

REPUBLICQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

12/95

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT D'HYDRAULIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDE

INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE

**CAS DES BARRAGES
POIDS EN BETON**

Proposé par :

Mr O.BELHADJ

Etudié par :

Mrs : A.SEGHIR
A.SOUFARI

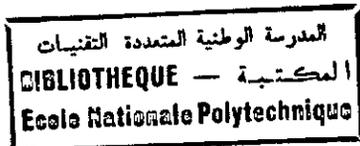
JUIN 1995

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT D'HYDRAULIQUE



PROJET DE FIN D'ETUDE

INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE

**CAS DES BARRAGES
POIDS EN BETON**

Proposé par :

Mr O.BELHADJ

Etudié par :

Mrs : A.SEGHIR
A.SOUFARI

JUIN 1995

Remerciements

Que tous nos enseignants, nos amis, et ceux qui nous ont aidé de proche ou de loin trouvent ici l'expression de nos remerciements et profondes reconnaissances.

DEDICACES

*A la mémoire de mon père,
à ma très chère mère, qui a tant souffert pour me voir ainsi,
à mes sœurs,
à mes proches,
et à tous les sacrifices.*

Alli

*A la mémoire de mon père,
à ma grand-mère,
à ma mère qui m'a tout donné,
à mon frère que je trouve toujours à mes côtés.
à mes deux sœurs bien aimées
et à tous mes proches.*

A. Ghani

Subject : *Fluid-Structure interaction -case of concret gravity dams-*

Abstract : *A 2D finit element model is implemented for seismic analysis of concret gravity dam including hydrodynamics pressures.*

The time hystory respense is obtained in the assumption of elastic dam with linear behaviour and of horizontal bottom of reservoir including water compressibility, gravity waves and the waves dissipation at the radiation boundary.

Sujet : *Intéraction fluide-structure -cas des barrages poids en béton-*

Résumé : *Un modèle éléments finis à 2D d'interaction fluide-structure est mise en œuvre pour l'analyse sismique d'un barrage poids en béton avec inclusion des pressions hydrodynamiques.*

L'histoire de la réponse est obtenue dans l'hypothèse d'un barrage élastique à comportement linéaire et d'un réservoir à fond horizontal avec prise en compte de la compressibilité de l'eau, des ondes de surface et de la dissipation d'ondes au niveau de la limite de radiation.

العنوان : فعل متبادل بين مائع ومنشأة - سد ثقلي خرساني -
ملخص : تم وضع نموذج ثنائي الأبعاد للتحليل الزلزالي لسد ثقلي
خرساني باعتبار القوى الهيدروديناميكية .
نتحصل على تاريخ الرد بفرض أن السد ممتد ذو سلوك خطي
وأسفل الخزان أفقي مع الأخذ بعين الاعتبار انضغاطية الماء ،
أمواج السطح وتبدد الأمواج في النهاية المشعة .

SOMMAIRE

	Page
Introduction générale	1
Chapitre 1 : Généralités	4
1.1/- Introduction	4
1.2/- Notions de dynamique	4
1.3/- Les systèmes couplés	6
1.4/- L'interaction fluide-structure	7
1.5/- Le séisme	7
Chapitre 2 : Forces hydrodynamiques sur un barrage poids en béton	9
2.1/- Introduction	9
2.2/- Solution analytique de Westergaard	10
2.3/- Solution analogique de Zangar	13
2.4/- Solution semi analytique de Cohpra-Chakrabarti	14
2.5/- Méthodes numériques	17
Chapitre 3 : Concepts d'éléments finis	20
3.1/- Introduction	20
3.2/- Les grandes lignes de la méthode	22
3.3/- Formulation variationnelle	25
3.3.1. Formulation forte	25
3.3.2. Formulation faible	26
3.4/- Discrétisation du domaine	27
3.5/- Approximation sur l'élément	29
3.5.1. Approximation polynomiale-nodale	29
3.5.2. Elément de référence	31
3.5.3. Jacobien et transformation de coordonnées	32
3.5.4. Construction des matrices élémentaires	36
3.6/- Assemblage -Matrices globales-	38

3.7/- La résolution	39
3.7.1. Les méthodes d'intégration directe	40
3.8/- Convergence de la méthode des élément finis	42
Chapitre 4 : Modélisation mathématique	44
4.1/- Introduction	44
4.2/- Développement des équations	46
4.2.1. Equation de mouvement	46
4.2.2. Equations gouvernantes du solide	47
4.2.3. Equations gouvernantes du fluide	50
4.3/- Application au cas de barrage-réservoir	51
4.3.1. Le barrage	51
4.3.2. Le réservoir	52
4.4/- Formulation variationnelle des équations du fluide	56
4.5/- Conclusion	58
Chapitre 5 : Modélisation numérique	59
5.1/- Introduction	59
5.2/- Discrétisation spatiale	59
5.2.1. Cas du barrage	60
5.2.2. Cas du fluide	65
5.3/- Couplage des systèmes différentiels	67
Chapitre 6 : Mise en œuvre et techniques de programmation	70
6.1/- Introduction	70
6.2/- Structure générale	70
6.2.1. Présentation des données	70
6.2.2. Traitement et calculs	71
6.2.3. Présentation des résultats	73
6.3/- Développement	73
6.3.1. Le maillage	73
6.3.2. Les calculs	76

6.3.2.1. Variables transitées -organisation-	76
6.3.2.2. Calcul des matrices élémentaires	87
6.3.3. L'assemblage	82
6.3.4. La résolution	85
6.4/- Organisation des programmes et des fichiers	86
6.5/- Calcul des contraintes	87
Chapitre 7 : Applications	88
Conclusion	108
Annexes	110
Bibliographie	116

Notation

- U_i : déplacement dans la direction i (ou du noeud i)
 U : vecteur déplacement (colonne)
 U^T : vecteur déplacement (ligne)
 σ : tenseur des contraintes en vecteur colonne
 ε : tenseur des déformations en vecteur colonne
 D : matrice d'élasticité
 n : vecteur normal
 Ω : désigne un domaine
 Γ : désigne un contour (une limite)
 w : désigne une forme intégrale
 δ : fonction de Dirac
 δ_{ij} : symbole de Kronecker
 P : pression
 τ : contrainte de viscosité
 μ : coefficient de viscosité dynamique
 V : vitesse
 f : force de chargement, de volume, d'excitation...
 \ddot{x} : accélération sismique
 ρ : masse volumique (béton ou eau)
 N : fonction de forme en vecteur ligne
 N^T : fonction de forme en vecteur colonne
 ∂ : opérateur de dérivée partielle
 d : opérateur de dérivée totale
 ∇ : opérateur de divergence
 ∇^T : opérateur gradient
 $\dot{}$: dérivée par rapport au temps
 \dots : dérivée par rapport à l'indice

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Introduction

Introduction générale

L'étude de la relation entre le mouvement des systèmes physiques et les forces actrices est un sujet qui a fasciné le cerveau humain depuis les anciens temps.

Ce n'est que jusqu'à Galilée et Newton que les lois du mouvement sont formulées correctement avec certaines limitations (cas où la vitesse des corps est proche de la célérité de la lumière).

Les études reliant les forces au mouvement sont généralement référées à la dynamique et les lois gouvernantes sont les lois bien connues de Newton.

Une importante part de l'ingénierie actuelle est l'analyse ainsi que la prédiction du comportement dynamique des systèmes physiques. Un type de comportement omniprésent est le mouvement vibratoire, dont lequel le système oscille autour d'une position d'équilibre. Parmi les ouvrages hydrauliques les plus concernés par cette étude : les barrages; car les dégâts qui leurs sont liés en cas de rupture sont catastrophiques.

Du point de vue analyse, les barrages diffèrent d'autres classes de structures dans un important sens : une procédure d'analyse complète doit considérer les effets du réservoir d'eau sur les propriétés et réponses dynamiques du barrage. Les mouvements du terrain et les déformations de la face amont du barrage, engendrent des ondes de

pression dans le réservoir, qui contribuent en retour, aux déformations de la structure, et influencent ainsi la répartition du champ de pression sur le parement amont. Pour tenir compte de ce cycle fermé de cause et effet, la formulation du problème doit reconnaître l'interaction dynamique entre le barrage et l'eau.

Le facteur le plus important affectant les tendances récentes de l'ingénierie dans le domaine de la dynamique des structures est le développement des calculateurs électroniques. En effet, l'aptitude de performer des routines de calcul avec une vitesse incroyable, a été derrière le développement de nouvelles méthodes d'analyse, telle que la méthode des éléments finis (MEF). Cette méthode est reconnue, par ses multiples avantages, comme un outil puissant pour l'approche des problèmes continus avec une solution relativement précise.

Le présent travail n'est qu'une application de la méthode des éléments finis pour déterminer le comportement dynamique d'un système couplé constitué par un barrage poids en béton et sa retenue.

Cet objectif sera atteint en 3 étapes :

- 1- Modélisation mathématique du système et écriture du problème variationnel associé.
- 2- Discrétisation par éléments finis et expression des différentes matrices.
- 3- Résolution du système matriciel et analyse des résultats.

La thèse est organisée en sept (7) chapitres :

Chapitre 1 : Porte des généralités sur la dynamique des structures et des systèmes couplés.

Chapitre 2 : Expose les différentes approches pour l'évaluation des forces hydrodynamiques sur les barrages poids en béton.

Chapitre 3 : Présente la méthode des éléments finis (MEF), ainsi que les différents outils utilisés par la suite pour la modélisation, discrétisation et résolution.

Chapitre 4 : Pose le problème mathématique modélisant le système physique sous forme prête à la discrétisation, en se basant sur les lois de l'élasticité linéaire et de la mécanique des fluides.

Chapitre 5 : Utilise les outils de la MEF présentés dans le chapitre 3, pour discrétiser le problème posé au chapitre 4 et construit le système algébrique correspondant.

Chapitre 6 : Consacré à la présentation des programmes et techniques d'implémentation.

Chapitre 7 : Réservé aux applications, présentation et interprétation des résultats.

Ce travail se termine par une conclusion générale ainsi que quelques recommandations.

Chapitre 1
Généralités

Généralités

1.1/- Introduction :

L'analyse du comportement dynamique d'une structure revient à déterminer ses caractéristiques vibratoires (fréquence, mode de vibration, histoire de la réponse...). Ces caractéristiques sont généralement modifiées lorsque la structure est plongée dans un fluide dense.

Les premières analyses qui ont conduit par la suite au calcul dynamique n'apparurent qu'à la fin du siècle précédent. On considérait que les structures étaient parfaitement rigides de telle sorte qu'on peut assimiler les forces sismiques agissant au niveau du sol à une force statique équivalente. Puis vinrent les modèles dits dynamiques qui comblaient les carences du modèle statique en introduisant des coefficients fonctions des caractéristiques vibratoires de la structure. Ensuite apparut la méthode spectrale qui consiste à établir le spectre de réponse d'une structure résultant d'un accélérogramme imposé.

Enfin les ingénieurs développèrent plusieurs procédés de calcul se basant sur deux modèles : probabiliste et déterministe. Le premier consiste en une analyse statistique, nécessite donc, une collecte de données. Le second, est un modèle mathématique utilisant les méthodes de simulation numérique.

1.2/- Notions de dynamique :

Le terme dynamique est défini^[28] simplement comme étant une variation dans le temps, tel qu'un chargement dynamique est un quelconque chargement dont la grandeur, la direction ou la position varie dans le temps.

Notons qu'un problème de dynamique des structures diffère de celui statique selon deux aspects importants :

- La première différence, notée par définition, est la variation dans le temps de la nature du problème dynamique puisque le chargement et la réponse varient. Il est donc évident que le problème dynamique ne possède pas une seule solution comme le problème statique; on doit établir une succession de solutions correspondantes à tout moment de l'histoire de la réponse.

- La seconde, est que dans le problème statique, la réponse et le comportement de la structure ne dépendent que du chargement. Par contre, si le chargement est dynamique cela dépendrait aussi des forces d'inerties qui naîtraient dans la structure et contribueraient à la réponse.

Les systèmes vibrants peuvent être classés selon leurs comportements en deux types : linéaires et non linéaires.

La classification se fait en inspectant le système d'équations différentielles associé. Ainsi, si celui-ci ne contient que des variables à une puissance et il n'existe aucun produit entre elles, il est dit linéaire, sinon il est non linéaire.

Les systèmes à un degré de liberté représentent des modèles mathématiques simples pour des systèmes physiques complexes qui, pour la plus part, sont capables d'expliquer leur comportement. Mais souvent de telles idéalizations ne sont pas possibles et des modèles mathématiques avec un grand nombre de degrés de liberté s'imposent.

Beaucoup de systèmes vibrants rencontrés dans les situations physiques ont des propriétés réparties, telle que la masse et la rigidité.

Les systèmes de ce type sont dits systèmes à nombre de degré de liberté infini, du fait qu'ils ne sont complètement décrits que si le

mouvement est connu en tout point. Dans ces cas, il est plus convenable de construire des modèles mathématiques discrets qui n'ont besoin d'un nombre fini de paramètres pour décrire les propriétés de la masse et de la rigidité. C'est dans ce sens que les méthodes de discrétisation sont utilisées pour remplacer le système continu par équivalent discret.

1.3/- Les systèmes couplés :

Fréquemment, deux ou plusieurs systèmes physiques interagissent chacun avec l'autre de telle sorte qu'une solution indépendante de l'un d'entre eux devient impossible sans une solution simultanée des autres; ce type de systèmes est dit couplé.

Le couplage peut être faiblement ou fortement dépendant du degré de l'interaction.

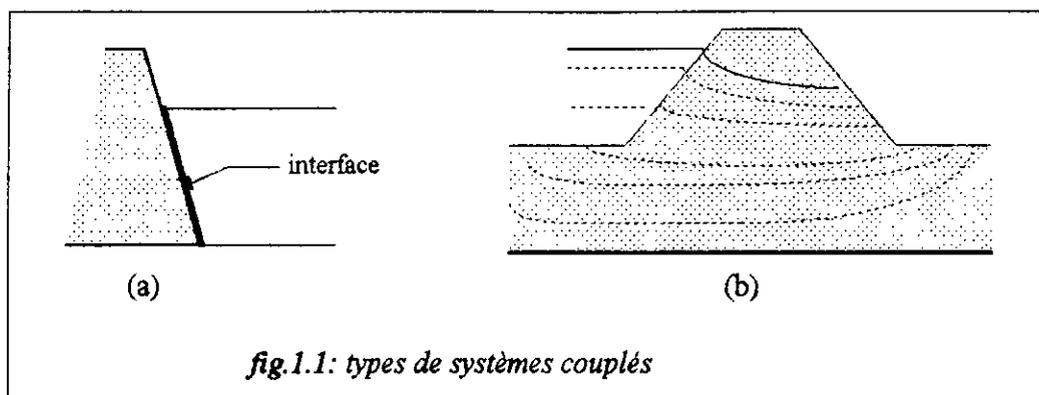
Les systèmes couplés et leurs formulations sont ceux applicables aux multiples domaines et variables dépendantes qui, généralement, décrivent différents phénomènes physiques et dont lequel :

- Aucun domaine ne peut être résolu séparément des autres.
- Aucune des variables dépendantes ne peut être explicitement éliminée au niveau de l'équation différentielle.

Il est convenable de classer les problèmes couplés en deux catégories :

classe 1 : Cette classe contient les problèmes dans lesquels le couplage se fait sur un domaine interface via les conditions aux limites qui y sont imposées. -fig.1.1a-

classe 2 : Cette classe contient les problèmes dans lesquels les domaines se chevauchent totalement ou partiellement. Ici le couplage se fait à travers l'équation différentielle gouvernante. -fig.1.1b-



1.4/- L'interaction fluide structure :

L'interaction fluide-structure est un exemple frappant des problèmes couplés. Elle est de classe 1.

Le problème d'interaction fluide-structure est large et couvre plusieurs formes de comportement de fluides.

La considération des cas dans lesquels le fluide est en écoulement ou subit de larges mouvements est très complexe. Par contre, dans de considérables variétés de problèmes, les déplacements du fluide demeurent petits, bien que l'interaction soit dominante. C'est dans cette catégorie qu'entre l'exemple d'un barrage et son réservoir.

1.5/- Le séisme :

Le séisme est un phénomène complexe défini comme étant un ensemble d'ondes de déformation à haute énergie se propageant dans la croûte terrestre et ayant un point d'origine dit foyer.^[9]

Le séisme n'est dangereux pour l'homme que lorsqu'il provoque des raz de marrés ou de grands glissements de terrains et surtout à travers ses effets sur les ouvrages.

En dehors des séismes naturels provoqués par rupture de rochers et qui se propagent selon des lignes appelées failles, il existe ceux provoqués par l'homme, résultant de toutes sortes d'explosion ou de surcharge excessive de compartiment entier du sol. Ils se produisent, pour un barrage, lors de son remplissage; les surchargent d'eau provoquent l'augmentation de la pression interstitielle dans le rocher qui peuvent dépasser l'ultime charge sismique. Une rupture brusque dans un point fatigué se propage et génère des ondes de déformation pouvant détruire le barrage (cas du barrage de KOYNA en Inde).^[4]

En outre, le problème de la réponse n'est pas dicté seulement par le système lui même, il dépend aussi de l'excitation. Une excitation se produisant d'un séisme sur les structures est de nature aléatoire dans le sens où ni ses valeurs ni sa direction à un instant donné ne peuvent être prédites. Une telle excitation est dite probabiliste. Si tous les facteurs y contribuant deviennent connus elle peut être vue comme déterministe. L'excitation ainsi que la réponse doivent être exprimées en termes de moyennes statistiques.

Chapitre 2

**Forces hydrodynamiques sur
un barrage poids en béton**

Forces hydrodynamiques sur un barrage poids en béton

2.1/- Introduction :

L'analyse du comportement dynamique des barrages présente un certain nombre de traits indépendants du type du barrage. Il dépend tout d'abord des propriétés de la fondation d'où il y résulte un couplage dynamique, lors d'un séisme, entre le barrage et la fondation. La deuxième particularité des barrages est de contenir un réservoir. Il est encore nécessaire de prendre en compte l'interaction dynamique entre l'eau du réservoir et le barrage. Ce phénomène est particulièrement significatif pour les barrages en béton mais généralement négligeable pour l'étude des barrages en remblais.

Westergaard fut le premier à aborder cette question en 1933 dans l'hypothèse d'une structure rigide soumise à un mouvement sismique harmonique horizontal. Il montra que les pressions hydrodynamiques étaient en opposition de phase avec le mouvement du sol et pouvaient donc être quantifiées comme des forces d'inertie équivalentes. D'où le concept de masse ajoutée pour l'ouvrage.

D'autres auteurs élaborèrent ultérieurement des études approfondies permettant de mettre en évidence l'influence non négligeable de :

- La compressibilité de l'eau.
- La déformabilité de la structure et du contour.
- La direction de la vitesse de propagation de l'onde sismique
- La dissipation d'énergie dans le fluide.

- La génération d'ondes gravitaires de surface.
- Et du mouvement vertical du sol pour les barrages de dimensions moyennes.

Le but de ce chapitre est de donner un aperçu bibliographique sur quelques méthodes essentielles.

2.2/- Solution analytique de Westergaard^[24] :

Westergaard a mis au point une solution analytique pour déterminer la distribution de la pression sur un écran vertical dans l'hypothèse de mouvement horizontal harmonique de écran de période T . -fig.2.1-

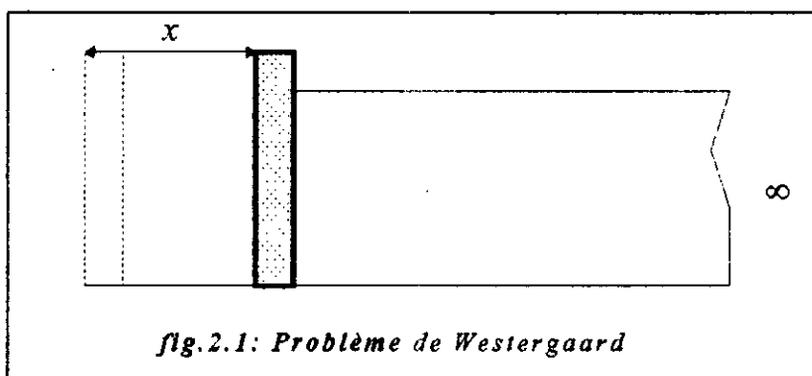
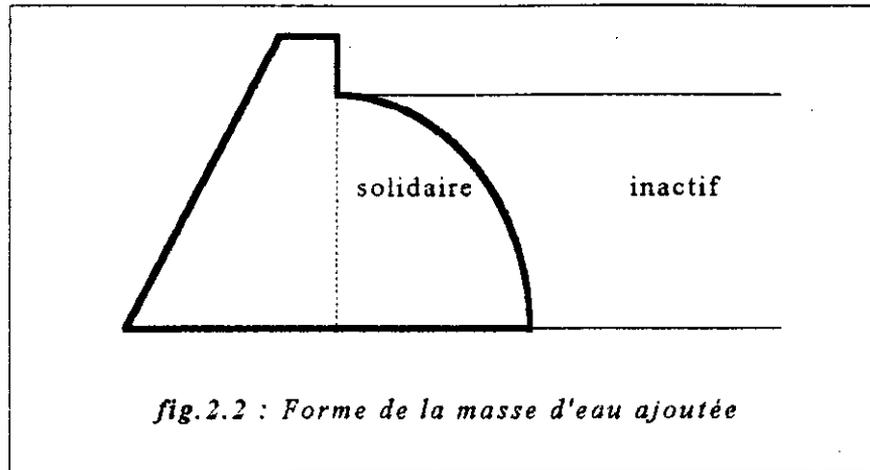


fig.2.1: Problème de Westergaard

Une formule est obtenue en introduisant une série de sinus qui peut être remplacée à l'aide d'approximation satisfaisantes par une simple formule. Les résultats sont exprimés de la manière suivante :

- Les pressions sont les mêmes comme si un certain corps d'eau est forcé à se mouvoir en solidaire avec le barrage alors que le reste du réservoir est inactif. La forme du corps d'eau est montrée approximativement par la figure 2.2.

- L'influence de l'action dynamique de l'eau n'est excessivement grande ni négligeable.

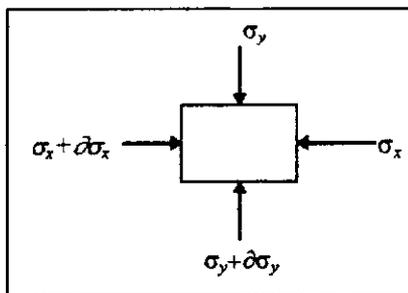


Les mouvements impliqués dans le fluide étant petits, leurs équations descriptives sont simples et de type linéaires.

Elles peuvent être interprétées en termes de la théorie d'élasticité des solides comme équations d'élasticité sans cisaillement ($P \equiv \sigma$, formulation déplacement).

Les forces agissant sur un élément de volume $dx dy dz$ (fig 2.3) sont exprimées en terme de tenseur de contraintes σ qui doit être superposé à la pression hydrostatique existante avant la perturbation.

Le problème revient à trouver en tout point du fluide la contrainte σ (excès de pression) qui satisfait les équations suivantes :



$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tag{2.2}$$

avec : u, v : déplacements du point fluide considéré dans les directions x, y respectivement.

$$\text{et } \sigma = K \varepsilon \tag{2.3}$$

K : module de compressibilité volumique du fluide.

$$\varepsilon = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} : \text{déformation} \quad (2.4)$$

$$\text{donc : } \sigma = K \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \quad (2.5)$$

Si on suppose que le barrage se mouve durant le séisme avec un simple mouvement harmonique de période T et d'accélération maximale αg suivant :

$$U_0 = \frac{-\alpha g T^2}{4 \pi^2} \cdot \cos \frac{2 \pi t}{T} \quad (2.6)$$

La solution après plusieurs étapes (se référer à [9,24]) est :

$$\sigma = \frac{-8 \alpha \rho g h}{\pi^2} \cdot \cos \frac{2 \pi t}{T} \sum_{1,3,5..}^n \frac{1}{C_n n^2} \cdot e^{-q_n} \cdot \sin \frac{n \pi y}{2 h} \quad (2.7)$$

ou :

$$C_n = \sqrt{1 - \frac{16 \rho h^2}{n^2 K T^2}} \quad (2.8)$$

$$q_n = \frac{n \pi C_n x}{2 h} \quad (2.9)$$

avec : h : hauteur du fluide.

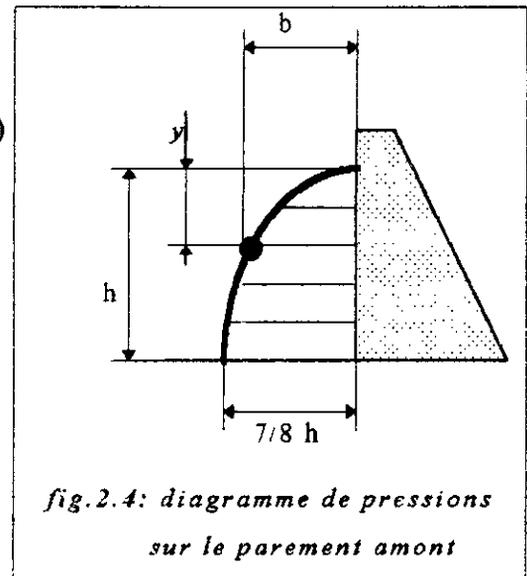
Donc la pression hydrodynamique sur la face amont est :

$$P = -\sigma|_x = 0$$

$$P = \frac{8 \alpha \rho g h}{\pi^2} \sum_{1,3,5..}^n \frac{1}{n^2 C_n} \cdot \sin \frac{n \pi y}{2 h} \quad (2.10)$$

Le diagramme de cette expression peut être remplacé par une parabole à axe vertical, d'où la formule approximative suivante :

$$P = \frac{0,0204 \text{ ton} \cdot \text{ft.}^{-3} \alpha \sqrt{y(2h-y)}}{\sqrt{1 - 0,72 \left(\frac{h \text{ sec.}}{1000 T \text{ ft.}} \right)^2}} \quad (2.11)$$



Cette formule donne la même valeur du mouvement mais des valeurs inférieures pour la pression au fond et la force totale.

2.3/- Solution analogique de Zangar^[9,25] :

L'influence de l'inclinaison du parement amont sur la distribution des pressions hydrodynamiques dans les mêmes conditions de mouvement harmonique que pour la méthode de Westergaard a été évaluée par Zangar, qui a utilisé la méthode de l'analogie électrique pour la résolution de l'équation de Laplace gouvernant l'évolution de la pression dans le réservoir dans l'hypothèse de fluide incompressible.

Les résultats expérimentaux ont été utilisés pour élaborer un modèle de calcul dans lequel la période de l'excitation n'est pas prise en compte.

Le diagramme des pressions résultant est plus uniforme que dans le cas du parement vertical. Ceci est dû au fait qu'une partie de la pression se décharge verticalement.

La formule expérimentale proposée est :

$$P(y) = \frac{1}{2} \alpha \rho g h C_m \left[\frac{y}{h} \left(2 - \frac{y}{h} \right) + \left(\frac{y}{h} \left(2 - \frac{y}{h} \right) \right)^{1/2} \right] \quad (2.12)$$

avec les mêmes notations précédentes, et C_m est un coefficient déterminé en fonction de θ .

2.4/- Solution semi-analytique de Chopra-Chakrabarti^[4] :

Dans les développements précédents l'ensemble fond-structure était considéré rigide durant les vibrations, ceci reste approximativement valable tant que la fréquence du séisme est largement inférieure à la fréquence propre de l'ouvrage.

Chopra et Chakrabarti développèrent une procédure de calcul dite semi-analytique. Le système barrage-réservoir est alors subdivisé en deux sous-structures.

- Le barrage est considéré comme étant flexible, et est modélisé par la méthode des éléments finis.
- Le réservoir est modélisé par un milieu continu semi-infini régissant par l'équation d'onde résolue analytiquement.

D'où le nom de procédure semi-analytique.

Cette méthode permet de prendre en compte l'influence du réservoir sur les caractéristiques vibratoires de la structure, et donc la réponse du système couplé à une sollicitation sismique.

La méthode est basée sur les hypothèses suivantes :

- Le mouvement du système barrage-eau est considéré bidimensionnel, c'est à dire qu'il est le même pour n'importe quelle section verticale perpendiculaire à l'axe du barrage.
- Le parement amont est vertical.
- Le fond du réservoir est horizontal. La profondeur de l'eau est H , et le réservoir s'étend à l'infini amont.
- L'eau est supposée linéairement compressible et la viscosité est négligée.
- L'effet des ondes de surface libre de l'eau est ignoré, l'erreur associée est connue comme petite.
- En considérant les réponses à la composante verticale du mouvement du sol, les effets de flexibilité du fond du réservoir sur les pressions hydrodynamiques sont considérés.
- Le mouvement du sol est supposé atteindre tout les points de base en même temps, c'est à dire que la vitesse horizontale de propagation du mouvement du sol est infinie.

Son principe est de résoudre l'équation d'équilibre dynamique obtenue par le modèle éléments finis en ajoutant aux forces sismiques les forces hydrodynamiques.

Donc tout le problème revient à quantifier ces forces.

L'équation s'écrit :

$$[\mathbf{M}] \{\dot{\mathbf{U}}\} + [\mathbf{C}] \{\dot{\mathbf{U}}\} + [\mathbf{K}] \{\mathbf{U}\} = -[\mathbf{M}_s] \{\ddot{\mathbf{x}}\} + \{\mathbf{F}_h\} \quad (2.13)$$

En écrivant les quantités vectorielles sous forme :

$$\xi(t) = \bar{\xi}(\omega) e^{i\omega t}$$

La force hydrodynamique :

$$\bar{\mathbf{F}}_h(\omega) = \bar{\mathbf{F}}_0(\omega) + \sum_{k=1}^m \bar{\mathbf{Y}}_k(\omega) \bar{\mathbf{F}}_k(\omega) \quad (2.14)$$

avec : $\bar{\mathbf{Y}}_k$: amplitude de l'accélération généralisée.

$(\mathbf{U}(t) = \sum_{k=1}^m \phi_m Y_m(t))$, ϕ_m : vecteur forme correspondant au mode m).

$\bar{\mathbf{F}}_0$ et $\bar{\mathbf{F}}_k$: correspondent respectivement aux pressions $\bar{P}_0(y, \omega)$ et $\bar{P}_k(y, \omega)$, peuvent être évalués par application du principe des travaux virtuel.

