [$^{\circ}$].

III- 4 -1 Epaisseur de la couche limite :

Rappelons que l'écoulement est régi par l'équation :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin i + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

En combinant cette expression avec la relation (III-16), on obtient pour chaque terme séparément :

$$a/ \quad u \frac{\partial u}{\partial x} = u \left[\frac{\partial u_{\infty}}{\partial x} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{n}} + u_{\infty} y^{\frac{1}{n}} \left(-\frac{1}{n} \right) \delta^{-(1+\frac{1}{n})} \frac{\partial \delta}{\partial x} \right]$$

En tenant compte de l'équation (III-15), on a :

$$u_{\infty} \frac{\partial u_{\infty}}{\partial x} = g \sin i$$

Tout calcul fait , on trouve :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{g \sin i}{\delta^{\frac{2}{n}}} y^{\frac{2}{n}} - \frac{1}{n} u_{\infty}^{(2/n+1)} \cdot y^{(2/n)} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial x}$$

En intégrant par rapport à y entre 0 et δ , on trouve :

$$\int_0^{\delta} u \frac{\partial u}{\partial x} dy = \frac{g \sin i}{1 + \frac{2}{n}} \delta + \left(\frac{-1}{n+2} \right) u_{\infty}^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} \quad \text{.....(III-19)}$$

b/ $v \frac{\partial u}{\partial y} = v \cdot u_{\infty} \frac{y^{(n-1)}}{n \cdot \delta}$

$$\int_0^{\delta} v \frac{\partial u}{\partial y} dy = v \cdot u_{\infty} \quad \text{..... (III-20)}$$

c/ $v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = v \cdot u_{\infty} \left(\frac{1-n}{n^2} \right) \cdot \frac{y^{n-2}}{\delta}$

$$\int_0^{\delta} v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \frac{v \cdot u_{\infty}}{n \cdot \delta} \quad \text{.....(III-21)}$$

d/ $\int_0^{\delta} g \sin i dy = g \sin i \cdot \delta \quad \text{..... (III-22)}$

L'équation (III-14 -a) devient :

$$g \sin i \left(\frac{n}{n+2} \right) \cdot \delta - \frac{1}{n+2} u_{\infty}^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} + v \cdot u_{\infty} = g \sin i \delta + v \frac{u_{\infty}}{n \delta} \quad \text{.....(III-23)}$$

Le terme v peut être négligé parce que v est de l'ordre de 10^{-6} à $t = 20$ [°C]

En posant $v = a u_{\infty}$, où a est une constante à étalonner [8] ; on aboutira à :

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = a(n+2) - \frac{2 \cdot g \sin i}{u_{\infty}^2} \delta \quad \text{.....(III-24)}$$

Et puisque $u_{\infty}^2 = 2 \cdot g (\sin i \cdot x + h)$; on aura :

$$\frac{\sin i}{(x \sin i + h)} \delta + \frac{\partial \delta}{\partial x} = a(n+2) \quad \text{.....(III-25)}$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Résolution de l'équation différentielle :i/ **Résolution de l'équation homogène associée :**

$$\frac{\sin i}{(x \sin i + h)} \alpha(x) + \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x} = 0$$

 \Rightarrow

$$\frac{\sin i}{(x \sin i + h)} \alpha(x) = - \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x}$$

 \Rightarrow

$$\frac{\sin i}{(x \sin i + h)} \alpha(x) = - \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x}$$

En intégrant les deux membres :

$$\text{Log } k_1 |x \sin i + h| = -\text{Log } |\alpha(x)|$$

d'où:

$$\text{Log } k_1 (x \sin i + h) = \text{Log } \frac{1}{\alpha(x)}$$

 \Leftrightarrow

$$\alpha(x) = \frac{k}{x \sin i + h} \quad \dots\dots (III-26)$$

avec : $k = 1/k_1$ est une constante

ii /

$$\delta(x) = \frac{k(x)}{x \sin i + h}$$

d'où

$$\delta'(x) = \frac{k'(x)(x \sin i + h) - \sin i k(x)}{(x \sin i + h)^2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\delta'(x) = \frac{k'(x)}{(x \sin i + h)} - \frac{\sin i \cdot k(x)}{(x \sin i + h)^2}$$

En remplaçant par la dernière expression dans (III-25) on aboutira à :

$$\frac{k'(x)}{x \sin i + h} = a(n+2)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$k(x) = \frac{a(n+2)(x \sin i + h)}{2 \sin i} + c$$

D'où finalement :

$$\delta(x) = \frac{a(n+2)(x \sin i + h)}{2 \sin i} + \frac{c}{2 \sin i (x \sin i + h)} \quad \dots\dots\dots(\text{III-27})$$

Si on impose la condition au limite suivante :

$$\delta(x=0) = 0$$

L'expression de la couche limite sur le coursier en marche sera régit par l'équation :

$$\delta(x) = \frac{a(n+2)((\sin i + h)^2 - h^2)}{2 \sin i (x \sin i + h)} \quad \dots\dots\dots(\text{III-28})$$

Conclusion :

L'expression (III-28) nous permet le calcul de l'épaisseur de la couche limite le long du coursier en gradins . Elle sera par la suite utilisée pour la détermination de la position du point d'inception .

III-4 -2 Calcul de la position du point d'inception :

Le long du coursier l'épaisseur de la couche limite se développera jusqu' à atteindre la surface libre.

Dans ce cas il est possible d'égaliser le débit total q_w au débit de la couche limite q_d .

Le débit de la couche limite est obtenu en intégrant le profil des vitesses :

$$q_d = \int_0^{\delta} u \, dy \quad \text{avec} \quad u = u_w \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{d'où} \quad q_d = \left(\frac{n}{n+1} \right) u_w \delta$$

Ayant l'épaisseur donnée par (III-28) et u_w par (III-15) :

$$q_d = \left(\frac{n}{n+1} \right) \sqrt{2g} (x \sin i + h)^{\frac{1}{2}} \frac{a(n+2)((x \sin i + h)^2 - h^2)}{2 \sin i (x \sin i + h)} \quad \dots\dots\dots(\text{III-29})$$

Le débit évacué par le déversoir est donné par :

$$q_w = C_d \cdot \sqrt{2g} h^{3/2} \quad \dots\dots\dots(\text{III-30})$$

C_d : Coefficient de débit dépendant du type du déversoir .

Au point d'inception : $q_w = q_d \quad \dots\dots\dots(\text{III-31})$

D'où on obtient une équation de la forme :

$$y^4 - \alpha y = 1 \quad \dots\dots\dots(\text{III-32})$$

Où :

$$\alpha = \frac{2 \sin i (n+1) \cdot C_d}{a \cdot n \cdot (n+2)} \dots\dots\dots (\text{III-34})$$

$$\text{Et : } y = \frac{(x_i \sin i + h)^{1/2}}{h} \dots\dots\dots (\text{III-35})$$

x_i : Distance du point d'incéption par rapport à la crête.

Conclusion du chapitre :

Pour la calcul du point d'incéption, on aura donc à résoudre une équation simple de la forme :

$$y^4 - \alpha y = 1$$

A la fin le point d'incéption est donné par :

$$x_i = \frac{h (y^2 - 1)}{\sin i} \dots\dots\dots (\text{III-36})$$

CHAPITRE 4

MODELISATION

MATHEMATIQUE

DE LA TURBULENCE

IV - 1 INTRODUCTION :

Comme nous l'avons déjà évoqué, la présente étude concerne les écoulements très turbulents sur les évacuateurs en marches d'escalier. L'approche statistique qui consiste en la décomposition des paramètres de l'écoulement en paramètres moyens et fluctuants fera l'objet de ce développement.

Les équations de Navier-Stokes moyennées ne permettent pas de décrire directement l'évolution de l'écoulement moyen, car elles contiennent des inconnues supplémentaires : les tensions de Reynolds.

Rappelons que les équations de Navier-Stokes moyennées pour un écoulement turbulent incompressible sont :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{u'_i u'_j} \right) \quad \dots\dots (IV - 1 - a)$$

$$i, j = 1, 3$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad \dots\dots (IV - 1 - b)$$

Où : $\tau_T = -\rho \overline{u'_i u'_j}$ sont les tensions de Reynolds.

Le système (IV - 1) comporte plus d'inconnues que d'équations, c'est un système ouvert. Le fait de prendre la moyenne d'une équation instantanée conduit à une perte d'information qu'il faudra réintroduire sous forme d'hypothèses physiques : c'est le problème de fermeture.

L'introduction des hypothèses de fermeture qui traduisent le comportement du milieu turbulent permet alors d'obtenir un nombre d'équations égal à celui des inconnues et ces équations peuvent ensuite être résolues par voie numérique.

Schématiquement, le problème ici est donc celui de la liaison entre des tensions de Reynolds ($\overline{u'_i u'_j}$) et le champ moyen.

Les tensions de Reynolds qui constituent des inconnues supplémentaires doivent être calculées par ailleurs, à l'aide d'un modèle de turbulence.

