

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

1/95

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT D'HYDRAULIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDE

Modélisation par éléments finis des  
écoulements à surface libre  
dans les transitions

Proposé par :

Mr O. BELHADJ

Dirigé par :

Mr O. BELHADJ

Etudié par :

Mrs : D. AMGHAR  
M. MORSALI

PROMOTION 1995

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

PROMOTION 1995

## *Remerciements*

*Nous tenons à remercier M<sup>r</sup> Omar Belhadj de nous avoir encadré et nous avoir conseillé.*

*Nous remercions aussi chaleureusement M<sup>r</sup> Berreksi Ali ainsi que M<sup>r</sup> Bouabdallah Chemseddine et Seghir Abdelghani, pour l'aide précieuse qui nous a été fournie pour l'élaboration de cette thèse.*

*Nous tenons également à remercier tous nos enseignants du département d'hydraulique spécialement M<sup>lle</sup> Benmamar Saïda pour avoir proposé son aide.*

*Nos derniers remerciements vont à M<sup>r</sup> Baloul Hakim P.G. du département de Génie de l'environnement pour son soutien moral.*

## *Dédicaces*

*Je dédie ce modeste travail à :*

- ma mère*
- mon père*
- mon frère et ma soeur*
- ma grand-mère*
- tous mes proches*
- tous mes amis*

*M<sup>ed</sup> MORSALI*

*A ma mère*

*A mon père*

*A mes frères*

*A ma soeur*

*A mes amis fidèles Hakim, Mohamed, Ahmed, Yacine*

*A tous ceux qui me sont chers(es)*

*Je dédie ce modeste travail*

*D. AMGHAR*

### Resumé

Le but de cette thèse est l'analyse des écoulements à surface libre dans les transition . Après obtention des équations bidimensionnelles de Saint-Venant par modélisation mathématique, les variables du problème sont approximées par éléments finis.

La résolution est effectuée par l'utilisation du schéma de KAWAHARA (Selecting lumping-two step method).

Les résultats obtenus par expérimentation numérique sont comparés à ceux des autres modèles .

### ABSTRACT

The objectif of this thesis is to analysis the free surface flows in the transitions. After elaboration of the Saint venant bidimensional equations by mathematical modelisation, the variables of the problem were approximated by finite elements.

The resolution is done by utilisation of KAWAHARA scheme (Selecting lumping two step method).

The numerical experimentation results are compared with other model 's ones.

### ملخص

المغزى من هذه الأطروحة هو تحليل الجريان على سطح حر في الانتقاليات. بعد الحصول على معادلات سانت-فونان ثنائية الأبعاد بواسطة التمثيل الرياضي يتم تقريب متغيرات المسألة باستعمال العناصر المنتهية .

حل المعادلات يتم باستعمال شكل كواهارا

(Selecting lumping-two step method)

الحلول المحصل عليها بالتجريب بالعندي قرنت بحلول نماذج أخرى

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# *Sommaire*

## Sommaire

<b>Chapitre I INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre II GENERALITES</b>	
II - 1- Définition d'un écoulement à surface libre	2
II - 2- Classification des écoulements	2
II - 3- Régime d'écoulement	3
II - 4- Canaux prismatiques, Canaux non prismatiques	4
<b>Chapitre III ECOULEMENT DANS LES TRANSITIONS</b>	
III - 1- Introduction	5
III - 2- Déviation brusque d'un mur	5
III - 3- Notation d'ondes positives et négatives	7
III - 4- Réduction des ondes transversales	8
III - 5- Rétrécissement d'un canal dans des conditions d'écoulement torrentiel	9
III-5-1- Type de rétrécissement	9
III-5-2- Rétrécissement en forme d'entonnoir	10
III-5-3- Elargissement d'un canal	14
<b>Chapitre IV MODELISATION MATHEMATIQUE</b>	
IV - 1- Hypothèses de base	16
IV - 2- Mise en équation	16
IV-2-1- Intégration de la loi de conservation de la masse	18
IV-2-2- Intégration de la 1 <sup>ère</sup> équation de Navier-Stokes	19

IV - 3- Transformation Géométrique	26
IV-3-1- application de la transformation géométrique aux équations de Saint- Venant	27
IV - 4- Conditions initiales, Conditions aux limites	29
IV-4-1- Conditions initiales	29
IV-4-2- Conditions aux limites	29
<b>Chapitre V MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS</b>	
V - 1- Introduction	32
V - 2- Historique	32
V - 3- Concept de base	33
V - 4- Etapes à suivre par la M . E . F	34
V-4-1- Idéalisations et choix d'élément	34
V-4-2- Choix de fonction d'interpolation	34
V-4-3- Calcul des matrices élémentaires	34
V-4-4- Assemblage des éléments	34
V-4-5- Assemblage des équations	34
V - 5- Elément de référence	35
V - 6- Matrice Jacobiënne	36
V - 7- Application aux écoulements à surface libre	37
V-7-1- Formulation variationnelle des équations de Saint - Venant	37
V-7-2- Application de Galerkin	38
V - 8- Présentation de l'élément T 6	40
V-8-1- Choix de l'élément	40
V-8-2- Fonctions d'interpolation	41



V - 9- Méthodes de résolutions	42
V-9-1- Schéma explicite ( selective - lumping two - step method )	42
<b>Chapitre VI APPLICATIONS</b>	
VI - 1- Rétrécissement rectiligne symétrique	47
VI-1-1- Analyse de l'écoulement supercritique dans un rétrécissement rectiligne symétrique :	47
VI-1-2- Résultats et critiques	48
VI - 2- Elargissement progressif symétrique	50
VI-2-1- Analyse de l'écoulement supercritique dans un élargissement progressif symétrique	50
VI-2-2- Résultats et critiques	51
* CONCLUSION GENERALE	52
* ANNEXE	53
* BIBLIOGRAPHIE	

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

## *Chapitre 1*

# INTRODUCTION

**Introduction :**

La théorie d'écoulement dans les canaux découverts est connue et confirmée par l'expérience depuis longtemps .

Les équations correspondantes ont été établies il y'a un siècle, mais on ne pouvait pas les résoudre pour les cas pratiques avant l'apparition des ordinateurs dans les années cinquante .

Le premier modèle mathématique important d'une rivière a été construit en 1953 par Stoker, Isaacson et Troesch du courant instituts of the New York university .

Leurs idées ont ensuite été appliquées et améliorées en France . A la suite de ces applications, dans les années 1959 - 1961, les modèles mathématiques sont devenues un outil communément utilisé pour toute étude hydraulique d'une certaine envergure .

L'objectif de ce modeste travail est la modélisation, à l'aide de la méthode des éléments finis, d'écoulement à surface libre dans les transitions, décrites par les équations de Saint Venant .

Nous commençons au début par des généralités sur les écoulements à surface libre, et dans le Chapitre "III" une brève et modeste étude sur les écoulements dans les transitions a été effectué .

Nous présentons dans le chapitre "IV" le modèle mathématique ( Bidimensionnel) des écoulements à surface libre de Saint-Venant après un bref rappel des équations de Navier- Stokes d'un modèle tridimensionnel général .

le Chapitre "V" présente le modèle numérique utilisé pour résoudre les équations de Saint Venant , qui n'est autre que la méthode des éléments finis .

Enfin nous terminerons cette étude par quelque applications .

*Chapitre 2*

**GÉNÉRALITÉS**

### ***II. 1 / Définition d'un écoulement à surface libre : [3,4,5,20]***

L'écoulement de l'eau dans un lit ouvert est appelé à surface libre, a lieu sous l'action des forces de gravité et caractérisé par une présence obligatoire d'une surface libre du courant, c'est à dire d'une telle frontière de séparation lelong de laquelle le courant est en contact avec un milieu gazeux , en général, l'air sous pression atmosphérique .

Il faut souligner que l'écoulement de l'eau libre est un phénomène beaucoup plus compliqué que l'écoulement en charge parceque la présence d'une surface libre entraîne les variations des sections liquides suivant la longueur du courant .

Tous les lits peuvent être subdivisée en deux catégories :

lits naturels et artificiels .

On rapporte aux lits naturels les rivières, les ruisseaux, etc. .

Les lits artificiels sont les canaux sur appuis, les galeries, les tuyaux de drainage et d'autre tuyaux partiellement remplis .

### ***II. 2 / Classification des écoulements : [3,4,5,20]***

On peut classer les écoulements dans les canaux à ciel ouvert selon deux critères: espace et temps . En prenant le premier critère, l'espace, on peut distinguer l'écoulement uniforme ( dont la profondeur est la même partout ) et l'écoulement varié ( dont la profondeur varie lelong du canal ) . L'écoulement varié ( ou variable ) peut encore être divisé en deux catégories : graduellement variable ( sa profondeur varie, avec la distance , graduellement ) où rapidement variable : la profondeur change brusquement.

Le deuxième critère permet de diviser les écoulements en permanents où stationnaires ( la profondeur, dans une section données, reste constante ) et non permanents où non stationnaires ( la profondeur, dans une section, varie avec le temps)

Théoriquement un écoulement uniforme ou un écoulement varié peut être ou bien permanent ou bien non stationnaire . Dans la pratique l'écoulement uniforme non stationnaire est presque impossible à réaliser . par contre les écoulements non stationnaires graduellement variés ou rapidement variés sont souvent rencontrés dans la nature .

### II. 3 / Régime d'écoulement : [3,4,5,20]

Le régime d'écoulement est caractérisé par le rapport des forces d'inertie aux forces de gravité . Ce rapport est donné par le nombre de Froude locale .

$$F = V/C$$

où : V est la vitesse locale .

C est la vitesse de propagation ou célérité des ondes de surface .

Pour un écoulement unidimensionnel, la célérité dépend uniquement de la géométrie de la section transversale et peut être exprimé comme suit :  $C = \sqrt{g \cdot A / B_s}$

A : Surface de la section transversale,

$B_s$  : Largeur en surface,

g : Accélération de la pesanteur .

Dans le cas d'un canal rectangulaire de largeur b et de surface transversale  $A = b h$  , où h est la profondeur de l'écoulement, la célérité devient :  $C = \sqrt{g h}$

Dans le cas d'un écoulement peu profond bidimensionnel, la célérité peut changer dans les directions transversale et longitudinale suivant la surface locale de l'écoulement .

Lorsque la vitesse locale est égale à la célérité, l'écoulement est qualifié de critique et  $F = 1$  . Lorsque  $F < 1$ , l'écoulement est fluvial ; lorsque  $F > 1$ , l'écoulement est torrentiel .

Remarque :

On doit noter qu'une onde gravitaire peut se propager vers l'amont d'un canal pour un écoulement en régime fluvial, et ne peut se propager pour un régime torrentiel .

***II . 4 / Canaux prismatiques, canaux non prismatiques : [3,4,5,20]***

Les lits prismatique entrent dans la catégorie des lits ouverts ceux dont les paramètres ( sauf profondeur ) caractérisant la forme de la section transversale restent constantes sur toute la longueur du lit .

Par exemple, un canal rectangulaire est considéré prismatique si la largeur de son fond ne change pas en longueur, sinon on a un lit ouvert non prismatique .

Les lits naturels sont, en général, non prismatiques et possèdent le caractère irrégulier variable des paramètres de la section transversale .

*Chapitre 3*

**ÉCOULEMENT DANS LES  
TRANSITIONS**



### III. 1 / Introduction :

Ce chapitre est consacré aux ondes de choc qui constituent des perturbations stationnaires à la surface libre d'un écoulement torrentiel . Le terme " Onde de choc " tire son origine de la dynamique des gaz et en hydraulique, le terme " Ondes transversales " est plus approprié . Ces ondes prennent naissance à l'extrémité aval des piles de l'évacuateur de crue et se manifestent sur une grande longueur du coursier . Ces ondes stationnaires sont provoquées par toutes perturbations situées sur le coursier, telles que changement de direction, rétrécissements et élargissement, où même piles , ce chapitre aborde brièvement la question des ondes transversales et indique les possibilités de réduire les ondes de hauteur excessive .

### III. 2 / Déviation brusque d'un mur : [3,6,8,12]

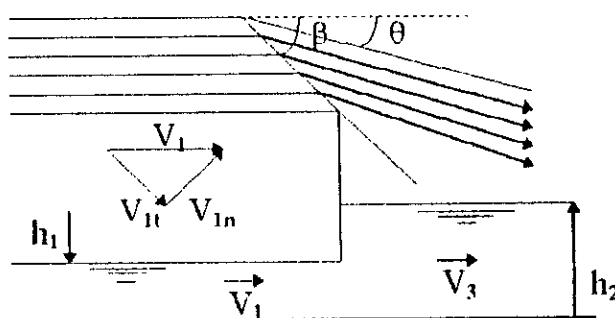
Soit un écoulement torrentiel dans un large canal rectangulaire, l'écoulement dans le canal est uniforme .

En un certain point, le mur est dévié vers l'écoulement , d'un angle  $+ \theta$

La déviation du mur cause une perturbation de l'écoulement lelong d'une ligne droite faisant un angle  $\beta$  par rapport à la direction initiale de l'écoulement . L'angle  $\beta$  est appelé " angle de choc " et la ligne correspondante " onde transversale " . L'angle de choc  $\beta$  est toujours plus grand que l'angle de déviation du mur  $\theta$  .

En désignant respectivement par les indices ( 1 ) et ( 2 ) les positions à l'amont et à l'aval de l'onde stationnaire, l'application du principe des quantités de mouvements et de l'équation de continuité donne :

Fig.III.1  
Onde de choc dans une déviation d'un mur



$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + 8 F_1^2 \sin^2 \theta \right)^{1/2} - 1 \right] \quad (\text{III.1})$$

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\text{tg } \beta}{\text{tg}(\beta - \theta)}$$

$$F_2^2 = y^{-1} \left[ F_1^2 - \frac{1}{2y} (y-1)(y+1)^2 \right]$$

$$\text{où : } F_1 = \frac{V_1}{(g h_1)^{1/2}}$$

est le nombre de froude de l'écoulement entrant et :  $y = \frac{h_2}{h_1}$  est le rapport des profondeurs de l'écoulement .