Les termes $\bar{P}_0(y, \omega)$ et \bar{P}_k sont les composantes de la solution de l'équation d'onde dans le fluide, telle que :

$$\bar{P}(y, \omega) = \bar{P}_0(y, \omega) + \sum_{k=1}^m \bar{\mathbf{Y}}_k(\omega) \bar{P}_k(y, \omega) \quad (2.15)$$

avec:

$$\bar{P}_0(y, \omega) = \frac{4\rho}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1) \sqrt{[\lambda_n^2 - (\omega^2 / C^2)]}} \cdot \cos \lambda_n y$$

$$\bar{P}_k(y, \omega) = \frac{-2\rho}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{kn}}{\sqrt{[\lambda_n^2 - (\omega^2 / C^2)]}} \cdot \cos \lambda_n y$$

$$\text{dans lesquelles : } \begin{cases} \lambda_n = (2n-1)\pi/2H \\ I_{kn} = \int_0^H \phi_k(y) \cdot \cos \lambda_n y \, dy \end{cases}$$

Rappelons que cette méthode pose : $P(t) = \bar{P}(\omega) \cdot e^{i\omega t}$ comme solution de :

$$\nabla^2 P - \frac{1}{C^2} \ddot{P} = 0$$

ayant comme conditions aux limites :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y}(x, 0, t) = 0 \\ P(x, H, t) = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial x}(0, y, t) = -\rho \left[1 + \sum_{k=1}^M \phi_k(y) \cdot \bar{Y}_k(\omega) \right] \cdot e^{i\omega t} \end{cases} \quad (2.16)$$

2.5/- Méthodes numériques :

Leurs principe est la discrétisation du domaine barrage-réservoir. Deux modèles sont actuellement utilisables; les éléments finis et les éléments de frontières.

Parmi les auteurs qui ont utilisé la méthode des éléments de frontières citons :

- Jablonski et Humar^[14] dans le cas de barrage rigide avec fluide supposé une fois compressible et une autre incompressible. Le modèle en 2D conduit à la résolution d'un système simple $KU=F$ dans le cas de fluide incompressible et les résultats sont très proches de ceux obtenus par Zangar. La même étude est étendue au modèle 3D sous les hypothèses de fluide compressible, ondes de surfaces négligées

et prise en compte de la dissipation d'énergie par absorption d'ondes par le fond du réservoir. Les résultats obtenus ne sont pas loins de ceux du modèle 2D et la dissipation dans le fond n'est pas négligeable.

- Jablonski et Rainer^[13] pour déterminer les forces hydrodynamiques dues à un séisme horizontal et vertical. La réponse sismique pour un séisme donné est obtenue à partir de l'analyse fréquentielle par le biais des transformées de Fourier, ce qui donne l'histoire de la force hydrodynamique. Ils ont montré que les forces hydrodynamiques ne dépendent pas seulement de la géométrie du réservoir mais aussi de la nature du séisme. Et ont aussi obtenu la profondeur critique du réservoir pour laquelle la force est maximale pour différentes excitations sismiques.

- Chandrasher et Humar^[5] dans le cas d'une étude complète incluant l'interaction barrage-fondation et réservoir. L'analyse a été faite dans le domaine fréquentielle avec l'approche sous-structures. Le réservoir est divisé en deux parties, une à géométrie irrégulière proche du barrage modélisée par éléments de frontières et l'autre loin modélisée par éléments finis à 1D représentant la zone de dissipation. Le barrage est modélisé par éléments finis et le sol par éléments de frontières.

La méthode des élément finis est utilisée en premier temps avec l'approche déplacement même dans le cas fluide. Les résultats n'étaient pas satisfaisants, une deuxième approche prenant comme inconnues les déplacements (2 degrés de liberté) pour le barrage et la pression (1 degré de liberté) pour le fluide est maintenant utilisée et réussie.

- O'connor et Boot^[17] ont utilisé cette méthode dans un modèle 3D d'un barrage voûte pour en déterminer la réponse à un séisme en utilisant la méthode d'intégration pas à pas de Newmark.

- Sharan^[20] pour l'étude de la condition sur la limite de radiation dans un modèle à 2D. Le barrage ainsi que le réservoir sont discrétisés par éléments finis, le fond étant horizontal. L'auteur a proposé une condition permettant de localiser la limite proche du barrage.

Avec ces méthodes, plusieurs auteurs ont traité divers cas de barrages, prenant en considération toutes les hypothèses de déformabilité, d'ondes de surface, d'irrégularité du fond jusqu'à même le comportement non linéaire du barrage.

Chapitre 3

Concepts d'éléments finis

Concepts d'éléments finis

3.1/- Introduction :

La simulation numérique est en passe de devenir un outil de mise au point aussi important que les essais expérimentaux. Les difficultés rencontrées par les ingénieurs dans l'analyse de leurs conceptions et projets sur ordinateurs sont dues à la complexité de la géométrie, variation des propriétés du phénomène étudié, ainsi que beaucoup d'autres liées à l'implémentation, l'instabilité et l'exploitation des méthodes utilisées.

L'outil le plus efficace, actuellement utilisé pour surmonter ces problèmes est la méthode des éléments finis (MEF) dont le principe de base consiste à : discrétiser le domaine géométrique en sous domaines simples appelés éléments finis (ayants des dimensions finies non infinitésimales), utiliser l'approximation nodale sur chaque élément puis assembler pour reconstituer le domaine originel. Ceci permet de choisir un maillage irrégulier et non structuré pour discrétiser des domaines comportant une géométrie complexe ou des frontières variées. De plus la formulation faible des lois permet de représenter les conditions aux limites plus facilement.

Les méthodes des différences finies et volumes finis sont traditionnellement basées sur un maillage structuré. Pour des géométries simples ces méthodes sont faciles à mettre en œuvre. La méthode d'intégrales aux frontières (ou d'éléments de frontières) se base sur la discrétisation des contours du domaine et ramène le problème posé sur tout le domaine à ses limites. Ceci peut entraîner

des difficultés d'intégration en présence de points anguleux tels que les coins (discontinuité de la dérivée du contour).

L'inconvénient majeur de la méthode des éléments finis réside dans sa complexité, elle demande beaucoup plus de mathématique et de programmation que les autres^[1,10].

La méthode des éléments finis est le fruit de deux domaines de recherche; mathématiques et sciences de l'ingénieur.^[26]

• **Mathématique** : Outils qui remontent jusqu'aux résidus pondérés de Gauss₁₇₇₅, Galerkin₁₉₁₅ et Biezenokoch₁₉₂₃, ainsi qu'aux méthodes variationnelles de Rayleigh₁₈₇₀ et Ritz₁₉₀₉.

• **Sciences de l'ingénieur** : Dont la contribution a débuté dans les années quarante avec Hrenikoff₁₉₄₁, Henry₁₉₄₃ et Newmark₁₉₄₉ qui touchèrent pour la première fois aux structures continues, en faisant une approximation sur des portions de petites dimensions dans un problème continue d'une barre longue. D'où l'idée de base des éléments finis.

• Argyris₁₉₅₅, Turner₁₉₅₆, Glough₁₉₅₆ et Martin₁₉₅₆ ont fait une analogie directe en adoptant un comportement simplifié pour des petites portions : ils représentent un milieu continu élastique à deux dimensions par un assemblage de panneaux triangulaires, sur lesquels les déplacements sont supposés variés linéairement comme pour chaque barre ou poutre du système discret : chaque panneau est décrit par une matrice de rigidité et l'assemblage donnait la rigidité globale du milieu continu. D'où la naissance d'éléments finis avec "panneaux" comme nom.

• Argyris₁₉₆₀ et Kelsey₁₉₆₀ utilisent la notion d'énergie dans l'analyse des structures et font appel à des méthodes mathématiques (résidus pondérés, principes variationnels ...).

• Le terme " élément fini " est utilisé pour la première fois par Glough₁₉₆₀, et dès lors, il y a un développement rapide de la méthode.

• Dans les années soixante; Zienkiwicz₁₉₆₅, De Arante₁₉₆₈, Oliviera₁₉₆₈, Green₁₉₆₉, Tones₁₉₆₉, Lay₁₉₆₉, Storne₁₉₆₉, et Finlayson₁₉₇₅ ont reformulé la méthode à partir de considérations énergétiques et variationnelles sous forme générale de résidus pondérés, d'où le modèle mathématique de la MEF.

• En 1969 la MEF est reconnue comme un outil général de résolution d'EDP, et utilisée pour résoudre des problèmes non linéaires et non stationnaires dans plusieurs domaines.

En mécanique des fluides, la résolution des équation de Navier Stokes incompressibles par éléments finis en utilisant la formulation vitesse-pression a commencé dans les années 1970.

Dans la suite du chapitre, nous essayerons de présenter d'une manière simplifiée, les étapes d'application de la méthode des éléments finis et les outils nécessaires.

3.2/- Les grandes lignes de la méthode :

La résolution d'un problème physique par éléments finis suit en général les étapes suivantes : -fig.3.1-

Etape 1 : Formulation des équations gouvernantes et les conditions aux limites :

La majorité des problèmes d'ingénierie sont décrits par des équations différentielles ou aux dérivées partielles associées à des conditions aux limites définies sur un domaine et son contour. L'application de la MEF exige une réécriture de ces équations sous forme intégrale. La formulation faible est souvent utilisée pour inclure les conditions aux limites.

Etape 2 : Division du domaine en sous domaines :

Cette étape consiste à discrétiser le domaine en éléments et calculer les

connectivités de chacun ainsi que les coordonnées de ses noeuds, constitue donc, la préparation des données géométriques.

Etape 3 : Approximation sur un élément :

Dans chaque élément la variable tel que le déplacement, la pression, la température, ... est approximée par une simple fonction linéaire, polynomiale ou autres. Le degré du polynôme d'interpolation est relié au nombre de noeuds de l'élément. L'approximation nodale est appropriée. C'est dans cette étape que se fait la construction des matrices élémentaires.

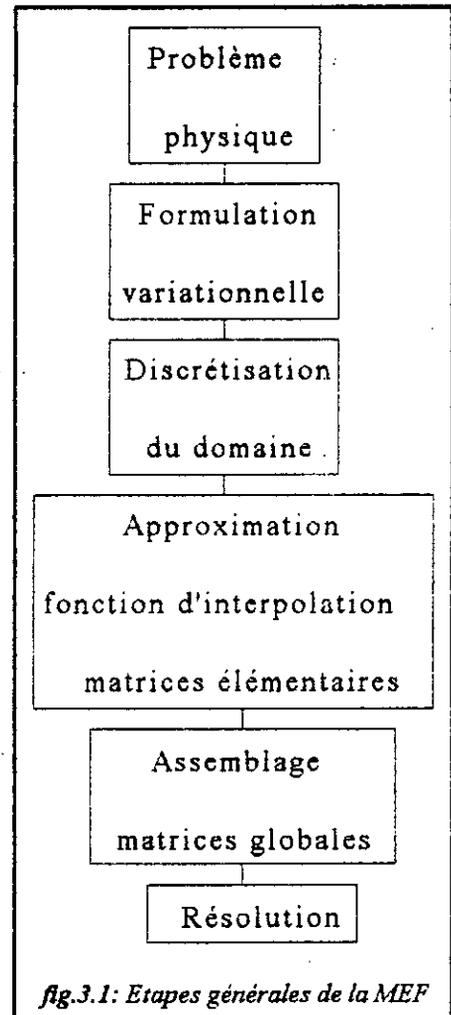


fig.3.1: Etapes générales de la MEF

Etape 4 : Assemblage :

Toutes les propriétés de l'élément (masse, rigidité,...) doivent être assemblées afin de former le système algébrique pour les valeurs nodales des variables physiques. C'est à ce niveau qu'on utilise les connectivités calculées à l'étape 2 pour construire les matrices globales à partir des matrices élémentaires.

Etape 5 : Résolution du système global : ...

Le système global peut être linéaire ou non linéaire. Il définit soit :

- Un problème d'équilibre qui concerne un cas stationnaire ou statique. Les méthodes de résolution utilisées sont les méthodes usuelles telles que élimination de Gauss, factorisation...

- Un problème de valeurs critiques où il faut déterminer les valeurs et vecteurs propres du système qui correspondent généralement aux fréquences et modes propres d'un système physique. La méthode la plus appropriée est la méthode des sous espaces.

Un problème de propagation qui concerne le cas transitoire (non stationnaire) dans lequel il faut déterminer les variations dans le temps des variables physiques et la propagation d'une valeur initiale. Les méthodes d'intégration pas à pas sont les plus fréquentes telles que, méthode des différences finies centrales, méthode de Newmark-Wilson,...

A ces méthodes doivent être associées des techniques d'itération pour traiter le cas non linéaire. La plus célèbre est la méthode de Newton Raphson.

3.3/- Formulation variationnelle : [7,10,26]

Actuellement, le principe des travaux virtuels est bien connu et très répandu. Il est souvent formulé en termes d'égalité des travaux effectués par les forces extérieures et intérieures lors d'un déplacement virtuel quelconque. Ce concept est essentiel pour la résolution des équations aux dérivées partielles. En effet, les déplacements sont remplacés par une fonction arbitraire continue sur le domaine et l'équation est réécrite sous forme intégrale.

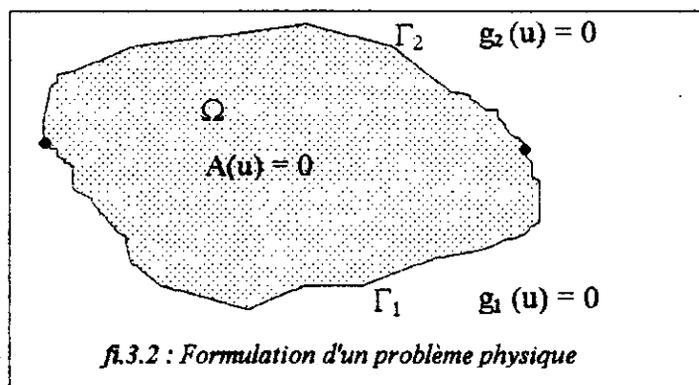
3.3.1. Formulation forte :

Ainsi, un problème classique s'énonce comme suit :

Trouver une fonction $u \in V$; V espace des fonctions, telle que :

$$\begin{cases} A(u)=0 & \text{dans } \Omega \\ B(u)=0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.1)$$

où $A(u)$ est une (ou ensemble) d'équation(s) gouvernante(s) sur le domaine Ω et $B(u)$ est l'ensemble des conditions aux limites que la fonction u doit vérifier au contour Γ . -fig.3.2-



fi.3.2 : Formulation d'un problème physique

Bien entendu la fonction u peut être un scalaire (température, pression,...) ou un vecteur : (déplacement $\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$).

Le problème variationnel associé s'écrit :

trouver $u \in V$ tel que :

$$\forall \Psi \in V: \int_{\Omega} \Psi \cdot A(u) d\Omega = 0 \quad (3.2)$$

Cette équation est appelée *forme intégrale forte* de l'équation différentielle. Elle est analogue à l'expression des travaux virtuels.

En fait la résolution a encore plus de portée. Nous pouvons affirmer que si (3.2) est satisfaite pour tous Ψ , alors l'équation différentielle (3.1) est satisfaite en tout point du domaine Ω .

Pour la démonstration du théorème nous recommandons le lecteur de se reporter à [10,26].

3.3.2. Formulation faible :

Pour satisfaire les conditions aux limites nous avons deux manières de procéder; soit par le choix de la fonction d'approximation, soit vérifier que $\int_{\Omega} \Psi B(u) d\Gamma = 0$.

Dans la pratique, il est possible d'intégrer (3.2) par partie et de le remplacer par :

$$\int_{\Omega} C(\Psi) \cdot D(u) d\Omega + \int_{\Gamma} E(\Psi) \cdot F(u) d\Gamma = 0 \quad (3.3)$$

où les opérateurs C, D, E et F contiennent des dérivées d'ordre moins élevé, d'où un choix de u plus large.

Cette équation est la formulation faible de l'équation différentielle, elle forme la base de l'approximation par éléments finis.

Remarque : Pour obtenir de telle formulation intégrales, nous disposons de deux procédés : le premier est la méthode des résidus pondérés connue sous le nom de la méthode de Galerkin, le deuxième est la détermination de fonctionnelles variationnelles que l'on cherche à rendre stationnaire.

Dans la pratique, il n'est pas toujours facile de trouver une fonctionnelle. Le premier procédé est plus utilisé; il consiste à choisir $\Psi = \delta U$ fonction de Dirac (une perturbation de la fonction cherchée) et d'utiliser l'approximation nodale pour la discrétisation. Ψ s'appelle aussi fonction poids d'où le mot : "pondéré".

3.4/- Discrétisation du domaine :

la MEF est une méthode d'approximation par sous domaines, donc avant toute application il faut diviser le domaine à étudier en éléments. Chaque élément est défini géométriquement par un nombre de noeuds bien déterminé qui constituent en général ses sommets. -fig.3.3-

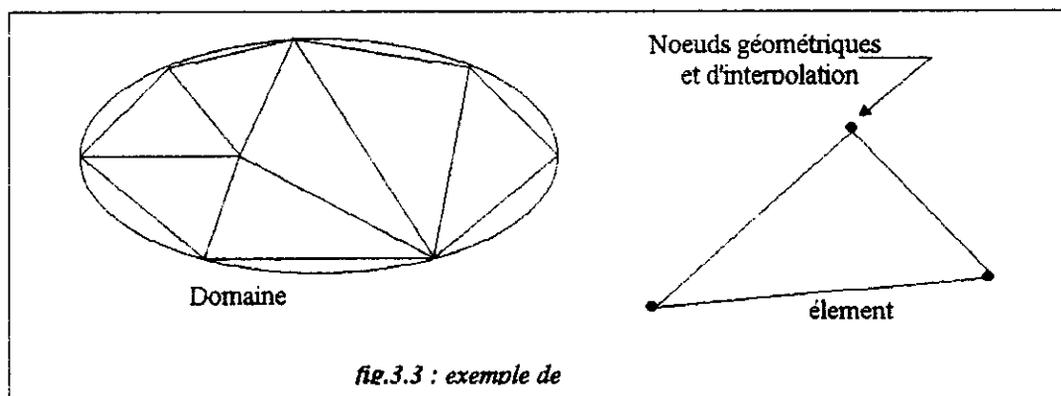


fig.3.3 : exemple de

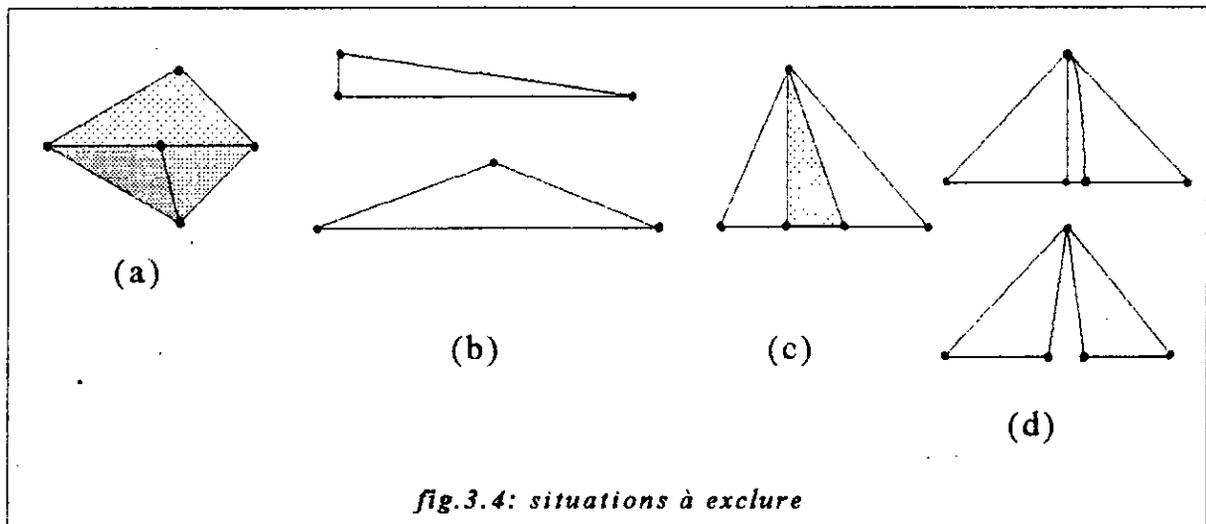
Pour cela, on doit respecter les règles suivantes : [7.10]

1)- Un nœud d'un élément ne doit jamais être intérieur à un côté d'un autre du même type. -fig.3.4a-

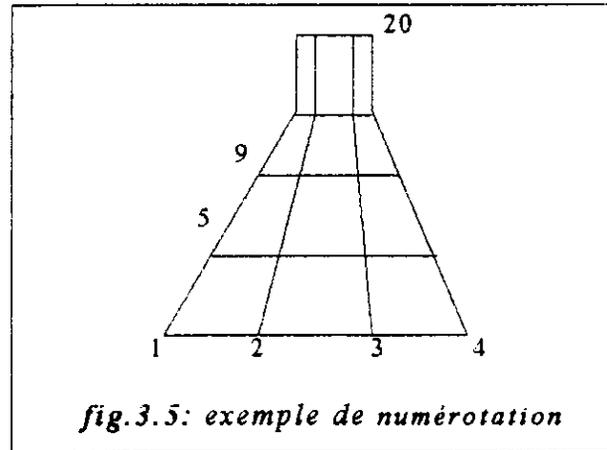
2)- Aucun élément bidimensionnel ne doit être plat, éviter les angles trop proches de 0° ou de 180° . -fig.3.4b-

3)- Deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés dans leurs frontières communes. Cela exclut le recouvrement. -fig.3.4c-

4)- L'ensemble de tous éléments doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine donné. Cela exclut les trous entre éléments. -fig.3.4d-



Le résultat du procédé doit contenir deux données essentielles qui sont les coordonnées des nœuds et les connectivités des éléments. On doit numéroter tous les nœuds et les éléments de façon à avoir des matrices globales à petite largeur de bande, pour cela, la numérotation se fait selon la plus petite largeur du domaine. -fig.3.5-



3.5/- Approximation sur l'élément :

Après avoir défini l'élément, on peut remplacer la fonction exacte par une approximative. On utilise souvent des polynômes ou des fonctions faciles à mettre en oeuvre sur ordinateur.

3.5.1. Approximation polynomiale-nodale :

La fonction approchée est exprimée par : $u = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ (3.4)

qui s'écrit sous la forme : $\langle f_n \rangle \{a_n\} \equiv f_n a_n$ (3.5)

Cette forme d'approximation est appelée polynomiale. Si on exprime la fonction sur tous les noeuds on aurait :

$U_i = \langle f_{ij} \rangle \{a_j\}$ pour chaque noeud (3.6)

$\{U_n\} = \begin{bmatrix} \langle F_{1j} \rangle & \{a_j\} \\ \langle \dots \rangle & \{.. \} \\ \langle F_{nj} \rangle & \{a_j\} \end{bmatrix} \equiv U_n = F_n a_n$ (3.7)

où : U_n : valeurs aux noeuds.

F_n : valeurs des polynômes au noeud $x = (x_i, y_i)$.

a_n : variables généralisées.

De (3.7), on peut tirer les a_n :

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{P}_n^{-1} \mathbf{u}_n \quad (3.8)$$

qu'on remplace dans (3.5)

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{P} \rangle [\mathbf{P}_n]^{-1} \{U_n\} = \langle \mathbf{N} \rangle \{U_n\} \equiv \mathbf{N} U_n \quad (3.9)$$

C'est la forme la plus utilisée par le fait que ses variables sont les valeurs de la fonction aux noeuds, donc la résolution donne directement ces valeurs, on évite leurs calcul à l'avance. Elle est appelée approximation nodale.

Exemple pour un élément à une dimension (fig 3.6), l'approximation polynomiale s'écrit :

$$\mathbf{u} = \langle 1 \ x \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

$$\text{donc } \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

$$\text{D'ou } \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Soit sous la forme $\mathbf{a}_n = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{u}_n$

donc l'approximation nodale s'écrit : $\mathbf{u} = \left\langle \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$

Soit sous la forme $\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{u}_n$

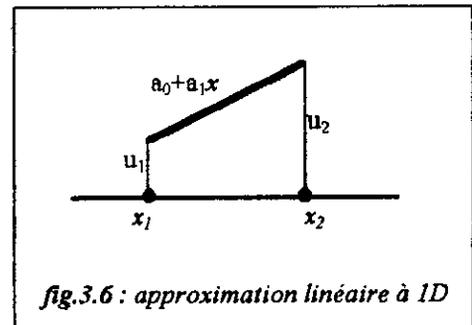
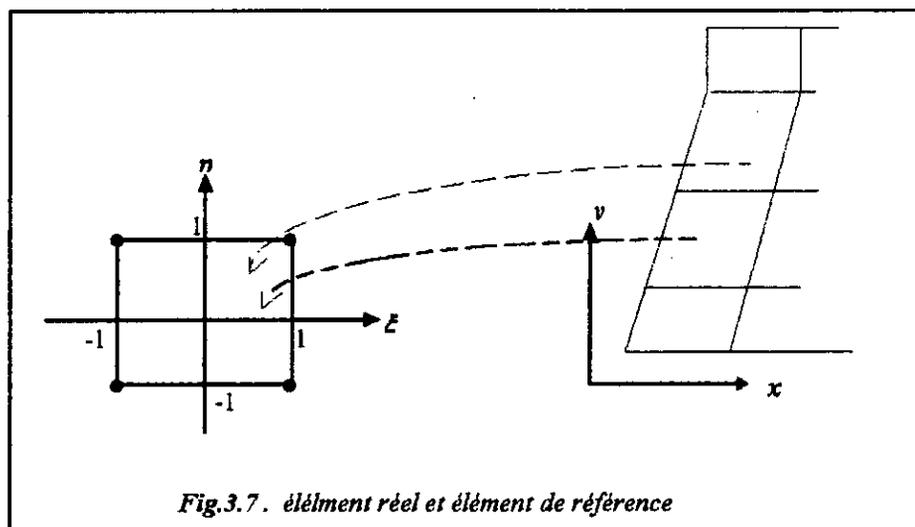


fig.3.6 : approximation linéaire à 1D

Remarque : Les termes de N sont appelés fonctions de forme. Ils doivent définir de façon unique la variable approximée et assurer sa continuité dans l'élément et d'un élément à l'autre.

3.5.2 Élément de référence :

Pour des éléments à nombre de noeuds élevé ou à cotés curvilignes, la formulation devient complexe et leur manipulation plus lourde. On pense évidemment aux expressions telles que dérivées et intégrales. L'astuce est de ramener le problème à un plan de référence de manière à standardiser les formules. C'est à dire définir un élément de forme très simple qui peut être transformé en chaque élément réel par une transformation géométrique, et de construire des fonctions de forme en coordonnées locales. *fig 3.7*



Cette méthode s'applique de manière générale, à condition qu'il existe une relation bijective entre les coordonnées cartésiennes $X \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$ et les coordonnées locales $\xi \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}$. C'est à dire que $X=f(\xi)$.

La méthode la plus simple pour déterminer les formules de transformation de coordonnées consiste à utiliser les fonctions de forme standard déjà calculées pour représenter la variable inconnue sur l'élément de référence

$$x = \mathbf{N} \{ X_n \}, \quad y = \mathbf{N} \{ Y_n \} \quad (3.10)$$

ou les N_i sont maintenant exprimés en fonction de ξ et η plusieurs éléments sont présentés avec leur formulation dans la plus part des ouvrages d'éléments finis. Les quatre que nous avons utilisé sont reportés en annexe2.

3.5.3 Jacobien et transformation de coordonnées :

Dans ce qui suit nous allons montrer comment exprimer les dérivées et les intégrales en fonction des coordonnées de références par le biais du Jacobien de l'élément réel. Les écritures sont restreintes au cas de deux dimensions

$$\text{On a : } x = \langle \mathbf{N}(\xi, \eta) \rangle \{ X_n \}, \quad y = \langle \mathbf{N}(\xi, \eta) \rangle \{ Y_n \} \quad (3.11)$$

donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{cases} \equiv \begin{Bmatrix} N_{,\xi} \\ N_{,\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{,x} \\ N_{,y} \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\text{ou bien } N_{,z} = \mathbf{J} N_{,x} \quad (3.13)$$

la matrice \mathbf{J} est appelée matrice jacobienne de l'élément.

Explicitons $x_{,\xi}$ et $y_{,\xi}$ dans \mathbf{J} on obtient :

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \langle N_{,\xi} \rangle \{x_n\} & \langle N_{,\xi} \rangle \{y_n\} \\ \langle N_{,\eta} \rangle \{x_n\} & \langle N_{,\eta} \rangle \{y_n\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle N_{,\xi} \rangle \\ \langle N_{,\eta} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{x_n\} \\ \{y_n\} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

• Expression des dérivées :

Pour exprimer les dérivées dans le plan de référence il suffit de multiplier les expressions données dans le plans physique par l'inverse de la matrice jacobienne.

$$\mathbf{N}_{,x} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}_{,\xi} \quad (3.15)$$

• Expression de $dx.dy$:

Dans le calcul des intégrales de volumes $dx.dy$ doit être écrite en fonction de $d\xi.d\eta$

$$dx = d\mathbf{N} \cdot \mathbf{X}_n \quad , \quad dy = d\mathbf{N} \cdot \mathbf{Y}_n \quad (3.16)$$

$$d\mathbf{N} = \mathbf{N}_{,\xi} d\xi + \mathbf{N}_{,\eta} d\eta \quad (3.17)$$

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle N_{,\xi} \rangle \{x_n\} & \langle N_{,\eta} \rangle \{x_n\} \\ \langle N_{,\xi} \rangle \{y_n\} & \langle N_{,\eta} \rangle \{y_n\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x_n \rangle \{N_{,\xi}\} & \langle x_n \rangle \{N_{,\eta}\} \\ \langle y_n \rangle \{N_{,\xi}\} & \langle y_n \rangle \{N_{,\eta}\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix}$$

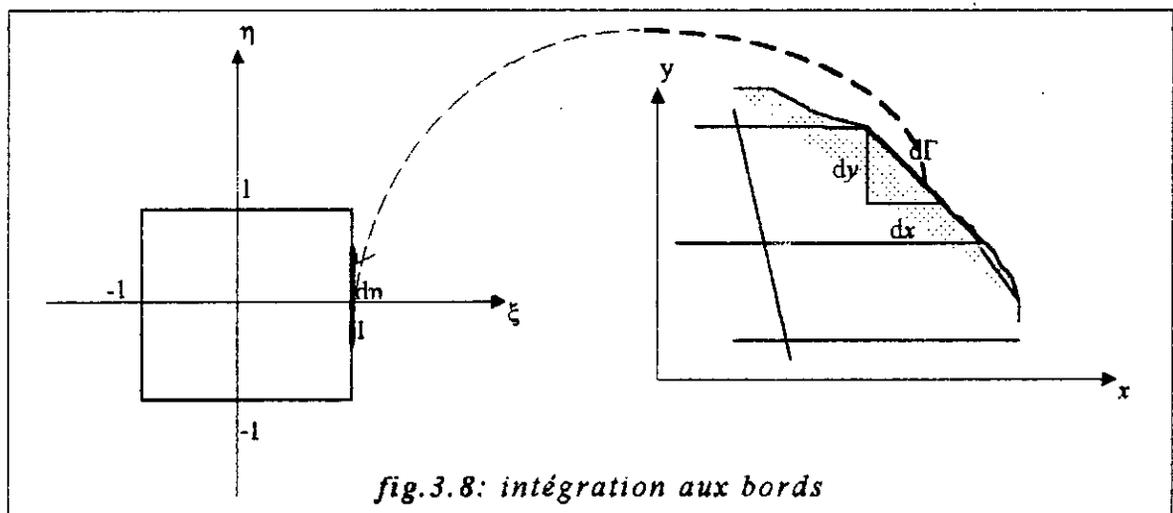
$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x_n \rangle \\ \langle y_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{N_{,\xi}\} & \{N_{,\eta}\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}]^T \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix}$$

$$\text{Donc } dx.dy = \det(\mathbf{J}^T) d\xi.d\eta = \det(\mathbf{J}) d\xi.d\eta \quad (3.21)$$

- Expression de $d\Gamma$:

Dans le calcul des intégrales aux contours formulant les conditions aux limites $d\Gamma$ doit être aussi remplacé par $d\xi$ ou $d\eta$ selon le côté de l'élément réel.