Le rôle d'un modèle de turbulence :

Le but des modèles de turbulence est pratique, c'est la prévision numérique des écoulements turbulents, il n'est pas d'expliquer la turbulence. Les modèles de turbulence ne peuvent donner qu'une description approchée et ils ne sont applicables qu'à une certaine classe d'écoulements.

IV - 2- DIFFERENTS MODELES DE TURBULENCE :

Selon l'ordre des moments retenus comme inconnues principales, on distinguera deux types de modèles :

- Modèles au premier ordre :

Qui limitent le champ des grandeurs inconnues principales aux seules valeurs moyennes des fonctions de l'écoulement (moment d'ordre un).

- Modèles au deuxième ordre :

Qui retiennent comme inconnues premières, outre les valeurs moyennes, les tensions de Reynolds ($\overline{u_i u_j}$; moment d'ordre 2).

Dans le cadre de cette étude on ne s'intéressera qu'à la première catégorie de modèles.

IV - 3 - LES MODELES DU PREMIER ORDRE :

Les modèles du premier ordre sont obtenus par fermeture des équations du mouvement moyen. Cet objectif peut être atteint de différentes façons :

- Sans introduire de nouvelles équations aux dérivées partielles, on aura à parler donc des modèles algébriques à zéro équation.

- En adjoignant au système initial certaines équations aux dérivées partielles supplémentaires. Selon leur nombre, on aura alors affaire à des modèles à une ou deux équations.

IV - 3 -1 Le concept de viscosité turbulente :

On cherche à modéliser les tensions de Reynolds. Par simple analogie avec la loi de Newton pour les contraintes d'agitation moléculaires, Boussinesq proposa :

$$\tau_T = -\rho \overline{u_i u_j} = \mu_T \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

μ_T : Viscosité turbulente ou tourbillonnaire.

La viscosité turbulente contrairement à la viscosité laminaire, n'est pas une propriété du fluide, mais de l'écoulement variant d'un point à l'autre de celui-ci.

PRANDTL a proposé une autre formulation faisant intervenir l'énergie cinétique moyenne de turbulence K :

$$-\rho \overline{u_i' u_j'} = \mu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho K \delta_{ij} \quad \dots\dots (IV - 2)$$

Où :

$$2K = \overline{u_i' u_i'} = \overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2} \quad \dots\dots (IV - 3)$$

Le problème de la détermination des tensions de REYNOLDS est donc transféré sur l'évaluation de la viscosité turbulente μ_T .

IV -3 - 2 Modèle à zéro équations :

Théorie de PRANDTL (1925) :

PRANDTL propose une expression inspirée de la théorie cinétique des gaz :

$$\mu_T = \rho \cdot l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad \dots\dots (IV - 4)$$

Où l_m désigne une longueur de référence appelée longueur de mélange.

Tout le problème revient alors à se donner la longueur de mélange l_m .

- Pour un jet plan : $l_m / \delta = 0,09$

- Pour un jet rond : $l_m / \delta = 0,075$

Où δ représente l'épaisseur de la vitesse à moitié c'est à dire la distance à l'axe où :

$$u(x, \delta) = 0,5 \cdot u(x, 0)$$

- Ecoulement en conduite :

$$\frac{l_m}{R} = 0,14 - 0,08 \left(1 - \frac{y}{R}\right)^2 - 0,06 \left(1 - \frac{y}{R}\right)^4$$

Où R désigne le rayon de la conduite et y la distance normale à la paroi.

- Couche limite sur paroi :

- Région de la paroi :

$$l_m = \chi \cdot y \left(1 - e^{-\frac{y^+}{A}}\right)$$

avec : $\chi = 0,41$ et $A = 26$

$$y^+ = \frac{y}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}$$

La validité de cette relation est limitée à la région $y^+ < 40$.

- Région logarithmique :

$$l_m = \chi \cdot y$$

Les citations précédentes ne sont qu'un échantillon d'un très vaste ensemble de propositions.

Remarque : Un premier défaut de ce modèle apparaît en fait si :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \implies \quad \mu_T = 0 \quad \implies \quad -\rho u'v' = 0$$

Ce résultat n'est pas acceptable car il peut être contredit par l'expérience [18]. Pour l'éviter PRANDTL lui même a proposé de remplacer (IV - 4) par :

$$\mu_T = \rho l_m^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2 + l_n^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\right)^2} \quad \dots\dots (IV - 5)$$

Relation qui s'est révélée d'un usage complexe, car nécessitant la connaissance d'une deuxième échelle de longueur l_n .

- Autres théories :

- Von Karman : s'appuyant sur une hypothèse de similitude de turbulence propose :

$$l_m = \chi \left| \frac{\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}{\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}} \right| \quad \text{(IV - 6)}$$

χ : Constante expérimentale.

Un autre défaut apparaît pour :

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = 0 \implies \mu_T \longrightarrow \infty \text{ et } \overline{u'v'} \longrightarrow \infty$$

- Taylor (1934) :

$$-\rho \overline{u'v'} = \rho \cdot l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)$$

IV - 3- 3 Modèles à une équation :

Ces modèles utilisent majoritairement la proposition de PRANDTL-KOLMOGROV selon laquelle :

$$\nu_T = C_\mu \cdot \sqrt{K} \cdot l \quad \text{.....(IV - 7)}$$

Où :

C_μ est une constante pure et l représente une échelle de longueur qui reste donnée algébriquement. Ainsi, il a été plus logique de décrire les caractéristiques de l'écoulement par une grandeur essentiellement turbulente qui est l'énergie cinématique turbulente.

K sera donné par l'équation de transport de l'énergie cinétique de turbulence :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = C_\mu \sqrt{k} l \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{C_\mu \sqrt{k} l}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - C_d \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l} \quad \text{.....(IV - 8)}$$

Ce modèle fait apparaître trois constantes C_μ , C_d , σ_k qui sont prescrites en référence à des "cas tests" expérimentaux [18].

IV - 3 - 4 Modèle à deux équations :

Afin de réduire l'empirisme d'une prescription algébrique d'une échelle de longueur, on est naturellement conduit à faire dépendre cette donnée de la valeur d'une grandeur transportable dont on résout l'équation. Le choix de taux de dissipation comme seconde fonction du modèle conduit à exprimer l'échelle de longueur l sous la forme :

$$\varepsilon = C_D \cdot K^{(3/2)} / l \quad \text{.....(IV - 9)}$$

Où C_D est une constante pure, d'où l'expression de la viscosité turbulente devient :

$$\nu_T = C_\mu \cdot K^2 / \varepsilon \quad \text{.....(IV - 10)}$$

K et ε sont données par la résolution de deux équations de transport à savoir :

L'équation de transport de l'énergie :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \overline{u_i u_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \varepsilon \quad \text{(IV - 11)}$$

L'équation de transport de la dissipation :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] - C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i u_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad \text{.....(IV - 12)}$$

Pour les constantes on adopte les valeurs universelles suivantes [18], [22], [23] :

$$C_{\mu} = 0,09$$

$$C_{\varepsilon 1} = 1,44$$

$$C_{\varepsilon 2} = 1,92$$

$$\sigma_k = 1$$

$$\varepsilon_\varepsilon = 1,3$$

DISCUSSION :

- Les fermetures algébriques sont très limitées du fait de leur recours à un empirisme élevé impliquant en fait des connaissances préalables sur l'écoulement à calculer .

- Les modèles algébriques présentent ainsi de grands succès dans l'étude des écoulements avec circulation, car dans ce cas l'expression de l_m sera très compliquée.

- Le modèle K-ε s'avère l'un des plus répandus actuellement en regard des applications pratique à l'usage de l'ingénieur [18].

IV - 4 MODELISATION DE L'ÉCOULEMENT TURBULENT SUR LE COURSIER EN MARCHÉ :

Vu le raisonnement développé dans le chapitre III, l'écoulement dans la couche limite sur le coursier en marches en régime turbulent sera décrit par les équations suivantes :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = g \sin i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{u'v'}) \quad \text{.....(IV-13 - a)}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad \text{.....(IV-13 - b)}$$

Les contraintes de Reynolds seront modélisées par :

$$-\overline{u'v'} = \frac{1}{\rho} \mu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad \text{..... (IV - 14)}$$

$$\mu_T = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad \text{.....(IV - 15)}$$

D'où on aura finalement à résoudre le système :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad \text{.....(IV-16 - a)}$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = g \sin i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{u'v'}) \quad \text{.....(IV-16 -b)}$$

$$\bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial k}{\partial y} \right] + (-\overline{u'v'}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \varepsilon \quad \text{(IV - 16 - c)}$$

$$\bar{u} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + (-\overline{u'v'}) C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad \text{.....(IV - 16 - d)}$$

Les conditions aux limites associées à ce système sont :

- Au niveau de la paroi : $u = 0, k = 0, \varepsilon = 0$.
- Pour $y = \delta$ (épaisseur de la couche limite) : $u = u_\infty(x)$.