Le système d'équations a été établi en supposant que l'eau était peu profonde, c'est à dire que la pression était hydrostatique, et que les distributions de vitesses étaient uniformes .

Pour des paramètres donnés  $h_1$  ,  $V_1$  , et  $\theta$  , on peut calculer  $h_2$  ,  $\beta$  et  $F_2$  . Dans le cas où  $F_1 \sin \beta > 1$  , l'équation peut être remplacée par l'équation approchée suivante :

$$Y = \sqrt{2} F_2 \sin \beta - \frac{1}{2}$$

et Hager a montré que :

$$\beta = \theta + \frac{3}{2\sqrt{2}} F_1^{-1} \quad (\text{III.2})$$

pour  $\beta < \frac{\Pi}{4}$  et  $F_1 > 2$  ,

les valeurs caractéristiques tirées de l'équations ( III.2 ) présentent un écart inférieur à 2° par rapport à la valeur exacte . De plus , on peut représenter le nombre de Froude aval  $F_2$  par l'équation approchée :

$$F_2^2 = \frac{F_1 \cos^2 \beta}{\sqrt{2} \sin \beta [1 - (2 \sqrt{2} F_1 \sin \beta)^{-1}]} > 1$$

Fronts des ondes transversales étaient raides pour  $y > 2$  et le passage de  $h_1$  à  $h_2$  presque brutal.

### III. 3 / Notion d'ondes positives et négatives : [3,6,8,12]

Une application du mur de déviation est le canal représentant un changement de direction brusque mais faible . La figure ( III.2 ) représente un canal dont le nombre de Froude de l'écoulement à l'entrée  $F_1 > 2$  .

Aux points A et B le canal change de direction d'un angle  $\theta$  . Au point A le changement de direction rentre dans l'écoulement, la déviation du mur est qualifiée de " positive " et la profondeur de l'écoulement est identique à celui précédemment examiné . Au contraire la déviation du mur au point B est " négative " et une onde négative se forme avec diminution de la profondeur de l'écoulement .

Cette onde est différente de l'onde positive du fait que le changement de profondeur est progressif et non brutal .

A l'amont de la zone délimitée par ACB, n'est pas touchée par le changement de direction, les lignes de courant restent parallèles au canal d'entrée .

Dans les zones ACE et BCD, sont influencée par la déviation, la première zone on constatera une augmentation de hauteur due à une déviation positive du mur (  $+\theta$  ), et on remarque le contraire pour la seconde zone pour une déviation négative du mur ( $-\theta$ ), et les lignes de courant suivent la déviation et restent parallèles au mur .

Le point C est le résultat de l'intersection des ondes négative et positive et la zone délimitée par CDEF est une zone perturbée résultante d'une intersection d'onde positive et négative, les caractéristiques de cette zone deviennent égales à celle initiale c'est à dire  $h_1$  et  $F_1$  et les lignes de courants sont déviées de  $2\theta$  par rapport à la direction de l'écoulement initiale.

À l'aval de la ligne DFE, une inversion se produit de nouveau : les lignes de courant deviennent parallèles aux murs. La profondeur de l'écoulement augmente dans la zone DFH et diminue dans la zone DFG.

Le long du mur AEG, la surface s'élève tout d'abord de la profondeur initiale  $h_1$ .

L'écoulement devient ainsi agité dans le canal, ce qui nécessite des murs plus hauts que ceux de la zone d'entrée.

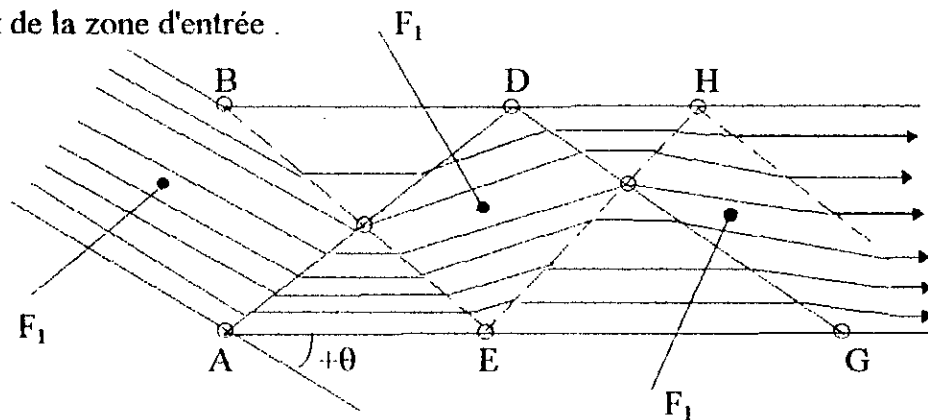


Fig.(III.2) Représentation des ondes positives et négatives

### III. 4 / Réduction des ondes transversales: [3,6,8,12]

Une partie importante de l'étude des coursiers porte sur la réduction des sommets des ondes en vue d'obtenir un écoulement presque uniforme, et le moyen le plus efficace pour réduire les ondes est basé sur le principe d'interférence d'onde.

Selon ce principe, une onde négative est produite pour remplacer une onde positive identique. Par exemple, une déviation de mur positive dans un canal de largeur finie, telle que représentée sur la figure (a) ci-dessous conduit à une

augmentation de la profondeur d'écoulement ( $h_2 > h_1$ ). Dans la figure (b), l'inverse se produit conduisant à une diminution de la profondeur d'écoulement à l'aval.

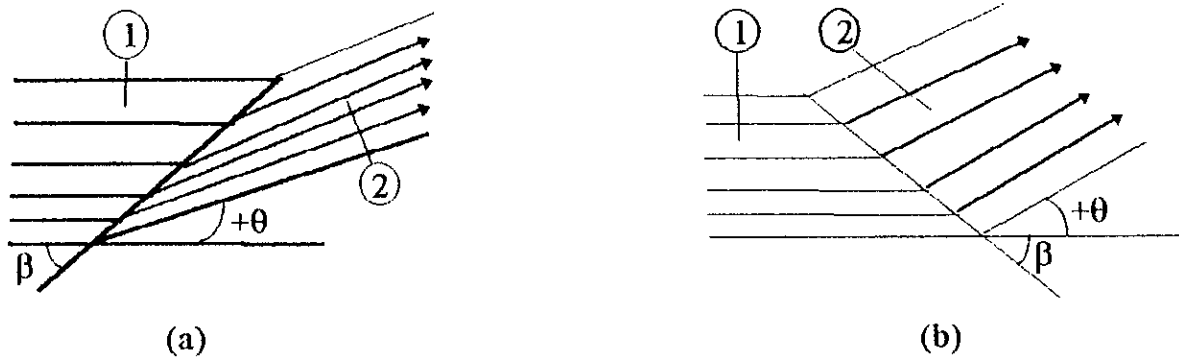


Fig. ( III.3 ) : a) augmentation de la profondeur de l'écoulement

b) Diminution de la profondeur de l'écoulement

### III. 5 / Rétrécissement d'un canal dans des conditions d'écoulement

*torrentiel : [3,6,8,12]*

#### III.5.1/ Type de rétrécissement :

Un rétrécissement de canal dans un écoulement torrentiel se présente aux endroits où :

- la pente du radier est augmentée
- la rugosité est réduite , ou
- le débit augmente .

Täubert a distingué les rétrécissements en forme d'entonnoir, en forme d'éventail et en forme de tuyère ( fig. III.4 )

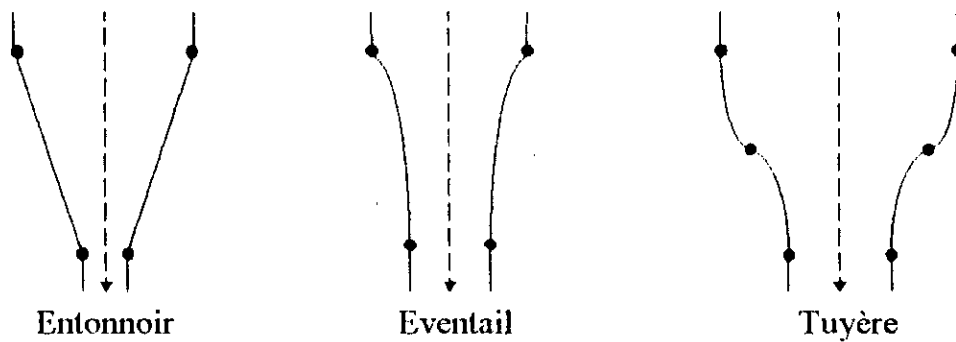


Fig. III.4 Formes de rétrécissement

Le premier type a une forme polygonale entre la partie large et la partie étroite du canal . Dans la forme en éventail, on utilise des arcs circulaires dont la courbure est orientée vers l'écoulement alors que dans la forme en tuyère deux arcs circulaires sont disposées en S .

Le rétrécissement en forme d'éventail présente le minimum de déviation élémentaires et correspond ainsi à la forme optimale du point de vue géométrique .

En ce qui concerne le rétrécissement en forme de tuyère, l'arc amont aura un rayon plus petit que l'arc aval . Les rétrécissements en forme d'entonnoir seront examinés .

### III.5.2/ Rétrécissement en forme d'entonnoir :

La figure ( III.5 ) montre un rétrécissement linéaire symétrique sous l'angle  $\theta$  d'un canal rectangulaire de largeur amont  $b_1$  et de largeur aval  $b_3$  . Si les conditions d'écoulement à l'amont et à l'aval sont telles que  $F_1 > 1$  et  $F_2 > 1$  , Ce changement de largeur du canal provoque un système d'ondes de choc . Les fronts d'ondes partent des points A sous un angle  $\beta_1$  et se rencontrent au point B située sur l'axe du canal .

Pour un certain choix de  $\theta$  les ondes de choc à l'aval de B touchent exactement les points C sous l'angle  $\beta_2$  à l'entrée du canal prismatique de largeur  $b_3$  .

A l'aval d'un tel rétrécissement, il n'aura plus de réflexions d'ondes et la surface d'eau sera plane .

Il est évident que le choix de  $\theta$  dépend du nombre de froude amont  $F_1$  et du rapport de largeurs  $b / B$  . Une fois  $\frac{b_3}{b_1}$  et  $\theta$  fixés , chaque changement de  $F_1$  conduit à la situation représentée dans la figure ( III.5 ) .

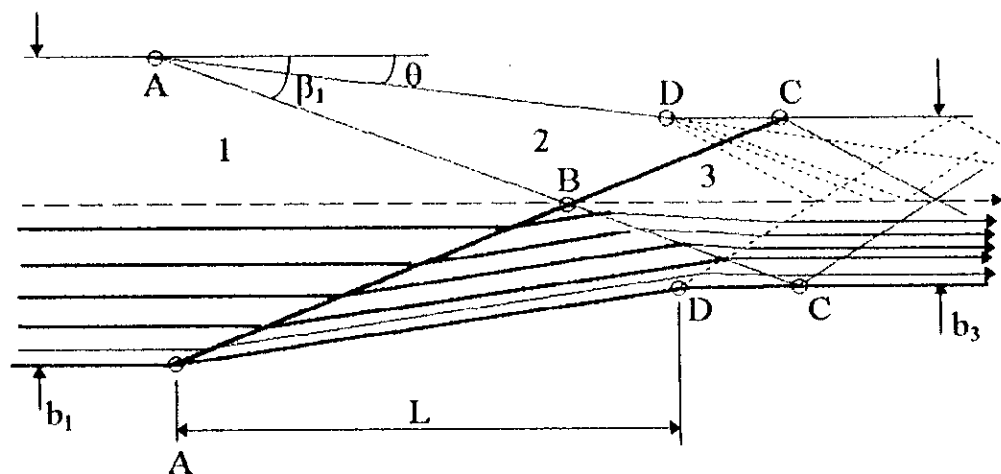


fig. III.5: Représentation de l'écoulement d'un rétrécissement de canal d'après Ippen et DAWSON ( 1951 )

( — ) : Onde positive

( ..... ) : Onde négative

Le front d'onde provenant de B ne touchera donc plus le point C mais touchera la paroi au point D soit à l'amont ou à l'aval du point C .

Il se formera une nouvelle réflexion et la surface d'eau à l'aval de l'entrée du canal aval rétrécie sera fortement perturbée . Des ondulations stationnaires entraîneront une surélévation importante de ses parois .

Par conséquent, le dimensionnement d'un tel rétrécissement se base sur le débit maximal  $Q_{\max} = Q_d$  ; les ondulations pour tous les autres débits inférieurs  $Q < Q_D$  sont tolérables .

Il faut encore noter qu'un système d'ondes négatives, se forme dans le cas où les points C et D ne sont pas identiques d'après Hager et Bretz, l'angle de rétrécissement  $\theta$  peut être déterminé par la formule approchée suivante :

$$\text{Arctg } \theta = \frac{1}{2 F_1 \left( \frac{b_1}{b_3} - 1 \right)}$$

Si  $\theta < 10^\circ$

Pour de grande valeurs de  $\theta$  les résultats devront être vérifiés vis à vis de l'engorgement, étant donné que  $F_3$  peut être proche de l'écoulement critique .

Un réseau hydraulique se produit alors dans le rétrécissement . De tels phénomènes sont à écouter dans tous les cas et en doit assurer une transition progressive de  $F_1$  à  $F_3$  .

La conception sera basée sur une valeur minimale du nombre de Froude aval  $F_3 > 2$ , de façon que  $2 < F_3 < F_1$  . L'étude se base sur le débit pour lequel la hauteur maximale de l'onde se produit .

Ce débit n'est pas connu a priori . On considère , en général, le débit maximal comme débit de projet .