On peut écrire: -fig.3.8- $d\Gamma = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ (3.22)



Le contour Γ correspond à une arête de l'élément, donc l'intégration sur l'élément se fait suivant une variable (ξ ou η).

Nous allons expliciter la procédure pour l'exemple de la figure (3.8) :

Sur l'arête concernée on a $\xi = 1$, donc :

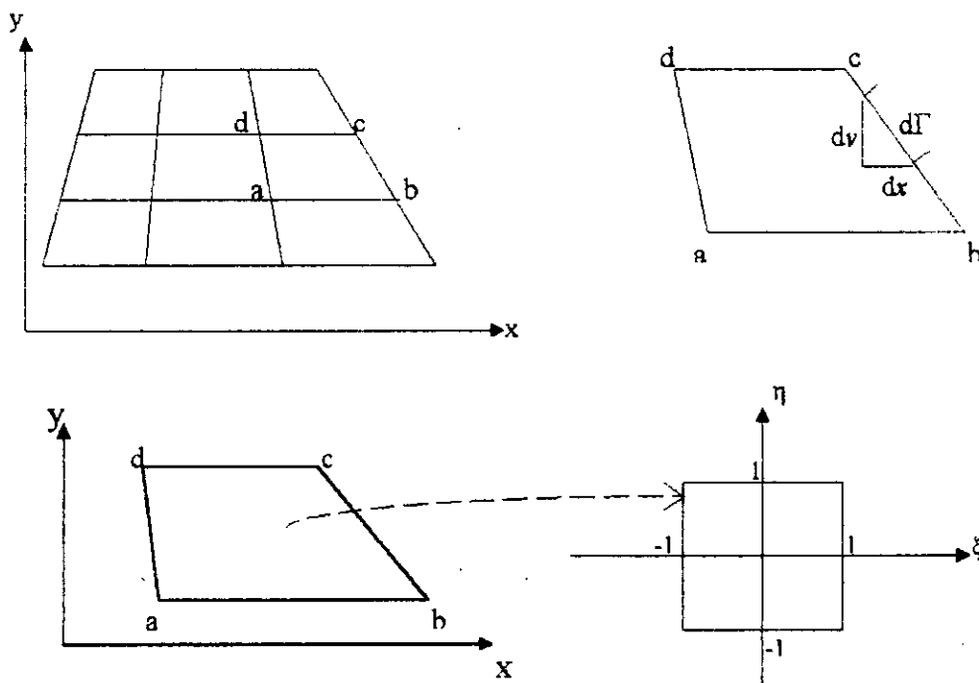
$$\begin{cases} x = \langle N(\xi = 1, \eta) \rangle \{x_n\} \\ y = \langle N(\xi = 1, \eta) \rangle \{y_n\} \end{cases} \quad (3.23)$$

$\int_B^C f(x, y) d\Gamma$ devient :

$$\int_{-1}^1 f(\eta) \sqrt{\left[\left\langle \frac{\partial N}{\partial \eta}(\xi=1, \eta) \right\rangle d\eta \{x_n\} \right]^2 + \left[\left\langle \frac{\partial N}{\partial \eta}(\xi=1, \eta) \right\rangle d\eta \{y_n\} \right]^2} = \int_{-1}^1 f(\eta) J_s d\eta \quad (3.24)$$

avec : $J_s = \sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2} = \sqrt{\left[\left\langle N_\eta(\xi=1, \eta) \right\rangle \{x_n\} \right]^2 + \left[\left\langle N_\eta(\xi=1, \eta) \right\rangle \{y_n\} \right]^2} \quad (3.25)$

- Pour un élément quadrilatéral :



$$\Gamma_{ab} : \left\| \begin{array}{l} \eta = -1 \\ d\Gamma = d\xi \end{array} \right.$$

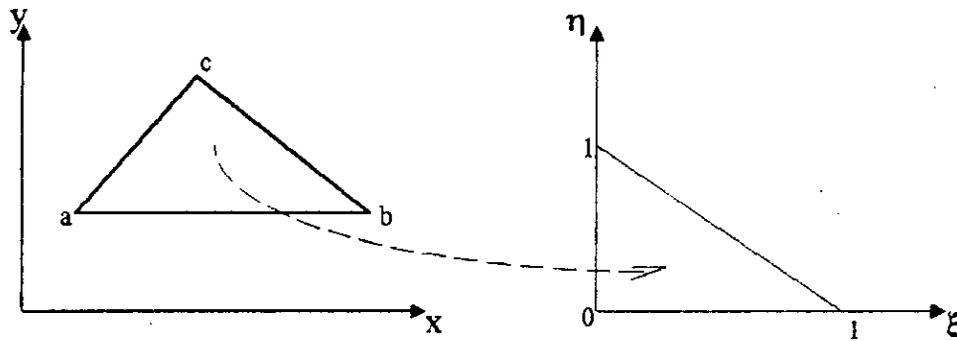
$$\Gamma_{cd} : \left\| \begin{array}{l} \eta = 1 \\ d\Gamma = d\xi \end{array} \right.$$

$$\Gamma_{bc} : \left\| \begin{array}{l} \xi = 1 \\ d\Gamma = d\eta \end{array} \right.$$

$$\Gamma_{ad} : \left\| \begin{array}{l} \xi = -1 \\ d\Gamma = d\eta \end{array} \right.$$

et l'intégrale de a à b d'une quantité quelconque se ramène de -1 à +1.

- Pour un élément triangulaire :



$$\Gamma_{ab} : \left\{ \begin{array}{l} \eta = 0 \\ d\Gamma = d\xi \end{array} \right. \quad \Gamma_{bc} : \left\{ \begin{array}{l} \eta = 1 - \xi \quad (\xi = 1 - \eta) \\ d\Gamma = d\xi \quad (d\Gamma = d\eta) \end{array} \right.$$

$$\Gamma_{ac} : \left\{ \begin{array}{l} \xi = 0 \\ d\Gamma = d\eta \end{array} \right.$$

Dans ce cas le bord ab se ramène à 0,1.

3.5.4. Construction des matrices élémentaires :

Jusqu'à maintenant nous avons vu presque tous les outils nécessaires pour la définition d'un élément.

Il convient donc de passer à leurs utilisation pour discrétiser les formes intégrales dans le but construire les matrices élémentaires correspondantes. Nous nous intéressons qu'aux formes construites par la méthode de Galerkin, utilisée dans notre cas d'étude.

Commençons, tout d'abord, par exprimer les différents opérateurs agissant sur U . On a :

$$U = \langle N \rangle \{U_n\} \equiv N \cdot U_n$$

- La perturbation $\delta U = \delta(\mathbf{N} \mathbf{U}_n) = \mathbf{N} \delta \mathbf{U}_n$ (3.26)

puisque la perturbation n'agit que sur \mathbf{U} , \mathbf{N} étant un polynôme de x, y .

Pour pouvoir simplifier $\delta \mathbf{U}_n$ des équations générales, il est commode d'écrire : $\delta U = \delta \mathbf{U}_n^T \mathbf{N}^T \equiv \langle \delta \mathbf{U}_n^T \rangle \{ \mathbf{N} \}$ (3.27)

- Le gradient : il est composé de $\partial/\partial x, \partial/\partial y$:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \langle \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \rangle \{ \mathbf{U}_n \} \\ \frac{\partial U}{\partial y} = \langle \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \rangle \{ \mathbf{U}_n \} \end{cases} \quad (3.28)$$

d'où : $\nabla U = \begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \rangle \\ \langle \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \rangle \end{bmatrix} \{ \mathbf{U}_n \} \equiv \nabla \mathbf{N} \cdot \mathbf{U}_n$ (3.29)

et la divergence : $\nabla^T \mathbf{U} = \nabla^T \mathbf{N} \cdot \mathbf{U}_n$

- La dérivée par rapport au temps :

$$\partial U / \partial t = \langle \mathbf{N} \rangle \{ \partial \mathbf{U}_n / \partial t \} \equiv \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{U}}_n \quad (3.30)$$

Dans ce qui suit, il reste à évaluer les intégrales des combinaisons de ces opérateurs. Deux manières sont possibles :

- Intégration explicite sur l'élément de référence (ou réel), ce qui donne l'expression exacte de chaque élément de la matrice.

Exemple : dans la référence [29], l'auteur donne la forme explicite de la matrice de rigidité pour les éléments triangulaire et rectangulaire.

- Intégration numérique : utilisant souvent la quadrature de Gauss, qui consiste à remplacer l'intégrale d'une fonction par une somme des valeurs pondérées de cette fonction en des points bien déterminés. [7.26]

$$\int_{\Omega} f(x,y) d\Omega = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i, y_i) \quad (3.31)$$

n : nombre de points de Gauss

w_i : poids correspondants

Dans l'annexe3, sont reportés les différents cas que nous avons utilisé.

3.6/- Assemblage -Matrices globales- :

Afin d'obtenir la solution complète d'un système, il faut que la condition d'équilibre global soit satisfaite.

Comme cette condition est vérifiée à l'intérieur de chaque élément (par la formulation de la matrice élémentaire), il ne nous reste donc, qu'à la vérifier au niveau de chaque noeud.

Pour cela, on doit déterminer les contributions de tous les éléments auxquels un noeud "i" appartient pour les égalisées avec l'excitation extérieure appliquée en ce noeud.

Autrement dit, on doit situer chaque élément de la matrice élémentaire dans la matrice globale, et le sommer avec la valeur existante qui est le résultat des contributions des autres matrices élémentaires. Cet emplacement dans la matrice globale n'est qu'une localisation de la variable élémentaire dans la variable globale.

Des techniques et algorithmes d'assemblage sont bien traités dans les références. [7,29]

3.7/- La résolution :

Le passage par les étapes décrites dans les sections précédentes a pour but de substituer le problème posé en termes d'équations aux dérivées partielles, par un système d'équation différentielle équivalent:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (3.32)$$

qui définit un équilibre entre les forces d'inertie, de dissipation, de réactions internes et les forces extérieures.

Les procédés de résolution du système (3.32) sont de deux types : intégration directe et superposition modale.

Dans les méthodes d'intégration directe, les équations sont intégrées en utilisant les procédures numériques pas à pas.

Aucune transformation des équations en quelconques autres formes n'est effectuée. Par contre, dans les méthodes de superposition modale les équations doivent être découplées. Chacune des équations ainsi obtenue est alors intégrée explicitement ou numériquement.

La solution cherchée est une combinaison linéaire des solutions des équations découplées.

Le choix entre les deux méthodes dépend de leur efficacité numérique ainsi que de la nature du problème et de l'information cherchée. Les méthodes pas à pas sont utilisées pour la simulation dans le temps de la réponse d'un système soumis à une excitation quelconque (accélérogramme). Les méthodes d'analyse modale pour déterminer les caractéristiques vibratoires du système (modes et fréquences propres).

3.7.1. Les méthodes d'intégration directe :

Leurs principe de base est de résoudre l'équation d'équilibre en série de temps ($t_0, t_{0+\Delta t}, t_{0+2\Delta t} \dots$), en supposant une variation des quantités d'accélération et/ou vitesse pendant chaque intervalle de temps.

Donc le problème se ramène à résoudre :

$$\bar{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{U} = \bar{\mathbf{R}}(t) \quad (3.33)$$

tel que : $\bar{\mathbf{K}} = f(\mathbf{K}, \mathbf{M}, \mathbf{C})$

$$\bar{\mathbf{R}}(t) = f(\mathbf{K}, \mathbf{M}, \mathbf{C})$$

en utilisant l'une des procédures de résolution des systèmes algébriques (Gauss, Crout, Cholesky, ...).

La différence entre les différentes méthodes existantes réside dans leurs façon d'exprimer $\bar{\mathbf{K}}$ et $\bar{\mathbf{R}}(t)$.

Pour l'exposé, nous nous limiterons à la méthode de Newmark utilisée dans ce présent travail.

Dans cette méthode, on relie les variables (déplacements), leurs dérivées premières (vitesses) et secondes (accélérations) à la fin du pas de temps à d'autre quantités par deux paramètres dont dépend sa stabilité. Elle est très intéressante et largement utilisée. Par l'analyse numérique, aucune autre méthode inconditionnellement stable et appartenant à la famille des méthodes à un seul pas, ne peut avoir moins d'erreurs que la méthode de Newmark à accélération moyenne, à l'exception des méthodes d'ordre supérieur telle que les méthodes de Runge-Kutta d'ordre quatre.

Les expressions utilisées par cette méthode sont :

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + \Delta t[(1-a)\ddot{U}_t + a\ddot{U}_{t+\Delta t}] \quad (3.34)$$

$$U_{t+\Delta t} = U_t + \Delta t\dot{U}_t + \Delta t^2/2[(1-b)\ddot{U}_t + b\ddot{U}_{t+\Delta t}] \quad (3.35)$$

$$\ddot{U}_{t+\Delta t} = (2/b.\Delta t^2)[U_{t+\Delta t} - U_t] - (2/b.\Delta t)\dot{U}_t - (1/b-1)\ddot{U}_t \quad (3.36)$$

Les termes du système (3.33) se traduisent par :

$$U = U_{t+\Delta t} \quad (3.37)$$

$$K = M + \Delta t a C + (\Delta t^2/2)b K$$

$$\begin{aligned} R_t = R_{t+\Delta t} = & (\Delta t^2/2)b F_{t+\Delta t} + M\{U_t + \Delta t \dot{U}_t \\ & + (\Delta t^2/2)(1-b) \ddot{U}_t\} + C [\Delta t a U_t \\ & + (\Delta t^2/2)(2a-b) \dot{U}_t + (\Delta t^3/2)(a-b) \ddot{U}_t] \end{aligned} \quad (3.38)$$

La résolution se fait avec les conditions initiales U_0 et \dot{U}_0 imposées. \ddot{U}_0 est alors la solution de l'équation d'équilibre à l'instant t_0 :

$$\ddot{U}_0 = M^{-1} (F_0 - C.\dot{U}_0 - K.U_0) \quad (3.40)$$

- Pour : $a \geq 1/2$ et $b = 1/3$ les relations (3.34)-(3.35) correspondent à une accélération linéaire sur l'intervalle Δt .
- Newmark a proposé comme schéma inconditionnellement stable une accélération moyenne constante dans lequel $a = b = 1/2$.^[3]
- Pour $b = 0$, la méthode est équivalente à la méthode des différences finies centrales^[16,22,23] qui est plus adaptée pour les problèmes non linéaires.

Les erreurs associées à l'application de la méthode de Newmark sont de nature oscillatoire et dépendent de plusieurs paramètres. Parmi les auteurs qui ont traité cette question, G.B.WARBURTON^[22.23]. L'auteur a montré qu'elle est fonction :

- du pas de temps adimensionnel $\delta = \omega_n \cdot \Delta t$ (ω_n : pulsation fondamentale, Δt : pas de temps actuel).
- du nombre de pas de temps J.
- du paramètre b de la méthode.
- et du coefficient d'amortissement ξ du système.

Il a déduit des formules qui représentent avec satisfaction le comportement complexe de l'erreur pour un rang du paramètre :

$$0 \leq b \leq \frac{1}{2}, \delta = \pi/16 \text{ et } \xi = 0, 1.$$

Dans le cas de problèmes aux déplacements et vitesses initiaux, l'erreur est proportionnelle à δ^4 lorsque $b=1/6$ et $\gamma=0$, sinon, elle est proportionnelle à δ^2 .

Pour le cas de $\Delta t = \text{Min}(0.1/\omega_n, 0.1/\omega_e)$, l'erreur maximale relative $\varepsilon_{\text{max}}/u_{\text{max}}$ est de l'ordre de 2% (ω_e : pulsation d'excitation $\varepsilon = u_{\text{ex}} - u_{\text{ap}}$), elle peut augmenter jusqu'à 4% si les valeurs initiales ne sont pas nulles.

3.8/- Convergence de la méthode des éléments finis :

Puisque le domaine idéalisé par cette méthode est un assemblage d'éléments, donc, la performance de l'analyse dépend essentiellement du nombre d'élément utilisé et l'approximation dans chacun. La solution doit converger quand le nombre d'éléments augmente, sous réserve que l'élément soit complet et compatible c'est à dire conforme.

On note ici que "complet", veut dire que les déplacements du corps rigide doivent être effectués par l'élément sans se déformer ni développer des contraintes à l'intérieur. En d'autres termes l'approximation doit utiliser au moins une base polynomiale complète jusqu'à l'ordre m si des dérivées jusqu'à cet ordre apparaissent dans la formulation. Et que "compatible", assure la continuité de la fonction dans l'élément et entre éléments.

Pour poser ces conditions de convergence, Zienkiewicz [26] annonce trois (3) critères que la fonction représentative des déplacements (fonction d'interpolation) doit satisfaire :

Critère 1 : Il est impossible que l'élément se déforme quand les déplacements de ses noeuds sont causés par un mouvement de corps solide.

Critère 2 : Si les déplacements nodaux correspondent à des déformations constantes, on obtient effectivement ces déformations.

Critère 3 : Les déformations aux interfaces restent bornées.

Les deux premiers critères ne doivent être satisfaits qu'à la limite lorsque la taille des éléments tend vers zéro. La convergence obtenue quand la taille des éléments tend vers zéro s'appelle convergence h (h : taille de l'élément).

D'un autre côté, nous pouvons obtenir la convergence vers la solution exacte en fixant une fois pour toute la taille des éléments et en augmentant le degré p des polynômes dans chaque élément (nombre de noeud). Dans ce cas, on parle de convergence p . D'une manière générale, la convergence p est la plus rapide.

Pour conclure nous pouvons confirmer, d'après cet exposé, que la MEF est facilement exploitable et peut couvrir plusieurs domaines.

Chapitre 4
Modélisation mathématique

Modélisation mathématique

4.1/-Introduction :

Les problèmes physiques sont régis par la loi universelle de conservation soit :

- D'une quantité scalaire : masse, énergie, densité, ...
- Ou, d'une quantité vectorielle : effort, quantité de mouvement, ...

A ces lois de conservation, doit être ajoutée une description du domaine physique (lois de comportement), ainsi que les conditions aux limites.

Ces lois et ces conditions sont exprimées par des relations mathématiques avec lesquelles on pose le problème en équations qu'il faut résoudre.

Le système couplé barrage-reservoir étant constitué par deux milieux continus à savoir :

- Solide : corps du barrage.
- Fluide : reservoir.

Obeit à la loi fondamentale de la dynamique -loi de Newton-. Les équations gouvernantes de chaque milieu découlent de cette loi.

L'analyse du problème couplé ainsi que la discrétisation par la méthode des éléments finis se fait selon le plan de la figure (**fig.4.1**).

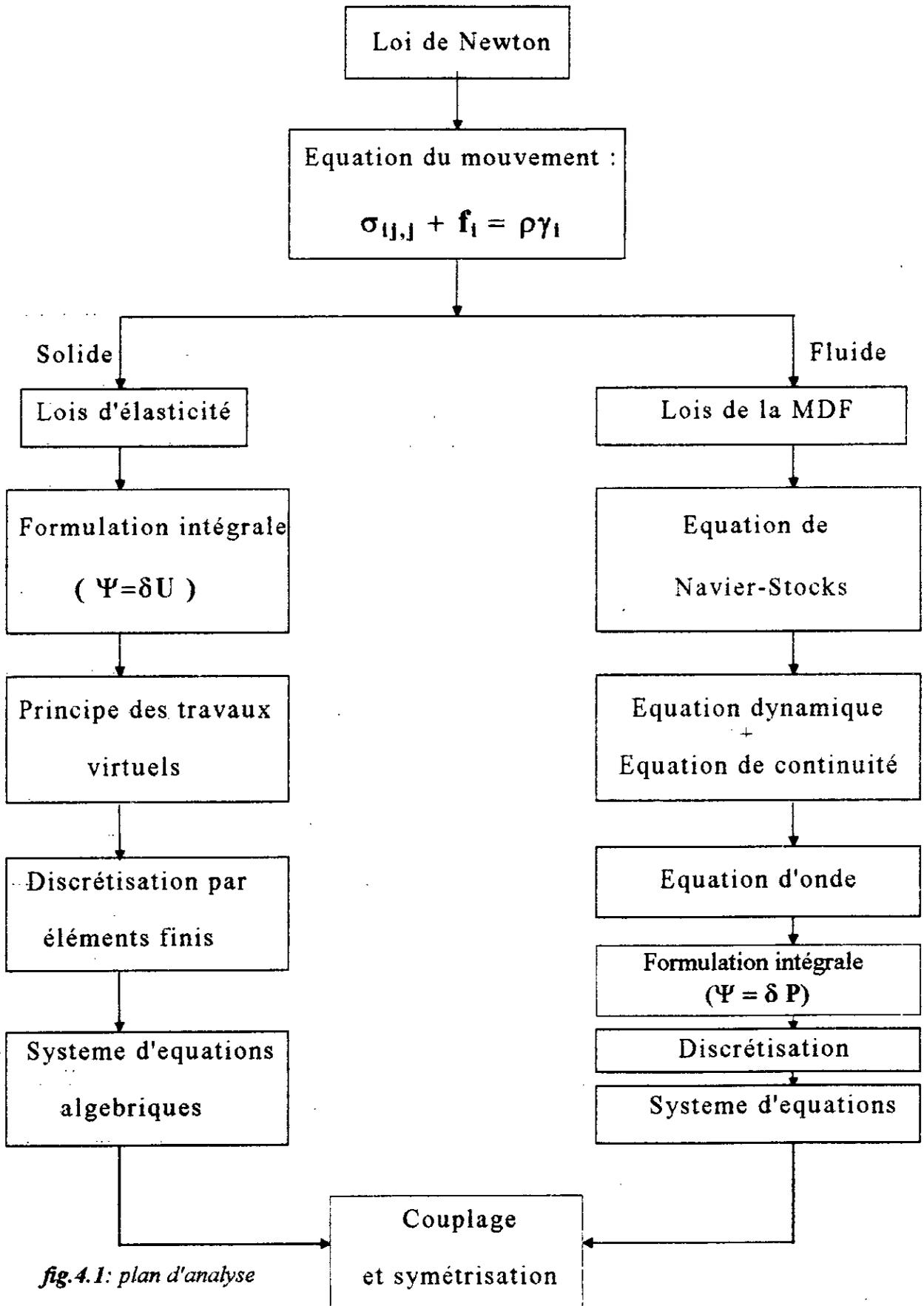


fig.4.1: plan d'analyse

4.2/- Developpement des equations :

4.2.1. Equation du mouvement :

L'enoncé classique de la loi de Newton se traduit par l'égalité des tenseurs des quantités d'accélération et celui des forces extérieures agissants sur une partie d'un système donné.⁽¹¹⁾

Par conséquent, pour un volume infinitesimal $d\Omega$ (fig.4.2), l'égalité des forces s'écrit :

$$\int_{\Omega} \gamma \, dm = \int_{\Omega} f_v \, d\Omega + \int_{\Gamma} T(M, \vec{n}) \, d\Gamma \quad (4.1)$$

où: f_v : forces de volume

$T(M, \vec{n})$: effort extérieur de cohésions

γ : accélération de la partie $d\Omega$ ayant la masse dm

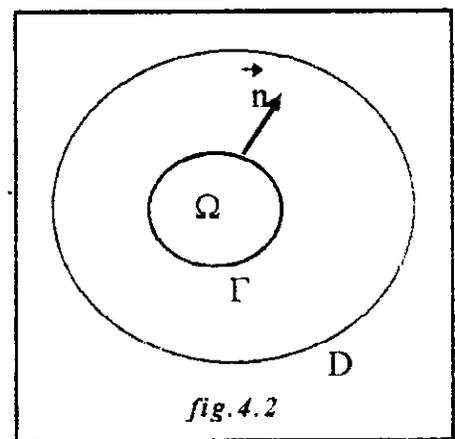


fig.4.2

L'effort interieur de cohésions s'exprime par : -fig.4.3a-

$$T(M, \vec{n}) = \sigma_{ij} n_j \quad (i,j=1,2,3) \quad (4.2)$$

avec s_{ij} : tenseur des contraintes [1,2] -fig.4.3b-

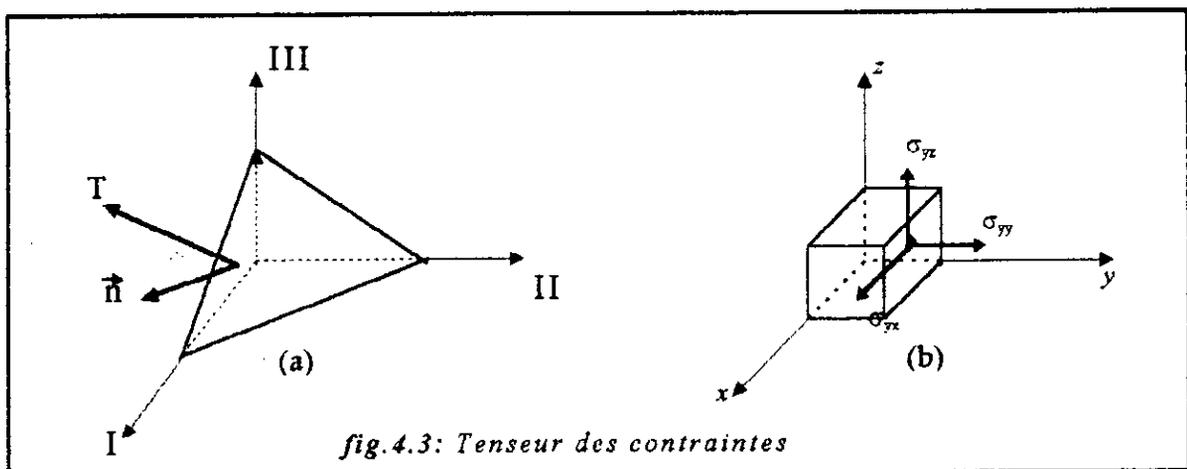


fig.4.3: Tenseur des contraintes

Reécrivons les termes de 4.1 :

$$\int_{\Omega} \gamma \, dm = \int_{\Omega} \gamma \rho \, d\Omega \quad (4.3)$$

$$\int_{\Gamma} T(M, \vec{n}) \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j \, d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} \, d\Omega \quad (4.4)$$

Donc (4.1) s'exprime par :

$$\int_{\Omega} \gamma \rho \, d\Omega = \int_{\Omega} f_v \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} \, d\Omega \quad (4.5)$$

et puisque si : $\int_{\Omega} \varphi \, d\Omega = 0 \quad \forall \Omega \in D$; alors : $\varphi = 0$ dans D ⁽¹¹⁾

L'équation du mouvement s'écrit alors sur x_i :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \gamma_i \quad (4.6)$$

4.2.2. Equations gouvernantes du solide : ^[11,26]

• Equations d'élasticité :

Ce sont les équations usuelles d'un milieu élastique continu; on ne ferait que de les rappeler :

* Les déformations : $\varepsilon_{ij} = 1/2 \cdot (U_{i,j} + U_{j,i})$ (4.7)

avec U_i déplacement suivant la direction x_i .

* Les contraintes : $\sigma_{ij} = D_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}$ (loi de Hook) (4.8)

• Expressions pour l'élasticité plane à 2 dimension :

Vu la symétrie des tenseurs, nous allons adopter la notation vectorielle suivante pour alléger les équations. ^[26]

Posons donc :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

$$U = \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

D'où :

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} U_{i,i} \\ U_{j,j} \\ U_{i,j} + U_{j,i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} \quad (4.11a)$$

$$\varepsilon = [S] \{U\} \equiv S U \quad (4.11b)$$

et :

$$\sigma = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 \\ d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \varepsilon = D S U \quad (4.12)$$

avec **D** : matrice d'élasticité dont les éléments sont donnés par :

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \quad ; \quad d_2 = \nu d_1 \quad \text{en contraintes planes} \\ d_1 &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad d_2 = \frac{\nu d_1}{1-\nu} \quad \text{en déformations planes} \\ d_3 &= \frac{1}{2}(d_1 + d_2) \end{aligned} \quad (4.13)$$

où *E* et *ν* sont respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson du matériau considéré.