COMMENTAIRE :

Le traitement de notre problème dans le cas d'un écoulement turbulent nécessite la résolution d'équations très complexes faisant intervenir des procédures numériques assez développées et délicatement manipulables . A ces équations nous devons , en outre , associer des conditions aux limites , avec quoi , on ne peut garantir des résultats satisfaisants du modèle redevenant incapable de refléter la réalité physique du problème en cas de présence de recirculation [18] , [19] et qu'on ne peut donc négliger .

C'est la raison pour laquelle , on est astreint de s'appuyer sur d'autres considérations a titre hypothétique . on se propose pour cela d'opter pour une résolution des équations de Navier-Stokes qui fera l'objet du reste de l'étude.

CHAPITRE 5

IMPLANTATION

NUMERIQUE

V -1 INTRODUCTION :

Les sciences de l'ingénieur permettent de décrire le comportement des systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles. Ces dernières ne fournissent pas d'informations directes pouvant intéresser l'ingénieur. Par leur complexité, ces équations ne peuvent être résolues que par voie numérique.

V - 2 LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES :

Parmi les anciennes méthodes numériques utilisées pour la résolution des équations aux dérivées partielles, la méthode des différences finies peut s'adapter aux problèmes linéaires et non linéaires. Elle permet de fournir une solution approchée à ces équations en remplaçant les opérateurs différentiels par un opérateur aux différences finies, où chaque dérivée partielle est remplacée par une différence de valeur en un certain nombre fini de points.

Les principales étapes de cette méthode sont :

- 1 - La discrétisation du domaine considéré pour définir les différents noeuds à prendre en compte.
- 2 - L'écriture des équations aux différences finies en chaque noeud issu de la discrétisation du domaine.
- 3 - La résolution du système d'équations obtenu dans l'étape précédente associé aux conditions aux limites.

V -3 - DISCRETISATION DES EQUATIONS DE L'ECOULEMENT SUR LE COURSIER EN MARCHES :

Rappelons que l'écoulement en couche limite sur un coursier en marches d'escalier est régi par le système suivant :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin i + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \dots\dots(V-1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots(V-2)$$

On remarque la présence des termes non linéaires au niveau des dérivées d'ordre un.

V - 3 - 1 Equation de transport :

Pour les problèmes du type couche limite, SCHLICHTING [16] propose un schéma aux différences en trois points :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3 \cdot u(i+1, j) - 4 u(i, j) + u(i-1, j)}{2 \cdot \Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u(i+1, j+1) - u(i+1, j-1)}{2 \cdot \Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u(i+1, j+1) - 2 u(i+1, j) + u(i+1, j-1)}{(\Delta y)^2}$$

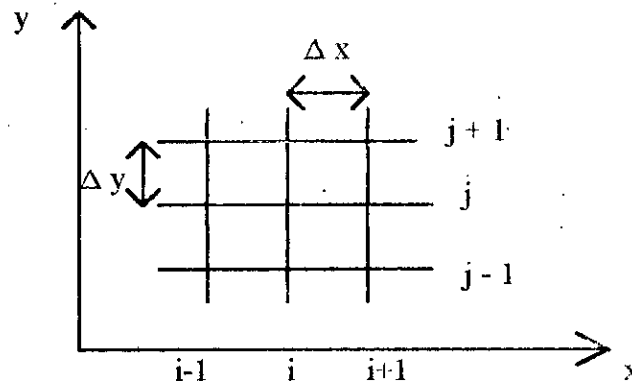


Figure (V - 1) : Maillage du domaine.

L'utilisation d'un schéma en trois points implique une erreur de troncature de l'ordre de $(\Delta y)^2$.

Pour le traitement des termes non linéaires, on utilise l'expression :

$$u(i+1, j) = 2 \cdot u(i, j) - u(i-1, j)$$

Dans leur forme linéarisée, les expressions du type $(u \cdot \delta u / \delta x)$ deviennent :

$$\left[2 \cdot u(i, j) - u(i-1, j) \right] \left[3 u(i+1, j) - 4 u(i, j) + u(i-1, j) \right] / 2 \cdot \Delta x$$

Tout calcul fait, l'équation à résoudre sera transformée en un système linéaire donné par l'expression :

$$A(j) \cdot u(i+1, j-1) + B(j) \cdot u(i+1, j) + C(j) \cdot u(i+1, j+1) = F(j) \dots\dots(V-3)$$

Où :

$$A(j) = - \frac{\Delta x}{2 \Delta y} \left(2 v(i, j) - v(i-1, j) \right) - \frac{\Delta x}{(\Delta y)^2}$$

$$B(j) = \frac{3}{2} \left(2 u(i, j) - u(i-1, j) \right) + \frac{2 \Delta x}{(\Delta y)^2}$$

$$C(j) = \frac{\Delta x}{2 \Delta y} \left(2 v(i, j) - v(i-1, j) \right) - \frac{\Delta x}{(\Delta y)^2}$$

$$F(j) = 1/2 \cdot [2 u(i, j) - u(i-1, j)] [(4 u(i, j) - u(i-1, j))] + g \sin i \Delta x$$

L'expression (V - 3) constitue un système d'équations linéaires, où le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations. Le problème de la résolution de l'équation aux dérivées partielles se trouve alors, transféré en la résolution d'un système algébrique linéaire pour chaque pas Δx . Ce dernier a la forme suivante :

$$[M] \cdot \{ U(j+1) \} = \{ q(j) \}$$

La matrice [M] est tridiagonale, elle a la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} b(1) & c(1) & & & & \\ a(2) & b(2) & c(2) & & & \\ & & a(j) & b(j) & c(j) & \\ & & & & & a(n-1) & b(n-1) \\ & & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

Le vecteur { q(j) } est donné par :

$$\begin{Bmatrix} F(1) - U(i+1,0) \cdot a(1) \\ F(2) \\ \vdots \\ F(j) \\ \vdots \\ F(n-1) - U(i+1,n) + C(n-1) \end{Bmatrix}$$

V - 3-2 Equation de continuité :

Dans le calcul de la distribution de la vitesse horizontale dans chaque section (i), on aura besoin de la distribution de la composante transversale en chaque section (i-1). Pour cela, on doit résoudre l'équation de continuité en adoptant le schéma aux différences suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(i+1, j) - u(i, j)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v(i+1, j) - v(i+1, j-1)}{2 \cdot \Delta y}$$

D'où :

$$v(i+1, j) = v(i+1, j-1) - (2 \cdot \Delta y / \Delta x) [u(i+1, j) - u(i, j)] \dots\dots\dots (V-5)$$

V - 4 CONDITIONS AUX LIMITES :

Pour simplifier la résolution numérique, on choisit un repère suivant la pente du canal et passant par la tête des marches .

On a deux types de conditions aux limites :

V - 4 -1 Au niveau de la paroi :

$$\text{Pour } y = 0 : u = u_*$$

$$u_* \text{ désigne la vitesse de frottement donnée par : } u_* = \sqrt{\tau_o / \rho}$$

$$\tau_o : \text{ Contrainte de frottement à la paroi exprimée par : } \tau_o = C_f \cdot \rho \cdot (u_*^2 / 2)$$

C_f : Coefficient de frottement, défini selon [13] pour les coursiers en marches par :

$$C_f = \frac{2 \cdot y_o^3 \cdot g \cdot \sin \alpha}{q^2}$$

avec :

q : Débit par unité de largeur [m^2/s]

y_o : Hauteur de l'écoulement uniforme [m].

α : Pente du canal [$^\circ$].

V- 4 -2 En dehors de la couche limite :

$$\text{- Pour } y > \delta : u = u_\infty(x) ; v = 0 .$$

$$\text{- Pour } x = 0 : u = u_\infty(0) ; v = 0 .$$

V - 5 - CALCUL DE L'ÉPAISSEUR DE LA COUCHE LIMITE :

Ayant le profil des vitesses dans chaque section du coursier, l'épaisseur de la couche limite est définie à l'endroit où $u = 0,99 \cdot u_\infty(x)$.

V - 6 - CALCUL DU POINT D'INCEPTION . :

Après avoir obtenu l'épaisseur de la couche limite pour chaque section le long du coursier, il convient maintenant de calculer, le point d'inception, c'est à dire le point d'intersection de la ligne d'eau avec la couche limite.

Pour chaque section, on peut écrire que le débit total évacué est égal à la somme du débit de la couche limite et du débit en dehors de celle - ci, soit :

$$q_w = q_\delta + (H - \delta) \cdot u_\infty (x) \quad \dots (V - 6)$$

Où :

q_w : Débit total évacué par unité de largeur du coursier [m^2/s].

q_δ : Débit unitaire dans la couche limite [m^2/s].

δ : Epaisseur de la couche limite [m].

H : hauteur de l'écoulement [m].