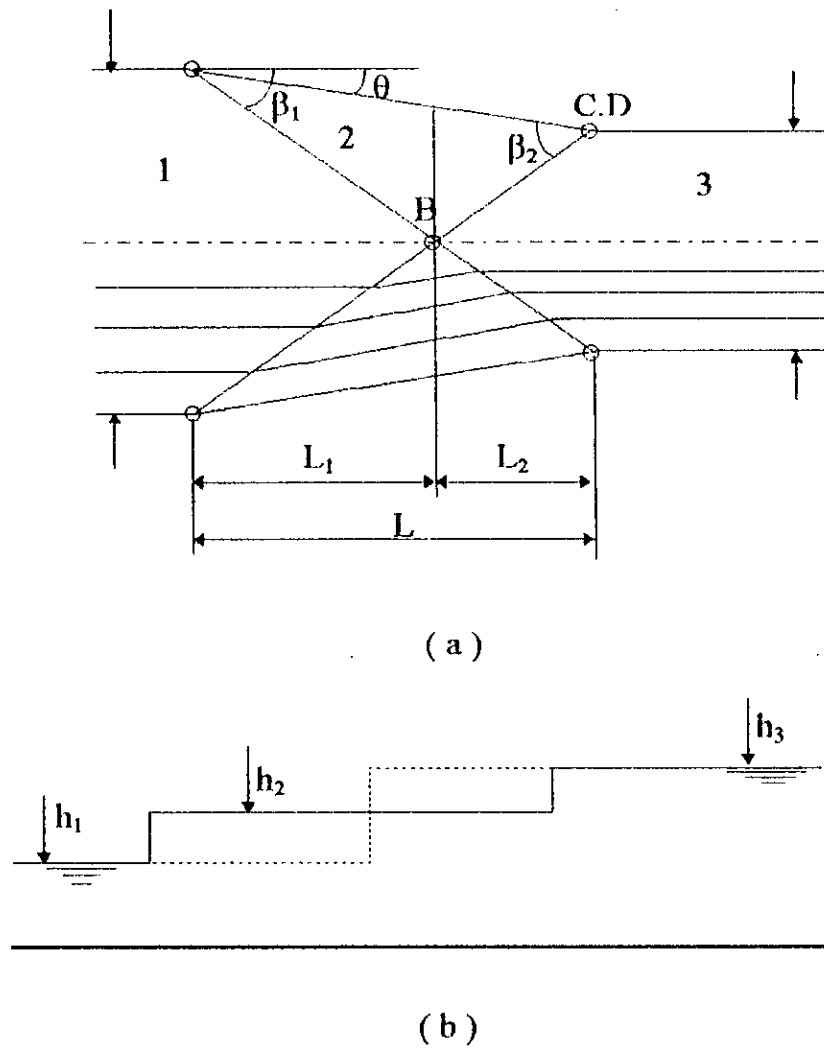


Fig. III.6 Conception d'un rétrécissement de canal en forme d'entonnoir d'après

IPPEN et DAWSON ( 1951)

a) Vue en plan, b) Coupe longitudinal ;

(—) profil de la surface libre le long du canal

(- - -) profil de la surface libre le long des parois

### III. 6 / Elargissement d'un canal : [3,6,8,12]

Par opposition à une réduction de largeur d'un canal, où la vitesse moyenne  $V$  diminue et la hauteur d'eau  $h$  augmente en direction de l'écoulement,  $V$  dans les canaux à parois divergentes augmente et  $h$  décroît pour des conditions pseudouniformes

Alors que la hauteur d'eau décroît, l'angle de choc  $B$  augmente et les ondes de choc divergent en conséquence.

Rousse et al ont présentés des résultats permettant le dimensionnement des élargissements dans des conditions d'écoulements torrentielles.

En considérant  $b_1$  et  $b_2$  les largeurs à l'amont et à l'aval du canal rectangulaire, l'écoulement provient d'un canal amont prismatique de la largeur  $b_1$  sur un canal aval de largeur infinie  $\left(\frac{b_1}{b_2} \rightarrow 0\right)$

la fonction de largeur  $B = B(x)$  dans la transitions est :

$$\frac{B}{b_1} = \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{X}{b_1 F_1} \right]^{3/2} + 1 \right)$$

où  $F_1$  est le nombre de Froude amont.

Pour les fortes pentes du radier, l'écoulement a tendance à moins s'étendre latéralement, et pour des valeurs finies de  $b_2/b_1$  on peut utiliser l'équation suivante :

$$\frac{B}{b_1} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( \frac{1}{4} \right) \left( \frac{X}{b_1 F_1} \right)^{3/2} \right]$$

la longueur de la zone de transition  $L$  est déterminée comme suit :

$$\frac{L}{b_1 F_1} = 1 + 3,25 \left( \frac{b_2}{b_1} - 1 \right) \quad ; \text{ avec : } \frac{b_2}{b_1} < 5$$

D'après ROUSE et al, la conception donne un écoulement sortant essentiellement uniforme .

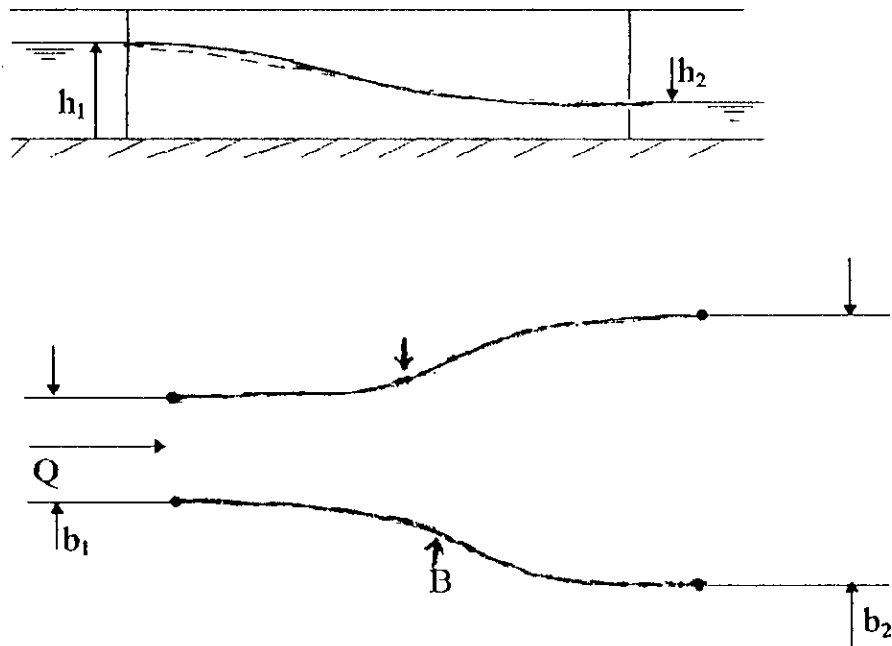


Fig.III.7 Géométrie d'un élargissement dans les conditions torrentielles

- (—) Profil de la surface libre le long de l'axe
- (- - -) Profil de la surface libre le long des parois
- (●) Début et fin de la transition

*Chapitre 4*

**MODÉLISATION  
MATHÉMATIQUE**

#### IV. 1/- Hypothèses de base : [ 1, 6, 8 ]

Les équations qui régissent les écoulements non permanent dans les canaux naturels ou artificiels, sont un simple modèle de phénomènes extrêmement complexes .

Elles incorporent seulement les grandeurs importantes influençant réellement l'écoulement , en laissant de côté les grandeurs , qui sont d'une importance secondaire .

Les hypothèses qui nous ont permis d'établir ces équations sont :

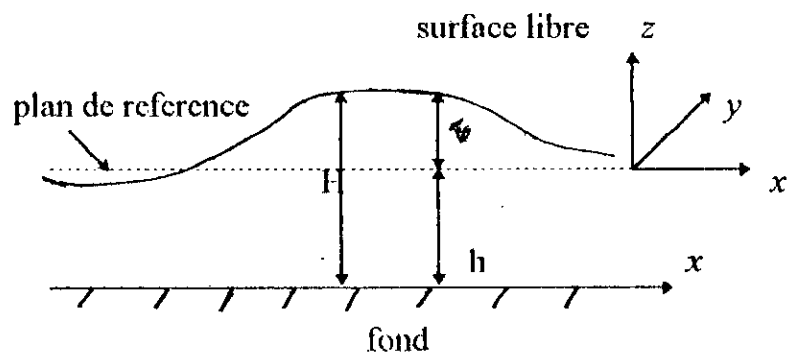
- 1°) Le fluide est incompressible
- 2°) L'écoulement est bidimensionnel
- 3°) La pression est distribuée hydrostatiquement sur la profondeur
- 4°) Le canal est de faible pente
- 5°) La répartition des vitesses transversales est uniforme

6°) Les effets de frottement limite est la turbulence ont été considérés analogues à ceux des lois d'écoulement permanent .

#### IV. 2/- Mise en équation : [ 1, 2 ]

Les équations de Saint - Venant qui gouvernent les écoulements bidimensionnels à surface libre sur la base des hypothèses précédentes proviennent de l'intégrale sur la profondeur des équations de Navier - Stokes ( 3 - D ) et de conservation de la masse .

*fig. (IV.1) :*  
Schéma d'un écoulement  
à surface libre



Les équations de base sont :

\* Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u) + \frac{\partial}{\partial y}(v) + \frac{\partial}{\partial z}(w) = 0 \quad (4.1)$$

\* Equation de conservation de la quantité de mouvement (équation de Navier-Stokes (3 - D))

$$\frac{\partial}{\partial t}(U) + \frac{\partial}{\partial x}(U^2) + \frac{\partial}{\partial y}(UV) + \frac{\partial}{\partial z}(UW) = f \cdot V - g \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(V) + \frac{\partial}{\partial x}(UV) + \frac{\partial}{\partial y}(V^2) + \frac{\partial}{\partial z}(VW) = f \cdot U - g \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(W) + \frac{\partial}{\partial x}(UW) + \frac{\partial}{\partial y}(WV) + \frac{\partial}{\partial z}(W^2) = f \cdot W - g \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right)$$

L'intégration de ces équations sur la profondeur se fait en utilisant la règle de dérivation sous signe "somme" soit :

$$\int_{-h}^{\tau} \frac{\partial f}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\tau} f \cdot dz - f(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial x} + f(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial x}$$

$$\int_{-h}^{\tau} \frac{\partial f}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\tau} f \cdot dz - f(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial y} + f(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial y}$$

$$\int_{-h}^{\tau} \frac{\partial f}{\partial z} dz = f(\tau) - f(-h)$$

et en considérant en outre les conditions cinématiques à la surface et au fond .

pour  $z = \tau$ , on a l'équation de la surface libre :

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + U(\tau) \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} + V(\tau) \cdot \frac{\partial \tau}{\partial y} = W(\tau)$$

pour  $z = -h$ , on a l'équation du fond :

$$U(-h) \frac{\partial h}{\partial x} + V(-h) \frac{\partial h}{\partial y} = -W(-h)$$

#### IV.2.1/ Intégration de la loi de conservation de masse :

$$\int_{-h}^{\tau} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) dz = \int_{-h}^{\tau} \frac{\partial U}{\partial x} dz + \int_{-h}^{\tau} \frac{\partial V}{\partial y} dz + \int_{-h}^{\tau} \frac{\partial W}{\partial z} dz$$

En utilisant la règle de dérivation sous le signe "Somme" nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{\tau} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\tau} U dz - \left[ \left( U(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial x} - U(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial x} \right) \right] + \\ &\quad \left[ \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\tau} V dz - \left( V(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial y} - V(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial y} \right) \right] + W(\tau) - W(-h) \end{aligned}$$

l'écoulement est moyennement permanent , nous définissons les vitesses moyennes commesuit:

$$\bar{U} = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\tau} U dz \quad ; \quad \bar{V} = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\tau} V dz \quad ; \quad \bar{W} = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\tau} W dz$$

D'où l'équation devient :

$$\int_{-h}^{\tau} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (HU) + \frac{\partial (HV)}{\partial y} + \left[ W(\tau) - \frac{\partial \tau}{\partial t} - U(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial x} - V(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial y} \right] \\ + \left[ W(-h) + U(-h) \frac{\partial h}{\partial x} + V(-h) \frac{\partial h}{\partial y} \right]$$

En tenant compte des conditions cinématiques, l'équation intégrée devient :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (H\bar{U}) + \frac{\partial}{\partial y} (H\bar{V}) = 0 \quad (4.5)$$

#### IV.2.2/ Intégration de la 1<sup>ère</sup> équation de Navier - Stokes :

Posons  $A = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (U^2) + \frac{\partial}{\partial y} (UV) + \frac{\partial (UW)}{\partial z}$

et  $B = F \cdot V - g \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{1}{P} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right)$

$$\int_{-h}^{\tau} A dz = \int_{-h}^{\tau} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (U^2) + \frac{\partial}{\partial y} (UV) + \frac{\partial}{\partial z} (WU) dz$$



$$\begin{aligned} \int_{-h}^{\tau} A dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\tau} U dz - \left( U(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial t} - U(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial t} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\tau} U^2 dz - \left( U^2(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial x} - U^2(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\tau} UV dz - \left( U(\tau)V(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial y} - U(-h)V(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial y} \right) \\ &+ (UW)_{\tau} - (UW)_{-h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{\tau} A dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\tau} U dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\tau} U^2 dz \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\tau} UV dz + U(\tau) \left[ \frac{\partial \tau}{\partial t} + U(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial x} + V(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial y} - W(\tau) \right] \\ &+ U(-h) \left[ \frac{\partial(-h)}{\partial x} + V(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial y} + W(-h) \right] \end{aligned}$$

En introduisant les conditions cinématiques, nous obtenons :

$$\int_{-h}^t A dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\tau} U dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\tau} U^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\tau} UV dz$$

Sachant que :

$$U = (U - \bar{U}) + \bar{U}$$

$$d'où : U^2 = (U - \bar{U})^2 + \bar{U}^2 + 2\bar{U}(U - \bar{U})$$

$$et : (U - \bar{U})(V - \bar{V}) = UV - U\bar{V} - \bar{U}V + \bar{U}\bar{V}$$

$$d'où UV = (U - \bar{U})(V - \bar{V}) + U\bar{V} + \bar{U}V - \bar{U}\bar{V}$$

En remplaçant les termes  $U^2$  et  $UV$  par leur expression dans l'équation ( 4 . 6 ) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{\tau} A dz &= \frac{\partial}{\partial t} (H\bar{U}) + \frac{\partial}{\partial y} (H\bar{U}\bar{V}) + \frac{\partial}{\partial x} (H\bar{U}^2) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} (H\bar{U}\bar{V}) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\tau} (U - \bar{U})^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\tau} (U - \bar{V})(V - \bar{V}) dz \end{aligned}$$