• *Expression du principe des travaux virtuels :*

L'expression du principe des travaux virtuels, qui stipule que pour un déplacement virtuel, dans la structure, le travail du chargement extérieur est égal au travail des contraintes développées par le système, peut être obtenu par application de la formulation variationnelle (cf §3) aux équations d'équilibre. [1,3,7,12,21,26]

En prenant comme fonction poids $\Psi = \delta U$, la forme forte est :

$$w = \int_{\Omega} \delta U_i (\sigma_{ij,j} + f_i - \rho \gamma_i) d\Omega = 0 \quad (4.14)$$

$$w = \int_{\Omega} \delta U_i \sigma_{ij,j} d\Omega + \int_{\Omega} \delta U_i f_i d\Omega - \int_{\Omega} \delta U_i \rho \gamma_i d\Omega = 0 \quad (4.15)$$

$$w = I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Le premier terme :

$$I_1 = \int_{\Omega} \delta U_i \sigma_{ij,j} d\Omega = \int_{\Omega} (\delta U_i \sigma_{ij})_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} \delta U_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega \quad (4.16)$$

$I_{11} \quad + \quad I_{12}$

$$I_{11} = \int_{\Omega} (\delta U_i \sigma_{ij})_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta U_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma \quad (\text{théorème de Gauss}) \quad (4.17)$$

$$I_{12} = - \int_{\Omega} \delta U_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega = - \int_{\Omega} \delta \varepsilon \sigma d\Omega \quad (4.18)$$

bien entendu σ et ε sont données par (4.9) et (4.10).

En tout :

$$w = \int_{\Omega} \delta \varepsilon \sigma d\Omega + \int_{\Gamma} \delta U \sigma \bar{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta U f d\Omega - \int_{\Omega} \delta U \rho \ddot{U} d\Omega = 0 \quad (4.19)$$

On a alors obtenu l'expression des travaux virtuels dont lequel on a :

$$w_c = \int_{\Omega} \delta \varepsilon \sigma d\Omega \quad \text{: énergie de déformation ou de réaction du milieu} \quad (4.20)$$

$$w_v = \int_{\Omega} \delta U f d\Omega \quad \text{: travail des forces de volume} \quad (4.21)$$

$$w_i = \int_{\Omega} \delta U \rho \ddot{U} d\Omega \quad \text{: travail des forces d'inertie} \quad (4.22)$$

$$\text{et } w_f = \int_{\Gamma} \delta U \sigma \bar{n} d\Gamma \quad \text{: travail du chargement extérieur} \quad (4.23)$$

4.2.3. Equations gouvernantes dans le fluide:^[11]

Lois de la mécanique des fluides :

Dans le fluide, le tenseur des contraintes s'exprime par :

$$\sigma_{ij} = -P \delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (4.24)$$

avec : P : pression.

$$\delta_{ij} \text{ : symbole de Kronecker ; } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

τ_{ij} : contraintes de cisaillement dues à la viscosité du fluide.

$$\tau_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (4.25)$$

μ : coefficient de viscosité dynamique.

ε_{ij} : vitesse des déformations.

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (V_{i,j} + V_{j,i}) \quad (4.26)$$

V_i : vitesse du fluide dans la direction x_i .

• **Expression des équations du mouvement :**

Remplaçons les termes obtenus ci-dessus dans l'équation fondamentale (4.6) :

$$(-P \delta_{ij} + \tau_{ij})_{,j} + f_i - \rho \gamma_i = 0 \quad (4.27)$$

$$-P_{,i} + (2\mu \cdot 1/2 (V_{i,j} + V_{j,i}))_{,j} + f_i - \rho \gamma_i = 0 \quad (4.28)$$

$$-P_{,i} + \mu (V_{i,jj} + V_{j,ij}) + f_i - \rho \gamma_i = 0 \quad (4.29)$$

Soit en écriture condensée (les trois directions en même temps) :

$$-\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{f} - \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{0} \quad (4.30)$$

Qui est l'équation de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes.

4.3/- Application au cas de barrage-réservoir :

Les équations précédentes sont applicables au cas de barrage-réservoir si celui-ci est considéré comme problème bidimensionnel.

4.3.1. Le barrage :

Le barrage serait donc modélisé comme une plaque à 2D avec les hypothèses suivantes :

- Matériau homogène et isotrope.
- Comportement élastique linéaire.
- Fondation rigide.

et les conditions aux limites : -fig.4.4-

- A la base : les déplacements relatifs seront considérés nuls : on suppose une liaison parfaite entre le corp du barrage et le rocher de fondation pour simplifier l'interaction sol-structure.

- Au parement amont : le chargement étant la pression hydrodynamique; c'est la zone interface où se fait l'interaction.

- Sur le reste du contour : le barrage est libre.

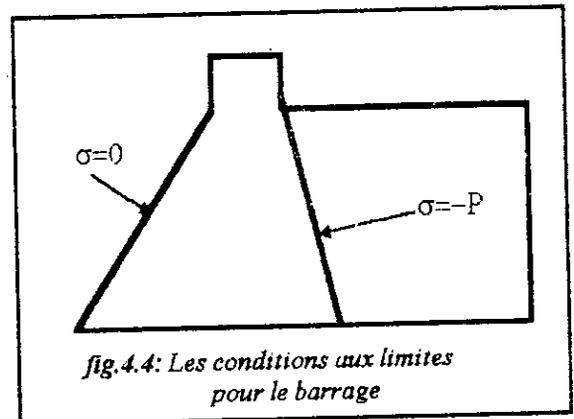


fig.4.4: Les conditions aux limites pour le barrage

L'équation (4.19) s'écrit :

$$w = - \int_{\Omega} \delta \varepsilon \sigma d\Omega + \int_{\Omega} \delta U \rho \ddot{U} d\Omega + \int_{\Gamma_1} \delta U (-P) \bar{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_b} \delta U \rho \ddot{x} d\Gamma \quad (4.30)$$

x : acceleration sismique.

4.3.2. Le réservoir :

Le fluide serait modélisé comme étant linéairement compressible et sans écoulement, ayant comme hypothèses : [4-6,13-20,23-25,27]

- Subit de petits déplacements.
- Non visqueux.
- Semi infini.

L'équation 4.29 se réduit à : $\rho \nabla \cdot \mathbf{V} = -\nabla P$ (4.31)

puisque $\mu=0$, et les effets convectifs sont négligés ($\nabla^2 \mathbf{V}=0$).

• Pour une discrétisation complète, on doit associer à cette équation :

• l'équation de conservation de la masse : $\rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ (4.32)

• l'équation de compressibilité : $K = \frac{-dP}{-dV} = \frac{dP}{\frac{d\rho}{\rho}}$ (4.33)

donc : $d\rho = \frac{\rho}{K} dP$ (4.34)

Ainsi l'équation de la pression dans le fluide peut être obtenue comme suit :

• remplaçons (4.34) dans (4.32), cela donne :

$$\frac{\rho}{K} \dot{P} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (4.35)$$

• multiplions (4.35) par ∇ , et (4.31) par $(\partial/\partial t)$

on obtient :

$$\begin{cases} \rho \nabla \dot{\mathbf{V}} + \nabla^2 P = 0 \\ \rho \nabla \dot{\mathbf{V}} + \frac{\rho}{K} \dot{P} = 0 \end{cases} \quad (4.36)$$

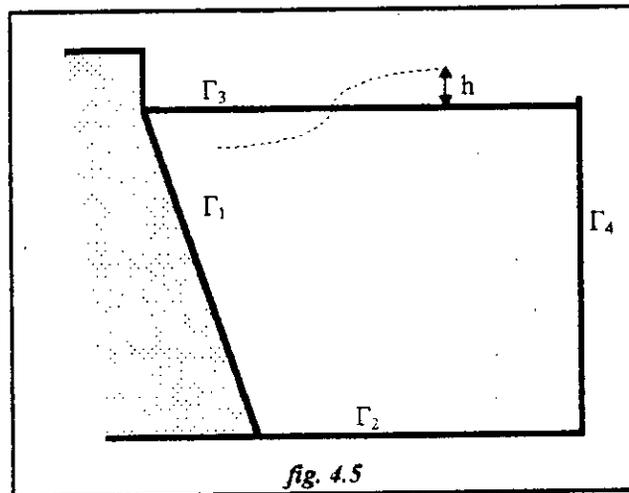
• d'où par soustraction : $\nabla^2 P - \frac{1}{\left(\frac{\rho}{K}\right)^{-1}} \dot{P} = 0$

• soit : $\nabla^2 P - \frac{1}{C^2} \dot{P} = 0$ (4.37)

qui régit la propagation d'ondes sonores dans un milieu bidimensionnel isotrope avec une célérité C .

Pour l'eau $C = \sqrt{K/\rho} \approx 1440$ m/s (4.38)

et comme conditions aux limites :-fig.4.5-



- Sur l'interface Γ_1 : (parement amont du barrage)

Les déplacements du parement sont liés au comportement du barrage, donc les vitesses des points appartenant à cette limite sont imposées, et l'application de l'équation dynamique du fluide (4.31) donne :

$$\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} = -\rho \dot{V}_n \bar{\mathbf{n}} = -\rho \dot{U} \bar{\mathbf{n}} \quad (4.39)$$

- Sur le fond Γ_2 :

Pour un séisme, ou fond incliné, \ddot{x} l'accélération du séisme est donc comme pour Γ_1 :

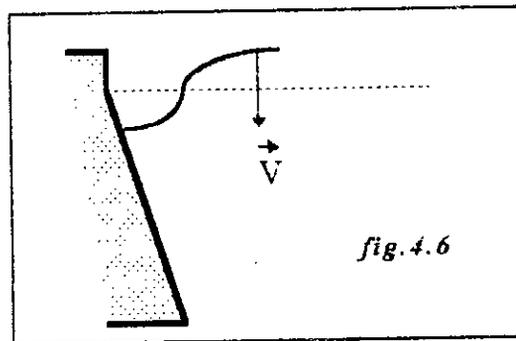
$$\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} = -\rho \ddot{x} \bar{\mathbf{n}} \quad (4.40)$$

• Sur la surface libre :

La condition la plus simple est de prendre $P=0$; seulement elle ne prend pas en compte les ondes de surface dues aux variations de pression à l'intérieur du fluide. Pour les inclure on prend comme approximation, une surface moyenne où $P=0$, et la surface actuelle à une hauteur h . -fig. 4.6-

$$P = \rho g h \quad \text{pour une élévation } h, \text{ et}$$

$$P = -\rho g h \quad \text{pour un abaissement } h. \quad (4.41)$$



L'application de l'équation dynamique donne :

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\rho \dot{V} \quad (4.42)$$

avec : $V = \dot{h}$

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\rho \ddot{h} \quad (4.43)$$

$$\text{de (IV.41) : } \ddot{h} = \frac{\ddot{P}}{\rho g}$$

$$\text{d'où : } \frac{\partial P}{\partial n} = -\frac{\ddot{P}}{g} \quad (4.44)$$

Cette condition permet approximativement aux ondes de gravité d'être incorporées dans l'analyse. Elle est connue sous le nom de condition d'onde de surface linéarisée.

- Sur la limite de radiation Γ_4 : (troncature)

Cette limite termine un domaine physiquement infini, donc, une approximation prenant en compte cet effet est nécessaire.

La solution de l'équation d'onde n'est composée à cette limite que de la partie incidente puisqu'il n'existe aucune réflexion à partir du domaine infini.

Si on ne considère que les variations suivant x , de P , la solution générale de l'équation (4.37) est :

$$P = f(x-ct) + G(x+ct) \quad (4.45)$$

La condition se traduit par $G(x+ct) = 0$; $P = f(x-ct)$.

$$\text{D'où : } \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial n} \equiv \frac{\partial p}{\partial x} = f' \\ \frac{\partial P}{\partial t} = -cf' \end{cases} \quad (4.46)$$

$$\text{Enfin : } \frac{\partial P}{\partial n} = -\frac{1}{C} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (4.47)$$

Cette condition est présentée pour la première fois par **Zienkiewicz et Newton**^[27] en 1969, pour des limites de radiation, et à une analogie avec un élément dissipatif à la place.

4.4/- Formulation variationnelle des équations du fluide :

Dans le but d'obtenir une expression décrivant le comportement du fluide, analogue à celle du principe des travaux virtuels utilisée par la méthode des éléments, réécrivons les équations (4.37,39,40,41, et 44) sous forme intégrale faible.

Le problème classique s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla^2 P - \frac{1}{C^2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial P}{\partial n} = -\rho \ddot{U} \bar{n} & \text{sur } \Gamma_1 \\ \frac{\partial P}{\partial n} = \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} & \text{sur } \Gamma_3 : \text{Condition de Newman} \\ \frac{\partial P}{\partial n} = -\frac{1}{C} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} & \text{sur } \Gamma_4 \\ \frac{\partial P}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \end{array} \right.$$

Le problème variationnel s'écrit en forme forte via la méthode de Galerkin :

$$W = \int_{\Omega} \delta P \left(\nabla^2 P - \frac{1}{C^2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right) d\Omega \quad (4.48)$$

La forme faible :

$$W = - \int_{\Omega} \delta \nabla P \nabla P d\Omega - \int_{\Omega} \delta P \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} d\Omega + \int_{\Gamma} \delta P \frac{\partial P}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (4.49)$$

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 0$$

$$W_3 = \sum_{i=1}^4 \int_{\Gamma_i} \delta P \frac{\partial P}{\partial n} d\Gamma \quad (4.50)$$

Remplaçons $\partial P / \partial n$ par ces valeurs sur chaque limite :

$$W_3 = \int_{\Gamma_1} \delta P (-\rho \ddot{U} \bar{n}) d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \delta P \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} d\Gamma + \int_{\Gamma_4} \delta P \left(-\frac{1}{C} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} \right) d\Gamma \quad (4.51)$$

En multipliant le tout par (-1) :

$$\begin{aligned} W = & \int_{\Omega} \delta \nabla P \cdot \nabla P d\Omega + \int_{\Omega} \delta P \frac{1}{C^2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} d\Omega + \int_{\Gamma_1} \delta P \rho \ddot{U} \bar{n} d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_3} \delta P \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} d\Gamma + \int_{\Gamma_4} \delta P \frac{1}{C} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.52)$$

4.5/- Conclusion :

- Modélisation mathématique est une étape préparatoire des équations régissant un phénomène physique pour la résolution.
- Modélisation mathématique revient à décrire, à l'aide d'outils mathématiques, un phénomène physique et de poser le problème sous forme d'équation. Les caractéristiques du phénomène seront connues par la résolution de ces équations
- La détermination de la réponse et comportement du système barrage-réservoir lors d'une excitation sismique revient donc, à résoudre les deux équations (4.30) et (4.52).

Chapitre 5
Modélisation numérique

Modélisation numérique

5.1/- Introduction :

Dans le chapitre précédent nous avons présenté le modèle mathématique associé aux problèmes d'interaction fluide-structure.

Le but de ce chapitre est de présenter le modèle numérique du problème posé à l'aide de l'approximation par éléments finis.

Nous utilisons les notions du chapitre 3, pour obtenir une discrétisation spatiale des formes intégrales et la résolution du système matriciel obtenu.

5.2/- Discrétisation spatiale :

Le domaine brrage-réservoir étant discrétisé en éléments finis, pour une comparaison, nous utilisons les quatre éléments suivants (voir annexe2) :

- Triangulaire à 3 noeuds (approximation linéaire).
- Triangulaire à 6 noeuds (approximation quadratique).
- Quadrilatéral à 4 noeuds (approximation linéaire).
- Quadrilatéral à 8 noeuds (approximation quadratique).

Avec deux degrés de liberté par noeud pour les éléments "solides" (U,V), et un degré de liberté par noeud pour les éléments "fluides" (P).

On a alors :
$$\mathbf{U} = \mathbf{N}_u \mathbf{U}_n$$

avec :
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{N}_{ui} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_i \end{bmatrix} : \text{fonction de forme} \\ \mathbf{U}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} : \text{variable nodale} \end{array} \right. \quad (5.1)$$

et :
$$\mathbf{P} = \mathbf{N}_p \mathbf{P}_n$$

$$\text{avec :} \quad \begin{cases} N_p = \langle N_i \rangle & \text{: fonction de forme} \\ P_i = \{P_i\} & \text{: variable nodale} \end{cases} \quad (5.5)$$

Exemple :

Pour l'élément triangulaire à trois noeuds :

$$U = \begin{bmatrix} 1-\xi-\eta & 0 & \xi & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 1-\xi-\eta & 0 & \xi & 0 & \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix}$$

$$\text{et} \quad P = \langle 1-\xi-\eta \quad \xi \quad \eta \rangle \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix}$$

5.2.1. Cas du barrage :

Reprenons les termes (4.30) et appliquons (4.9) à (4.12)

* L'énergie interne :

$$W_e = \int_{\Omega} \delta \varepsilon \sigma \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta (\mathbf{S} \mathbf{U}) (\mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{U}) \, d\Omega \quad (5.3)$$

remplaçons par (5.1) :

$$W_e = \int_{\Omega} \delta (\mathbf{S} \mathbf{N}_u \mathbf{U}_n) (\mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{N}_u \mathbf{U}_n) \, d\Omega \quad (5.4)$$

posons $\mathbf{S} \mathbf{N} = \mathbf{B}$, on obtient :

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\text{et} \quad \delta(\mathbf{S} \mathbf{N}_u \mathbf{U}_n) = \delta \mathbf{U}_u^T \mathbf{N}_u^T \mathbf{S}^T = \delta \mathbf{U}_u^T \mathbf{B}^T \quad (5.6)$$

$$\text{d'où :} \quad W_e = \int_{\Omega} \delta \mathbf{U}_u^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\Omega = \delta \mathbf{U}_u^T \mathbf{K} \mathbf{U}_n \quad (5.7)$$

$$\text{avec :} \quad \mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\Omega \quad (5.8)$$

Expression de la matrice de rigidité de la structure ayant les caractéristiques suivantes :

- Définie positive : $\forall \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n ; \mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X} > 0$

pour $\mathbf{X} = \mathbf{U}$ (déplacement)

$\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \frac{1}{2} \mathbf{K} \mathbf{U}^2$: énergie de réaction, toujours positive.

-Symétrique, car \mathbf{D} est symétrique (théorème de Maxwell-Betti). On donne la forme explicite de \mathbf{K} élémentaire :

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & N_{i,y} \\ 0 & N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 \\ d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} d\Omega \quad (5.9)$$

* Les termes d'inertie :

$$W_i = \int_{\Omega} \delta U \rho \ddot{U} d\Omega = \int_{\Omega} \delta U_n^T N^T \rho N \ddot{U}_n d\Omega \quad (5.10)$$

$$W_i = \delta U_n^T M \ddot{U}_n$$

$$\text{avec : } M = \int_{\Omega} N^T \rho N d\Omega \quad (5.11)$$

Expression de la matrice masse non condensée, qui caractérise l'inertie de la structure.

Elle peut être exprimée sous forme condensée (matrice diagonale) si l'on opte pour le concept de condensation de la masse sur les noeuds.

L'expression explicite est :

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \rho \begin{bmatrix} N_j & 0 \\ 0 & N_j \end{bmatrix} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \rho \begin{bmatrix} N_i N_j & 0 \\ 0 & N_i N_j \end{bmatrix} d\Omega \end{aligned} \quad (5.12)$$

pour le concept de masse répartie.

$$\text{et : } M_{ii} = \int_{\Omega} N_{ui} \rho N_{ui} d\Omega \quad (5.13)$$

pour le concept de masse concentrée.

* Les termes du chargement : -fig.5.1-

$$W_f = \int_{\Gamma_1} \delta U (-P) \bar{n} d\Gamma \quad (5.14)$$

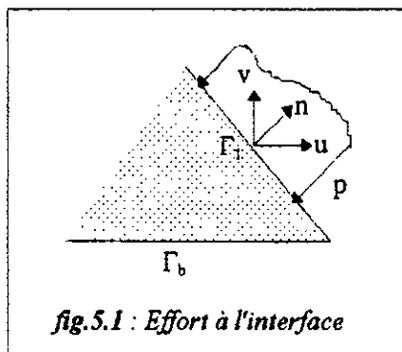


fig.5.1 : Effort à l'interface

Ce qui marque cette expression de celle des chargements courant est que la pression elle même est inconnue et est influencée par les déplacements. Dans ce cas il faut remplacer P par son approximée (5.2).

$$W_f = - \int_{\Gamma_i} \delta U_n^T N_u^T \bar{n} N_p P_n d\Gamma \quad (5.15)$$

$$W_f = \delta U_n^T Q P_n$$

$$\text{avec:} \quad Q = - \int_{\Gamma_i} N_n^T \bar{n} N_p d\Gamma \quad (5.16)$$

C'est l'expression de la matrice d'interaction liant le comportement des deux milieux. Elle caractérise l'échange d'énergie mécanique au niveau de l'interface.

L'expression explicite est :

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= \int_{\Gamma_i} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} \langle N_{pj} \rangle d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_i} \begin{bmatrix} N_i N_{pj} n_1 \\ N_i N_{pj} n_2 \end{bmatrix} d\Gamma \end{aligned} \quad (5.17)$$

Remarque :

- Pour un chargement sismique à la base : -fig.5.2-

$$W_{fs} = \int_{\Gamma_b} \delta U \rho \ddot{x} \bar{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_b} \delta U_n^T N_u^T \bar{n} \rho \ddot{x} d\Gamma \quad (5.18)$$

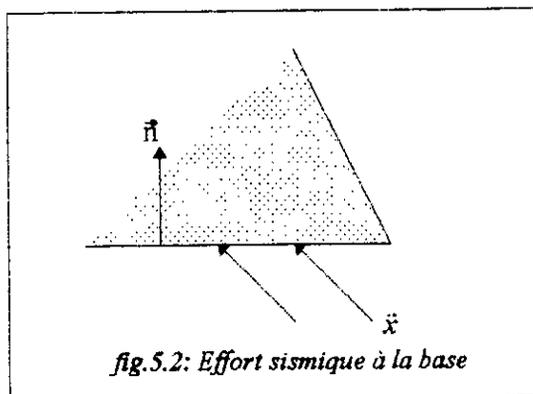
avec \ddot{x} : accélération sismique

$$W_{fs} = \delta U_n^T F;$$

$$F = \int_{\Gamma_b} N_u^T \bar{n} \rho \ddot{x} d\Gamma \quad (5.19)$$

L'expression explicite est :

$$F_i = \int_{\Gamma_b} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} \rho \ddot{x} d\Gamma \quad (5.20)$$



- L'amortissement du système est exprimé par :

$$W_a = C U_n \quad (5.21)$$

avec C : matrice d'amortissement dont l'expression diffère d'un auteur à un autre.

$$-C = \int_{\Omega} N^T \mu N d\Omega \quad [27] \quad (5.22a)$$

μ : viscosité du matériau.

$$- \mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad [3,9,28] \quad (5.22b)$$

α, β : coefficients déterminés expérimentalement ou à partir de l'analyse modale de la structure.

L'expression du système globale est : (après simplification de δP_n)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} - \mathbf{Q}\mathbf{P} = \mathbf{F} \quad (5.23)$$

5.2.2. Cas du fluide :

Remplaçons dans l'équation (4.52) P par (5.2) et (5.1) :

$$\begin{aligned} W = & \int_{\Omega} \delta \mathbf{P}_n^T \nabla \mathbf{N}_p^T \nabla \mathbf{N}_p \mathbf{P}_n \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{P}_n^T \mathbf{N}_p^T \frac{1}{C^2} \mathbf{N}_p \ddot{\mathbf{P}}_n \, d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_1} \delta \mathbf{P}_n^T \mathbf{N}_p^T \rho \mathbf{N}_u \bar{\mathbf{n}} \mathbf{U}_n \, d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \delta \mathbf{P}_n \mathbf{N}_p \frac{1}{g} \mathbf{N}_p \ddot{\mathbf{P}}_n \, d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_4} \delta \mathbf{P}_n^T \mathbf{N}_p^T \frac{1}{C} \mathbf{N}_p \dot{\mathbf{P}}_n \, d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

Simplifions δP_n (perturbation quelconque) et regroupons les facteurs de P, \dot{P} , \ddot{P} et \ddot{U}_n :

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{C^2} \mathbf{N}_p \, d\Omega + \int_{\Gamma_3} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{g} \mathbf{N}_p \, d\Gamma \right) \ddot{\mathbf{P}} \\ & + \left(\int_{\Gamma_4} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{C} \mathbf{N}_p \, d\Gamma \right) \dot{\mathbf{P}} + \left(\int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}^T \nabla \mathbf{N} \, d\Omega \right) \mathbf{P}_n \\ & + \left(\int_{\Gamma_1} \mathbf{N}_p^T \rho \mathbf{N}_u \bar{\mathbf{n}} \, d\Gamma \right) \ddot{\mathbf{U}} = 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

Le système s'écrit sous la forme :

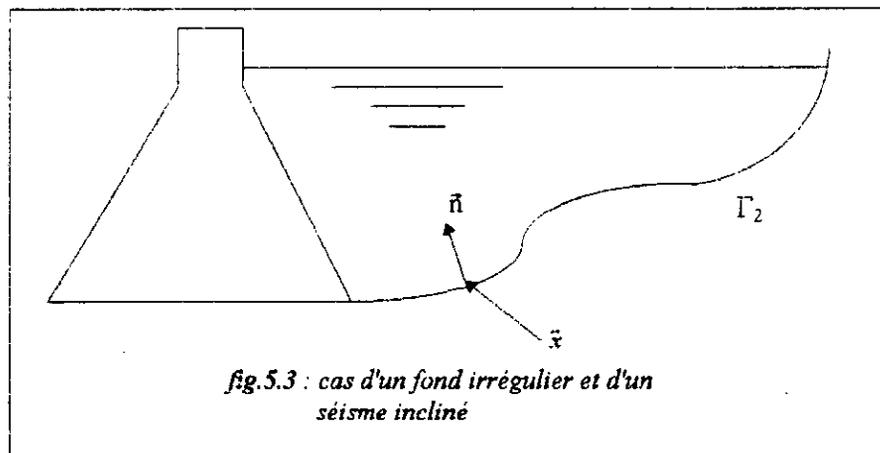
$$\mathbf{S}\ddot{\mathbf{P}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{P}} + \mathbf{H}\mathbf{P} + \mathbf{Q}_p \ddot{\mathbf{U}} = 0 \quad (5.26)$$

Remarque :

Comme pour le système précédent, dans le cas d'un séisme incliné, ou d'un fond irrégulier, le système serait égal à un vecteur force q chargé le long du fond :

$$q = \int_{\Gamma_2} \delta P \rho (\ddot{x} \bar{n}) d\Gamma \equiv \int_{\Gamma_2} N^T \rho \ddot{x} \bar{n} d\Gamma \quad (5.27)$$

Γ_2 : fond du réservoir. -fig.5.3-



Expression explicite des matrices:

$$\begin{aligned} \bullet S &= \int_{\Omega} N_p^T \frac{1}{C^2} N_p d\Omega + \int_{\Gamma_3} N_p^T \frac{1}{g} N_p d\Gamma \\ S_{ij} &= \int_{\Omega} N_i \frac{1}{C^2} N_j d\Omega + \int_{\Gamma_3} N_i \frac{1}{g} N_j d\Gamma \end{aligned} \quad (5.28)$$

S est la matrice de énergie cinétique du fluide, représente les forces d'inertie équivalentes à M .

Remarque :

Il est à noter que les termes de S sont très petits devant ceux de M à cause de la présence des facteurs $1/C^2$ et $1/g$.

Physiquement, cela montre la grande souplesse de l'eau devant celle du béton.

$$\bullet \mathbf{D} = \int_{\Gamma_4} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{C} \mathbf{N}_p \, d\Gamma \quad ; \quad \mathbf{D}_{ij} = \int_{\Gamma_4} N_i \frac{1}{C} N_j \, d\Gamma \quad (5.29)$$

\mathbf{D} : est la matrice de dissipation d'énergie à la limite de troncature.

Notons que les seuls effets dissipatifs sont dus à la condition de non réflexion d'onde (μ étant supposée nulle).

$$\bullet \mathbf{H} = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}^T \nabla \mathbf{N} \, d\Omega \quad ; \quad \mathbf{H}_{ij} = \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} \langle N_{i,x} \quad N_{i,y} \rangle \, d\Omega$$

$$\mathbf{H}_{ij} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_{i,x}^2 & N_{i,x} N_{i,y} \\ N_{i,y} N_{i,x} & N_{i,y}^2 \end{bmatrix} \, d\Omega \quad (5.30)$$

\mathbf{H} : est la matrice de l'opérateur laplacien.

$$\bullet \mathbf{Q}_p = \int_{\Gamma_1} \mathbf{N}_p^T \rho N_u \bar{\mathbf{n}} \, d\Gamma$$

C'est la même expression que la matrice d'interaction (5.16) avec les termes transposés :

$$\mathbf{Q}_p = -\rho \mathbf{Q}^T \quad (5.31)$$

Par cette expression on trouve bien la dépendance entre \mathbf{P} et \mathbf{U} .

5.3/- Couplage des systèmes différentiels :

Réécrivons les deux systèmes (5.23) et (5.26) en un seul système ayant comme variable de base $\{\mathbf{UP}\}$!

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \rho \mathbf{Q}^T & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad (5.32)$$

Masse

Amortissement

Rigidité

Chargement
sismique

Si nous considérons les vibrations libres et omettons toutes les dissipations, le système se réduit à :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ \rho \mathbf{Q}^T & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = 0 \quad (5.33)$$

On note immédiatement, que les matrices ne sont pas symétriques, donc tout essai d'analyse modale s'avère sans issu, et une symétrisation s'impose (car tout système physique possède des modes propres de vibration).

Pour y arriver, nous proposons les démarches suivantes :

- Le système (5.33) : $\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} - \mathbf{Q}\mathbf{P} = 0 \dots\dots\dots(a) \\ \mathbf{S}\ddot{\mathbf{P}} + \mathbf{H}\mathbf{P} + \rho\mathbf{Q}^T\ddot{\mathbf{U}} = 0 \dots\dots\dots(b) \end{cases}$

- de (5.33b) : $\mathbf{P} = -\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{S}\ddot{\mathbf{P}} + \rho\mathbf{Q}^T\ddot{\mathbf{U}})$ (5.33c)

- (5.32c) dans (5.32a) :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{Q}\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{S}\ddot{\mathbf{P}} + \rho\mathbf{Q}^T\ddot{\mathbf{U}}) = 0 \quad (5.33d)$$

- $(\mathbf{M} + \mathbf{Q}\mathbf{H}^{-1}\rho\mathbf{Q}^T)\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{Q}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{S}\ddot{\mathbf{P}} = 0$ (5.33e)

- multiplions (5.33b) par $\mathbf{S}\mathbf{H}^{-1}$:

$$\mathbf{S}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{S}\ddot{\mathbf{P}} + \mathbf{S}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P} + \mathbf{S}\mathbf{H}^{-1}\rho\mathbf{Q}^T\ddot{\mathbf{U}} = 0$$

$$\mathbf{S}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{S}\ddot{\mathbf{P}} + \mathbf{S}\mathbf{P} + \mathbf{S}\mathbf{H}^{-1}\rho\mathbf{Q}^T\ddot{\mathbf{U}} = 0 \quad (5.33f)$$

- assemblons (5.33e) et (5.33f), avec multiplication de (5.33e) par ρ :

$$\begin{bmatrix} \rho\mathbf{M} + \mathbf{Q}\mathbf{H}^{-1}\rho^2\mathbf{Q}^T & \rho\mathbf{Q}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{S} \\ \rho\mathbf{S}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{Q}^T & \mathbf{S}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho\mathbf{K} & 0 \\ 0 & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = 0$$

La symétrie est donc vérifiée puisque :

- $\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{S}$: symétriques.