Ayant la distribution des vitesses pour chaque section, il s'ensuit que :

$$q_\delta = \int_0^\delta u \, dy \quad \dots\dots (V - 7)$$

La ligne d'eau sera donnée donc, en chaque section par la relation :

$$H = \frac{q_w - \int_0^\delta u \, dy}{u_\infty} + \delta \quad \dots\dots (V - 8)$$

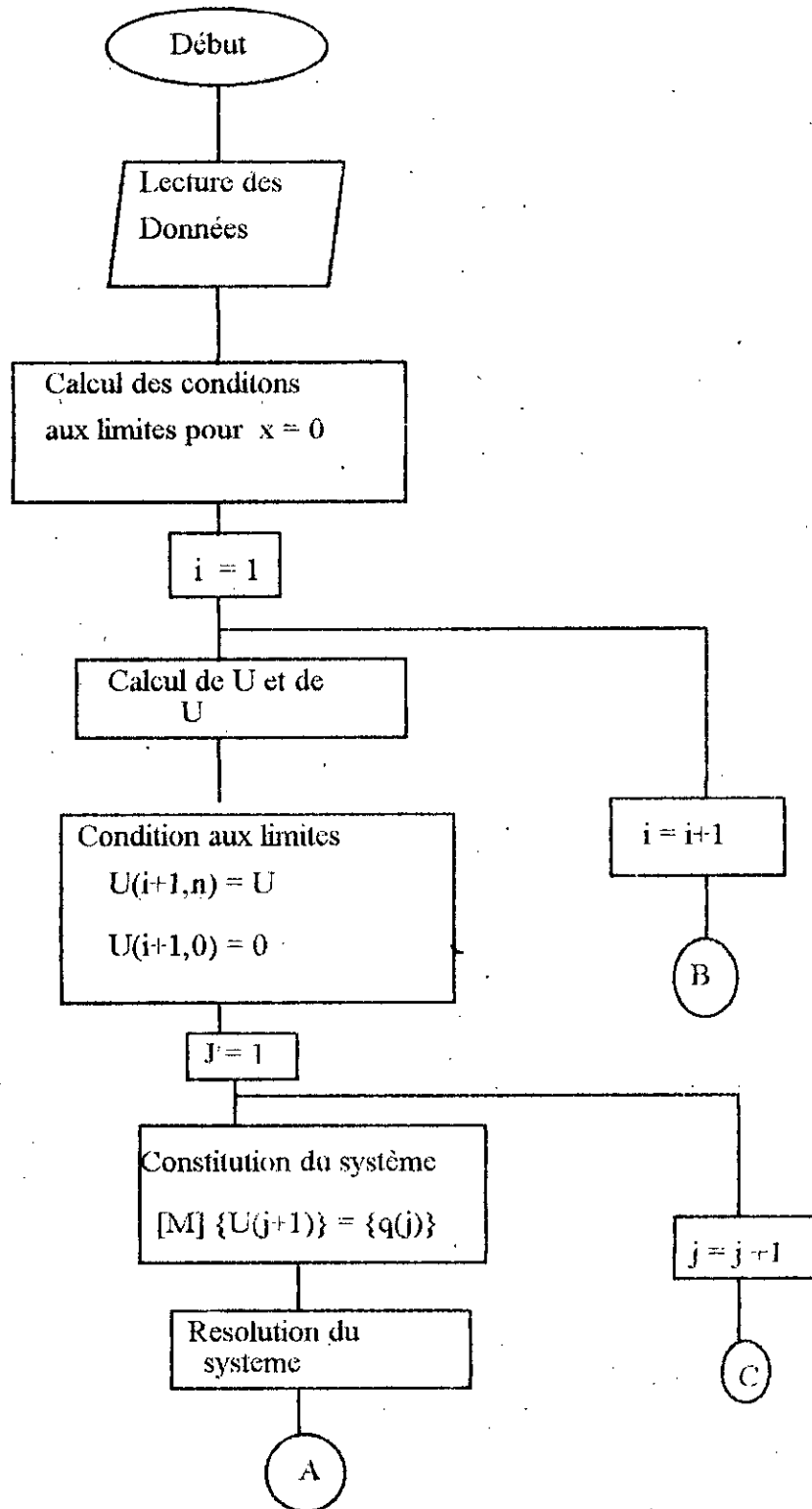
Le calcul du débit dans la couche limite, se fera par intégration numérique de la distribution des vitesses pour chaque section, en utilisant la formule de quadrature de SIMPSON.

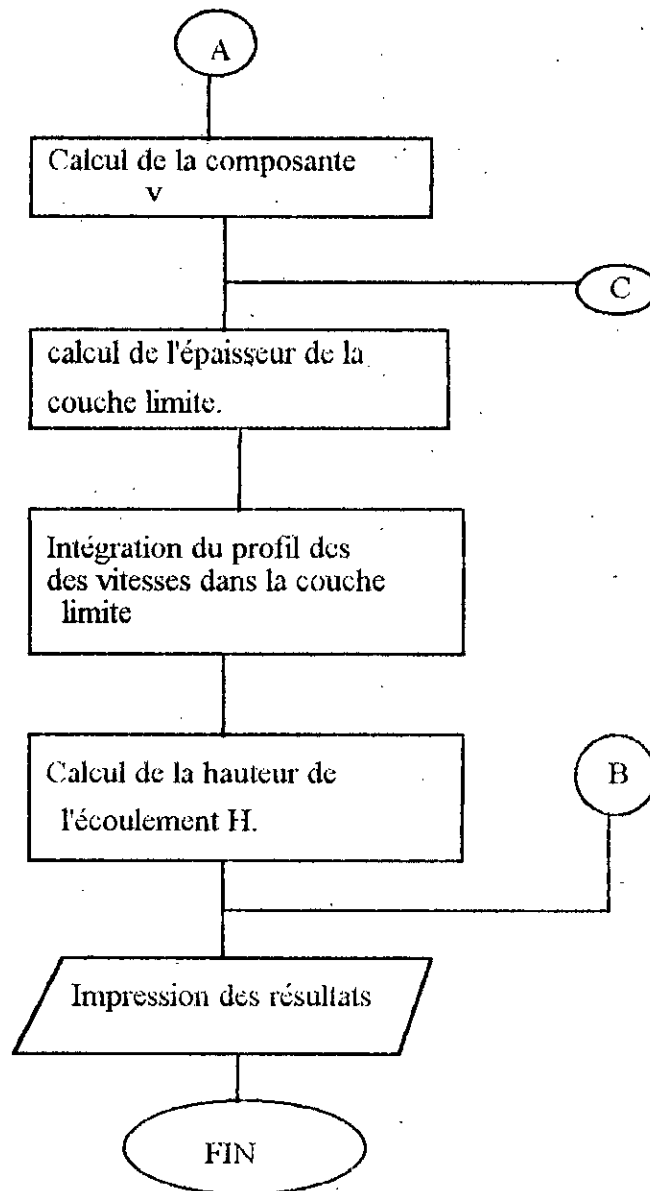
V -7 MISE EN OEUVRE NUMERIQUE :

A base du schéma numérique choisi, nous avons élaboré un programme en FORTRAN 77 pour la résolution du modèle mathématique conçu.

Les principales étapes de calcul sont représentées dans l'organigramme général suivant :

ORGANIGRAMME DE CALCUL





CHAPITRE 6

APPLICATIONS

ET

RÉSULTATS

VI-1- PRESENTATION DU MODELE D'APPLICATION :

Les relevés expérimentaux sur la mesure de la position du point d'inception dont nous disposons, proviennent des travaux réalisés à l'université de LIEGE (BELGIQUE) sur le modèle réduit de l'évacuateur de crues du barrage de M'BALI en République Centrafricaine à l'échelle 1 / 21,33.

Le coursier de l'évacuateur de crues de ce barrage est en marches d'escalier. Il a une forme rectangulaire, très large et de forte pente. Ces principales caractéristiques se résument comme suit :

- La pente de coursier de l'évacuateur est : $i = 51,34^\circ$
- Le coefficient de rugosité de strickler est $K_s = 50$
- Le profil du déversoir est du type GREAGER dont le coefficient de débit est : $C_d = 0,52$.

VI-2-LES RESULTATS EXPERIMENTAUX :

Plusieurs débits ont été simulés, les relevés expérimentaux sur le point d'inception sont donnés dans le tableau N° 1 suivant :

Débit unitaire q [m ² /s]	6,00	10,00	13,44	15,32	17,40	26,41	36,97
Position du point d'inception sur le coursier [m]	12,44	15,83	18,10	19,23	20,36	26,02	31,97

Tableau N° 1 : Relevés expérimentaux sur la position du point d'inception

VI-3-APPLICATION DU MODELE ANALYTIQUE :

Rappelons ici que l'équation que nous avons conçue pour le calcul de l'épaisseur de la couche limite est :

$$\delta(x) = \frac{a(n+2) [(\sin x+h)^2 - h^2]}{2 \sin i (x \sin i + h)}$$

et que le point d'inception est donné en résolvant par approximations successives l'équation :

$$y^4 - \alpha y = 1$$

Où :

$$\alpha = \frac{2 \sin i (n+1) C_d}{a n (n+2)}$$

D'où sa position est donnée par :

$$x_i = \frac{h (y^2 - 1)}{\sin i}$$

Selon les essais Varcheval [8], a est égale à 0,009.