Intégrons sur la profondeur les termes du second membre de l'équation (4.2), tel que le tenseur des contraintes visqueuses et turbulentes est donnée par :

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} \end{pmatrix} = -\rho \begin{pmatrix} \overline{U'^2} & -\overline{UV'} \\ \overline{UV'} & \overline{V'^2} \end{pmatrix} + \rho \nu \begin{pmatrix} 2\frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} & 2\frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\int_{-h}^{\tau} B dz = \int_{-h}^{\tau} \left[ fV - g \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \right] dz$$

après 1<sup>er</sup> arrangement on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{\tau} B dz &= f\bar{V}H - gH \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\tau} \tau_{xx} dz \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\tau} \tau_{xy} dz - \left[ \tau_{xx}(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial x} + \tau_{xy}(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial y} - \tau_{xz}(\tau) \right] \\ &+ \left[ \tau_{xx}(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial x} + \tau_{xy}(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial y} - \tau_{xy}(-h) \right] \end{aligned}$$

En considérant le système d'axes  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , où l'axe  $z'$  étant normal à la surface libre

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\partial \tau}{\partial x} \\ 0 & 1 & -\frac{\partial \tau}{\partial y} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

La transformation du tenseur de contrainte montre alors que :

$$\begin{aligned} \tau_{y'z'} &= -\tau_{xy} \frac{\partial \tau}{\partial x} - \tau_{yy} \frac{\partial \tau}{\partial y} + \tau_{yz} \\ \tau_{x'z'} &= -\tau_{xx} \frac{\partial \tau}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial \tau}{\partial y} + \tau_{xz} \end{aligned}$$

et nous définissons la contrainte du vent et la contrainte du fond par :

$$\begin{aligned} \tau_{wx} &= (\tau_{x'z'})_s & \tau_{bx} &= (\tau_{x'z'})_b \\ & \text{et} & & \\ \tau_{wy} &= (\tau_{y'z'})_s & \tau_{by} &= (\tau_{y'z'})_b \end{aligned}$$

d'où l'équation intégrée devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(H\bar{U})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(H\bar{U}^2) + \frac{\partial}{\partial y}(H\bar{U}\bar{V}) &= f\bar{V}H - gH \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{1}{\rho}(\tau_{wx} - \tau_{bx}) \\ &+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}(HT_{xx}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y}(HT_{xy}) \end{aligned}$$

Où les contraintes effectives dans le plan vertical sont définies par :

$$T_{xx} = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\tau} \left( 2\rho\nu \frac{\partial U}{\partial x} - \rho \overline{U'^2} - \rho (U - \bar{U})^2 \right) dz$$

$$T_{xy} = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\tau} \left( \rho\nu \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \rho \overline{U'V'} - \rho (U - \bar{U})(V - \bar{V}) \right) dz$$

$$T_{yy} = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\tau} \left( 2\rho\nu \frac{\partial V}{\partial y} - \rho \overline{V'^2} - \rho (V - \bar{V})^2 \right) dz$$

et les contraintes du fond sont généralement données par :

$$\tau_{bx} = \frac{\rho g}{c^2} \frac{\bar{U}(\bar{U}^2 + \bar{V}^2)^{1/2}}{H^{4/3}} = \rho g H \left( n^2 \frac{\bar{U}(\bar{U}^2 + \bar{V}^2)^{1/2}}{H^{4/3}} \right)$$

$$\tau_{by} = \frac{\rho g}{c^2} \frac{\bar{V}(\bar{U}^2 + \bar{V}^2)^{1/2}}{H^{4/3}} = \rho g H \left( n^2 \frac{\bar{V}(\bar{U}^2 + \bar{V}^2)^{1/2}}{H^{4/3}} \right)$$

$$\text{avec: } \begin{cases} C = \frac{1}{n} R_H^{1/6} \\ n = \text{Coefficient de Manning} \\ c = \text{Coefficient de Chezy} \\ R_H = \text{Rayon hydraulique} \end{cases}$$

Ainsi que:

$$-gH \frac{\partial \tau}{\partial x} = -gH \frac{\partial(H-h)}{\partial x} = -gH \left( \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) = - \frac{d \left( g \frac{H^2}{2} \right)}{\partial x} + gH \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\text{Où : } \frac{\partial h}{\partial x} = S_{ox}$$

Avec  $S_{ox}$  : pente du canal dans la direction  $x$ .

Finalement l'équation ( 4 . 2 ) intégrée devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (H \bar{U}) + \frac{\partial (H \bar{U}^2)}{\partial x} + \frac{\partial (H \bar{U} \bar{V})}{\partial y} = f H \bar{V} - \frac{\partial \left( g \frac{H^2}{2} \right)}{\partial x} \\ + g H \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \tau_{wx} - g H \left( \frac{n^2 \bar{U} (\bar{U}^2 + \bar{V}^2)^{1/2}}{H^{4/3}} \right) \\ + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (H T_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (H T_{xy}) \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

de la même façon on intègre la 2<sup>ème</sup> équation de Navier - Stokes ( 4 . 3 ) sur la profondeur pour aboutir à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (H \bar{V}) + \frac{\partial}{\partial x} (H \bar{U} \bar{V}) + \frac{\partial}{\partial y} (H \bar{V}^2) = f H \bar{U} - \frac{\partial \left( g \frac{H^2}{2} \right)}{\partial y} + g H \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \tau_{wy} \\ - g H \left( \frac{n^2 \bar{V} (\bar{U}^2 + \bar{V}^2)^{1/2}}{H^{4/3}} \right) + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (H T_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (H T_{yy}) \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

J. KUIPERS et C.B. VREUGDENHIL ( 1973 ) ont introduit la viscosité turbulente  $\varepsilon$  pour une profondeur constante  $H$  à fin de prendre en compte les termes de contraintes effectives comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho H} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (H T_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (H T_{yy}) \right] = \varepsilon \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \\ \frac{1}{\rho H} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (H T_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (H T_{yy}) \right] = \varepsilon \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

En introduisant les hypothèses simplificatrices suivantes :

- négligeant la force de Coriolis
- négligeant les termes d'ordre deux
- négligeant l'effet du vent

Les deux équations deviennent :

$$\frac{\partial(HU)}{\partial t} + \frac{\partial(HU^2)}{\partial x} + \frac{\partial(H\bar{U}\bar{V})}{\partial y} = -\frac{\partial\left(\frac{gH^2}{2}\right)}{\partial x} + gHS_{ox} - gHS_{fx} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial(HV)}{\partial t} + \frac{\partial(HUV)}{\partial x} + \frac{\partial(HV^2)}{\partial y} = -\frac{\partial\left(\frac{gH^2}{2}\right)}{\partial y} + gHS_{oy} - gHS_{fy} \quad (4.10)$$

Les différents termes apparaissant dans les équations de Saint - Venant correspondent respectivement :

- à l'accélération locale de l'écoulement
- à l'accélération spatiale
- à la force de pression
- à la force de gravité
- au frottement eau - fond du canal .

$$S_{fx} = \frac{n^2 U (U^2 + V^2)^{1/2}}{H^{4/3}}$$

$$S_{fy} = \frac{n^2 V (U^2 + V^2)^{1/2}}{H^{4/3}}$$

Et  $S_{ox}$ ,  $S_{oy}$  : sont respectivement les pentes du canal dans les directions X et Y .

Le système final décrivant le problème considéré dont les inconnus  $h$ ,  $U$ ,  $V$ , dit système de Saint - Venant est le suivant :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(HU)}{\partial x} + \frac{\partial(HV)}{\partial y} = 0 \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial(HU)}{\partial t} + \frac{\partial\left(HU^2 + \frac{gH^2}{2}\right)}{\partial x} + \frac{\partial(HUV)}{\partial y} = gH(S_{ox} - S_{fx}) \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial(HV)}{\partial t} + \frac{\partial(HUV)}{\partial x} + \frac{\partial\left(HV^2 + \frac{gH^2}{2}\right)}{\partial y} = gH(S_{oy} - S_{fy}) \quad (4.13)$$

#### IV. 3 / Transformation Géométrique : [ 10 ]

On procède à la transformation géométrique pour transformer n'importe quelle géométrie complexe en un domaine de calcul rectangulaire plus simple à étudier afin d'éviter les problèmes lors de prise en compte des conditions aux limites au niveau des parois latérales .

Cette procédure est basée sur la transformation de coordonnées suivantes :

$$\xi = x \quad (4.14)$$

$$\eta = \frac{y}{b(x)} \quad (4.15)$$

$b(x)$ , étant la distance entre l'axe de symétrie et la paroi

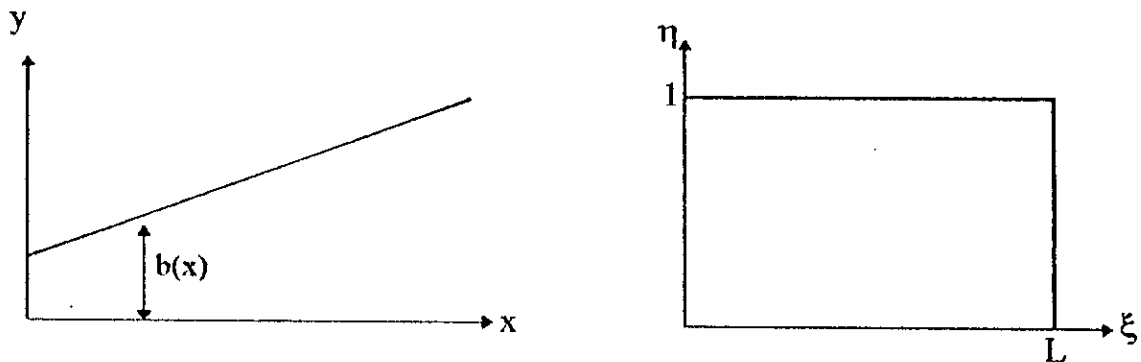


fig ( IV . 2 )

Une fois , la transformation est établie, l'application des différentes series au domaine de calcul est plus adéquate, par conséquent les frontières du domaine de calcul coïncident avec  $\eta = 0$  et  $\eta = 1$  .

#### IV.3.1. Application de la transformation géométrique aux équations

de Saint - Venant : [ 7 ]

Les équations de Saint - Venant peuvent s'écrire sous la forme conservative comme suit:

$$\partial_t \hat{Q} + \partial_x \hat{E} + \partial_y \hat{G} = \hat{S} \quad (4.16)$$

Où:

$$\hat{Q} = \begin{Bmatrix} H \\ HU \\ HV \end{Bmatrix} \quad \hat{G} = \begin{Bmatrix} HV \\ HU \\ HV^2 + \frac{1}{2} g H^2 \end{Bmatrix}$$

$$\hat{E} = \begin{Bmatrix} HU \\ HU^2 + \frac{1}{2} g H^2 \\ HUV \end{Bmatrix} \quad \hat{S} = \begin{Bmatrix} 0 \\ g H (S_{ox} - S_{fx}) \\ g H (S_{oy} - S_{fy}) \end{Bmatrix}$$



En adoptant la transformation géométrique (4.14), (4.15) au système (4.16) on obtient :

$$\partial_t Q + \partial_\xi E + \partial_\eta G = \hat{S}$$

Où :

$$Q = \hat{Q}/J$$

$$E = (\xi_x \hat{E} + \xi_y \hat{G})/J$$

$$G = (\eta_x \hat{E} + \eta_y \hat{G})/J$$

$$S = \hat{S}/J$$

$$J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$$

J : déterminant de la matrice jacobienne .

Le système hyperbolique non linéaire ( 4.17) peut s'écrire sous la forme quasi-linéaire :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \eta} = S$$

$$\text{On pose } \begin{aligned} A_\xi &= \frac{\partial E}{\partial Q} \\ B_\eta &= \frac{\partial G}{\partial \xi} \end{aligned}$$

$A_\xi$  ,  $B_\eta$  : Matrices jacobienes

D'où :

$$\partial_t Q + A_\xi(Q) \partial_\xi Q + B_\eta(Q) \partial_\eta Q = S$$

La forme explicite des deux matrices  $A_\xi$  et  $B_\eta$  est la suivante :

$$A_{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -U^2 + c^2 & 2U & 0 \\ -UV + c^2 & V & U \end{bmatrix}$$

$$B_{\eta} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-y}{b^2(x)} \cdot \frac{\partial b(x)}{\partial x} & \frac{1}{b(x)} \\ (c^2 - U^2) \cdot \left( \frac{-y}{b^2(x)} \cdot \frac{\partial b(x)}{\partial x} - \frac{UV}{b(x)} \right) & \frac{-2Uy}{b^2(x)} \cdot \frac{\partial b(x)}{\partial x} + \frac{V}{b(x)} & \frac{U}{b(x)} \\ \frac{UVy}{b^2(x)} \cdot \frac{\partial b(x)}{\partial x} + \frac{(c^2 - V^2)}{b(x)} & \frac{-Vy}{b^2(x)} \cdot \frac{\partial b(x)}{\partial x} & \frac{-Uy}{b^2(x)} \cdot \frac{\partial b(x)}{\partial x} + \frac{2V}{b(x)} \end{bmatrix}$$

#### IV. 4 / Conditions initiales , Conditions aux limites : [6,8,10]

##### IV. 4. 1/ Conditions initiales :

Se sont les valeurs de  $h$  ,  $u$  et  $v$  respectivement hauteur, vitesse suivant  $x$  et vitesse suivant  $y$ , prise à l'instant  $t = 0$  , c'est à dire, les valeurs à prendre pour commencer les itérations, ces valeurs sont judicieusement spécifiées en tous les points du maillage .