- \mathbf{H} : symétrique; donc \mathbf{H}^{-1} : symétrique.

Par conséquent $\mathbf{Q}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{Q}$: symétrique et $\mathbf{M} + \mathbf{Q}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{Q}$: symétrique.

D'autre part : $(\mathbf{Q} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{S})^T = \mathbf{S}^T \mathbf{H}^{-1T} \mathbf{Q}^T \equiv \mathbf{S} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{Q}^T$

Chapitre 6

**Mise en œuvre et techniques
de programmation**

Mise en œuvre et techniques de programmation

6.1/- Introduction :

Il existe aujourd'hui beaucoup de programmes et systèmes d'analyse par éléments finis, efficaces et susceptibles de traiter des problèmes très diversifiés ayant un grand nombre d'inconnus. Le point faible des programmes sur petits ordinateurs réside dans le fait qu'ils ne peuvent pas garder en mémoire la totalité des matrices globales; on ne peut donc traiter que quelques centaines d'inconnus.

Toutefois, il est possible d'augmenter la capacité de traitement quitte à rendre le programme plus complexe et plus long en exécution.

Le but de ce chapitre est de présenter le programme conçu tout en illustrant quelques techniques de mise en œuvre.

6.2/- Structure générale :

Les programmes d'éléments finis peuvent être décomposés en trois parties essentielles : -fig.1-

-Préparation et entrée des données.

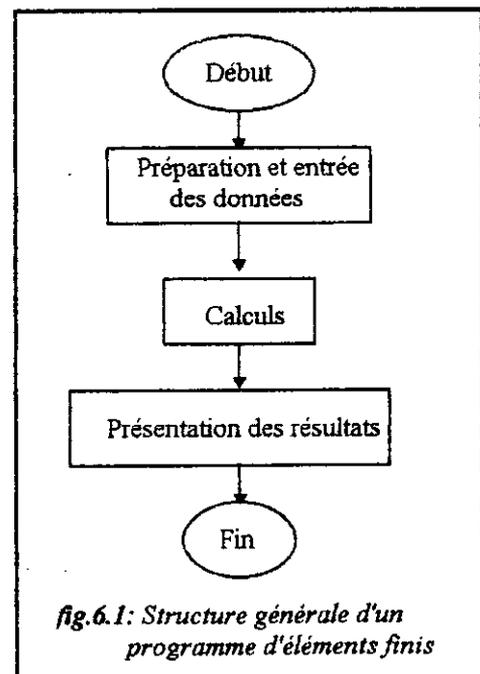
-Traitements et calculs.

-Présentation des résultats.

6.2.1- Présentation des données :

La présentation des données contient,

en général, un module qui lie et arrange dans des blocs (structures) les données relatives à la géométrie, aux matériaux, type de



chargement, nombre d'éléments, et un procédé d'entrée des connectivités des nœuds et coordonnées des éléments (maillage) :

- soit une lecture simple sur fichier,
- soit "un mailleur automatique".

Dans notre cas, on dispose d'un module simple constitué par :

-Une entrée permettant de lire soit d'un fichier, soit d'un écran graphique :

*Les dimensions du barrage.

*La hauteur du fluide et la largeur de troncature dans le réservoir.

*nombre d'éléments pour le solide et pour le fluide.

*Type d'éléments (quatre(4) sont disponibles).

-Un mailleur qui calcule les connectivités des éléments et les coordonnées des nœuds, fait une visualisation du maillage sur écran, pour la vérification, et stocke les résultats dans deux fichiers, l'un pour barrage et l'autre pour fluide.

6.2.2-Traitement et calculs :

C'est la partie essentielle du programme; elle comporte les différentes procédures de calcul.

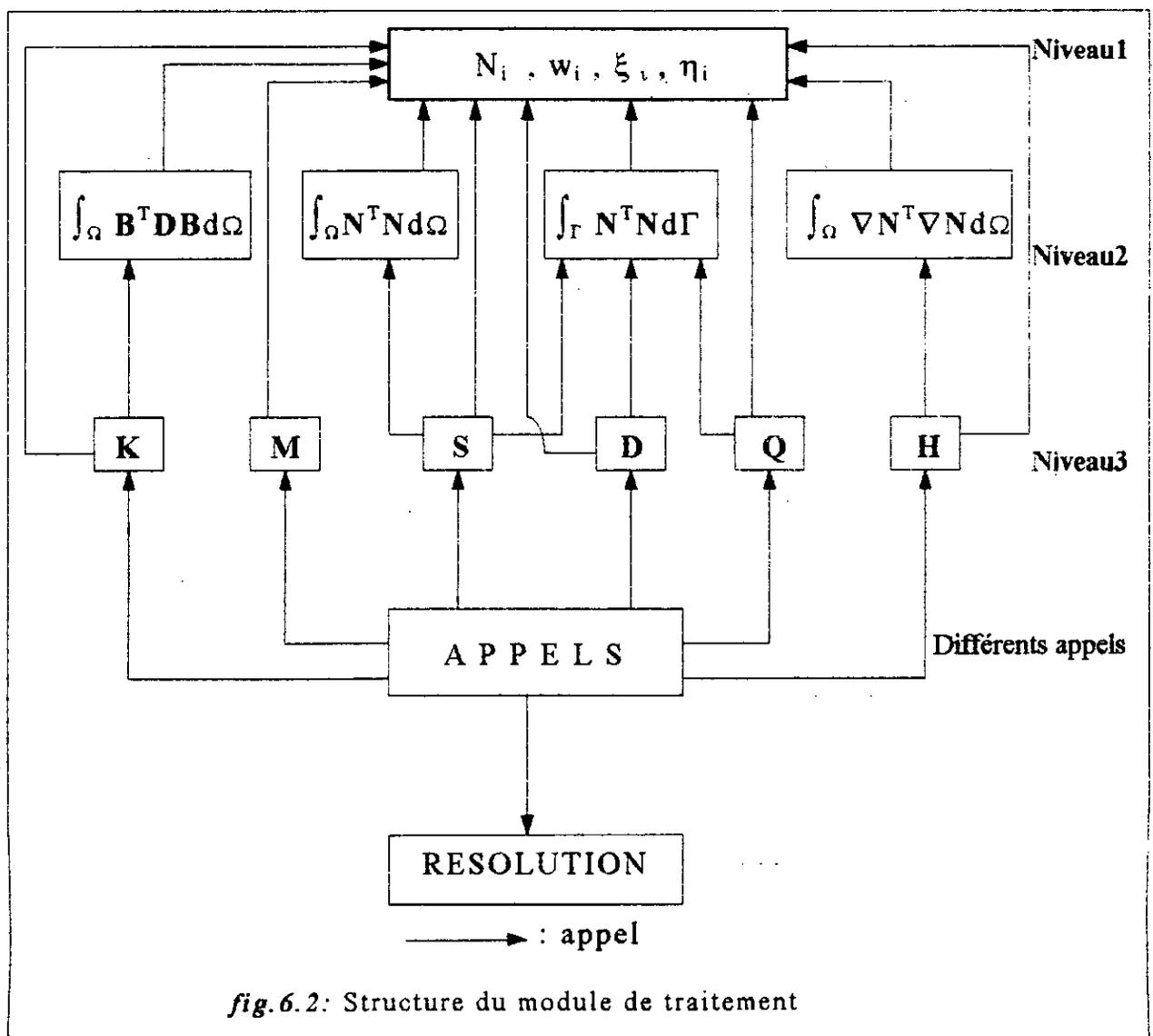
En général, elle est constituée de programmes de construction des matrices élémentaires, d'assemblage, des conditions aux limites et de résolution.

La méthode de calcul des matrices proposée est constituée de trois niveaux de calcul -fig.2-.

1^{er} niveau : modules de base : se basant sur la formulation des éléments, comportent les formules de bases utilisées telles que, les fonctions de forme, les points et poids de quadrature de Gauss.

2^{ème} niveau : modules de calculs : se chargent des routines de calcul nécessaires à la construction des matrices élémentaires .

3^{ème} niveau : modules de contrôle : font le choix du nombre de points de Gauss selon le type d'élément utilisé, puis bouclent les calculs sur les éléments avec l'assemblage et sauvegarde de la matrice globale.



La partie résolution est constituée par deux programmes. Le premier se charge du couplage des matrices globales et des conditions initiales. Le deuxième effectue la résolution du système par la méthode de Newmark.

6.2.3. Présentation des résultats :

Les résultats trouvés doivent être présentés sous un certain format, en général un fichier prêt à être lu par un logiciel tel que : Grapher, Surfer, ..., pour les présenter sous forme graphique. C'est le procédé le plus simple.

Un autre procédé est de construire une interface graphique. Une idée simple et pratique est d'utiliser le dessin du maillage pour représenter la déformée; il suffit d'ajouter aux coordonnées des nœuds géométriques les déplacements calculés.

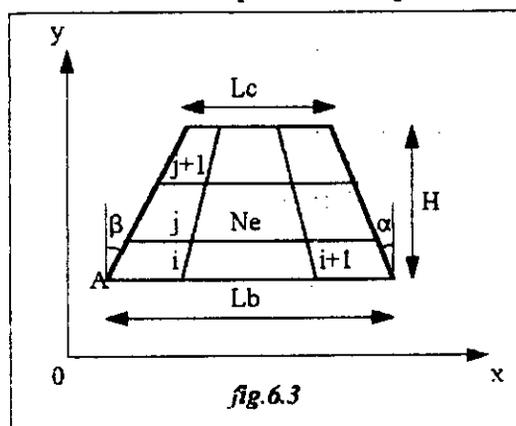
6.3/- Développement :

Le but de cette section est de montrer quelques méthodes efficaces pour obtenir un gain en temps machine comme en temps programmeur lors de l'implémentation du code d'éléments finis.

6.3.1. Le maillage :

L'idée de base est de discrétiser une surface trapézoïdale. Le sous-programme a comme entrée la position dans le repère du point A, -fig. 6.3- la hauteur H , les largeurs et les angles d'inclinaison.

* Pour le calcul des connectivités, on procède comme pour un rectangle.

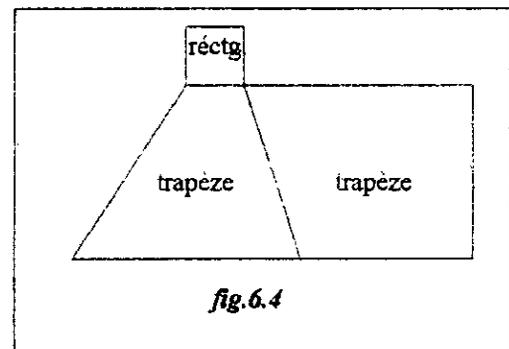


* Pour le calcul des coordonnées, il suffit de donner les coordonnées (x_i, y_i) du point A, de calculer à chaque pas sur y (hauteur et nombre d'éléments étant constants) le pas sur x en faisant un ajustement sur la largeur de l'élément.

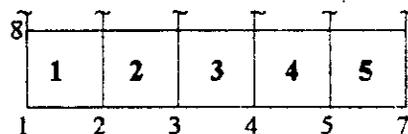
Le système barrage-réservoir peut être obtenu donc par superposition de deux surfaces : trapèze et rectangle ($\alpha=\beta=\pi/2$ et $L_b=L_c$) pour le barrage et une autre surface juxtaposée semblable (avec $\beta_2=-\alpha$ et $\alpha_2=\pi$) pour le fluide. -fig.6.4-

Pour l'interface et les conditions aux limites, le mailleur donne les éléments aux bords.

Pour les conditions aux limites dans le barrage, les nœuds le long de la base seront numérotés de 1 à la dernière connectivité du premier élément diminuée de 1.



Exemple :



$$7 = \text{convec} (1, 4) - 1$$

Aussi avec ce même procédé on pourra obtenir d'autres formes de surfaces avec la superposition de trapèzes à angles différents.

• Possibilités du mailleur :

- Fait un ajustement sur la hauteur des éléments de façon qu'un nœud coïncide avec le niveau du fluide et un autre nœud avec le changement de section à la crête.

- Détecte les nœuds et éléments aux bords du domaine.

• Algorithme de calcul des connectivités :

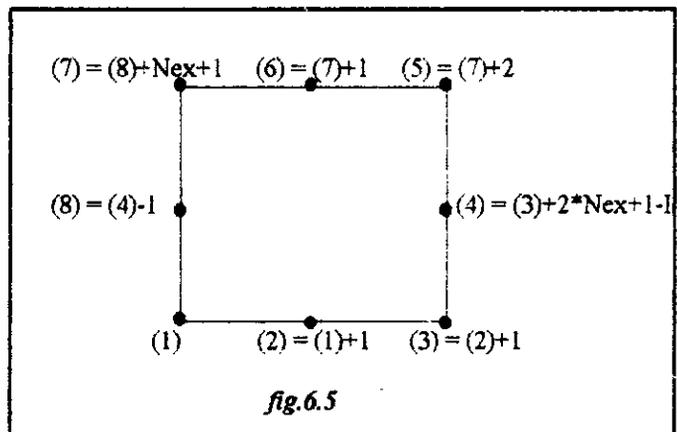
```

J=1,Ney ;nombre d'éléments sur y
┌
I=1,Nex ;nombre d'éléments sur x
├
Net=Net+1 ;incrémenter le nombre d'éléments total
├
conec(Net,1)=J+(J-1)*3*Nex+1 ;pour l'élé 8 nœuds
├
conec(Net,1)=J+(J-1)*4*Nex+1+(I-1)*2 ;pour l'élé 6 nœuds
├
conec(Net,1)=J+Net-2 ;pour l'élé 4 nœuds
├
conec(Net,1) = J+Net-1 ;pour l'élé 3 nœuds
└
    
```

Les autres connectivités sont déduites de la première.

Exemple : -fig.6.5-

Avec I : numéro de l'élément sur x.



• Algorithme de calcul des coordonnées :

X = X_i Y = Y_i ;initialiser X et Y aux coordonnées du point A -fig.6.4-

```

J = 1,Ney
┌
H = L - (Y - Yi)*(Fm + Fn)/Nex ;ajuster la longueur de l'élément
├
I = 1,2*Nex+1 ;selon l'inclinaison des parements
├
Nnt = Nnt + 1
├
Coord(Nnt,1) = X
├
Coord(Nnt,2) = Y
├
X = X + Hex
├
Y = Y + Ney
├
X = Xi + (Y - Yi)*(Fm + Fn)/Nex
└
    
```

6.3.2. Les calculs :

6.3.2.1. Variables transitées - organisation :

L'organisation des variables se fait selon les deux niveaux : élémentaire et globale.

• Au niveau de la construction, un bloc commun comprenant les variables suivantes :

- FF(3,8) : fonctions de formes et dérivées ($N, \partial N / \partial \xi, \partial N / \partial \eta$)
- XY(8,2) : coordonnées des nœuds de l'élément
- XJ(2,2) : jacobien
- DJ : déterminant du jacobien
- WPG(3,7) : points et poids de Gauss
- Npg : nombre de points de Gauss
- Nne : nombre de nœuds par élément

transite entre les modules de base, de calcul, et d'assemblage.

Un deuxième bloc contient deux matrices de petite taille utilisées pour la construction des différentes matrices élémentaires.

- SE(16,16) : pour un maximum de $Nne = 8$ et nombre de degré de liberté = 2 ($NDL = 2$)

- QE(16,8) : pour l'interaction, [$8*(NDL = 2)$] pour le solide et [$8*(NDL = 1)$] pour le fluide.

Et un vecteur D de 9 éléments gardant les propriétés suivantes :

- D1, D2, D3 : éléments de la matrice d'élasticité
- D4 : masse volumique du béton
- D5 : masse volumique de l'eau

- D6 : l'inverse de la gravité ($1/g$)
- D7 : l'inverse de la célérité ($1/c$)
- D8, D9 : les cosinus directeurs de la normale au parement
amont

Ce bloc n'est déclaré que dans les modules de calculs et de contrôle.

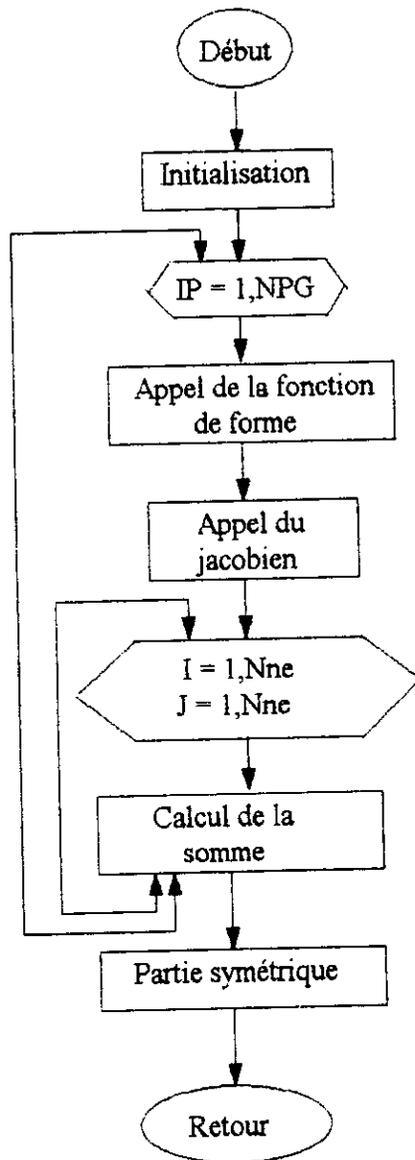
- Au niveau global, une seule matrice globale est déclarée. Elle est vidée, construite puis sauvegarder dans un fichier par chaque module de contrôle et d'assemblage.

Au niveau de la résolution, tous les problèmes d'espace mémoire se posent à ce niveau. Il faut charger selon la méthode de 2 à 7 matrices globales, deux couplées ou trois selon qu'on considère ou pas les amortissements.

6.3.2.2. Calcul des matrices élémentaires :

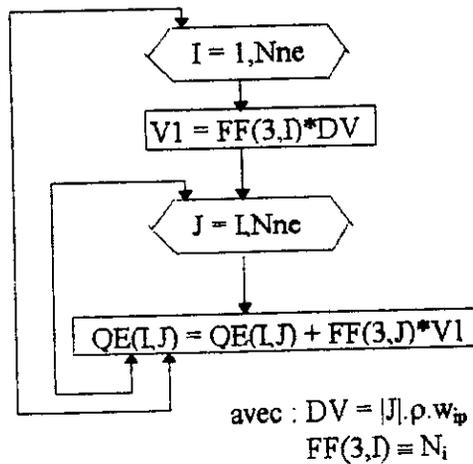
* Conception générale :

Tous les algorithmes ont la même structure générale donnée par -
fig.6.1-.

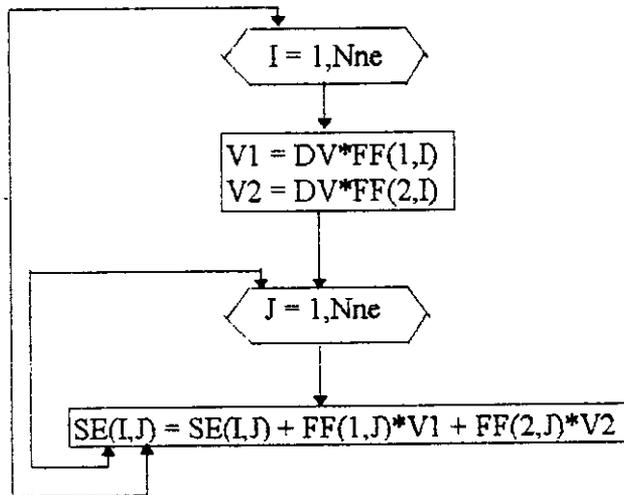


où la somme est calculée comme suit :

• pour : $\int_{\Omega} N^T N d\Omega$:

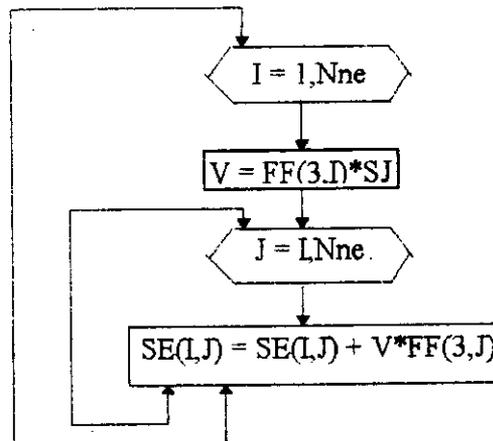


• pour $\int_{\Omega} \nabla N^T N d\Omega$:



avec : $FF(1,I) \equiv N_{i,\xi}$
 $FF(2,I) \equiv N_{i,\eta}$

• pour $\int_{\Gamma} N^T N d\Gamma$:

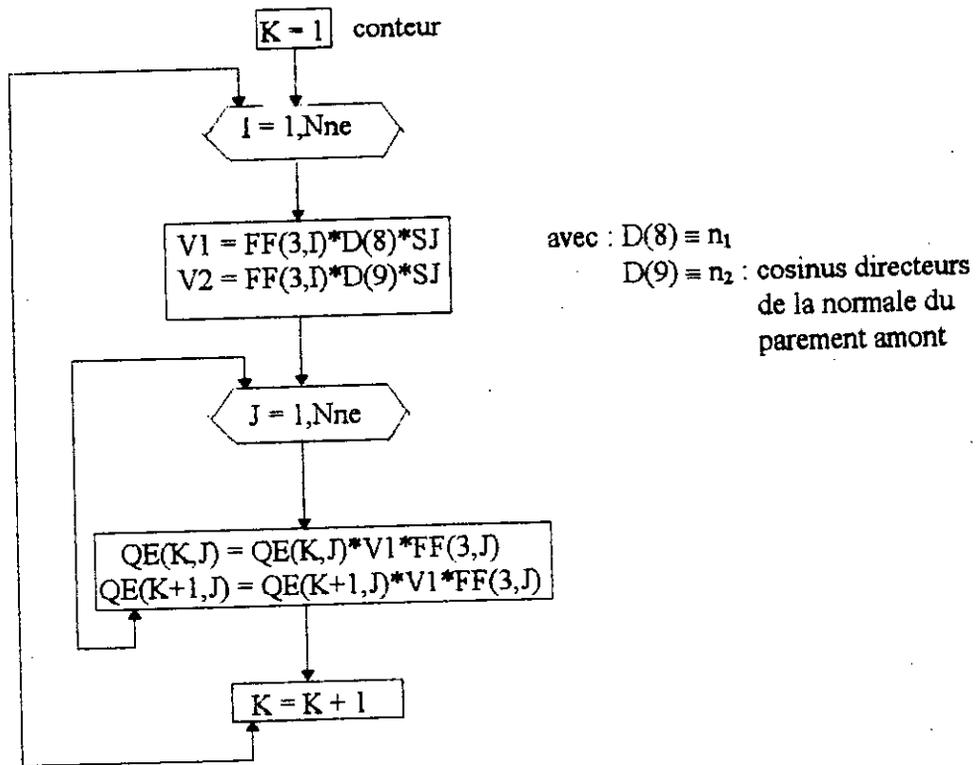


avec : $SJ = w_{ip} \cdot \rho \cdot \sqrt{X^2_{,\eta} + Y^2_{,\eta}}$ voir §3.5.3

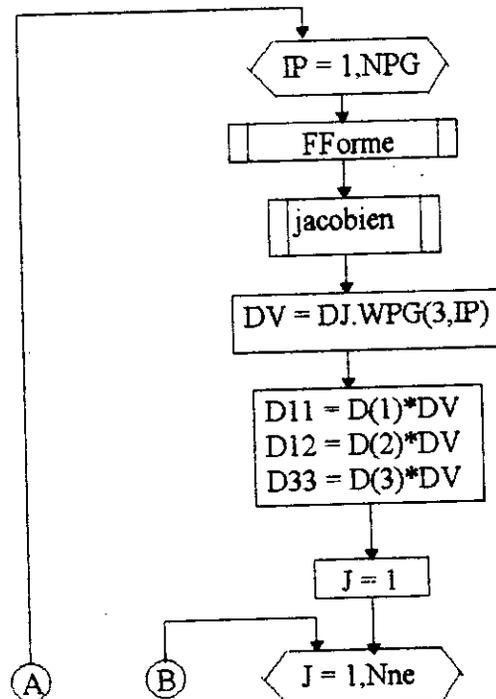
• pour l'interaction, il est préférable de calculer deux termes à la fois. L'équation (5.17) donne :

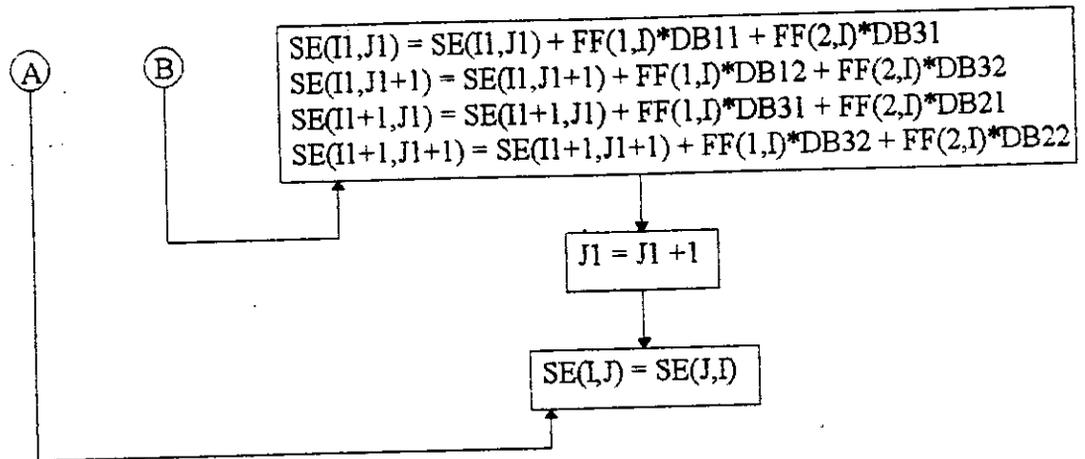
$$Q(I,J) = \begin{bmatrix} FF(3,I)*FF(3,J)*n1 \\ FF(3,I)*FF(3,J)*n2 \end{bmatrix}$$

Ce qui impose l'ajout d'un conteur pour la direction I.

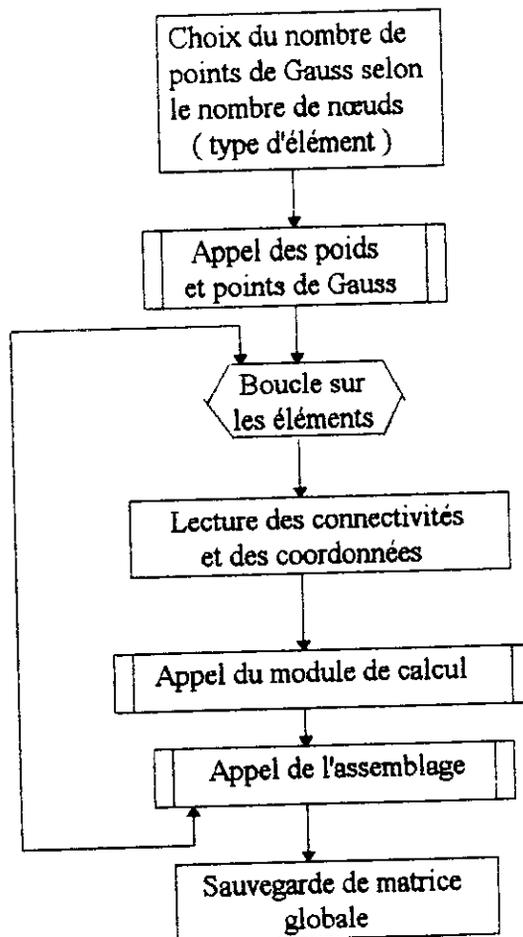


• pour le calcul de la matrice de rigidité , il est préférable d'explicité le produit pour chaque nœud. On aura donc l'organigramme complet suivant et il convient d'ajouter deux conteurs.





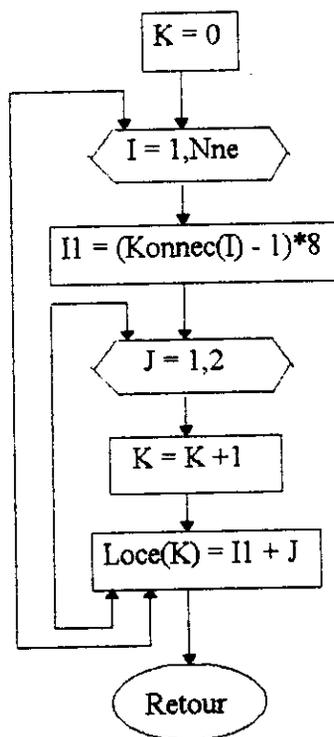
La structure des modules de contrôle est donnée par l'organigramme suivant :



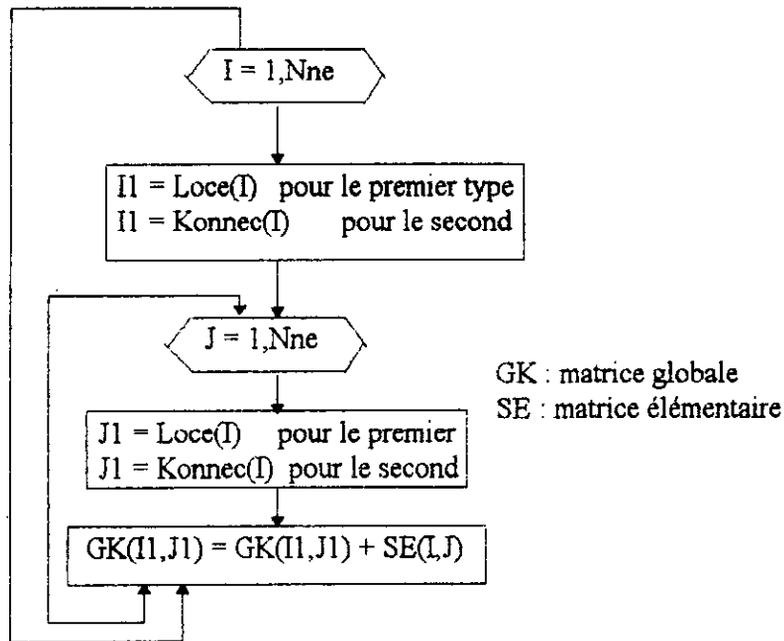
Toutes les matrices sont construites de cette manière sauf la matrice S (5.28) pour laquelle il faut faire deux appels de calcul, et la matrice M (5.12) dans laquelle il faut insérer des zéros.