Les étapes de calcul à suivre pour le calcul de l'épaisseur de la couche limite et la position du point d'inception sont :

a/ Calcul de l'épaisseur de la lame déversante :

Le calcul de la lame d'eau se fait à partir de la formule de débit suivante :

$$q = C_d \sqrt{2g} h^{3/2}$$

q : débit par unité de largeur (m^2/s)

C_d : coefficient de débit

b/ Calcul de la hauteur uniforme :

Le débit total d'un écoulement à surface libre peut être donné par la formule de STRICKLER :

$$Q = K_s R_h^{2/3} J^{1/2} S$$

Où :

K_s : coefficient de rugosité de STRICKLER

J : pente de la ligne d'eau

R_h : rayon hydraulique qui est le rapport entre la surface et le périmètre mouillés.

Dans le cas de l'écoulement uniforme $J = I$, où I est la pente du canal.

Le canal étant large et rectangulaire, il s'en suit que $R_h = H_n$, avec H_n la hauteur uniforme.

D'où on a :

$$q = K_s H_n^{\frac{5}{3}} I^{\frac{1}{2}}$$

Dans notre cas : $I = \sin i$

Finalement la hauteur uniforme est donnée par :

$$H_n = \left(\frac{q^2}{K_s^2 \sin i} \right)^{\frac{3}{10}}$$

c/ calcul du coefficient de frottement (f) :

Le coefficient de frottement f pour les coursiers en marches est donné par :

$$f = \frac{8 H_n^3 g \sin i}{q^2}$$

d/ Calcul de l'exposant n :

CHEN[12] propose la formule suivante pour le calcul de n :

$$n = K \sqrt{8/f} \quad \text{avec } K = 0,41$$

VI-4- RESULTATS DU MODELE ANALYTIQUE :

Les résultats d'application du modèle analytique sont reportés dans le tableau N° 2 ci-dessous :

q [m ² /s]	6,00	10,00	13,44	15,32	17,40	26,41	36,97
h [m]	1,89	2,66	3,24	3,54	3,85	5,08	6,36
hn [m]	0,302	0,410	0,489	0,529	0,570	0,734	0,988
f	0,057	0,042	0,039	0,038	0,037	0,034	0,032
n	5,49	5,78	5,95	6,06	6,108	6,368	5,586
point d'inception [m]	12,47	16,95	20,24	21,90	23,63	30,35	37,17

Tableau N°2 : Résultats de l'application au modèle analytique .

Analyse des graphes :

Le graphe N°1 représente le développement de la couche limite sur le coursier en marches . On constate que près de la crête , la couche limite a une forme qui s'approche bien de celle d'une parabole . En s'éloignant plus , sa forme devient presque linéaire et son épaisseur croît rapidement .

Le graphe N°2 met en évidence l'influence du débit sur le développement de la couche limite . On remarque bien l'accroissement , de plus en plus , de l'épaisseur de la couche limite avec l'augmentation du débit .

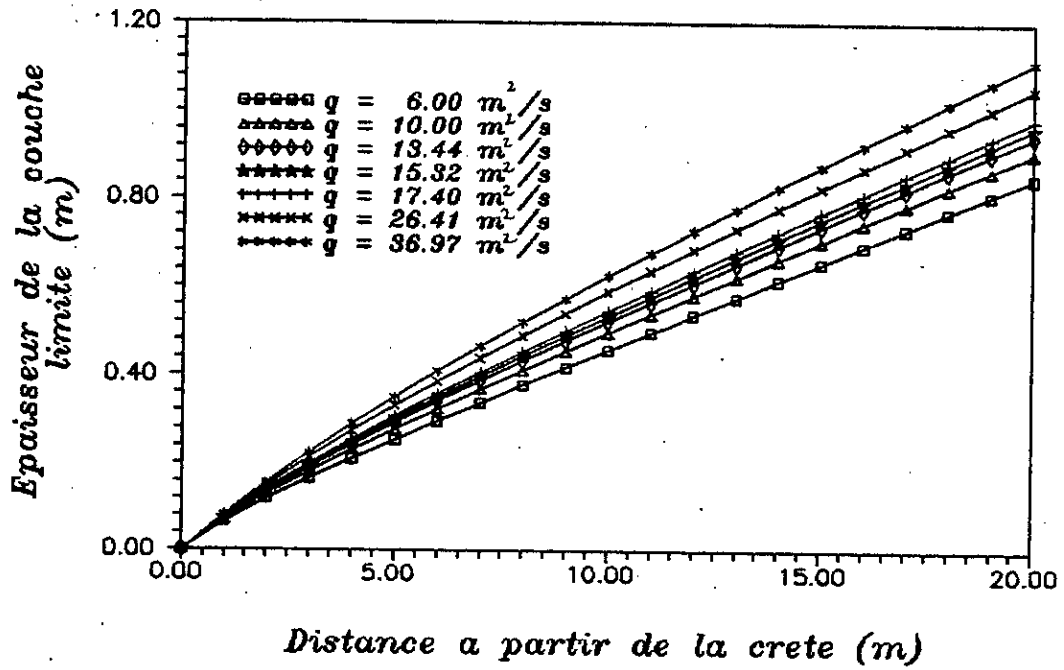
Interprétation des résultats:

Le soucis qui nous a accompagné , lors du développement du modèle analytique simple , pour le calcul de l'épaisseur de la couche limite et la position du point d'inception , a été à l'origine de plusieurs hypothèses .

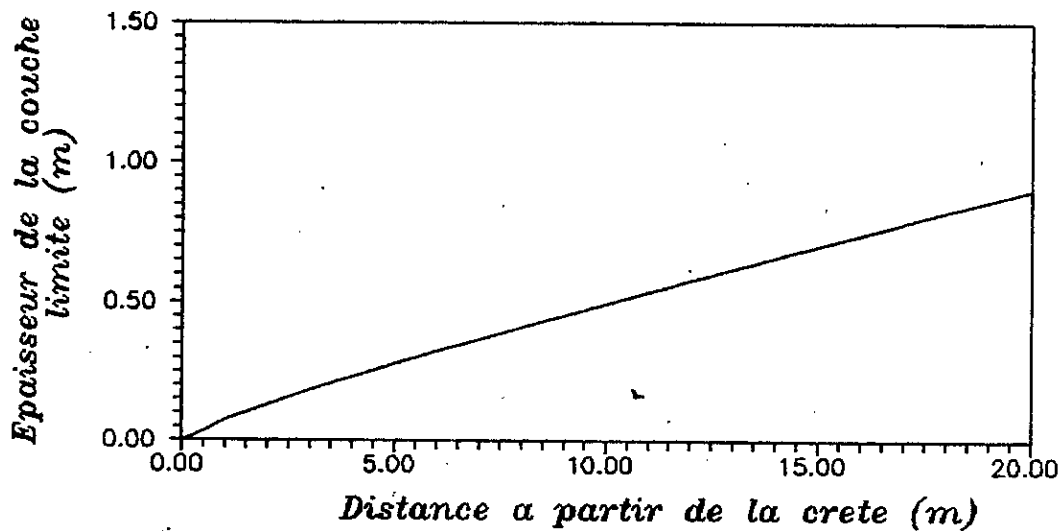
Les équations ainsi obtenues sont tributaires d'une certaine constante a , cette dernière, selon VANCHEVAL [8], semble avoir une valeur relativement constante à l'amont du point d'inception lors de tous les essais.

Les résultats obtenus, concordent bien avec ceux de l'expérience pour les faibles à moyens débits. Ces résultats sont intéressants, car ils peuvent bien être exploités pour donner un ordre de grandeur à la position du point d'inception.