##### IV. 4. 2/ Conditions aux limites :

Différentes conditions sont prises en compte :

- Les conditions d'amont et d'aval
- La condition de symétrie
- Les conditions sur les parois latérales

##### A) Conditions d'amont, Conditions d'aval :

Il faut trois conditions aux limites à l'amont et aucune à l'aval pour des écoulements bidimensionnels en régime supercritique .

En ce qui concerne les écoulements fluviaux, deux conditions aux limites doivent être spécifiées à l'amont et une condition à l'aval .

### B) Conditions de symétrie :

Pour le calcul des variables  $u$ ,  $v$ , et  $h$  au niveau de l'axe d'écoulement, il est nécessaire d'utiliser la procédure de réflexion, qui consiste à donner aux variables précédentes aux points du maillage fictif, la valeur de celles aux points intérieurs correspondants .

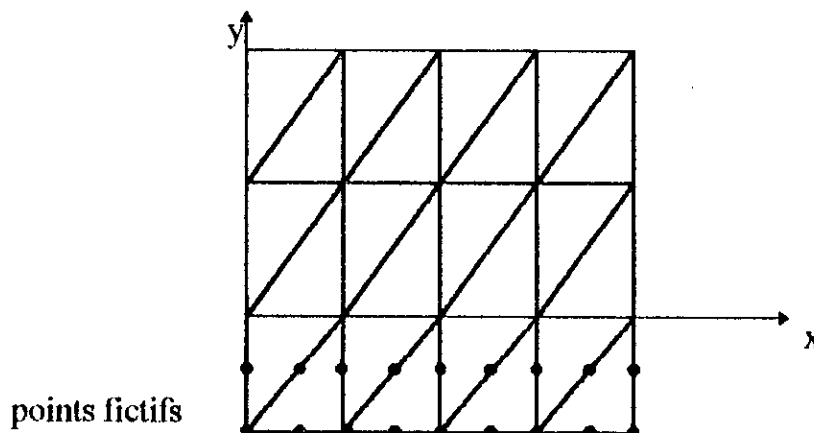


fig. IV.3

Remarquons que cette procédure est exacte pour une ligne symétrique . [10]

### C) Conditions sur les parois latérales :

De la même manière que précédemment et pour pouvoir calculer  $h$ ,  $u$ , et  $v$  au niveau des parois latérales , il faut utiliser la procédure de réflexion qui nous a paru être la plus appropriée .

Cette méthode est l'une des plus utilisée et la plus recommandée pour analyser un écoulement dans des canaux à section rectangulaire .

En se référant à la figure ( IV.4 ) ci, dessous, la profondeur d'écoulement  $h$  et la valeur de la vitesse résultante  $V$  au point de réflexion fictif du maillage et au point intérieur correspondant, sont les mêmes .

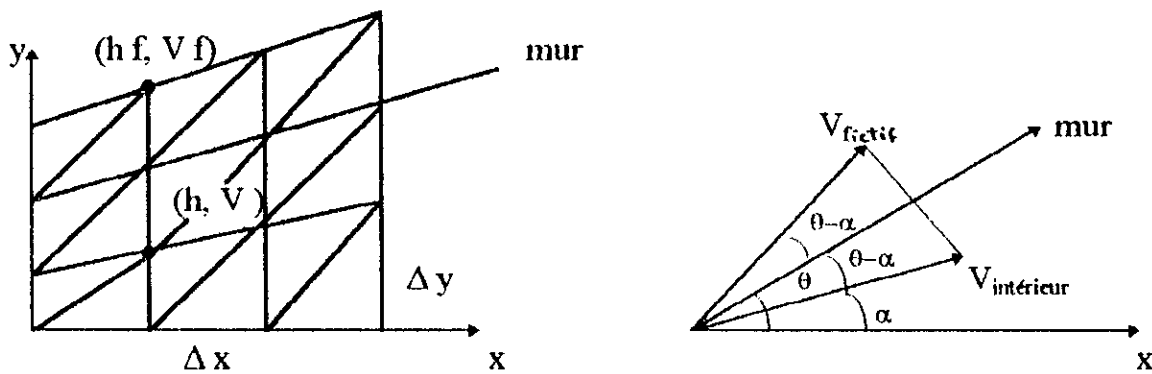


fig. ( IV.4 ) Procédure de réflexion pour la paroi latérale

La direction de la vitesse résultante  $V$  est déterminée telle que sa composante normale au mur soit nulle .

Si  $\theta$  est l'angle que fait la paroi avec l'axe des  $X$ , et  $\alpha$  l'angle que fait la vitesse résultante au point intérieur du maillage et l'axe de  $X$ , alors les composantes  $U^f$  et  $V^f$  au point du maillage fictif sont dans le cas d'un canal divergent :

$$\begin{cases} U^f = V \cos (2\theta - \alpha) \\ V^f = V \sin (2\theta - \alpha) \end{cases}$$

et dans le cas d'un canal convergent :

$$\begin{cases} U^f = V \cos (2\theta - \alpha) \\ V^f = - V \sin (2\theta - \alpha) \end{cases}$$

$V$  est la vitesse résultante au point intérieur du maillage .

*Chapitre 5*

**MODÉLISATION  
PAR  
ÉLÉMENTS FINIS**

### V. 1/ Introduction :

Le domaine de la modélisation numérique est un produit numérique informatique. Il a comme objectif la simulation numérique d'un phénomène physique en utilisant les outils informatiques, pour cela il faut comprendre la physique, choisir les outils mathématiques, numériques et informatiques .

Avec l'événement de machine de plus performantes et de moins coûteuses, la simulation numérique est devenue un outil simple précis pour trier les objets.

Il existe plusieurs méthodes décrivant le comportement des systèmes physiques, parmi elles la méthode des éléments finis .

### V. 2/ Historique :

La M.E.F a été développée sur la base de fondement physique elle est formulée à partir des considérations énergétiques de la mécanique des structures, reposant sur la méthode d'approximation .

On souligne le travail de " ARGYRIS et KELSY " qui systématisent l'utilisation de la notion d'énergie dans l'analyse des structures .

En fait les idées de base de la M.E.F apparaissent dans "CAURANT-HERNNIKOFF et MC HENRY" ( 1940 ), consistant à résoudre des problèmes de M.C par la discrétisation en éléments à l'aide de méthodes d'approximation adéquates .

Avant la M.D.F était utilisée en même temps qu'une formulation générale de la "Méthode de forces " ( LEVY 1947 et GRARVEY 1951 ) .

Cependant, la mise au point des premières méthodes d'éléments finis pour la mécanique des fluides est apparue dans les années soixante dix ; en 1970 ( TAYLOR et HOOD ) ont résolve les équations de N.S incompressibles par éléments finis, aux alentours des années 80 COCHET, HUBERT, ROBERT, SOULIMANI,... Ont proposé des types de résolutions de problèmes hydrodynamiques en éléments finis .

Actuellement la M.E.F est très répandue dans les industries en particulier en construction aéronautiques, aérospatiale naval et nucléaire ; elle se développe en ce moment dans les applications de M.D.F . Ainsi que pour des problèmes très complexes .

### V. 3/ Concept de base : [ 9 ]

La M.E.F est une méthode d'analyse numérique pour la solution des problèmes de genre généralement très complexes .

Elle consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues, pour transformer les équations aux dérivées partielles régissant les problèmes en équations algébriques . Elle fait appel aux trois domaines suivants :

- Science de l'ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles .
- Méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques .
- programmation et informatique pour exécuter efficacement les calculs sur ordinateur .

Le concept de base de la méthode consiste à subdiviser un domaine continue par une série de subdivisions appelées éléments . Ces éléments sont interlignés par des lignes nodales et les coins des éléments deviennent alors des noeuds .

On définit à l'intérieur de chaque élément une approximation, cette approximation de la fonction choisie pour l'élément s'appelle " interpolation " et on exprime cette interpolation en fonction des inconnues aux noeuds .

$$U(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) U_i$$

$U_i$  : Variables nodales .

$N_i(x, y)$  : Fonctions d'interpolation Nodales .

L'assemblage de tous les éléments nous donne une série d'équations simultanées à résoudre, en utilisant le calculateur, la solution de ces équations nous permet d'évaluer nos inconnues.

#### ***V. 4/ Etapes à suivre par la M.E.F :***

Les étapes à suivre pour résoudre un problème par éléments finis sont :

##### **V.4.1 Idéalisations et choix d'élément :**

On divise le domaine continu en éléments ; le choix de la forme et de la taille des éléments est une habileté qui ne peut être acquise que par la pratique.

##### **V.4.2 Choix de fonctions d'interpolation :**

Pour chaque élément, on choisit une fonction d'interpolation qui remplace la variable inconnue à l'intérieur de cet élément ; cette fonction doit être multipliée par les variables nodales.

##### **V.4.3 Calcul des matrices élémentaires :**

Cette étape constitue la partie la plus importante et la plus difficile du problème. Elle consiste à transformer un modèle fort en un autre faible ; pour cela on utilise le principe variationnel ou la méthode des résidus pondérés.

##### **V.4.4 Assemblage des éléments :**

Toutes les matrices représentant les éléments du domaine sont assemblées pour créer un modèle global représenté par un "ensemble" d'équations.

##### **V.4.5 Assemblage des équations :**

Avant la résolution on doit appliquer les conditions aux limites ; les méthodes de résolutions sont choisies en fonction du type de système.



### V. 5/ Élément de référence : [ 9 ]

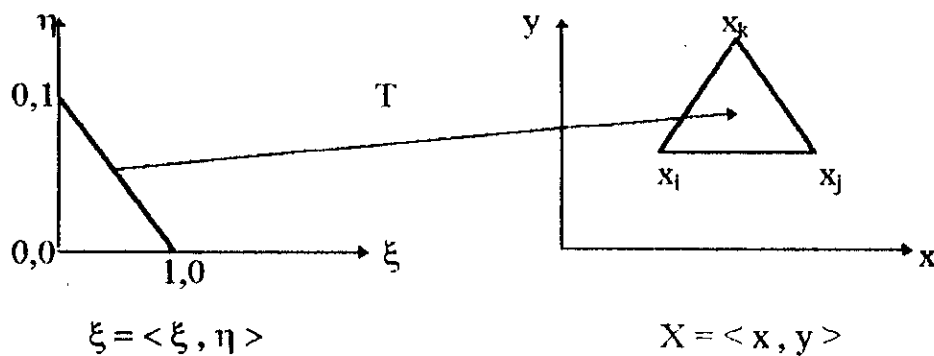
Dans le but de simplifier la définition analytique des éléments de formes complexes, on introduit la notion d'élément de référence simple situé dans un repère de référence. L'élément de référence peut être transformé en élément quelconque par une transformation géométrique bijective.

Cette transformation à la forme :

$$T : \xi ( \xi , \eta , \dots ) \rightarrow X ( x_i , x_j , x_k , \dots )$$

Où :

$x_i , x_j , x_k$  sont les coordonnées des noeuds géométriques .



La transformation géométrique est présentée en reliant les coordonnées sur l'élément réel  $( x, y )$  en fonction de  $\xi , \eta$  , elle s'écrit :

$$x = \sum \bar{N}_i ( \xi , \eta ) x_n$$

$$y = \sum \bar{N}_i ( \xi , \eta ) y_n$$

Où :

$x_n , y_n$  : coordonnées aux noeuds

$N_i$  : fonction de transformation géométriques .

N.B. : Si les fonctions d'interpolation  $N_i ( \xi , \eta )$  sont identiques aux fonctions de transformation géométriques  $\bar{N}_i ( \xi , \eta )$  l'élément est dit isoparamétrique .

Le but du passage d'un élément de référence à un élément réel est d'alléger le volume de calcul réduisant plusieurs opérations ( communes ) en une seule .

### V. 6/ Matrice jacobienne : [ 9 ]

L'existence de deux repères différents l'un de référence, l'autre réel nécessite une matrice Jacobienne pour le passage d'un repère à l'autre .

Toutes les expressions qui impliquent des dérivées en  $x, y$  sont transformées en  $\xi, \eta$  grâce à la matrice Jacobienne [ J ] .

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{on notera : } \{ \partial_T \} = [J] \{ \partial_x \}$$

De même  $\{ \partial_x \} = [j] \{ \partial_\xi \}$  ; Avec  $[j] = [J]^{-1}$  .

Les termes de [ J ] sont obtenues comme suit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \{ \bar{N}(\xi, \eta) \}^T [ \{ x_n \} \{ y_n \} ]$$

$$\Rightarrow [J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} (x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{ \bar{N}(\xi, \eta) \}^T \\ \{ \bar{N}(\xi, \eta) \}^T \end{bmatrix} [ \{ x_n \} \{ y_n \} ]$$

Elle est donc le produit de deux matrices l'une contenant les dérivées en  $\xi, \eta$  des fonctions de transformation géométrique, et l'autre les coordonnées des noeuds géométriques de l'élément .

En ce qui concerne l'intégration, on aura qu'à remplacer :

$$\int_{V_{\text{ré el}}} N(x, y) dx dy \quad \text{par} \quad \int_{V_{\text{ré f}}} N(\xi, \eta) \det(J) d\xi d\eta$$

### V. 7/ Application aux écoulements à surface libre :

Une description d'un problème physique sous forme de relation dérivée partielle est un modèle fort où une écriture forte .

Une description sous forme intégrale impliquant les fonctions solutions et les fonctions tests de pondération est appelée un modèle variationnel intégral ou faible ou encore une écriture faible .

Le choix des fonctions de pondération conduit à différentes formulations :

- .- Formulation de type GALERKINE .
- Formulation de type collocation par point ou sous domaines .
- Formulation de type moindre carré

C'est la formulation de type GALERKINE est la plus utilisée .