6.3.3. L'assemblage : Nous avons à assembler deux types de variables globales : l'un à un degré de liberté (p) et l'autre à deux degrés de liberté (u,v), donc il faut faire deux programmes d'assemblage; le premier se base sur les localisations et l'autre sur les connectivités.

Les localisations sont calculées comme suit :



Et l'assemblage devient donc :



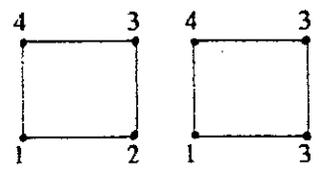
Remarque : Il est très important de noter que l'assemblage de la matrice Q (5.16) d'interaction se fait selon les deux types d'assemblage, c'est à dire qu'il faut remplacer $J1 = Loce(J)$ dans l'organigramme précédent par $J1 = Konnec(J)$ avec les connectivités des éléments fluides à l'interface prises comme si l'élément est inversé.

Donc pour :

- $Nne=3$: il faut remplacer $Konnec(2)$ par $Konnec(3)$
-

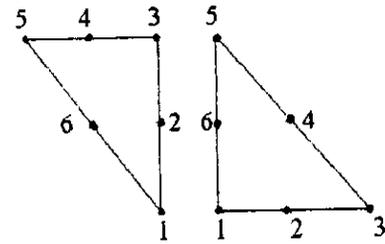
- $Nne=4$: il faut remplacer $Konnec(2)$ par $Konnec(1)$

et $Konnec(3)$ par $Konnec(4)$



- Nne=6: il faut remplacer Konnec(2) par Konnec(3)

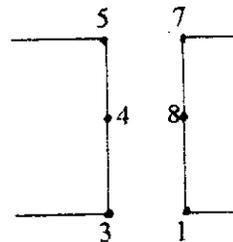
et Konnec(3) par Konnec(5)



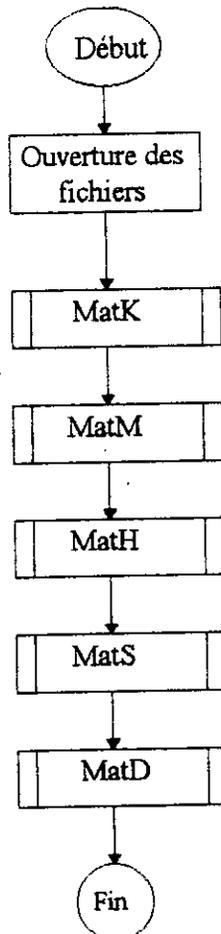
- Nne=8: il faut remplacer Konnec(3) par Konnec(1),

Konnec(4) par Konnec(8)

et Konnec(5) par Konnec(7)



En fin avec cette structure, le programme de construction des matrices de présente sous la forme :

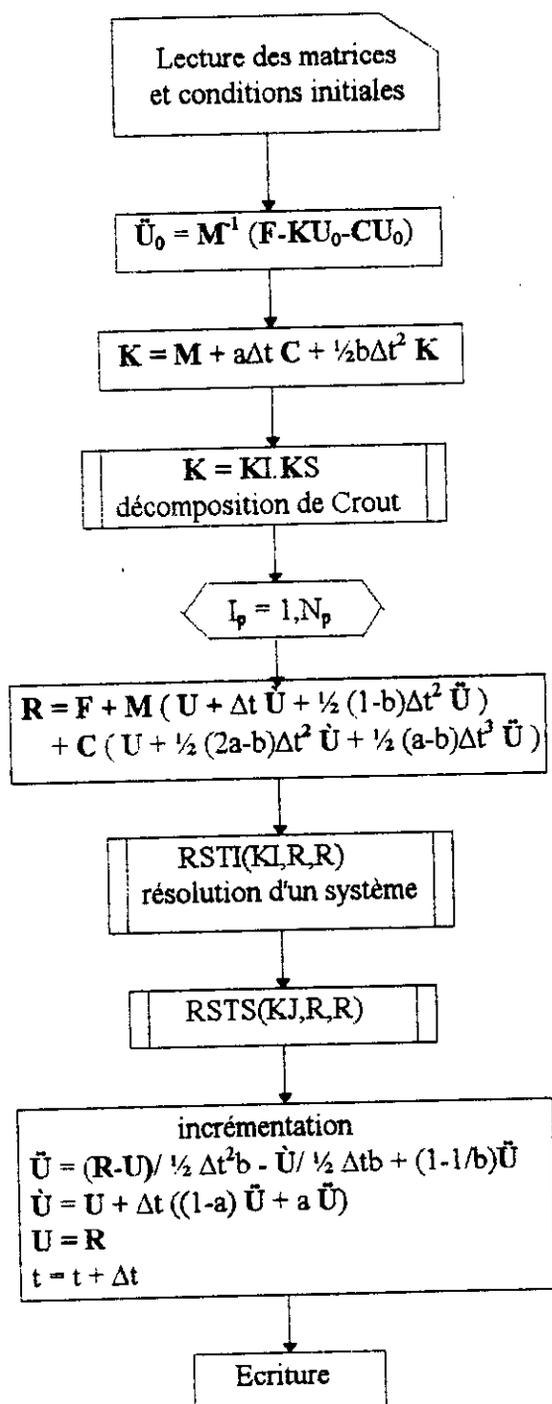


Reste la matrice C qui est calculée dans le programme de couplage par :

$$C = \alpha M + \beta K$$

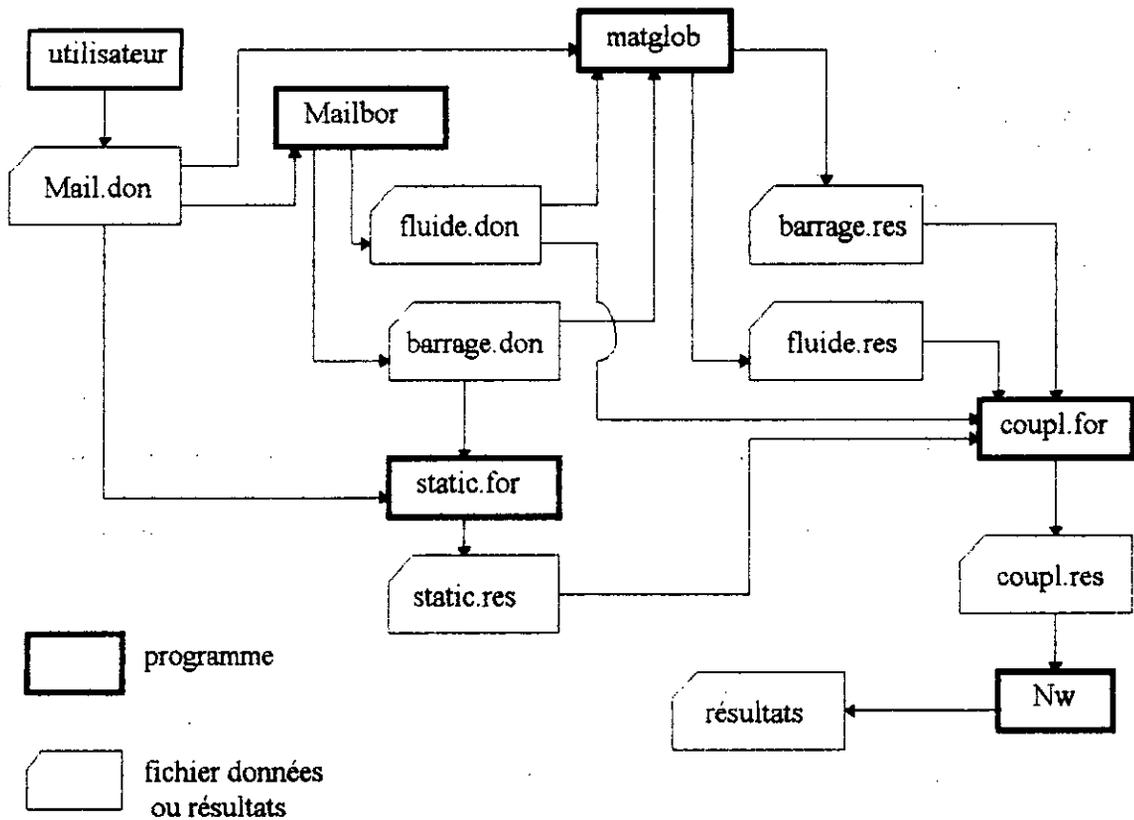
6.3.4. Résolution

La méthode de Newmark présentée dans §3 est implémentée dans ce programme de la manière suivante :



où RSTI et RSTS sont respectivement des sous programmes de résolution des systèmes triangulaires inférieurs et supérieurs.

6.4. Organisation des programmes et des fichiers :



Spécification des programmes :

Nom	Fonction
Maillage	Maillage automatique
Matglob	Construction des matrices globales
Static	Résolution du cas statique pour avoir les déplacements à l'état statique
Coupl	Effectue le couplage des matrices globales en 3 matrices non symétriques et les conditions initiales
Nw	Résolution du système couplé par la méthode de Newmark

Contenu des fichiers :

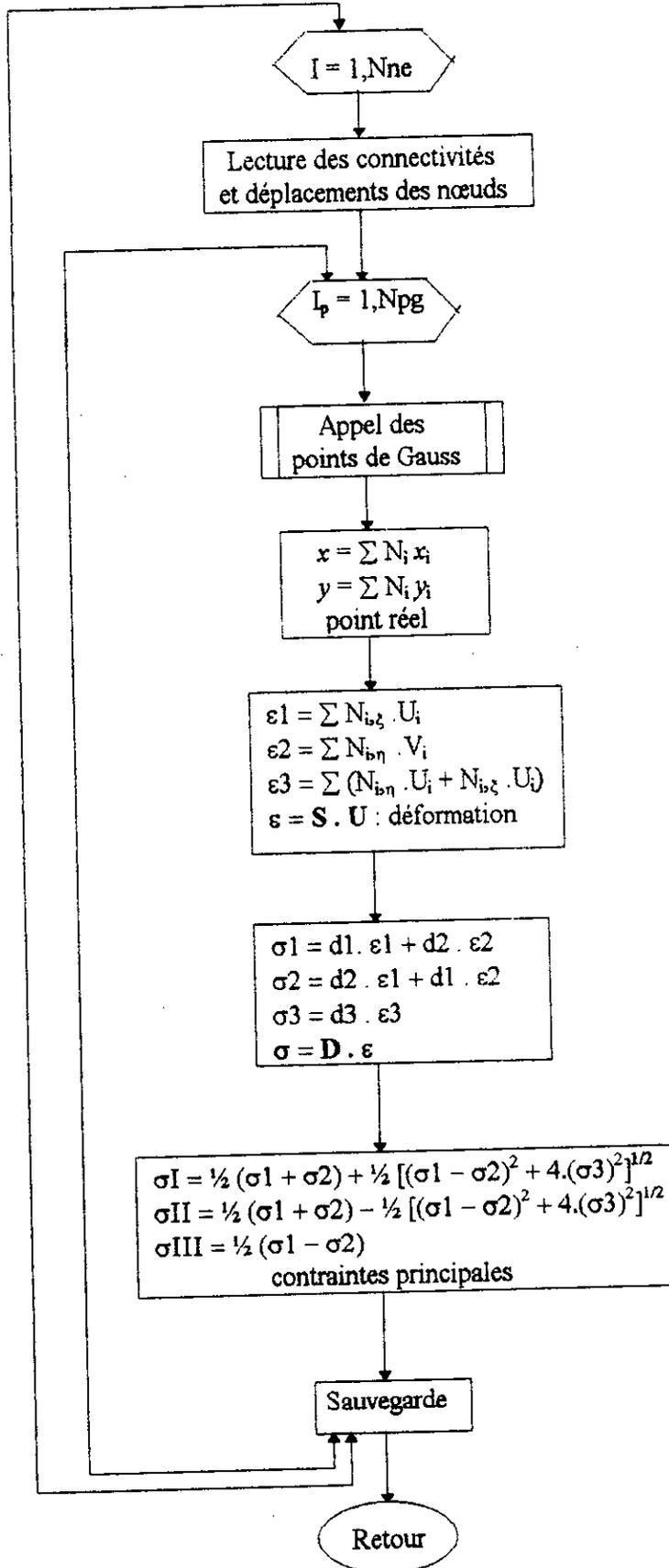
Fichier	Contenu
Mail.don	Données géométriques et caractéristiques des matériaux
Fluide.don	Connectivités et coordonnées des nœuds pour le fluide
Barrage.don	Connectivités et coordonnées des nœuds pour le barrage
Fluide.res	Matrices H , S et D
Barrage.res	Matrices K et M
Static.res	Vecteur des déplacements correspondant au cas statique
Coupl.res	Matrices CK , CM , CC couplées

6.5. Calcul des contraintes :

Un programme optionnel de calcul des contraintes est ajouté pour déterminer les efforts internes correspondant à l'instant où la pression est maximale, ou à n'importe quel moment de l'histoire de la réponse du barrage. Il suffit de sauvegarder les déplacements correspondant.

Pour se faire, il faut utiliser les fichiers des données du maillage et le fichier des déplacements ainsi que les modules de calcul du programme de construction des matrices globales.

Les calculs sont fait au points de Gauss pour éviter leur répétition d'un élément à l'autre. On procède de la manière suivante :



Chapitre 7
Applications

Applications et interprétations des résultats

Ce chapitre est organisé en trois parties. La première partie est consacrée à la validation du modèle adapté en comparant les résultats avec ceux obtenus par Zangar [25] et Humar [14,15]. En deuxième partie on aborde l'étude du phénomène d'interaction, l'accent est mis sur l'influence des paramètres suivants :

- Compressibilité de l'eau.
 - Rigidité du barrage.
 - Inclinaison du parement amont.
 - Fréquence d'excitation.
- et l'amortissement du système.

Dans la troisième partie on applique trois accélérogrammes :

- Répliques du séisme d'Asnam (10.10.1980, $a_{\max} = 1,302 \text{ m/s}^2$).
- Séisme de Loma-Preita, Californie (17.10.1989) en deux stations : St10, $a_{\max} = 6,17 \text{ m/s}^2$ et St20, $a_{\max} = -4,62 \text{ m/s}^2$.

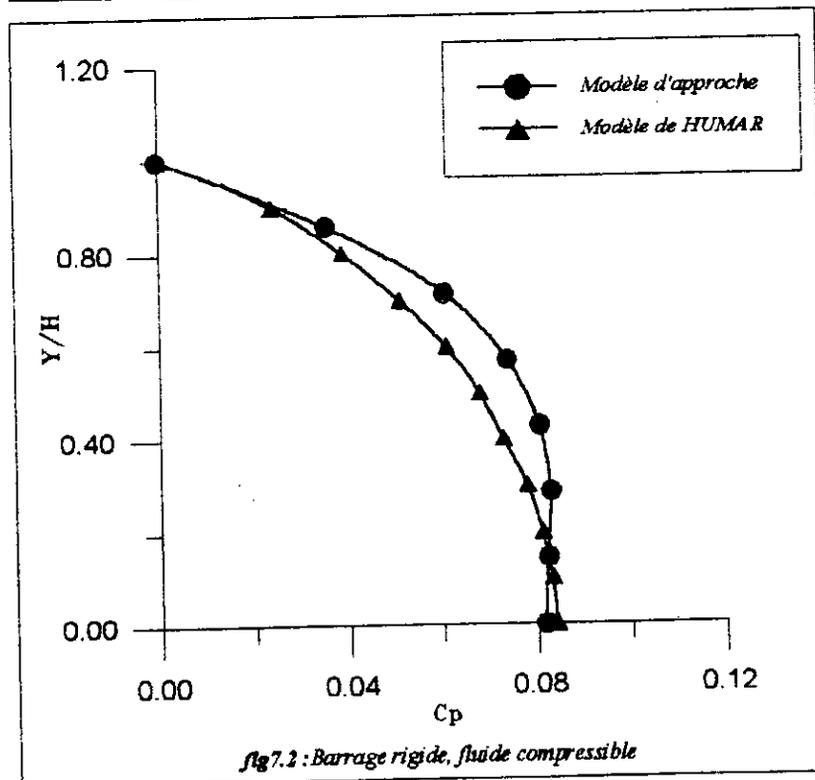
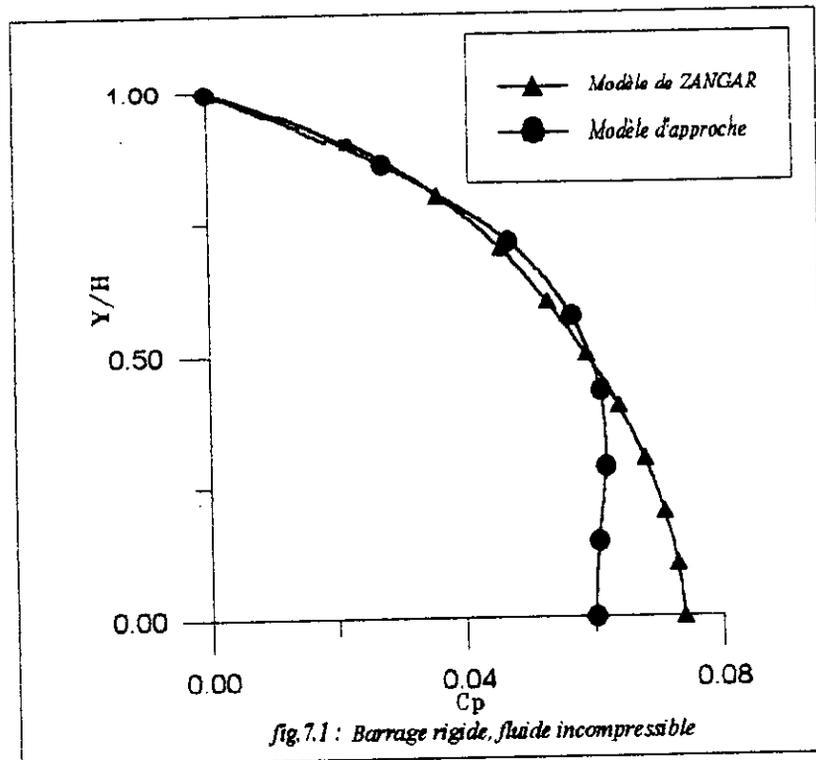
sur deux barrage : Hammam Grouz ($H = 50\text{m}$) et Pine Flat ($H = 116\text{m}$, King River, Californie).

La distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage sera représentée par la variation du coefficient de pression $C_p = P/\rho gH$ en fonction du rapport de la profondeur considérée à la profondeur total du réservoir Y/H .

La *fig. 7.1* montre cette distribution pour un barrage rigide et fluide incompressible selon le modèle de Zangar^[25] et celui qu'on a utilisé. La rigidité et l'incompressibilité sont intégrées dans le modèle en augmentant la valeur de la célérité des ondes dans l'eau et le module de rigidité du barrage et en imposant dans le programme de résolution l'accélération sismique (du signal) à tous les nœuds du barrage. La courbe obtenue est très proche de celle de Zangar dans la partie supérieure du parement, la différence au fond est due au fait qu'on ne peut imposer cette accélération aux nœuds de la base puisque les déplacements de ces nœuds ne figurent pas dans les matrices assemblées.

Dans la *fig. 7.2* le cas de barrage rigide et fluide compressible est approché. Les résultats sont comparés à ceux de Humar^[14,15]. L'allure de la courbe donne un agrément et le décalage au centre du parement peut être expliqué par le fait que l'incompressibilité correspond à des valeurs de C infiniment grandes, qu'on ne peut pas faire entrer pour le programme (problème de division par zéro), d'une part, d'autre part, l'auteur néglige les effets des ondes de surfaces alors que nous les prenons en compte. A ces arguments doit être ajoutée l'erreur induite par la discrétisation par éléments finis et l'intégration pas à pas.

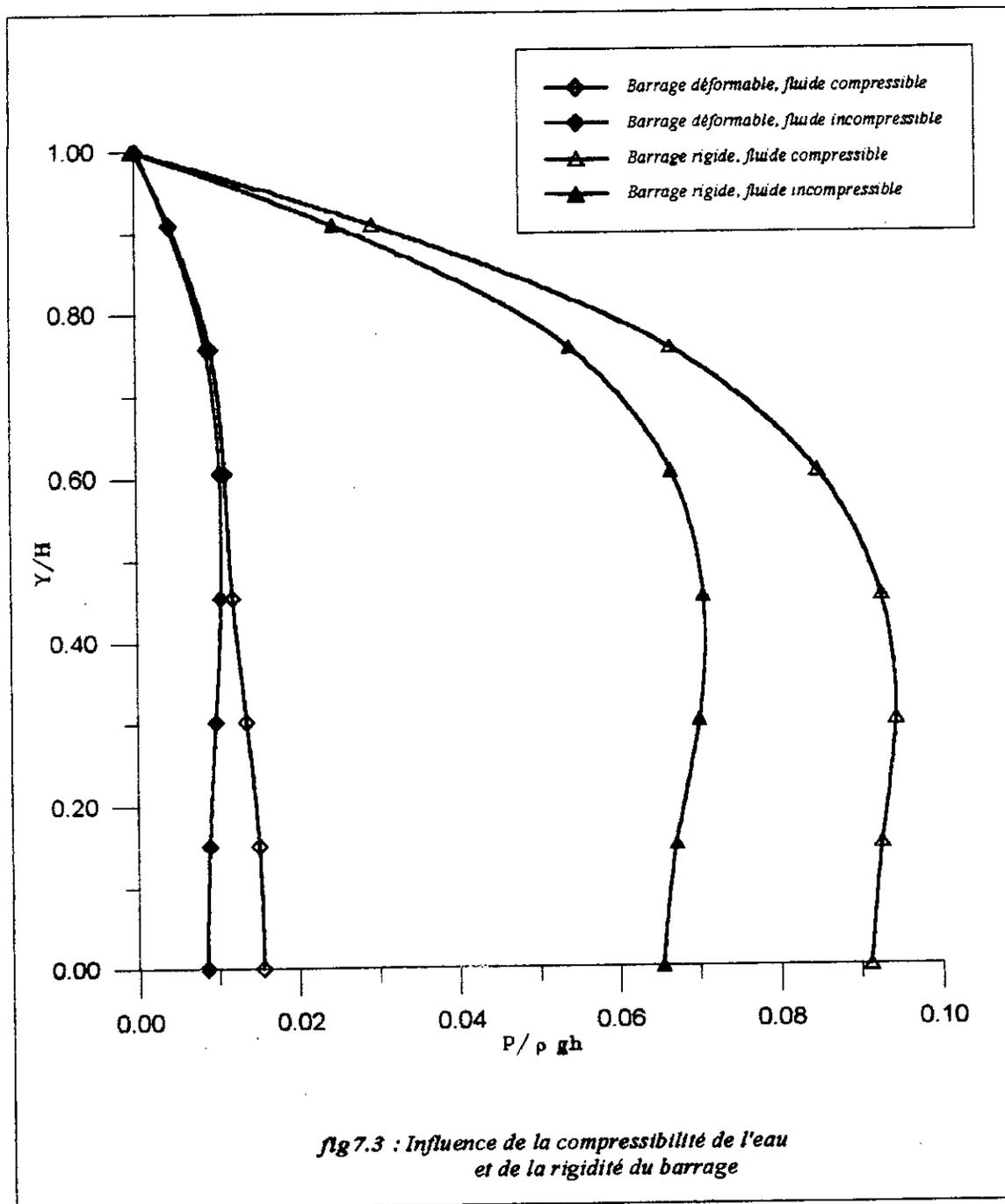
Par ces deux exemples, on peut affirmer que le modèle élaboré est valable.

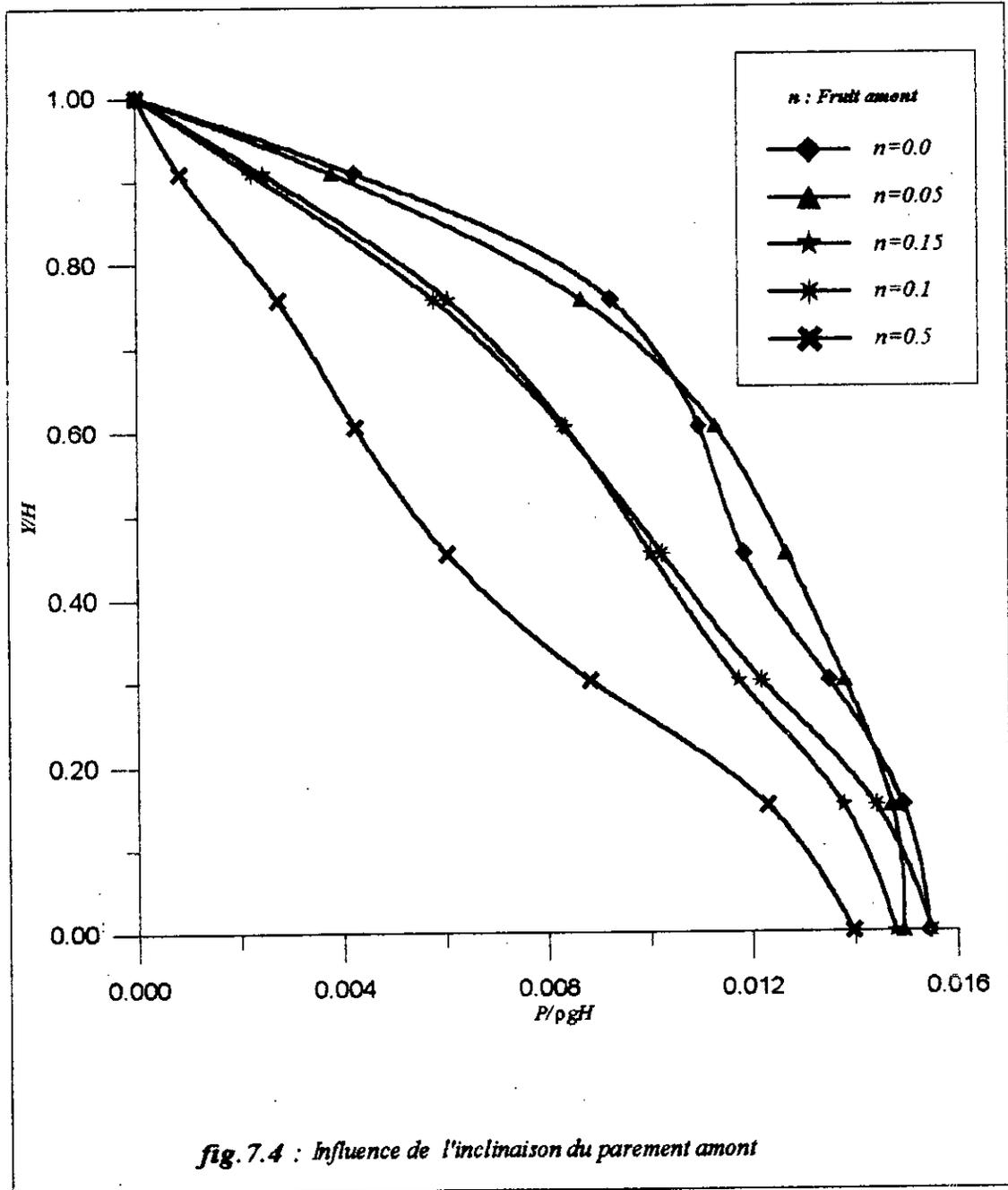


On montre dans la figure 7.3 que si on ne prend pas en compte la compressibilité de l'eau l'erreur comise n'est pas négligeable. Elle est dans ce cas de l'ordre 30% et peut dépasser les 60% selon O'Connor^[17]. L'auteur indique aussi que si la fréquence fondamentale du système est proche de celle du réservoir ($\omega_n = \pi C/2H$) alors la réponse est fortement résonnante et l'erreur de négliger la compressibilité devient très grande. Cela est du au fait que la compressibilité provoque un effet de battement dans le comportement de la réponse. Ce phénomène de battement est illustré par la figure 7.6 dans laquelle on représente les déplacements d'un point à la crête et la variation de la pression au fond du réservoir (à l'interface) lors d'une excitation harmonique de fréquence critique.

Dans la figure 7.5, on remarque que la réponse à un signal harmonique reste harmonique dans les deux cas de fluide compressible et incompressible, et l'amplification de l'amplitude par la compressibilité reste valable.

D'autre part, on déduit de la figure 7.3 que la rigidité du barrage influt d'une manière considérable les forces hydrodynamiques maximales. Ainsi, si le barrage est flexible une partie d'énergie est absorbée par les déformations lorsque le parement amont bute contre le réservoir alors qu'elle est totalement transmise à l'eau si le barrage est infiniment rigide. Donc l'inclinaison du parement où se fait le passage d'énergie favorise la diminution des pressions puisqu'une partie de la quantité du mouvement est dissipée verticalement. Chose confirmée dans la figure 7.4.