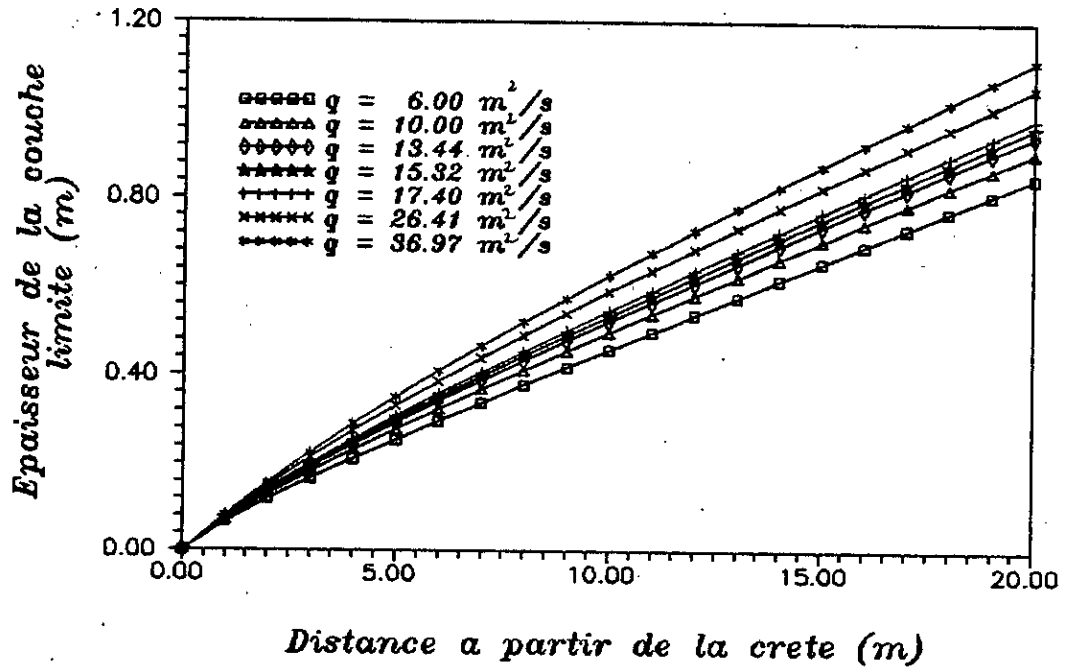
GRAPHE N 2: INFLUENCE DU DEBIT SUR L'EVOLUTION DE LA COUCHE LIMITE



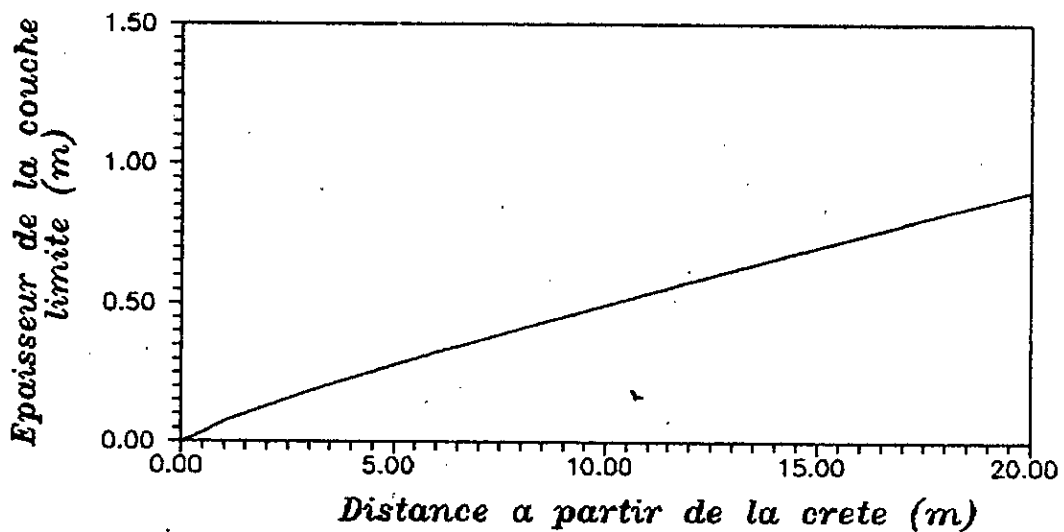
GRAPHE N 1: DEVELOPPEMENT DE LA COUCHE LIMITE PAR LE MODELE ANALYTIQUE (q= 10 m²/s)



GRAPHE N 2: INFLUENCE DU DEBIT SUR L'EVOLUTION DE LA COUCHE LIMITE



GRAPHE N 1: DEVELOPPEMENT DE LA COUCHE LIMITE PAR LE MODELE ANALYTIQUE (q= 10 m²/s)



VI-5- APPLICATION DU MODELE NUMERIQUE :

L'exécution du programme que nous avons élaboré à base de l'organigramme de calcul exposé précédemment , a donné les résultats suivants (voir graphes de 3 à 9)

q [m ² /s]	6,00	10,00	13,44	15,32	17,40	26,41	36,97
point d'inception [m]	10,74	14,98	17,87	19,19	20,60	26,47	32,57

Tableau N° 3 : Résultats numériques sur la position du point d'inception

Analyse des résultats :

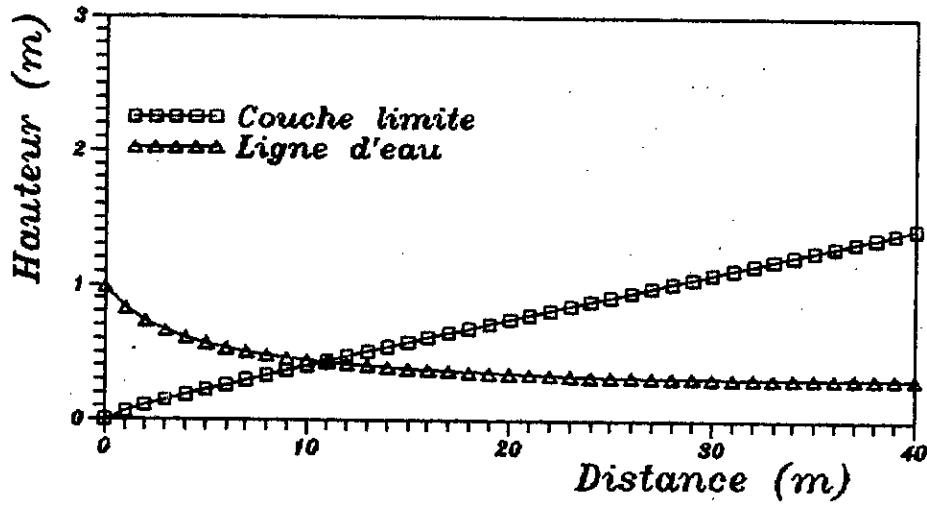
Les graphes (3 à 9) représentent les tracés de la ligne d'eau et de l'épaisseur de la couche limite pour différents débits .

La détermination du point d'inception se fait à partir des graphes . Ce dernier n'est que l'intersection de la ligne d'eau avec la couche limite .

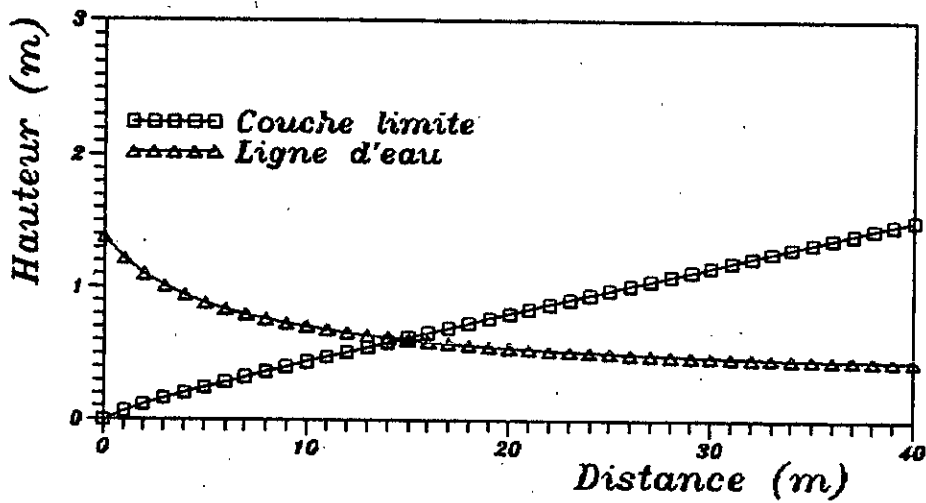
Les résultats sur la position du point d'inception obtenus , par la résolution numérique des équations de la couche limite se concordent très bien avec ceux issus des relevés expérimentaux .

D'après le graphe (10) , nous remarquons que la position du point d'inception évolue linéairement avec le débit pour les résultats expérimentaux . Cet objectif semble bien être atteint par la résolution numérique.