#### V . 7 . 1/ Formulation variationnelle des équations de Saint - Venant : [9,11]

Notre modèle est le suivant :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + A_{\xi} \frac{\partial Q}{\partial \xi} + B_{\eta} \frac{\partial Q}{\partial \eta} - S = 0 \quad (V.1)$$

Le modèle fort s'écrit :

$$W^e = \int_v \psi \left( \frac{\partial Q}{\partial t} + A_{\xi} \frac{\partial Q}{\partial \xi} + B_{\eta} \frac{\partial Q}{\partial \eta} - S \right) dv = 0$$

$$W^e = \int_v \psi \frac{\partial Q}{\partial t} dv + \int_v \psi A_{\xi} \frac{\partial Q}{\partial \xi} dv + \int_v \psi B_{\eta} \frac{\partial Q}{\partial \eta} dv - \int_v \psi S dv = 0$$

Après intégration par partie ; nous obtenons une forme intégrale faible :

$$\begin{aligned}
 W^e = & \int_V \psi \frac{\partial Q}{\partial t} dV - \int_V \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \cdot A_\xi \cdot Q dV + \int_\Gamma \psi A_\xi Q d\Gamma \\
 & - \int_V \frac{\partial \psi}{\partial \eta} B_\eta Q dV + \int_\Gamma \psi B_\eta Q d\Gamma - \int_V \psi S dV = 0 \quad (V.2)
 \end{aligned}$$

### V . 7 . 2/ Application de GALERKINE : [ 9, 11, 3 ]

Les variables sont représentées par approximations nodales ces dernières sont de type  $C^0$ .

Remarque : L'approximation est de type  $C^0$  si la fonction est seule continue sur les frontières entre les éléments .

pour chaque élément on a :

$$\mathbf{b} U = \langle N \rangle \{ \mathbf{b} U_n \} ; \quad \mathbf{b} V = \langle N \rangle \{ \mathbf{b} V_n \} ; \quad \mathbf{b} h = \langle \bar{N} \rangle \{ \mathbf{b} h_n \}.$$

Les fonctions tests de type GALERKINE sont

$$\psi = \delta Q = \langle N \rangle \{ \delta Q_n \} = \langle \delta Q_n \rangle \{ N \} \quad (V.3)$$

D'où :

$$\delta (\mathbf{b} U) = \langle N \rangle \{ \delta (\mathbf{b} U_n) \} ; \quad \delta (\mathbf{b} V) = \langle N \rangle \{ \delta (\mathbf{b} V_n) \} ;$$

$$\delta (\mathbf{b} h) = \langle \bar{N} \rangle \{ \delta (\mathbf{b} h_n) \}$$

Remplaçant ( V . 3 ) dans ( V . 2 ) le système devient :

$$\begin{aligned}
W^e &= \langle \delta Q_n \rangle \left[ \int_V \{N\} \langle N \rangle \left\{ \frac{\partial Q_n}{\partial t} \right\} dV - \int_V \left\{ \frac{\partial N}{\partial \xi} \right\} A_\xi \langle N \rangle \{Q_n\} dV \right. \\
&\quad + \int_\Gamma \{N\} A_\xi \langle N \rangle \{Q_n\} dV - \int_V \left\{ \frac{\partial N}{\partial \eta} \right\} B_\eta \langle N \rangle \{Q_n\} dV \\
&\quad \left. + \int_\Gamma \{N\} B_\eta \langle N \rangle \{Q_n\} dV - \int_V \{N\} S dV \right] = 0 \\
W^e &= \langle \delta Q_n \rangle \left[ \int_V \{N\} \langle N \rangle dV \dot{Q}_n - \int_V \left( \left\{ \frac{\partial N}{\partial \xi} \right\} A_\xi + \left\{ \frac{\partial N}{\partial \eta} \right\} B_\eta \right) \cdot \langle N \rangle dV \right. \\
&\quad - \int_V \{N\} S dV + \int_\Gamma \{N\} A_\xi \langle N \rangle d\Gamma \{Q_n\} + \\
&\quad \left. \int_\Gamma \{N\} B_\eta \langle N \rangle d\Gamma \{Q_n\} \right] = 0 \tag{V.4}
\end{aligned}$$

Pour les matrices jacobienne  $A_\xi$ ,  $B_\eta$  non linéaire, on a appliqué les approximations suivantes :

$$U = \sum_{i=1}^6 N_i U_i ; \quad V = \sum_{i=1}^6 N_i V_i ; \quad h = \sum_{i=1}^3 \bar{N}_i h_i$$

En pratique, la forme intégrale faible présente l'avantage, prend en compte une partie de condition aux limites sur les intégrales de contour.

Cette discrétisation nous permet d'écrire  $W^e$  sous forme matricielle.

Pour chaque élément :

$$W^e = \langle \delta Q \rangle \{ [m] \{ Q_n \} - [k(Q_n)] \{ Q_n \} - \{ f \} \} = 0 \tag{V.5}$$

Où :

$$[m] = \int_V \{N\} \langle N \rangle dV : \quad \text{Matrice masse élémentaire.}$$

$[k(Q_n)] = \int_V \left( \left\{ \frac{\partial N}{\partial \xi} \right\} A_\xi + \left\{ \frac{\partial N}{\partial \eta} \right\} B_n \right) \langle N \rangle dV$  : Matrice de rigidité interne élémentaire .

$\{Q\}$  : Vecteur des variables élémentaires

$\{\dot{Q}\}$  : Vecteur de la dérivée temporelle .

L'assemblage des contributions élémentaires donne le système global de la forme

$$W = \sum_{\text{assemblage}} W^e = 0$$

Soit  $W = \langle \delta Q \rangle \{ [M] \{\dot{Q}\} - [K(Q)] \{Q\} - \{F\} \} = 0 \quad \forall \delta Q$

$\{Q\}$  représente toutes les variables nodales

D'où

$$W = [M] \{Q\} - [K(Q)] \{Q\} - \{F\} = 0 \quad (V.6)$$

Où  $[M]$  est une matrice linéaire symétrique

$[K(Q)]$  est une matrice non linéaire et généralement non symétrique

### V. 8/ Présentation de l'élément quadratique T6 :

( triangle à 6 Noeuds de type  $C^0$  )

#### V. 8. 1/ Choix de l'élément : [ 11 ]

Nous avons choisi le type d'élément triangulaire , car il présente un avantage de mailler un domaine quelconque , ainsi que ce maillage est uniforme .

Parmi les éléments triangulaires, nous nous limitons aux éléments T6 de l'approximation linéaire de type  $C^0$  pour les vitesses et la hauteur d'eau .

Ce choix est justifié par :

- la stabilité de cet élément
- donne une bonne précision
- facile à programmer

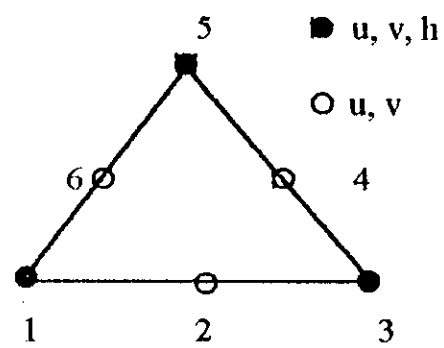


Fig.. V.1 présentation de  
L'élément T6

**V . 8 . 2/ Fonctions d'interpolation : [ 9 ]**

Les fonctions solutions u, v et h sont données par :

$$U = \langle N \rangle \{ U_n \} \quad ; \quad V = \langle N \rangle \{ V_n \} \quad ; \quad h = \langle \bar{N} \rangle \{ h_{n'} \}$$

$$n = 1,6$$

$$n' = 1,3$$

Les fonctions d'interpolation sont :

$$\langle N \rangle = \langle -\lambda (1-2\lambda) \quad 4\xi\lambda \quad -\xi(1-2\xi) \quad 4\xi\eta - \eta(1-2\eta) \quad 4\eta\lambda \rangle$$

$$\text{et } \langle \bar{N} \rangle = \langle 1-\xi-\eta \quad \xi \quad \eta \rangle$$

$$\text{Où } \lambda = 1-\xi-\eta$$

### V. 9 / Méthodes de résolutions : [15,19]

On peut utiliser les schémas explicites ou implites pour résoudre les problèmes instationnaires . Parmi les méthodes nous citons : **Euler** explicite ou implicite, KAWAHARA,..... etc . Dans notre étude, nous avons utilisé le schéma explicite proposé par KAWAHARA .

#### V.9.1/ Schéma explicite ( selective lumping two - step method ) :

Soit le système :

$$[M] \{Q\} + [K(Q)] \{Q\} - \{F\} = 0$$

Pour l'intégration de ce système dans le temps, KAWAHARA et al proposent un schéma explicite pour résoudre les équations .

Etape 1 : l'étape de prédiction :

$$[\bar{M}] \left\{ Q_t + \frac{1}{2} \Delta t \right\} = [\tilde{M}] \{Q_t\} + \frac{\Delta t}{2} \{R(Q_t)\}$$

Etape 2 : l'étape de correction :

$$[\bar{M}] \{Q_t + \Delta t\} = [\tilde{M}] \{Q_t\} + \Delta t \left\{ R(Q_t + \frac{1}{2} \Delta t) \right\}$$

avec :

$$\{R(Q_t)\} = \{F_t\} - [K(Q_t)] \{Q_t\}$$

$$\left\{ R(Q_t + \frac{1}{2} \Delta t) \right\} = \left\{ F_t + \frac{1}{2} \Delta t \right\} - \left[ K(Q_t + \frac{1}{2} \Delta t) \right] \left\{ Q_t + \frac{1}{2} \Delta t \right\}$$

$$[\tilde{M}] = [\bar{M}]e + (1-e)[M]$$

où :

[M] est une matrice masse complète ;

$\bar{M}$  est une matrice masse diagonale , condonisée par une une formule :



$$m L_i = \sum_j m_{ij}$$

$m L_i$  sont les éléments de la matrice  $[\bar{M}]$  ;

$m_{ij}$  sont les éléments de la matrice  $[M]$  ;

Ce type de condensation sur le diagonale revient à concentrer la masse sur les noeuds ;

$e$  : est le paramètre de lumping .

Des auteurs indiquent que [ 13,15 ] :

- Ce schéma possède une précision d'intégration en temps de deuxième ordre ;
- La valeur de "  $e$  " pour le meilleur résultat est de :  $0,8 \leq e \leq 0,95$  ;
- Lorsque prend  $e = 0$ , on obtient le schéma original proposé par KAWAHARA .

La matrice masse diagonale introduit de la viscosité artificielle . Par conséquent, la solution de la hauteur d'eau est trop amortie . Donc, le paramètre "  $e$  " est introduit dans l'intégration pour minimiser l'influence de la viscosité artificielle ;

- L'analyse de la condition de stabilité CFL pour les équations d'onde linéaire donne le critère de stabilité en cas bidimensionnel :

$$\Delta t = \frac{C_u \cdot b(x) \cdot \Delta \xi \cdot \Delta \eta}{(V + \sqrt{gh}) \sqrt{\Delta \xi^2 + [b(x) \cdot \Delta \eta]^2}}$$

la valeur du pas de temps dépend de  $\Delta \xi$  et  $\Delta \eta$  .

Pour notre cas on a choisie la méthode de type " selecting lumping two step " pour résoudre le problème [ 13,15 ] .