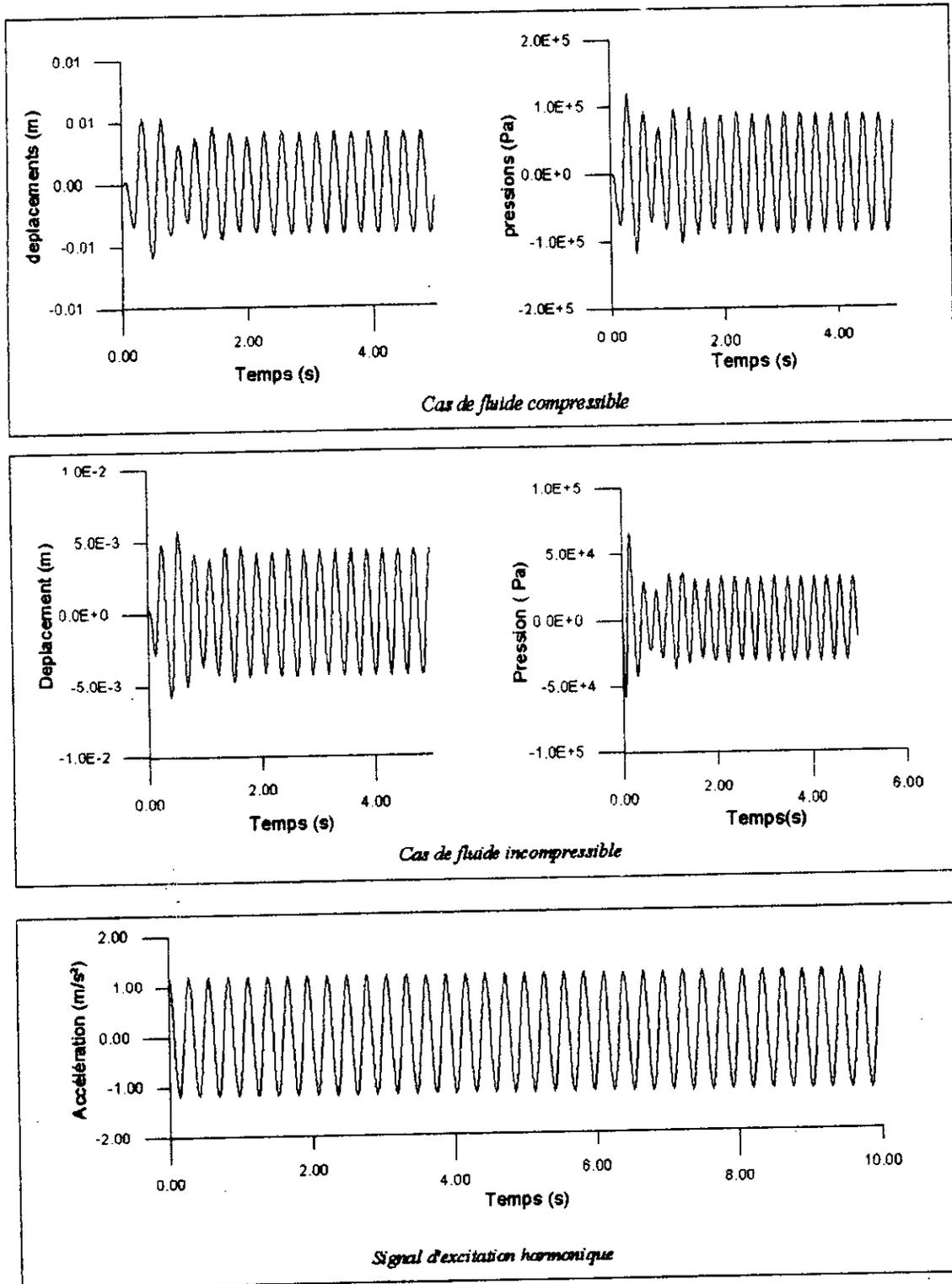


fig. 7.5 : Réponse à un signal harmonique $\omega = \omega_n = 22.62$ rad/s

- Déplacements horizontaux d'un noeud à la crête
- Pression sur le parement au fond du réservoir

Une expérience est faite en variant la fréquence d'excitation d'un signal harmonique appliqué au barrage Pine Flat ^[4] pour déterminer les pressions correspondantes. Les résultats sont reportés dans la figure 7.6 dans laquelle le pique maximum n'est pas obtenu à la fréquence fondamentale du système ni du barrage mais à une valeur critique pour laquelle les deux modes propres du barrage vide et plein sont égaux. Les autres piques sont inférieurs à celui qui correspond au mode fondamental. On reporte ci-dessous les valeurs des modes propres trouvées par Chopra ^[4].

Barrage plein :	18.21	48.33	68.29	82.67
Barrage vide :	24.54	50.26	68.29	87.26

Le pique est trouvé à la valeur 68.29.

On remarque par ces valeurs que le réservoir augmente les période de vibration du barrage.

Donc si un séisme de cette pulsation et d'amplitude 0.2g agit sur un tel barrage, il provoquerait probablement sa rupture et une cavitation peut se développer au fond ou à une profondeur proche de la surface libre.(figure 7.7)

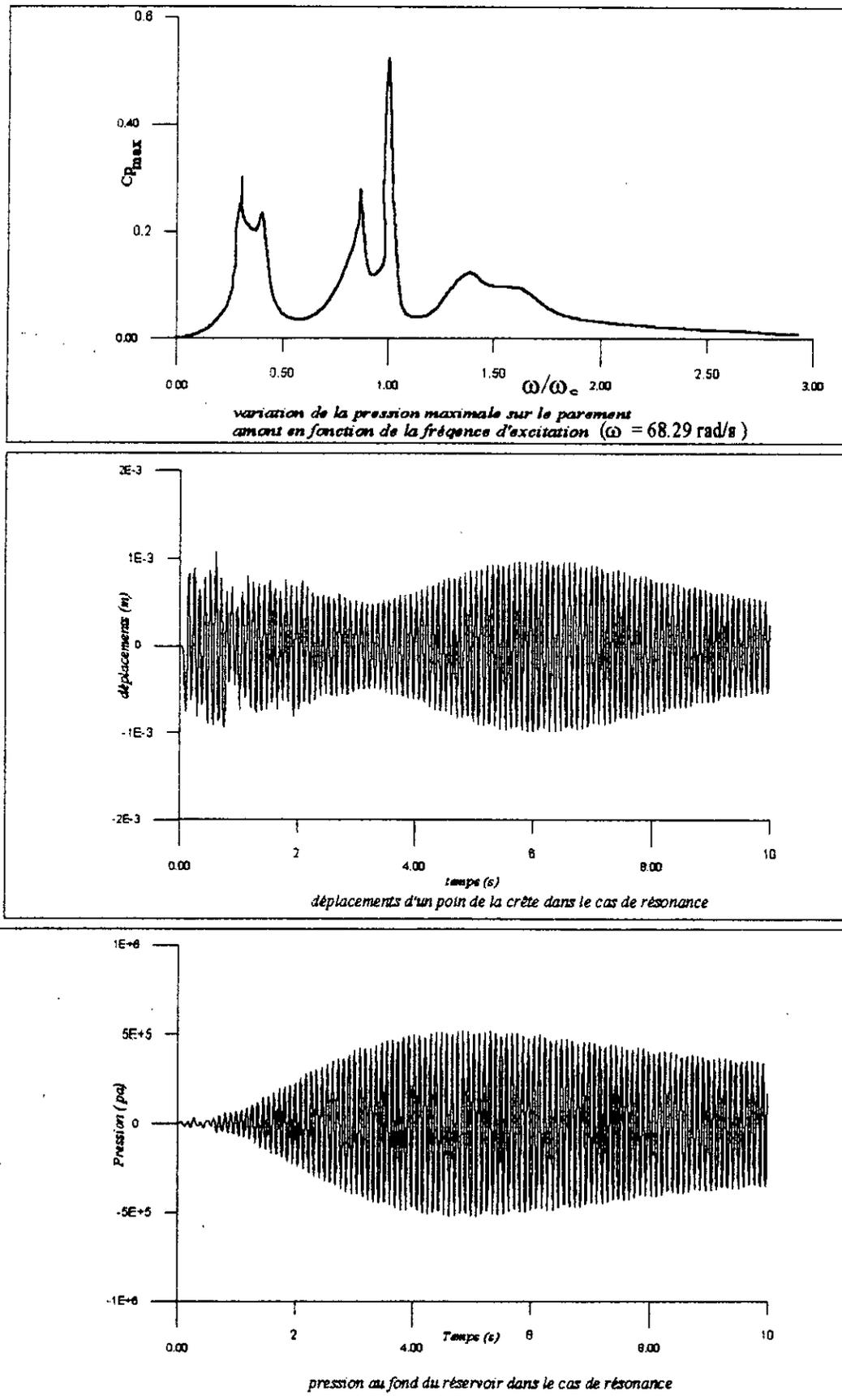
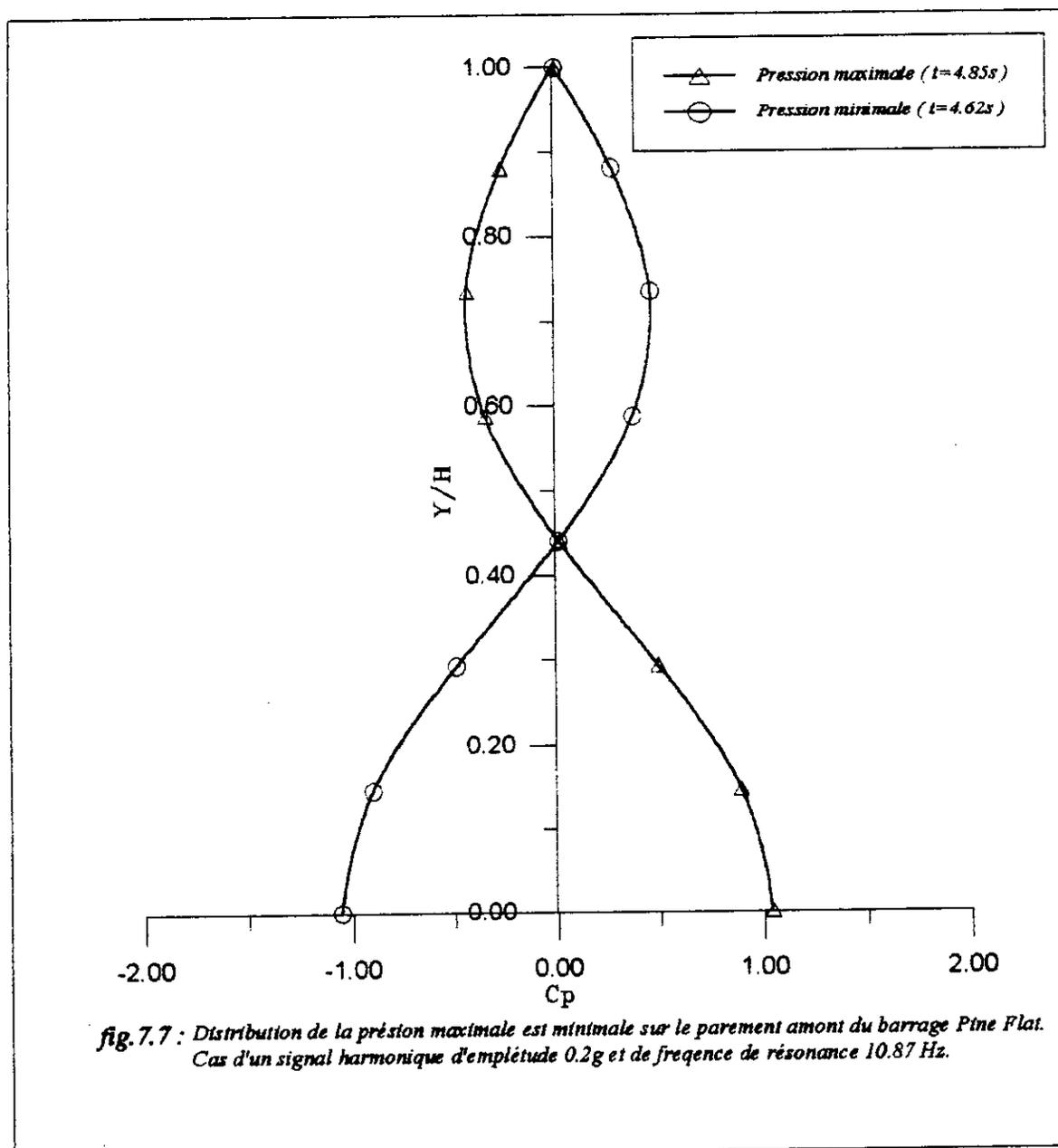


fig. 7.6 : influence de la fréquence d'excitation



A présent nous traitons les deux cas de barrages suivants :

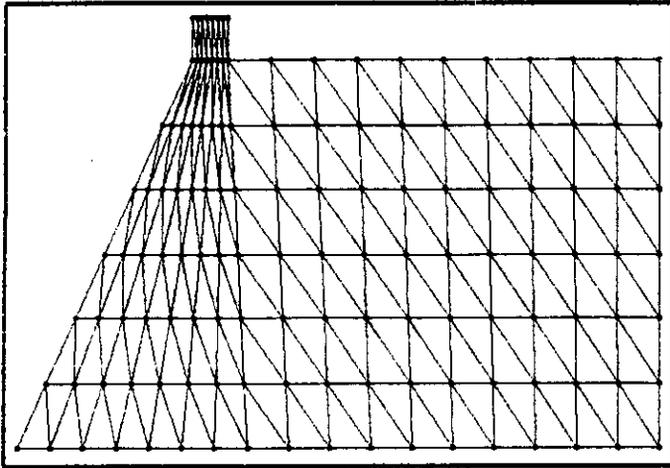
caractéristiques	Barrage de Hammam-Grouz	Pine Flat
- La hauteur totale Hb (m)	49.6	122
- La largeur à la base Lb (m)	50.4	96
- La hauteur de la crête Hc (m)	5	9
- La largeur de la crête Lc (m)	8	9.75
- La hauteur de la retenue Hf (m)	44.5	116
- Fruit amont n	0.1	0.05
- La masse volumique du béton $\rho_b(\text{kg/m}^3)$	2360	2360
- Module de Young E (Pa)	$2.8 \cdot 10^{10}$	$2.8 \cdot 10^{10}$
- Coefficient de Poisson ν	0.25	0.2

sous les excitations sismiques reportées sur la figure 7.8

Les remarques suivantes sont signalées :

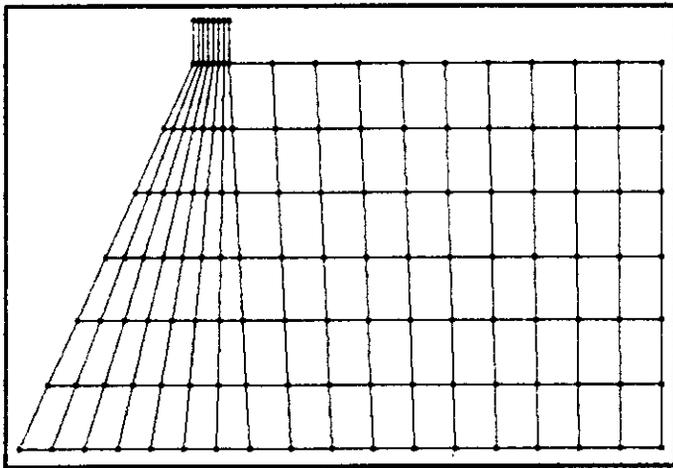
- La pression est fortement influencée par la forme du séisme et les dimensions du barrage (fig.7.8 et 7.11), où malgré que l'amplitude maximale de l'accélérogramme de Loma Preita St20 est inférieure à celle de St 10, elle provoque une pression largement supérieure (fig.7.10, barrage de Hammam Grouz).

- Les efforts développés par le barrage de Pine Flat pour équilibrer les efforts extérieurs sont supérieurs à ceux du barrage de Hammam Grouz, cela est du peut être à sa grande hauteur.(fig.7.12 et 7.13)



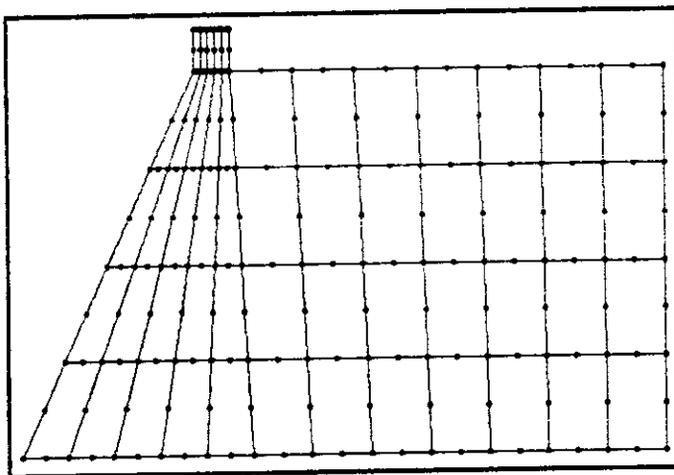
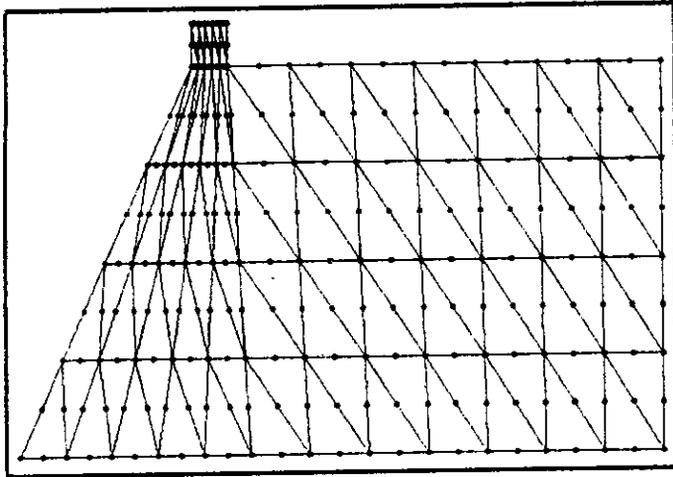
La majorité des applications ont été faites par l'élément quadrilatéral à quatre nœuds puisqu'on l'a trouvé après plusieurs expériences plus adapté et rapide, c'est à dire qu'il conduit vers la solution avec un petit nombre de nœuds tout en gardant le minimum de précision.

Toutefois, nous présentons les différents types de maillage structuré élaborés.



Éléments triangulaire (3 nœuds)

et quadrilatéral (4 nœuds)



*Eléments triangulaire (6 nœuds)
et quadrilatéral (8 nœuds)*

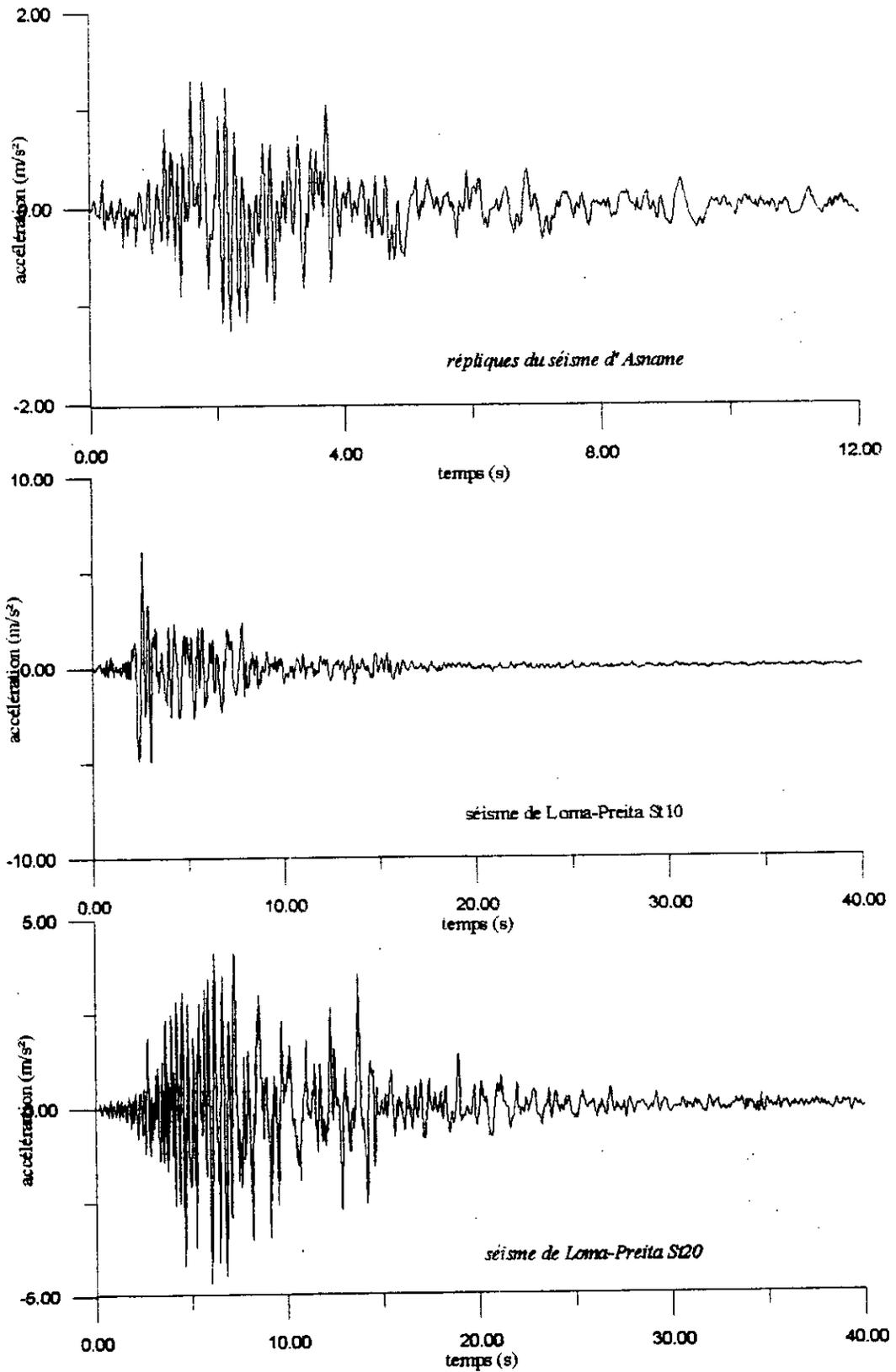


fig. 7.8 : accélérogrammes de séismes naturels

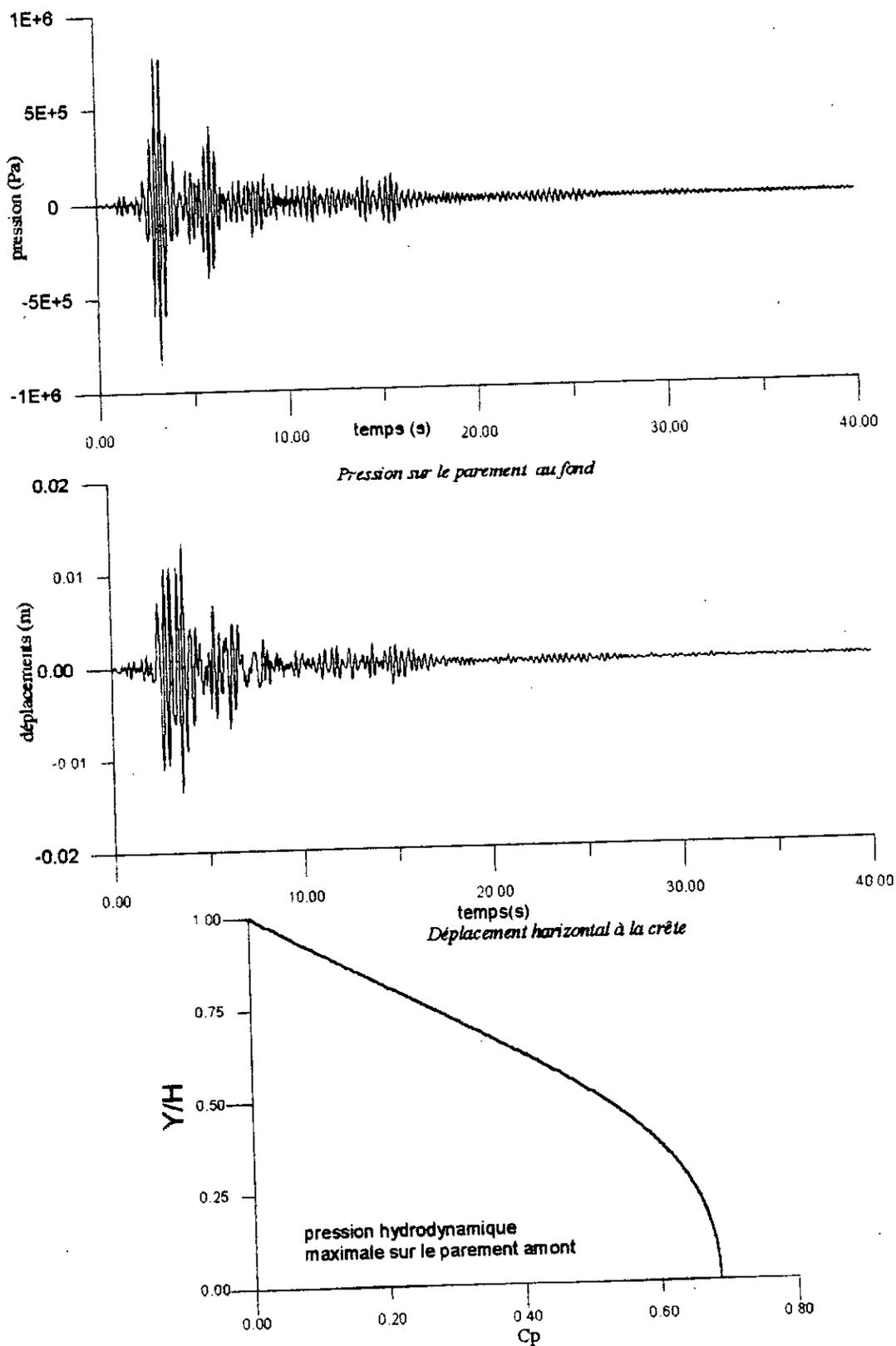


fig. 7.9 : réponse du barrage Pine Flat à l'accélérogramme : Loma-Preita St10

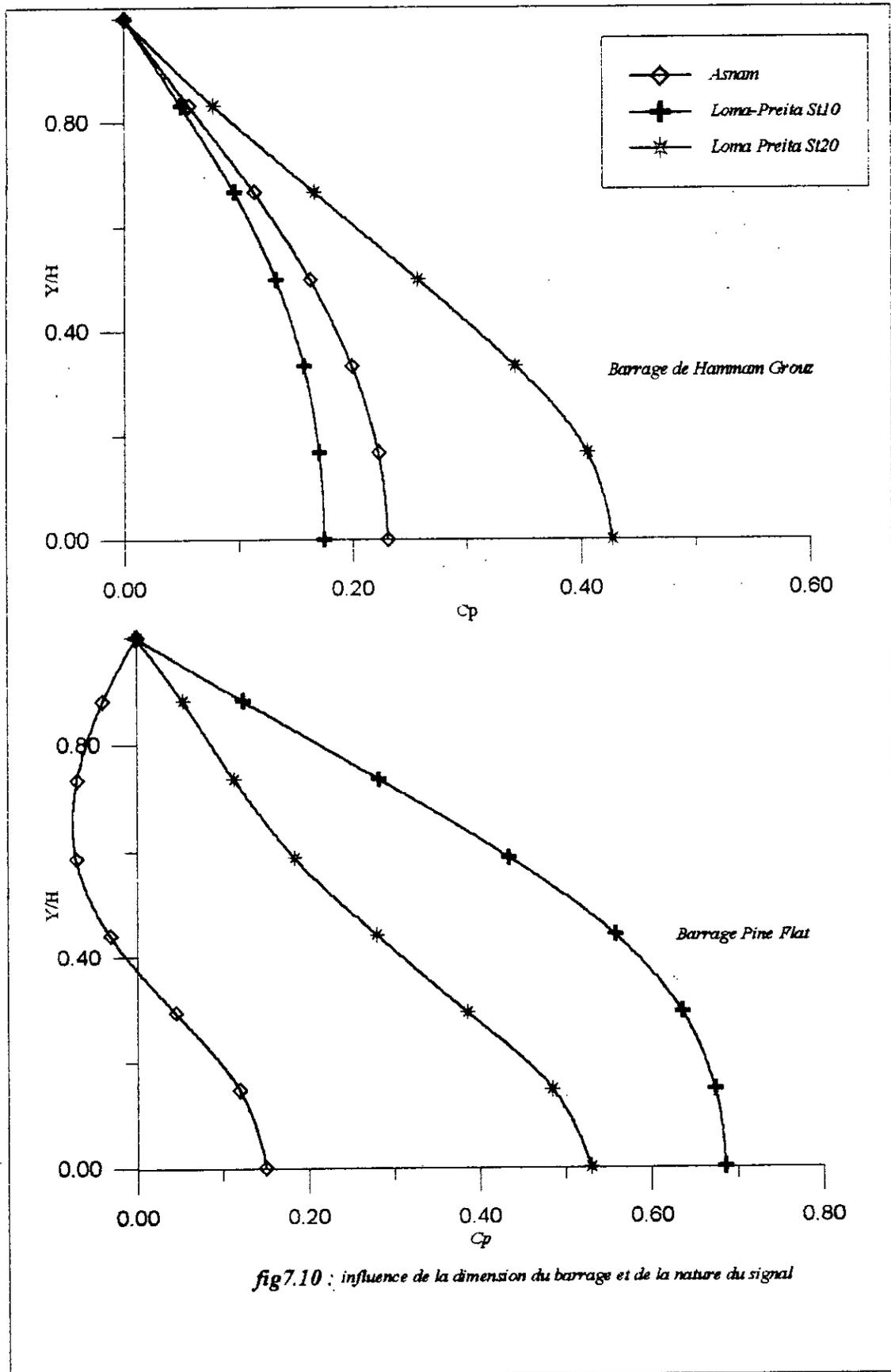


fig7.10 : influence de la dimension du barrage et de la nature du signal

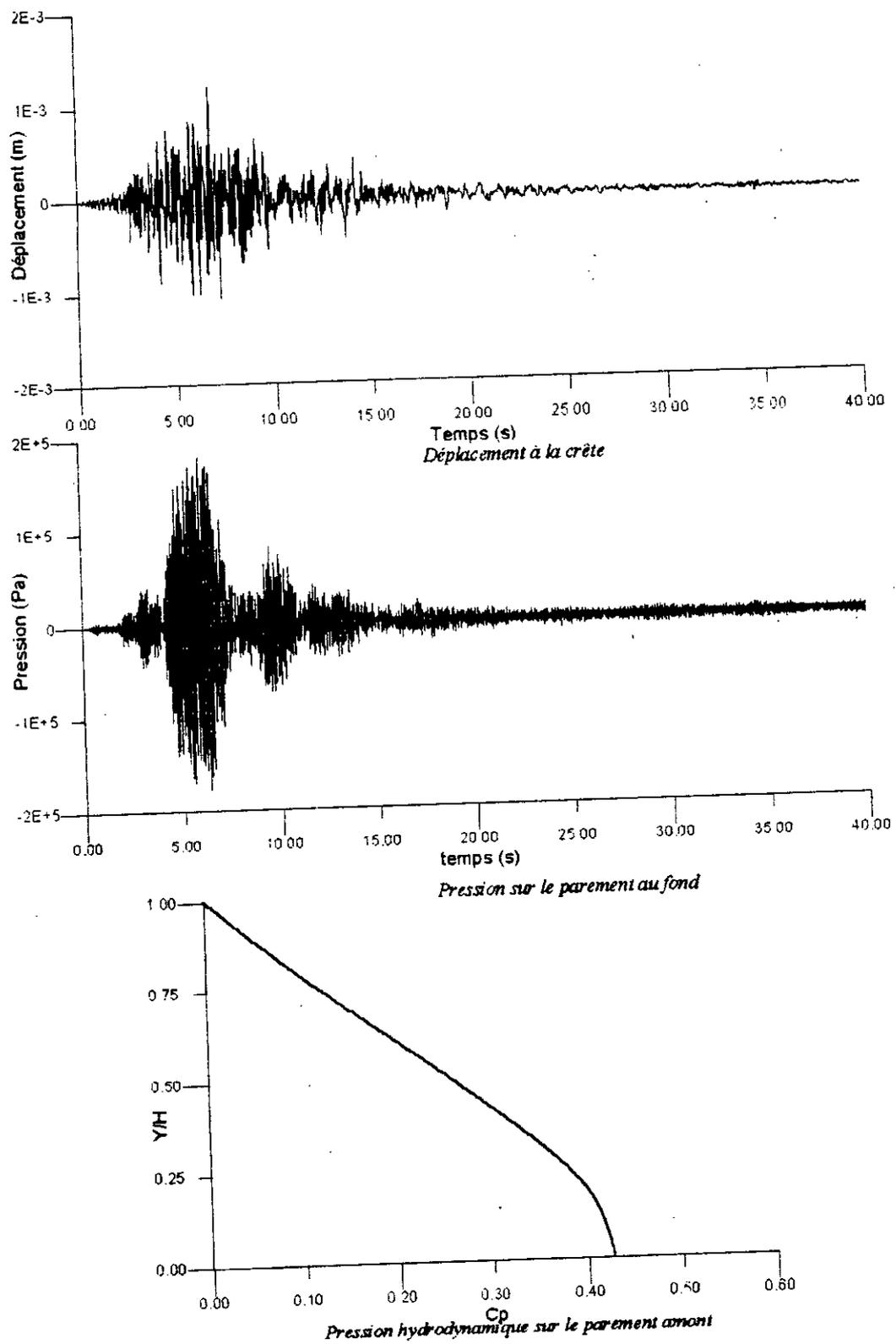


fig. 7.11 : réponse du barrage de Hammam Grouz à l'accélérogramme de Loma Preita S120