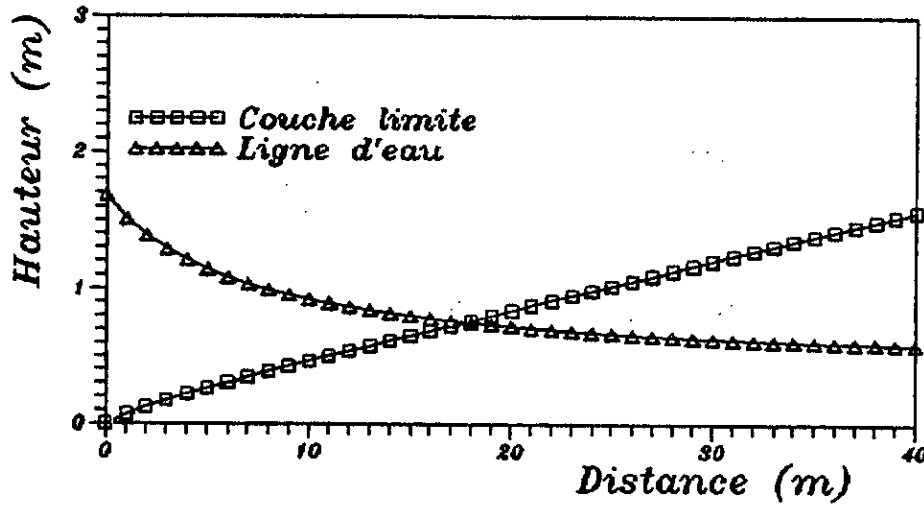
GRAPHE N= 3: DETERMINATION DU POINT D'INCEPTION
 ($q = 6 \text{ m}^2/\text{s}$)



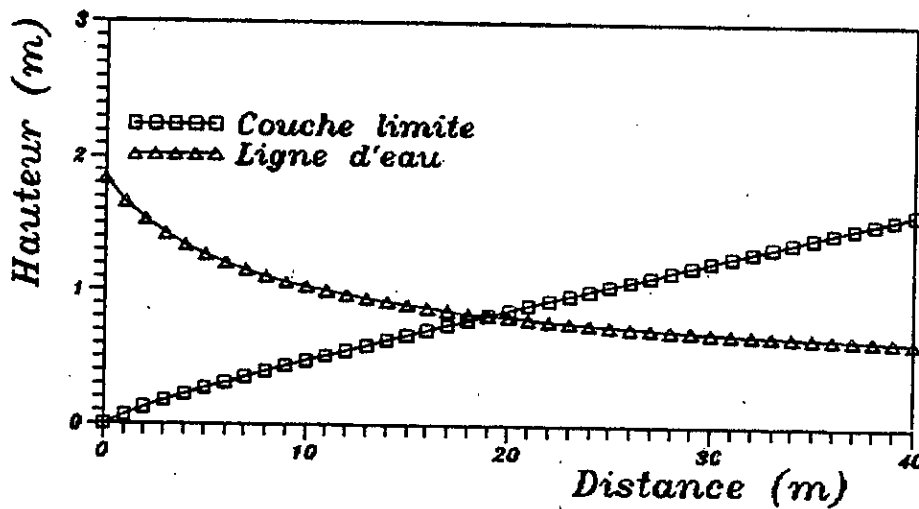
GRAPHE N= 4: DETERMINATION DU POINT D'INCEPTION
 ($q = 10 \text{ m}^2/\text{s}$)



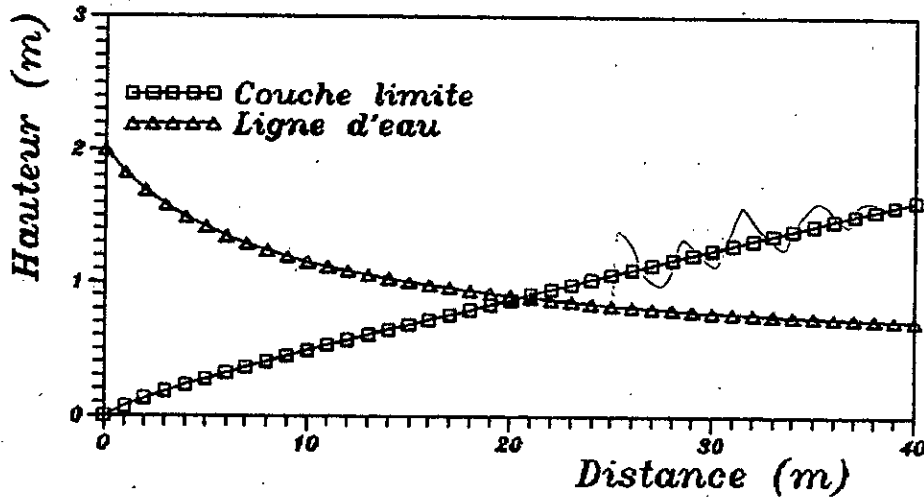
GRAPHE N= 5: DETERMINATION DU POINT D'INCEPTION
 ($q = 13.44 \text{ m}^2/\text{s}$)



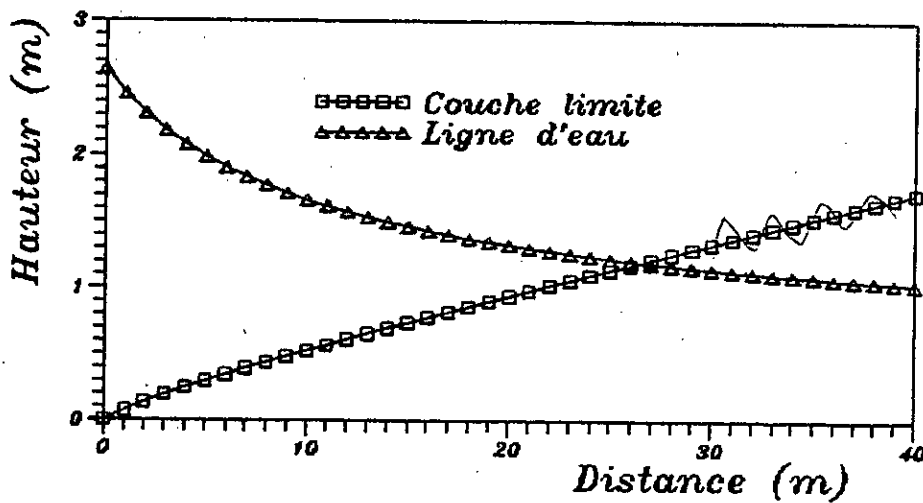
GRAPHE N= 6: DETERMINATION DU POINT D'INCEPTION
 ($q = 15.32 \text{ m}^2/\text{s}$)



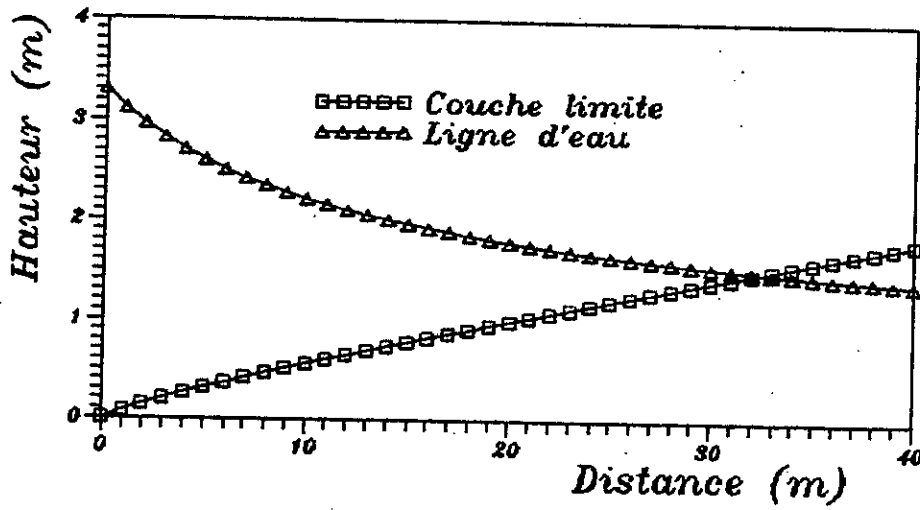
GRAPHE N= 7: DETERMINATION DU POINT D'INCEPTION
 ($q = 17.40 \text{ m}^2/\text{s}$)



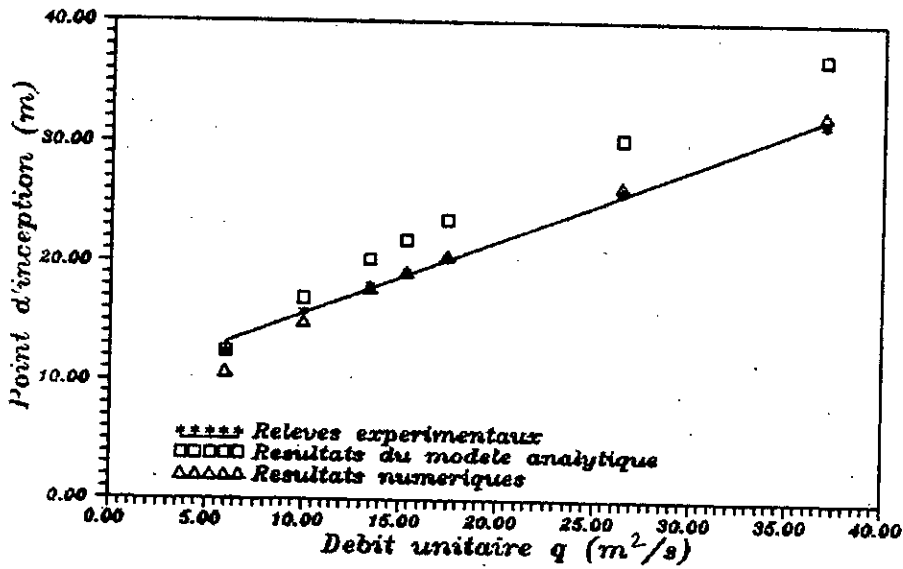
GRAPHE N= 8: DETERMINATION DU POINT D'INCEPTION
 ($q = 26.41 \text{ m}^2/\text{s}$)



GRAPHE N= 9: DETERMINATION DU POINT D'INCEPTION
($q = 36.97 \text{ m}^2/\text{s}$)



GRAPHE N= 10: COMPARAISON DES RESULTATS



CONCLUSION

GENERATE

Mother nature is fortunately a lady of " infinite variety " ; she cannot be constricted within a straight jacket tailored by modelers .