## Stratégie de résolution [ 15 ]

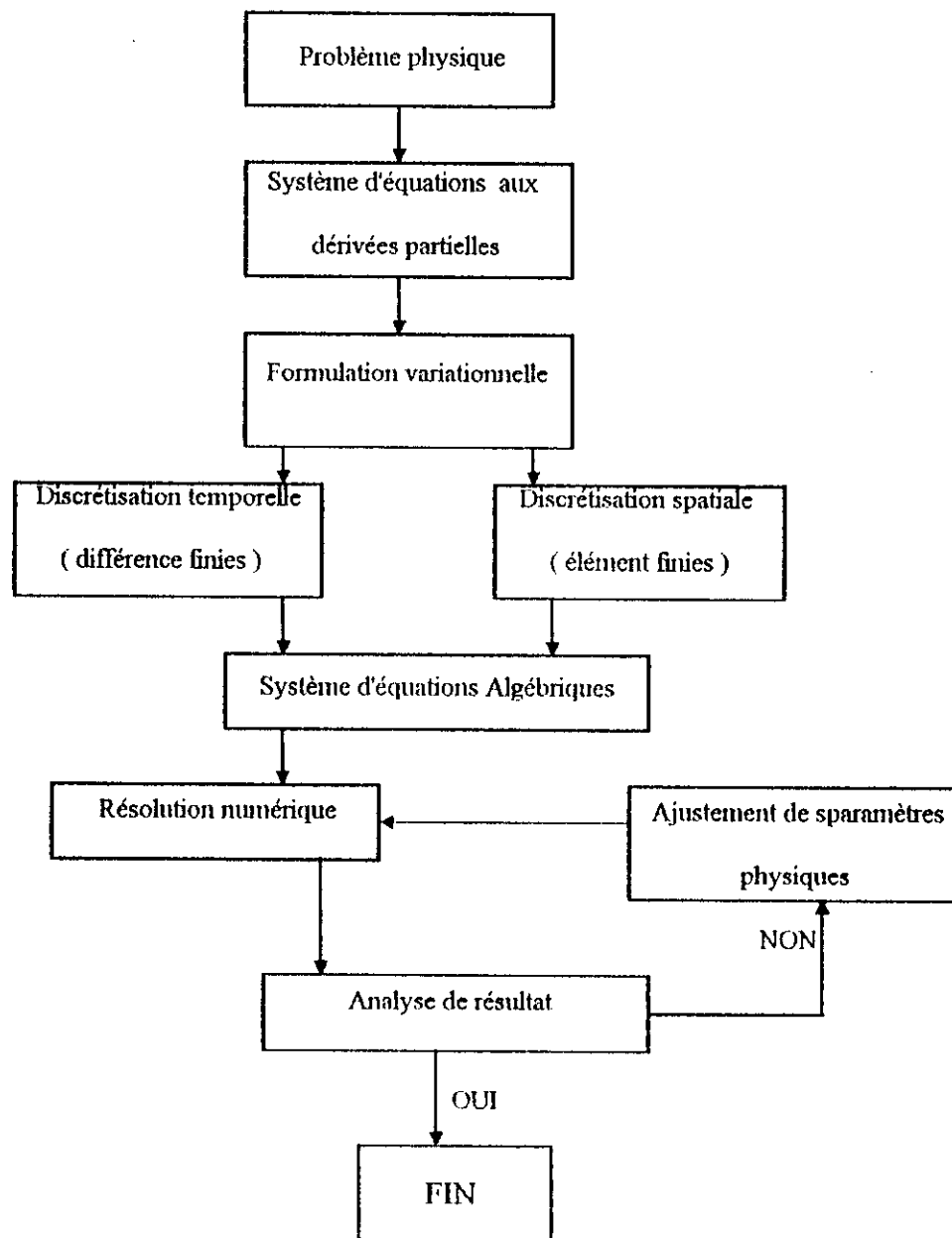
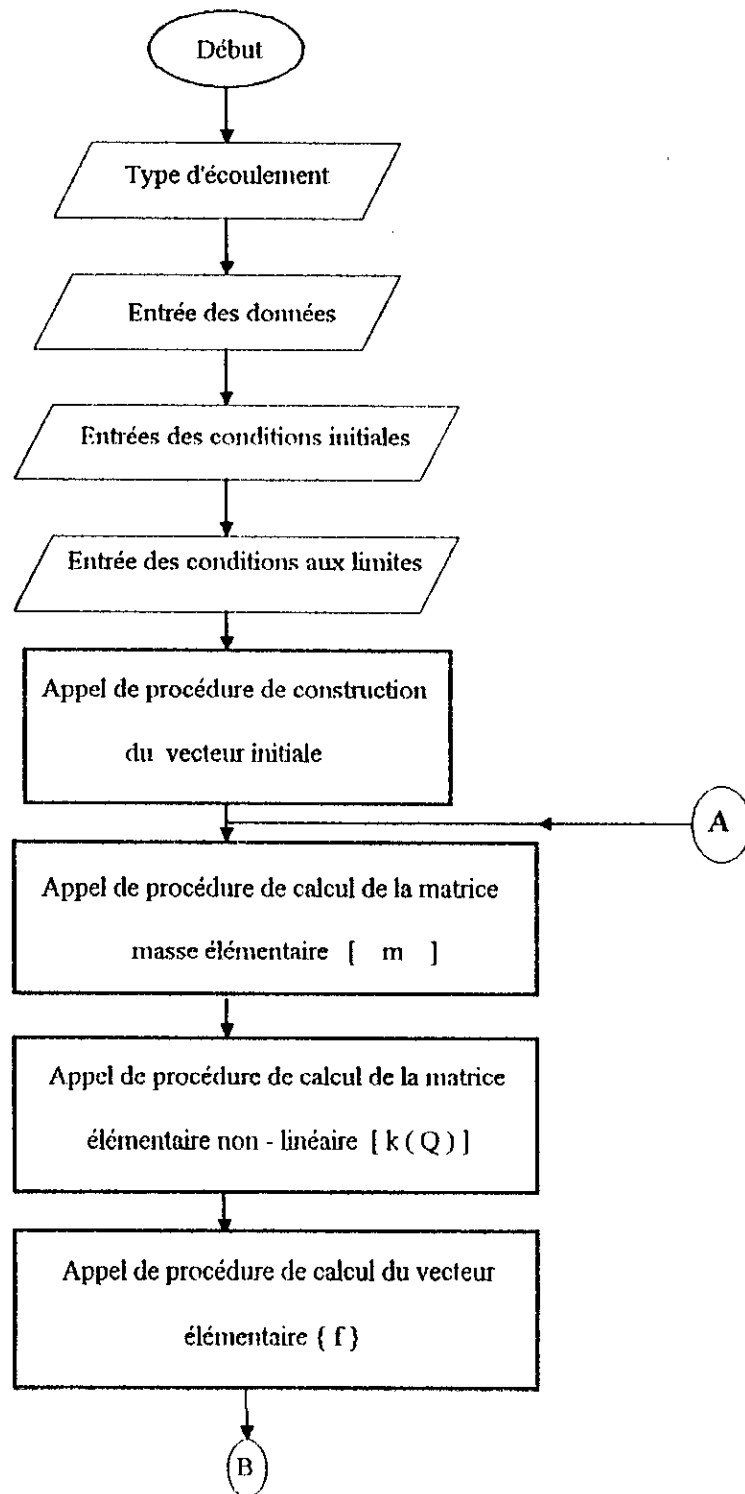
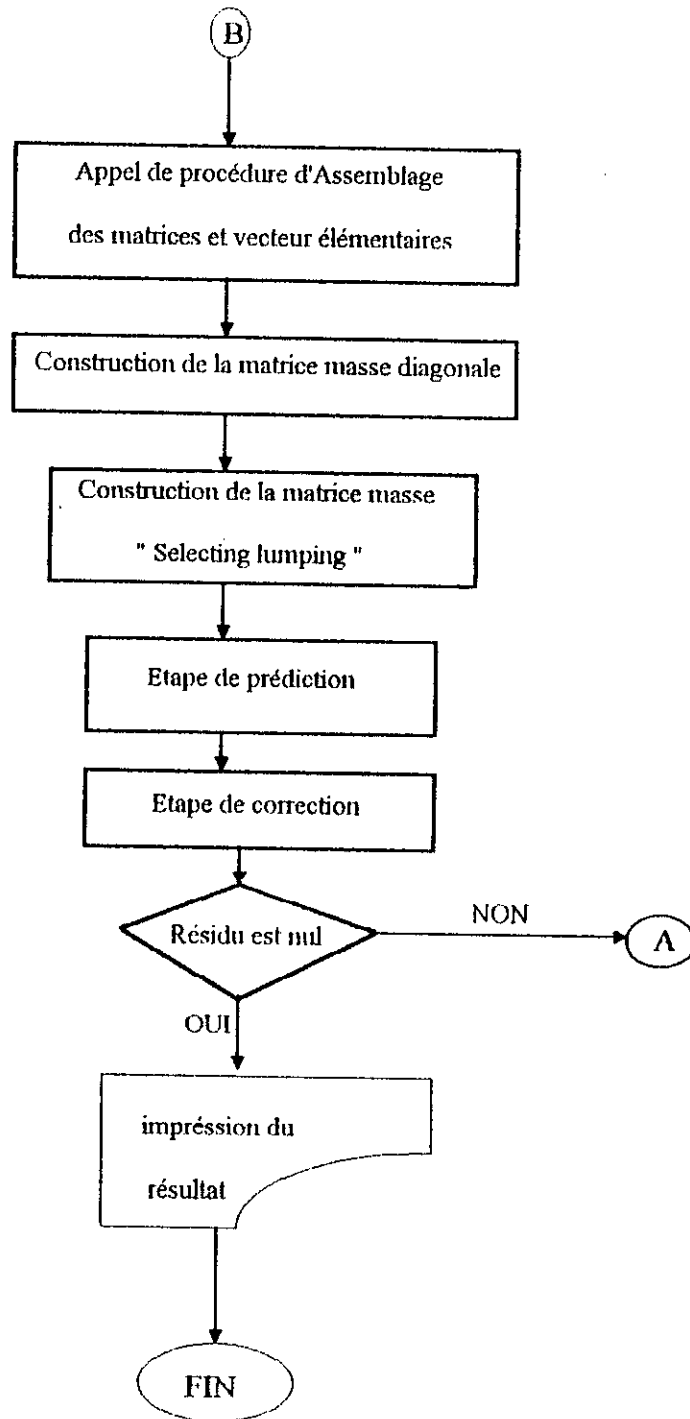


Fig . Le schéma pour résoudre le problème physique

**Organigramme général**





*Chapitre 6*

**APPLICATIONS**

**VI - 1/- 1<sup>ère</sup> Application :****VI.1.1. Analyse de l'écoulement supercritique dans un rétrécissement rectiligne symétrique :**

Cette application porte sur l'analyse d'un écoulement supercritique dans un rétrécissement rectiligne symétrique, l'angle que fait la paroi avec l'axe des  $x$ ,  $\theta = 6^\circ$ , les dimensions complète de ce convergent sont données sur la figure ( A ).

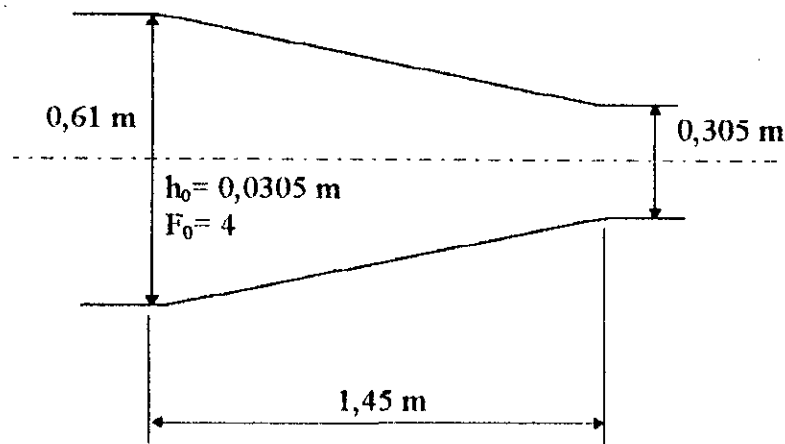


Fig. (A)

Les conditions aux limites de l'écoulement dans ce rétrécissement sont :

- Le tirant d'eau à l'amont est  $h_0 = 0,0305$  m
- Le nombre de Froude à l'amont est  $F_0 = 4$
- La vitesse transversale à l'amont est considérée nulle ( $v = 0$  m / s )
- Les pentes de fond et de frottement sont supposées nulles.

Nous utilisons un maillage triangulaire de 30 éléments, avec 15 degré de liberté pour chaque élément.

Les pas d'espace :

$$\Delta \xi = 0,18 \text{ m}$$

$$\Delta \eta = 0,076$$

- Pour les problèmes de stabilité le nombre de courant est pris d'après la littérature comme suit:  $C_n = 0,8$ .

- Le paramètre de lumping  $e = 0,92$ .

En ce qui concerne les conditions initiales  $h_0 = 0,0305$  m.

- La vitesse longitudinale  $U = 2,188$  m / s.

- La vitesse transversale  $v = 0$  m /s.

et cela sur tous les points du maillage.

#### **IV.1.2. Résultats et analyses :**

Les résultats que nous avons obtenu dans cette application sont illustrés par les figures (A.1) et (A.2), représentant respectivement, les hauteurs d'eau obtenues en utilisant notre modèle et des résultats des autres modèles, expérimental et numérique, le long de l'axe médian et de la paroi.

Plusieurs constatations sont établies à partir des résultats obtenus par le présent modèle le long de l'axe de l'écoulement :

a- Une forme semblable au modèle expérimental réalisé Jimenez.

b- Le modèle de Chaudhry ainsi que les modèles ( PFE 1993 et 1994 ) établis en différences finies ne sont pas aussi fiables que notre modèle.

c- Le modèle ne nous renseigne pas exactement de la position de la crête d'eau maximale ( c'est à dire du front de choc ).

d- La crête maximale représente 11% d'erreur par rapport à l'expérimental.

e- Problème de convergence à l'extrémité avale.





f- La position du minimum et de sa valeur par rapport à l'expérimental.

g- La position du maximum relatif ainsi que sa valeur, on a constaté une erreur de 17% par rapport à l'expérimental.

Le long de la paroi :

On constate que notre modèle et les modèles numériques de Chaudhry et des PFE ( 1993 et 1994 ) présentent presque les mêmes deux surélévations, alors qu'une seule surélévation apparue dans le résultat expérimental de Jimenez.

On constate aussi la position décalée de la crête maximale ainsi que sa valeur par rapport à l'expérimental est un peu excessive. On peut justifier les problèmes décrits précédemment du fait que nous avons utilisé un maillage qui n'est pas très raffiné puisqu'on a utilisé un maillage de 30 éléments de 15 degrés de liberté chacun.

Modèle	$\Delta\xi$ (m)	$\Delta\eta$ (m)	Maillage
Modèle PFE 1995	0,18	0,076	 15 degrés de liberté
Chaudhry 1992	0,0483	0,0476	 Différences finies
Modèle PFE 1993	0,0483	0,0476	 Différences finies
Modèle PFE 1994	0,0483	0,0476	 Différences finies

L'augmentation du nombre d'éléments entraîne automatiquement à la convergence dans l'espace, mais, plusieurs contraintes sont constatées, telles que la manipulation des matrices de grande taille, et l'augmentation du temps de calcul qui nécessite automatiquement l'utilisation des ordinateurs puissants en capacité de mémoire, ainsi de la rapidité d'exécution.

On peut ajouter aussi, en ce qui concerne le décalage de la courbe ( Fig. A.1 ), par le fait que les autres modèles, ont pris beaucoup de sections en plus que ce soit en amont ou en aval du rétrécissement par rapport à notre modèle.

On peut ajouter d'autre suggestions telles qu'on a négligé la turbulence, les frottements et l'effet de la couche limite, ce qui a entraîné une augmentation excessive de la hauteur de crête maximale (Fig. A.1, Fig. A.2 ).