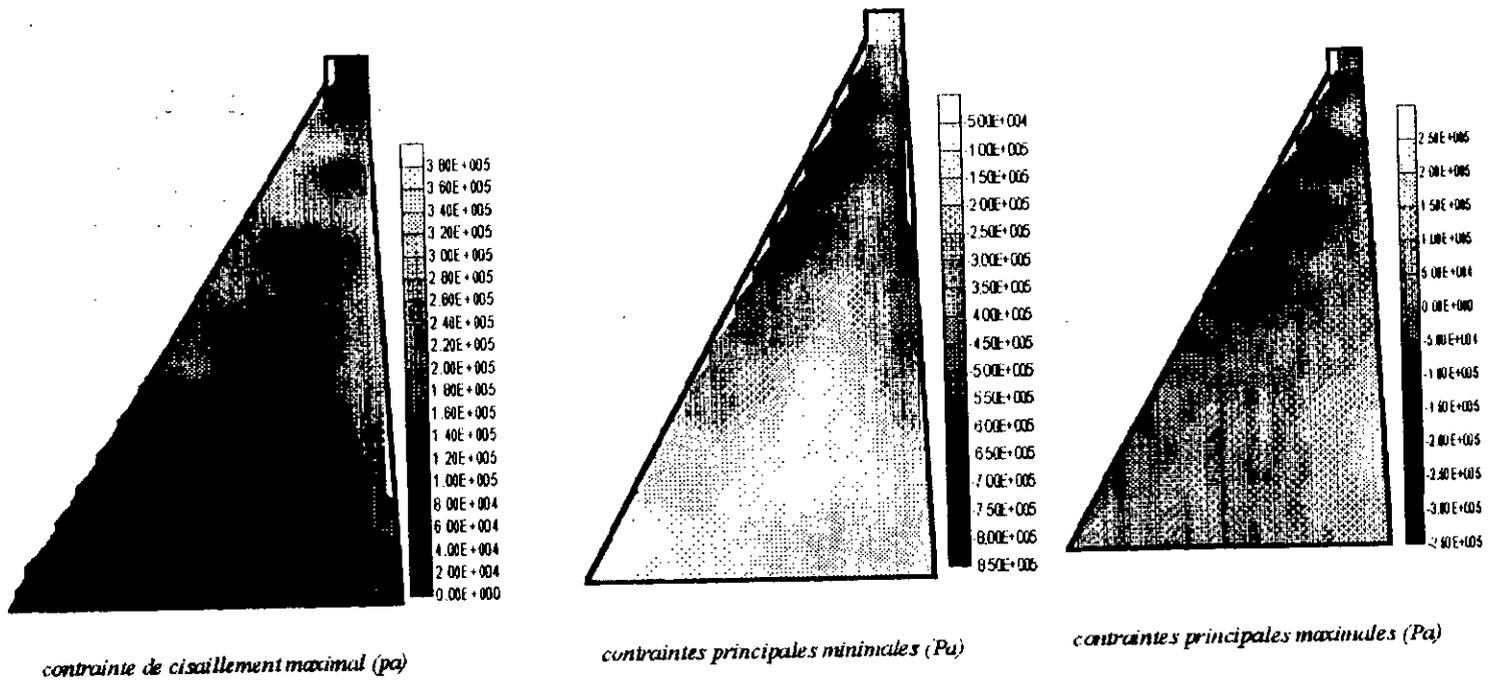


fig. 7.12 : Efforts développés par le barrage Pine Flat pour répondre à l'accélérogramme Loma Preita St10

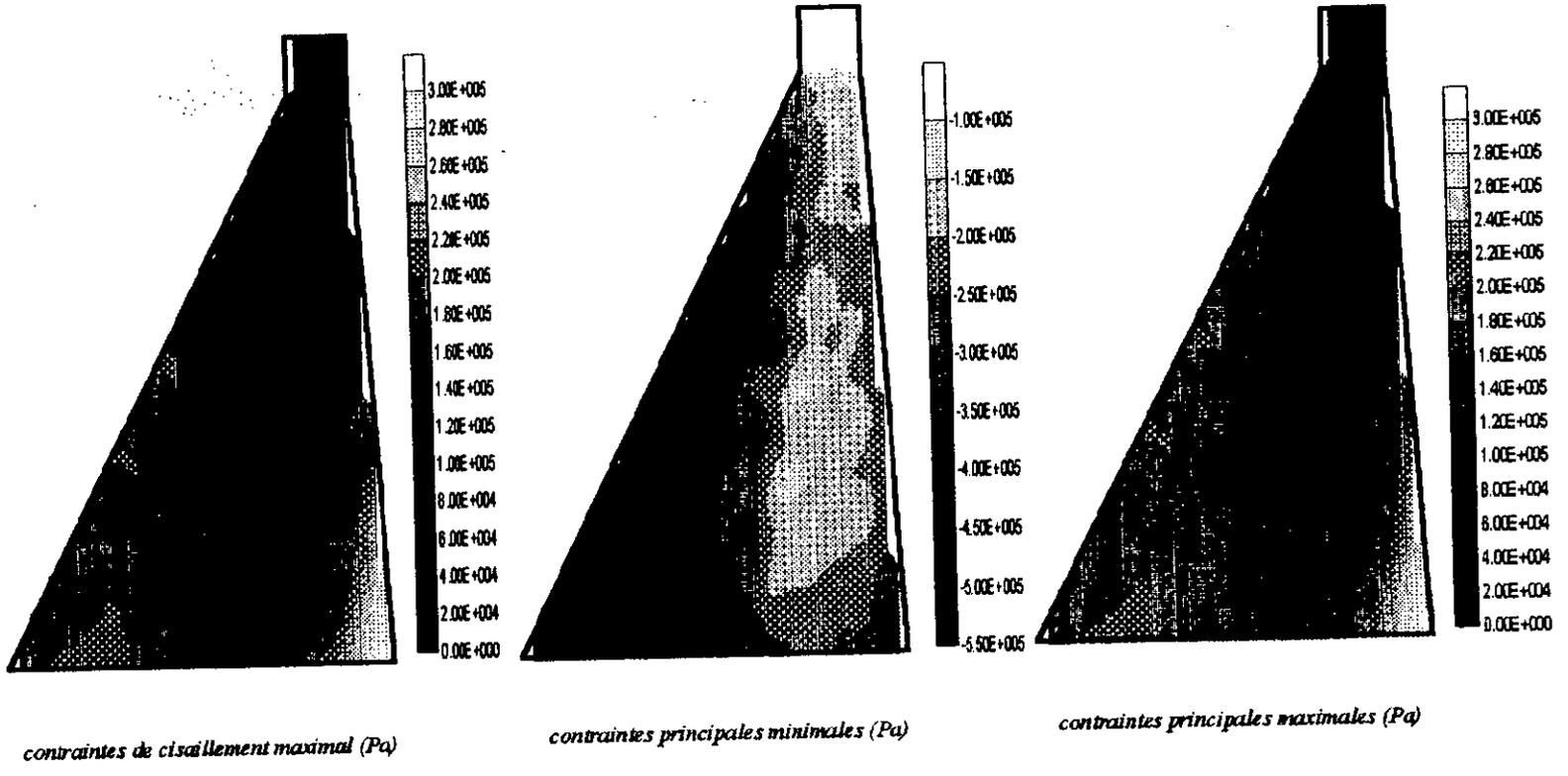


fig. 7.13 : Efforts développés par le barrage Hammam Grouz pour répondre à l'accélérogramme Loma Preita St20

Conclusion

Conclusion

Un modèle d'éléments finis bidimensionnel pour l'analyse de l'interaction fluide-structure dans le cas du système couplé d'un barrage poids en béton et sa retenue a été présenté et mis en œuvre. Dans ce modèle le barrage et l'eau sont discrétisés en éléments finis et la formulation se base sur l'approche déplacements-pression.

Durant le travail ces remarques ont été relevées :

- La formulation du fluide n'implique aucune difficulté supplémentaire par rapport à celle du solide.

- Le problème de la surface libre peut être contourné en introduisant une surface moyenne.

- La limitation du réservoir est possible par le biais d'une surface de radiation. Sa localisation pourrait être un sujet d'étude à part.

- L'implémentation efficace de la méthode des éléments finis demande assez d'efforts. Par contre, son exploitation est très large. Elle nous a permis de traiter plusieurs cas différents.

Les résultats obtenus nous permettent d'affirmer que :

- ◊ La compressibilité de l'eau ne peut être négligée.

- ◊ L'hypothèse de barrage rigide pour le calcul des pressions dynamiques induit des erreurs dans la réalité.

- ◊ L'influence des ondes de surfaces sur la pression hydrodynamique n'est pas grande.

Et enfin la pression hydrodynamique n'est ni négligeable ni très grande, reste souvent un pourcentage de la pression hydrostatique.

Touté fois, elle modifie clairement le comportement dynamique du barrage.

Pour compléter ce modèle, l'interaction sol-structure doit être intégrée dans l'analyse.

Un modèle incluent l'étude de la cavitation et le comportement non linéaire du barrage est plus efficace pour les cas de résonance.

Annexes

Annexe 1 : Modélisation

Equation de base :

$$\text{solide : } \sigma_{ij,j} + f_i - \rho \gamma_i = 0$$

$$\text{fluide : } \nabla^2 P - \frac{1}{C^2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0$$

Formes faibles :

$$\text{solide : } \int_{\Omega} \delta \varepsilon \sigma d\Omega + \int_{\Gamma} \delta U \sigma d\Gamma + \int_{\Omega} \delta U f d\Omega - \int_{\Omega} \delta U \rho \ddot{U} d\Omega = 0$$

$$\text{fluide : } \int_{\Omega} \delta \nabla P \cdot \nabla P d\Omega + \int_{\Omega} \delta P \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} d\Omega + \int_{\Gamma_1} \delta P \rho \ddot{U} \bar{n} d\Gamma$$

$$+ \int_{\Gamma_3} \delta P \frac{1}{g} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} d\Gamma + \int_{\Gamma_4} \delta P \frac{1}{C} \frac{\partial P}{\partial t} d\Gamma$$

Systèmes discrets :

$$\text{solide : } \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} - \mathbf{Q}\mathbf{P} = \mathbf{F}_1$$

$$\text{fluide : } \mathbf{S}\mathbf{P} + \mathbf{D}\mathbf{P} + \mathbf{H}\mathbf{P} + \rho\mathbf{Q}^T\ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{F}_2$$

• Système couplé :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \rho\mathbf{Q}^T & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{Bmatrix}$$

• Système symétrique sans amortissement et sans chargement :

$$\begin{bmatrix} \rho\mathbf{M} + \mathbf{Q}\mathbf{H}^{-1}\rho^2\mathbf{Q}^T & \rho\mathbf{Q}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{S} \\ \rho\mathbf{S}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{Q}^T & \mathbf{S}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho\mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$$

- Expression des matrices :

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \rho \mathbf{N}_u \, d\Omega$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \mu \mathbf{N}_u \, d\Omega \quad \text{ou : } \mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}_u^T \mathbf{D} \nabla \mathbf{N}_u \, d\Omega \quad \text{avec : } \mathbf{D} \text{ matrice d' élasticité}$$

$$\mathbf{S} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{C^2} \mathbf{N}_p \, d\Omega + \int_{\Gamma_3} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{g} \mathbf{N}_p \, d\Gamma$$

$$\mathbf{D} = \int_{\Gamma_4} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{C} \mathbf{N}_p \, d\Gamma$$

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}_p^T \nabla \mathbf{N}_p \, d\Omega$$

$$\mathbf{Q} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{N}_u \bar{n} \mathbf{N}_p \, d\Gamma \quad (\mathbf{Q}^T = \int_{\Gamma_1} \mathbf{N}_p \mathbf{N}_u \bar{n} \, d\Gamma)$$

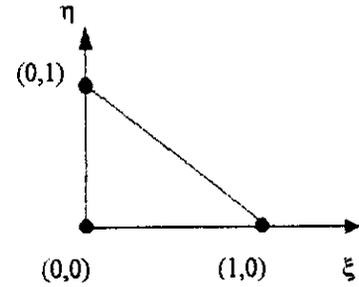
Annexe 2 : Les éléments utilisés

- Élément triangulaire à trois noeuds :

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \langle 1-\xi-\eta \quad \xi \quad \eta \rangle$$

$$\langle \partial \mathbf{N} / \partial \xi \rangle = \langle -1 \quad 1 \quad 0 \rangle$$

$$\langle \partial \mathbf{N} / \partial \eta \rangle = \langle -1 \quad 0 \quad 1 \rangle$$



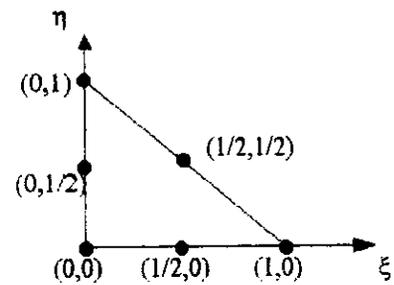
- Élément triangulaire à six noeuds :

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \langle -\lambda(1-2\lambda) \quad 4\xi\lambda \quad -\xi(1-2\xi) \quad 4\xi\eta \quad -\eta(1-2\eta) \quad 4\eta\lambda \rangle$$

$$\langle \partial \mathbf{N} / \partial \xi \rangle = \langle 1-4\lambda \quad 4(\lambda-\xi) \quad -1+4\xi \quad 4\eta \quad 0 \quad -4\eta \rangle$$

$$\langle \partial \mathbf{N} / \partial \eta \rangle = \langle 1-4\lambda \quad -4\xi \quad 0 \quad 4\xi \quad -1+4\eta \quad 4(\lambda-\eta) \rangle$$

$$\text{avec : } \lambda = 1-\xi-\eta$$

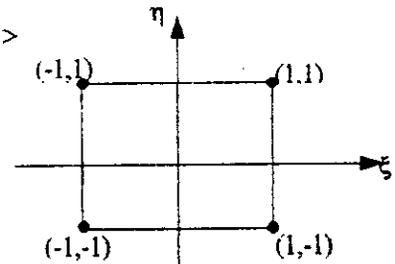


- Élément quadrilatéral à 4 noeuds :

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{4} \langle (1-\xi)(1-\eta) \quad (1+\xi)(1-\eta) \quad (1+\xi)(1+\eta) \quad (1-\xi)(1+\eta) \rangle$$

$$\langle \partial \mathbf{N} / \partial \xi \rangle = \frac{1}{4} \langle -1+\eta \quad 1-\eta \quad 1+\eta \quad -1-\eta \rangle$$

$$\langle \partial \mathbf{N} / \partial \eta \rangle = \frac{1}{4} \langle -1+\xi \quad -1-\xi \quad 1+\xi \quad 1-\xi \rangle$$

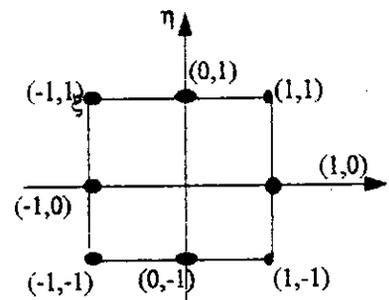


- Élément quadrilatéral à 8 noeuds :

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \langle \begin{array}{ll} -\frac{1}{4} (1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) & \frac{1}{2} (1-\xi^2)(1-\eta) \\ -\frac{1}{4} (1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta) & \frac{1}{2} (1+\xi)(1-\eta^2) \\ -\frac{1}{4} (1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta) & \frac{1}{2} (1-\xi^2)(1+\eta) \\ -\frac{1}{4} (1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta) & \frac{1}{2} (1-\xi)(1-\eta^2) \end{array} \rangle$$

$$\langle \partial \mathbf{N} / \partial \xi \rangle = \langle \begin{array}{llll} \frac{1}{4} (1-\eta)(2\xi+\eta) & -(1-\eta)\xi & \frac{1}{4} (1-\eta)(2\xi-\eta) & \frac{1}{2} (1-\eta^2) \\ \frac{1}{4} (1+\eta)(2\xi+\eta) & -(1+\eta)\xi & \frac{1}{4} (1+\eta)(2\xi-\eta) & -\frac{1}{2} (1-\eta^2) \end{array} \rangle$$

$$\langle \partial \mathbf{N} / \partial \eta \rangle = \langle \begin{array}{llll} \frac{1}{4} (1-\xi)(\xi+2\eta) & -\frac{1}{2} (1-\xi^2) & -\frac{1}{4} (1+\xi)(\xi-2\eta) & -(1+\xi)\eta \\ \frac{1}{4} (1+\xi)(\xi+2\eta) & \frac{1}{2} (1-\xi^2) & -\frac{1}{4} (1-\xi)(\xi-2\eta) & -\eta(1-\xi) \end{array} \rangle$$

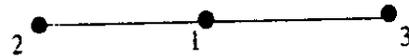


Annexe 3 : Points de quadrature de Gauss

- Une dimension :

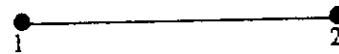
3 points :

ξ_i	0	$\sqrt{3/5}$	$-\sqrt{3/5}$
w_i	8/9	5/9	5/9



2 points :

ξ_i	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$
w_i	1	1

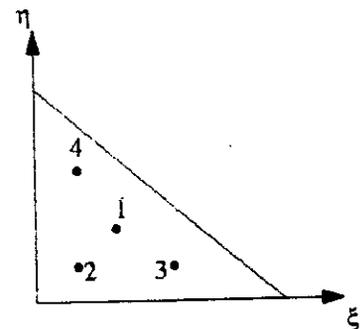


- Deux dimensions :

A)- Triangle :

4 points :

ξ_i	1/3	1/5	3/5	1/5
η_i	1/3	1/5	1/5	3/5
w_i	-27/96	25/96	25/96	25/96



6 points :

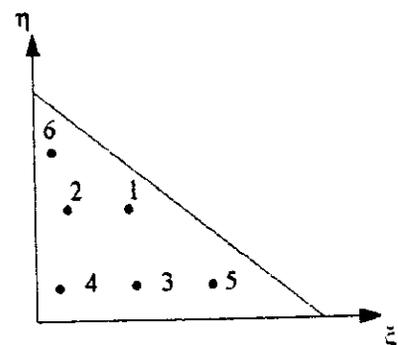
ξ_i	a	1-2a	a	b	1-2b	b
η_i	a	a	1-2a	b	b	1-2b
w_i	c	c	c	d	d	d

$$d = 0,05497587$$

$$c = 0,11169079$$

$$b = 0,09157621$$

$$a = 0,44594849$$



7 points :

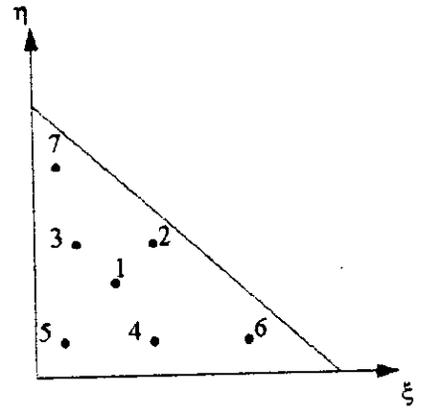
ξ_i	1/3	a	1-2a	a	b	1-2b	b
η_i	1/3	a	a	1-2a	b	b	1-2b
w_i	9/80	A	A	A	B	B	B

$$a = (6 + \sqrt{15})/21$$

$$b = (4/7) - a$$

$$A = (155 + \sqrt{15})/2400$$

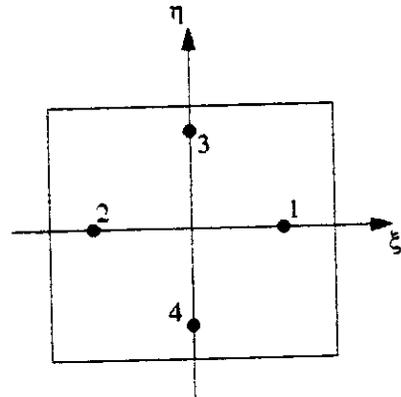
$$B = (31/240) - A$$



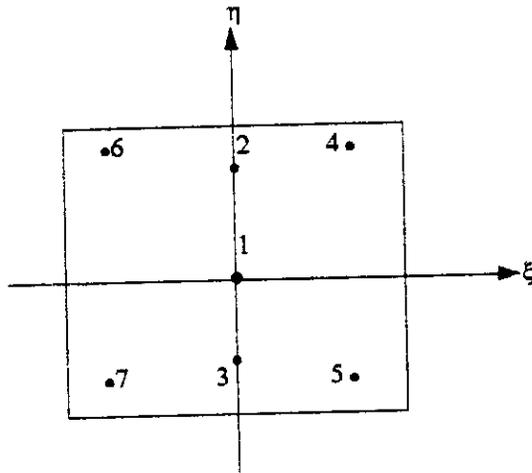
B)- Rectangle :

4 points :

ξ_i	$\sqrt{2/3}$	$-\sqrt{2/3}$	0	0
η_i	0	0	$\sqrt{2/3}$	$-\sqrt{2/3}$
w_i	1	1	1	1



7 points :



ξ_i	0	0	0	$\sqrt{3/5}$	$\sqrt{3/5}$	$-\sqrt{3/5}$	$-\sqrt{3/5}$
η_i	0	$\sqrt{14/15}$	$-\sqrt{14/15}$	$\sqrt{3/5}$	$-\sqrt{3/5}$	$\sqrt{3/5}$	$-\sqrt{3/5}$
w_i	8/7	20/63	20/63	20/36	20/36	20/36	20/36

Annexe 4 : Méthode de factorisation de CROUT

Soit à décomposer une matrice A ($n \times n$) en deux matrices L et U telle que: $A = L \cdot U$

L : matrice triangulaire inferieure $L_{ij} = 0$ si $j > i$

U : matrice triangulaire superieure $U_{ij} = 0$ si $j < i$

$$\text{On a : } A_{ij} = \sum_{k=1}^{\text{Min}(i,j)} L_{ik} \cdot U_{kj}$$

La partie triangulaire superieure de A a pour termes:

$$A_{rj} = \sum_{k=1}^r L_{rk} \cdot U_{kj} \quad j = \overline{r, n}$$

$$\text{et la partie triangulaire inferieure : } A_{ir} = \sum_{k=1}^r L_{ik} \cdot U_{kr} \quad i = \overline{r, n}$$

D'où :

$$U_{rj} = \frac{A_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} L_{rk} \cdot U_{kj}}{L_{rr}} \quad i = \overline{r, n}$$

$$L_{ir} = \frac{A_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} L_{ik} \cdot U_{kr}}{U_{rr}} \quad i = \overline{r, n}$$

Ces systèmes sont de n^2 équations à $n^2 + n$ inconnus, il y a donc n paramètres à fixer arbitrairement, soit par exemple la diagonale de U .

L'algorithme de CROUT est alors :

On fixe $U_{ii} = 1$ $i = \overline{1, n}$

$$\text{donc : } \begin{cases} L_{ir} = A_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} L_{ik} \cdot U_{kr} & i = \overline{1, n} \\ U_{rj} = \frac{A_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} L_{rk} \cdot U_{kj}}{L_{rr}} & j = \overline{r+1, n} \end{cases} \quad r = \overline{1, n}$$

Bibliographie

Bibliographie

[1] P.E. ALLAIRE

'Basics of the finit element, solid mechanics, heat trabsfer, and fluid mechanics'

wmc Brown publishers (1985)

[2] J. AVILES

'Water pressures on rigid gravity dams with finit reservoir during earthquakes'

Earthquake Eng. Struct. Dyn. V18, 527-537 (1989)

[3] K.J. BATHE and EL. WILSON

'Numerical methods in finit element analysis'

Prentice Hall (1976)

[4] P. CHAKRABARTI and A.K. CHOPRA

'Earthquake analysis of gravity dams including hydrodynamic interaction'

Earthquake Eng. Struct. Dyn. V2, 143-160 (1973)

[5] R. CHANDRACHAKER and J.L. HUMAR

'Boundary element analysis of sismic response of a gravity dams'

6th Canadian Conf. Earthquake Eng. Toronto (1991)

[6] Y.C. DAS and F.A. AKL

'Hydrodynamic pressure on dams'

Int. J. Modelling and simulation V8, N°1, 33-37 (1988)

[7] G. DHATT and G. TOUZOT

'Une présentation de la méthode des éléments finis'

2^{ème} ed. Maloine S.A. éditeur (1984)

[8] G.DHATT

'Modélisation des fluides par élément finis'

Polycopie du cours. Université de technologie Compiegne

(Mai 1992)

[9] DAVIDOVICCI

'Génie parasismique'

Presse de l'école nationale des ponts et chaussés (1985)

[10] EUVRAR

'Résolution numérique des équations aux dérivées partielles de la physique, de la mécanique et des sciences de l'ingénieur. Différences finies, éléments finis, méthode des singularités'

2ème Ed. Masson. Paris (1990)

[11] GERMAIN

'Mécanique des milieux continus'

Ed. Masson. Paris (1962)

[12] T.J.R. HUGES

'The finite element method: Linear static and dynamic finite element analysis'

Prentice Hall, Englewood Cliffs. N.J. (1987)

[13] A.M. JABLONSKI and J.H. RAINER

'Effect of seismic input on hydrodynamic forces acting on gravity dams'

6th Canadian Conf. Earthquake Eng. Toronto (1991)

[14] A.M. JABLONSKI and J.L HUMAR

'Boundary element reservoir model for seismic analysis of gravity dams'

Earthquake Eng. Struct. Dyn. V16, N°5 (1988)

[15] A.M. JABLONSKI and J.L HUMAR

'Three dimensional boundary element reservoir model for seismic analysis of arch and gravity dams'

Earthquake Eng. Struct. Dyn. V19, 359-376 (1990)

[16] I.MIRANDA, R.M. FERENCZ and T.J.R. HUGHES

'An improved implicit-explicit time integration method for structural dynamics'

Earthquake Eng. Struct. Dyn. V18, 643-653 (1989)

[17] J.P.F. O'CONNOR and J.C. BOOT

'Solution procedure for the earthquake analysis of arch dam-reservoir systems with compressible water'

Earthquake Eng. Struct. Dyn. V16, 757-773 (1988)

[18] L. OLSON and T. VANDINI

'Eigenproblems from finite element analysis of fluid-structure interactions'

Comp. Struct. V33, N°3, 679-687 (1989)

[19] S.K. SHARAN

'A non-reflecting boundary in fluid-structure interaction'

Comp. Struct. V26, N°5, 841-846 (1987)

[20] S.K. SHARAN

'Dam-reservoir interaction during earthquake'

6th Canadian Conf. Earthquake Eng. Toronto (1991)

[21] K. WASHIZU

'Variational methods inelasticity and plasticity'

2nd ed. Pergamon Press (1975)

[22] G.B. WARBURTON

'Formulae for errors for initial displacement and velocity problems using the Newmark method'

Earthquake Eng. Struct. Dyn. V18, 565-573 (1989)

[23] G.B. WARBURTON

'Assessment of errors in the Newmark method in structural dynamics'

Earthquake Eng. Struct. Dyn. V19, 457-467 (1990)

[24] H.M. WESTERGAARD

'Water pressures on dams during earthquakes'

ASCE 1303-1318 (Nov. 1931)

[25] C.N. ZANGAR

'Hydrodynamic pressures on dams due to horizontal earthquake effects'

Eng. Monographe N°11 U.S Bureau of reclamation (1952)

[26] O.C. ZIENKIEWICZ

'La méthode des éléments finis. Formulation de base et problèmes linéaires'

Traduction du volumel. AFNOR technique (1991)

[27] O.C. ZIENKIEWICZ and R.L. TAYLOR

'The finit element method. Slid and fluid mechanics, dynamics and non-linearity'

Volume2 Mc. Graw-Hill Book Company (1991)

[28] R.W. GLOUGH and J. PENZIEN

'Dynamic of structures '

Mc.Graw-Hill, New York (1975)

[29] K.C. ROKEY, H.R. EVANS et W.GRIFFITHS

'Introduction à la méthode des élélments finis '

Eyroles (1979)