E . T . PIERCE

Stanford Research Institute

CONCLUSION GENERALE :

Cette étude a cerné un problème d'actualité, en l'occurrence le calcul de l'épaisseur de la couche limite et la position du point d'inception dans le cas d'un évacuateur de crues en marches d'escalier. Ce type d'évacuateurs a attiré beaucoup d'attention ces derniers temps, et plus particulièrement celle des chercheurs, vas les avantages qu'il présente.

Pour cela une démarche a été adoptée suivant une série d'étapes logiques, à savoir :

- L'établissement de deux équations simples pour le calcul de l'épaisseur de la couche limite et la position du point d'inception.

Bien que ces deux équations ont été obtenues suite à des hypothèses, et qu'elles sont tributaires d'une certaine constante expérimentale, nous jugeons qu'elles ont pu fournir, dans le cas de notre application, des résultats intéressants, pouvant constituer un ordre de grandeur sur la position du point d'inception.

- Puis une résolution numérique des équations Navier -Stokes a fait l'objet du reste du développement, ceci nous a permis d'obtenir des résultats très intéressants et qui s'approchent bien de ceux obtenus par simulation expérimentale.

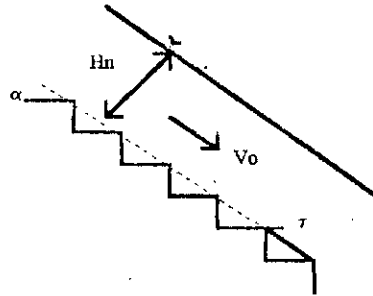
La qualité des résultats obtenus lors de cette étude, ne peut faire l'objet d'une éventuelle critique objective en l'absence d'autres résultats expérimentaux. Du faite que les relevés dont l'on dispose ne sont point susceptibles de constituer une référence de base.

Force est de constater l'intérêt de ce travail, qui a, certes, nécessité des efforts pendant son élaboration. C'est pourquoi je souhaiterai qu'il soit poursuivi et développé dans le futur, en particulier le calcul des différentes caractéristiques de l'écoulement à l'aval du point d'inception et le taux de dissipation de l'énergie cinétique sur les gradins, ce qui permettra un dimensionnement optimal des ouvrages annexes du barrage.

ANNEXES

ANNEXE A : Calcul du coefficient f

RAJARATHNAM [13], propose une méthode pour le calcul du coefficient de frottement de DARCY WEISBACH (f) dans le cas d'un coursier en marches, et ce, en se basant sur un développement pour un écoulement uniforme. Ce dernier se fait à vitesse constante et de hauteur h_u .



Écoulement uniforme sur les gradins.

La contrainte de frottement τ sur les marches est égale au poids de l'unité de volume du fluide soit :

$$\tau = \rho \cdot g \cdot h_u \cdot \sin \alpha \quad \dots(1)$$

α : Pente du canal [°].

Sachant que la contrainte de frottement au niveau d'une paroi est donnée par :

$$\tau = C_f \cdot \rho \cdot (V_o^2 / 2) \quad \dots(2)$$

$$\text{Où : } C_f = 4 f \quad \dots(3)$$

f : Coefficient de frottement de DARCY WEISBACH.

A partir de (1), (2) et (3) on trouve :

$$f = \frac{8 g \sin \alpha h_u^3}{q^2}$$

q : Débit par unité de largeur [m²/s]

ANNEXE B : Formule de quadrature de SIMPSON.

On veut calculer :

$$\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x) dx$$

Pour un nombre d'intervalles pair :

$$n = (x_{2n} - x_0) / h$$

h : Pas d'intégration.

La formule de SIMPSON est :

$$\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x) dx = \frac{h}{3} \left[f(x_0) + f(x_{2n}) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) \right]$$

REFERENCES

BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES :

- [1] H. CHANSON
Etude des phénomènes d'entraînement d'air .
Application aux évacuateurs de crues .
La houille blanche N° 6 (1989).
- [2] H. CHANSON
Energie dissipation on stepped spillways .
Journal of hydraulic engineering .
Vol. 119 , N° 5 (Mai 1993) .
- [3] H. CHANSON
*Hydraulic design of stepped channels weirs
and spillways .*
Editions PERGAMON (1994). 1st edition.
- [4] A. GOUBET
Evacuateurs de crues en marches d'escalier .
La houille blanche N°2/3 (1992).
- [5] L. PEYRAS , P. ROYET , G. DEGOUTTE
Ecoulement et dissipation sur les déversoirs en gradins de gabions.
La houille blanche N°1 (1991).
- [6] P. MEILLAND , P. JEHANNO
Conception des évacuateurs vis à vis des problèmes de cavitation .
La houille blanche N°2/3 (1992).
- [7] J. D. CASCON , J. L. BLANCO , J. REVILLA , R. GARCIA
Studies on the hydraulic behaviour of stepped spillways
Water power and dam constructions (Sep 1951).
- [8] M. VERCHEVAL .
Contribution à l'étude expérimentale de l'écoulement sur les évacuateurs à
marches .
P.F.E (Université de Liège) (1992).
- [9] D. AIT MOUHOU B , M. BAKHTA .
Modélisation numérique et analyse de l'écoulement graduellement varié sur
les coursiers des évacuateurs de crues et les canaux à fortes pentes.
P.F.E (ENP) (1994).

- [10] W. H. HAGER
Spillways , Shockwaves and air entrainment, review and recommendations.
Icold bulletin N° 81 (janvier 1992).
- [11] W. H. HAGER, SINNIGER.
Constructions hydrauliques .
Traité de génie civil de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.
Vol. 15 (1989).
- [12] C. L. CHEN
Unified theory on power laws for flow resistance.
Journal of hydraulic engineering.
Vol.117, N° 3 , (Mars 1991).
- [13] N. RAJARATHNAM:
Skimming flow on stepped spillways .
Journal of hydraulic engineering.
Vol. 116 , N°4 , (Avril 1990).
- [14] COMOLET.
Mécanique des fluides expérimentale.
Editions Masson.
- [15] R. OUZIAUX, J. PERRIER.
Mécanique des fluides appliquée.
Editions Dunod (1978).
- [16] H. SCHLICHTING.
Boundary Layer theory.
Editions Mc.Graw-Hill (1968).
- [17] W. H. GRAF, M. S. ALTINAKAR.
Hydrodynamique.
Editions Eyrolles (1991).
- [18] P. CHASSAING.
Turbulence en mécanique des fluides.
Note de cours (IMF Marseille) (1991).
- [19] R. CHIESTEL.
Modélisation des écoulements turbulents (Tomes : 1 et 2).
Editions Hermes. (1993).

- [20] M. JAEGER.
Simulation numérique d'écoulements turbulents par éléments finis tridimensionnels .
Thèse de doctorat (UT Compiègne) (1990).
- [21] Modèles de turbulence dans l'espace physique.
Cours de D.E.A (INP de Toulouse) .
- [22] L. W. GRAHAM , K. BREMHORST.
Application of the K- ϵ turbulence model to the simulation of a fully pulsed free air jet.
Journal of fluid engineering . (Mars 1993).
- [23] R. J. KEILLER , A K. RASTOGI.
Prediction of flow developement on spillways.
Journal of hydraulic division. (Septembre 1975):
- [24] B. CARNAHAN, H. A. LUTHER , J. O. WILKES.
Applied numerical methods.
- [25] N. PISKOUNV.
Calcul différentiel et intégral.
Editions Mir Moscou. (1988)
- [26] R. GAUDU , G. BACON.
Méthodes numériques (INP de toulouse) . (1980)
- [27] P. LASCAUX , R. THEODOR.
Analyse numérique matricielle appliquée à l'art e l'ingénieur (tome : 1).
Editions Masson (1986).
- [28] J. H. FERZIGER.
Numerical methods for engineering applications.
A Wiley - Interscience publication (1981).

RESUME EN FRANCAIS :

En guise de contribution aux études du comportement hydrodynamique des évacuateurs de crues en marches d'escalier, ce travail consiste en le calcul de l'épaisseur de la couche limite et du point d'inception dans ce type d'ouvrages hydrauliques.

Le sujet a été abordé de deux manières différentes; en premier lieu nous avons cherché à mettre au point à partir des équations simples de la mécanique des fluides un modèle mathématique simple gouvernant le développement de la couche limite sur les coursiers en gradins, et ce moyennant quelques hypothèses simplificatrices. Après quoi, un traitement numérique du problème a été effectué en adoptant un schéma aux différences qui s'adapte aux problèmes du type couche limite.

MOTS CLES :

Couche limite.
Coursier en marches.
Point d'inception.
Navier-Stokes.
Turbulence.
Modèle K- ϵ .
Différences finies.