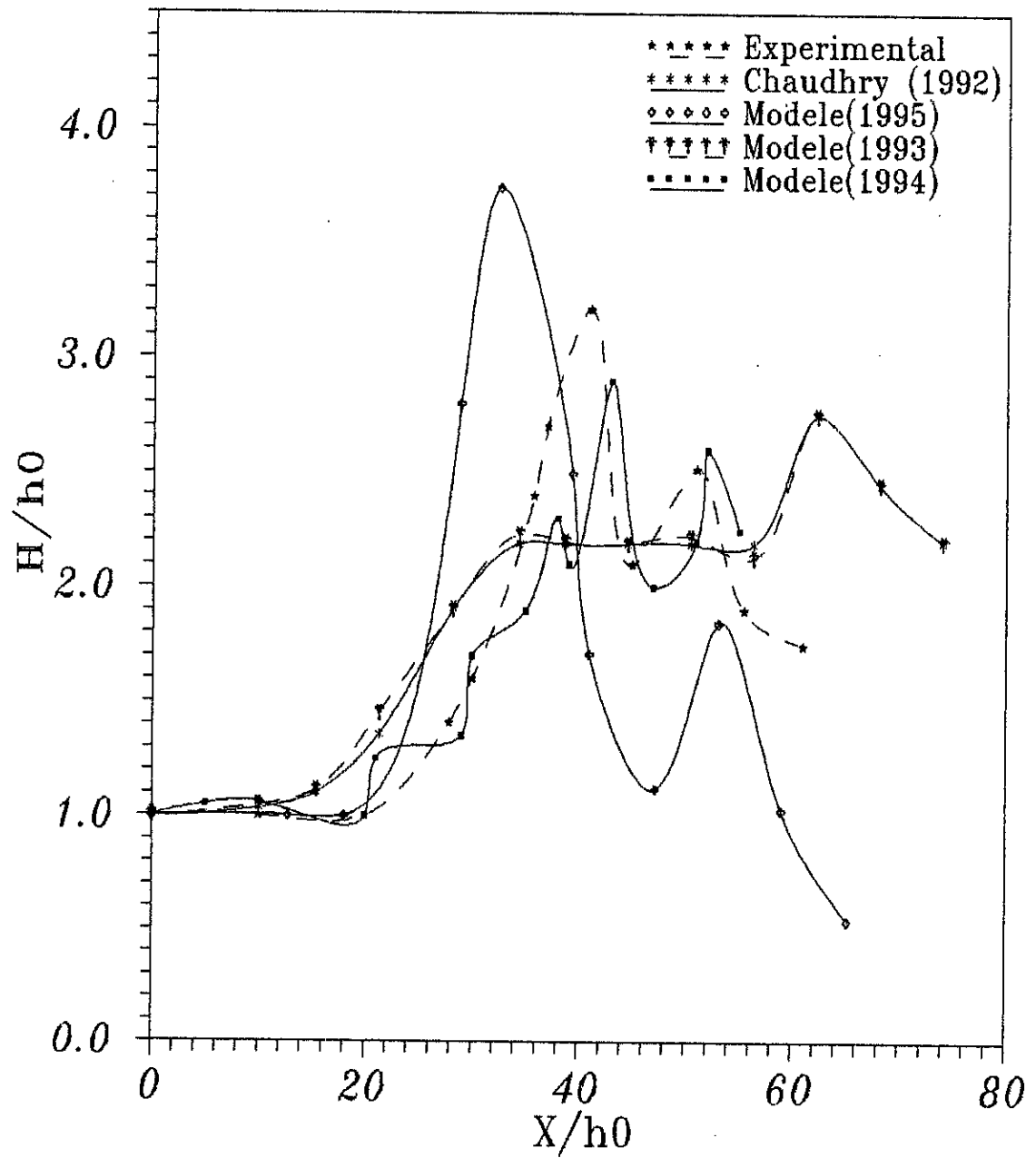
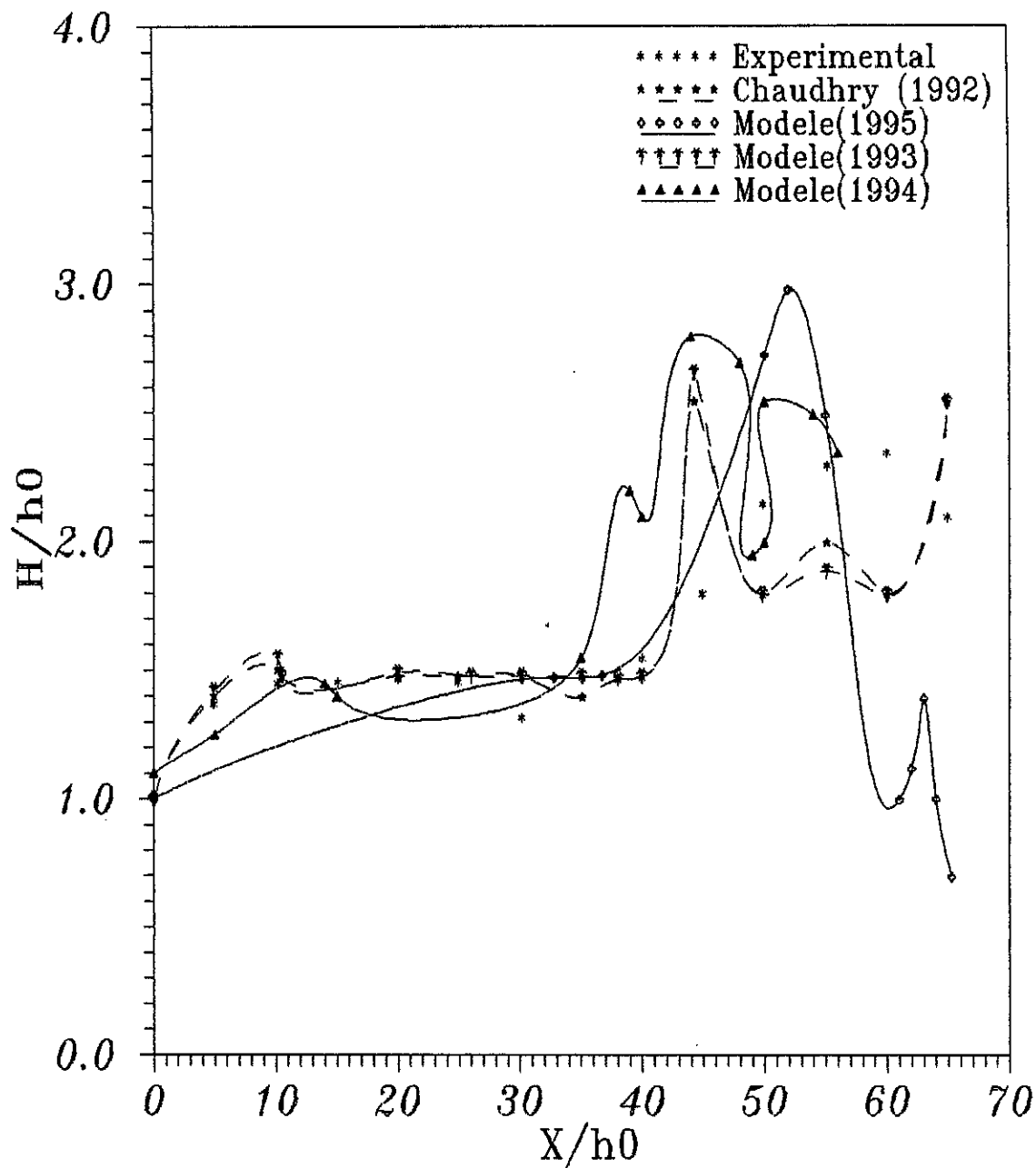
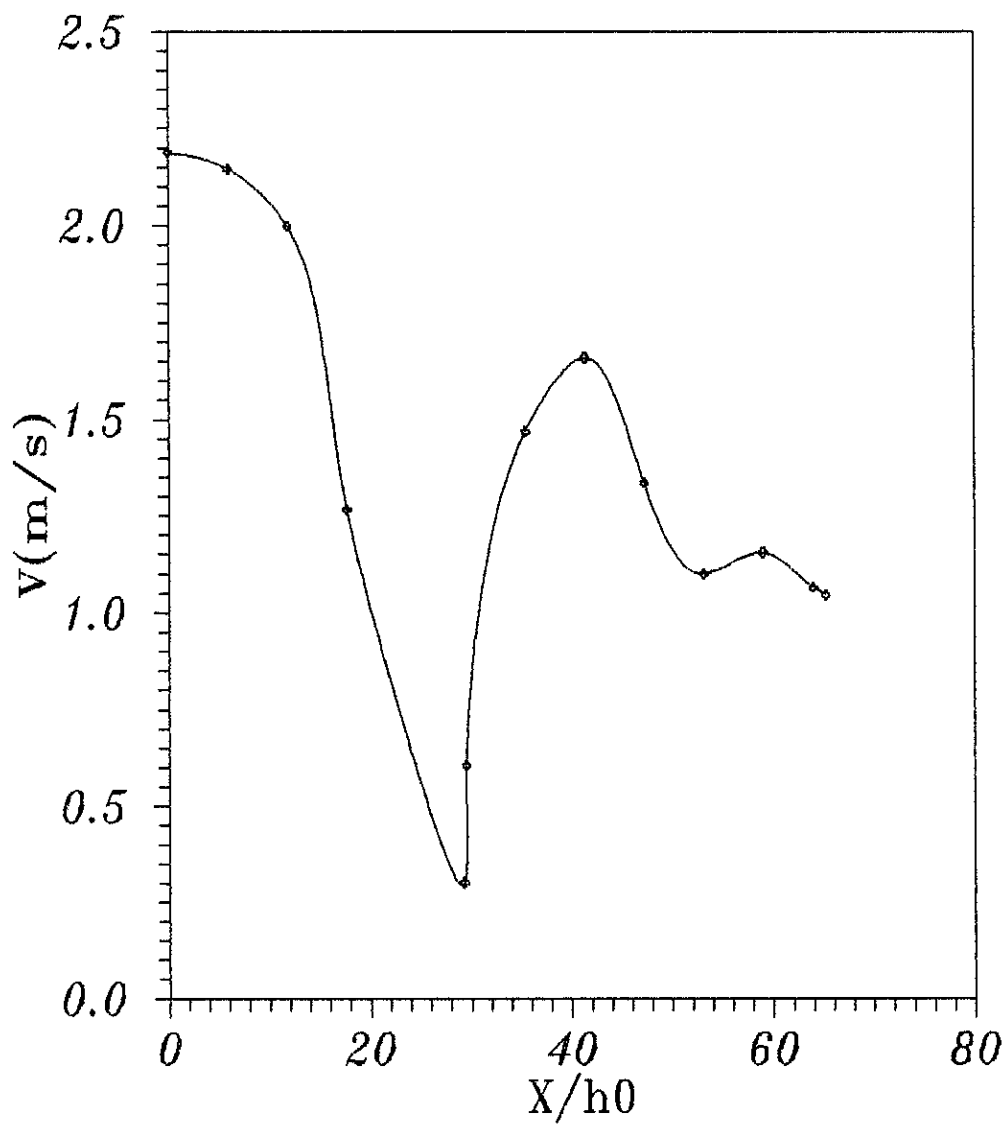


FIG (A.1) LA LIGNE D'EAU LE LONG DE L'AXE DE L'ECOULEMENT DANS UN RETRICISSEMENT RECTILIGNE



Fig(A.2) LA LIGNE D'EAU LE LONG DE LA PAROI  
DANS UN RETRECISSEMENT RECTILIGNE



Fig(A.4) PROFIL DE VITESSE LE LONG DE LA PAROI DANS LE RETRECISSEMENT RECTILIGNE

Les figures ( A.3 ) et ( A.4 ) représentent le module de la vitesse le long de l'axe médian et la paroi respectivement. On remarque bien la diminution rapide de la vitesse lors du choc.

### VI - 2/- 2<sup>ème</sup> Application :

#### IV.2.1. Analyse de l'écoulement supercritique dans un élargissement progressif symétrique :

Cette application porte sur l'analyse d'un écoulement supercritique, tel que la variation de la largeur est donnée par :

$$b_x = \frac{b_0}{2} \cdot \left[ \frac{X}{b_0 \cdot F_0} \right]^{1,5} + \frac{b_0}{2}$$

les dimensions complète de ce divergent sont données sur la figure (B)

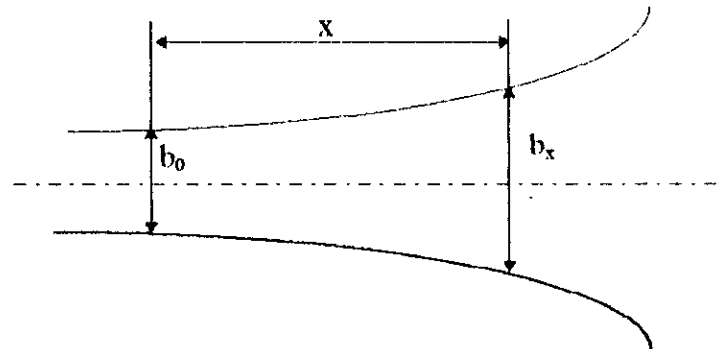


Fig. ( B )

Les conditions aux limites de l'écoulement dans ce canal sont telles que:

- Le tirant d'eau à l'amont est  $h_0 = 0,0305$  m.
- Le nombre de Froude à l'amont est  $F_0 = 2$ .
- La vitesse transversale à l'amont est  $v_0 = 0$  m /s.
- Le coefficient de Manning  $n = 0,012$ .
- La pente du fond est supposée nulle.

- Le rapport profondeur largeur  $\frac{h_0}{b_0} = 0,25$ .

Nous utilisons un maillage triangulaire de 30 éléments, avec 15 degré de liberté pour chaque élément.

Les pas d'espace :  $\Delta \xi = 0,18$  m

$$\Delta \eta = 0,076$$

- Pour les problèmes de stabilité, le nombre de courant est pris d'après la littérature comme suit :  $C_n = 0,9$ .

- Le paramètre de lumping  $e = 0,92$

En ce qui concerne les conditions initiales  $h_0 = 0,0305$  m

- La vitesse longitudinale  $U = 1,094$  m/s.

- La vitesse transversale  $v = 0$  m/s et cela sur tous les points du maillage.

#### **IV.2.2. Résultats et analyses :**

Les figures ( B.1 ) et ( B.2 ) nous permettent une comparaison entre les résultats de notre modèle et ceux des autres modèles, expérimentaux et numériques.

On constate que tous les résultats numériques suivent approximativement le résultat expérimental de Jimenez, aussi bien au niveau de l'axe de l'écoulement qu'au niveau de la paroi.

Le choc n'apparaît pas dans le divergent, ceci justifie l'hypothèse de répartition hydrostatique des pressions.

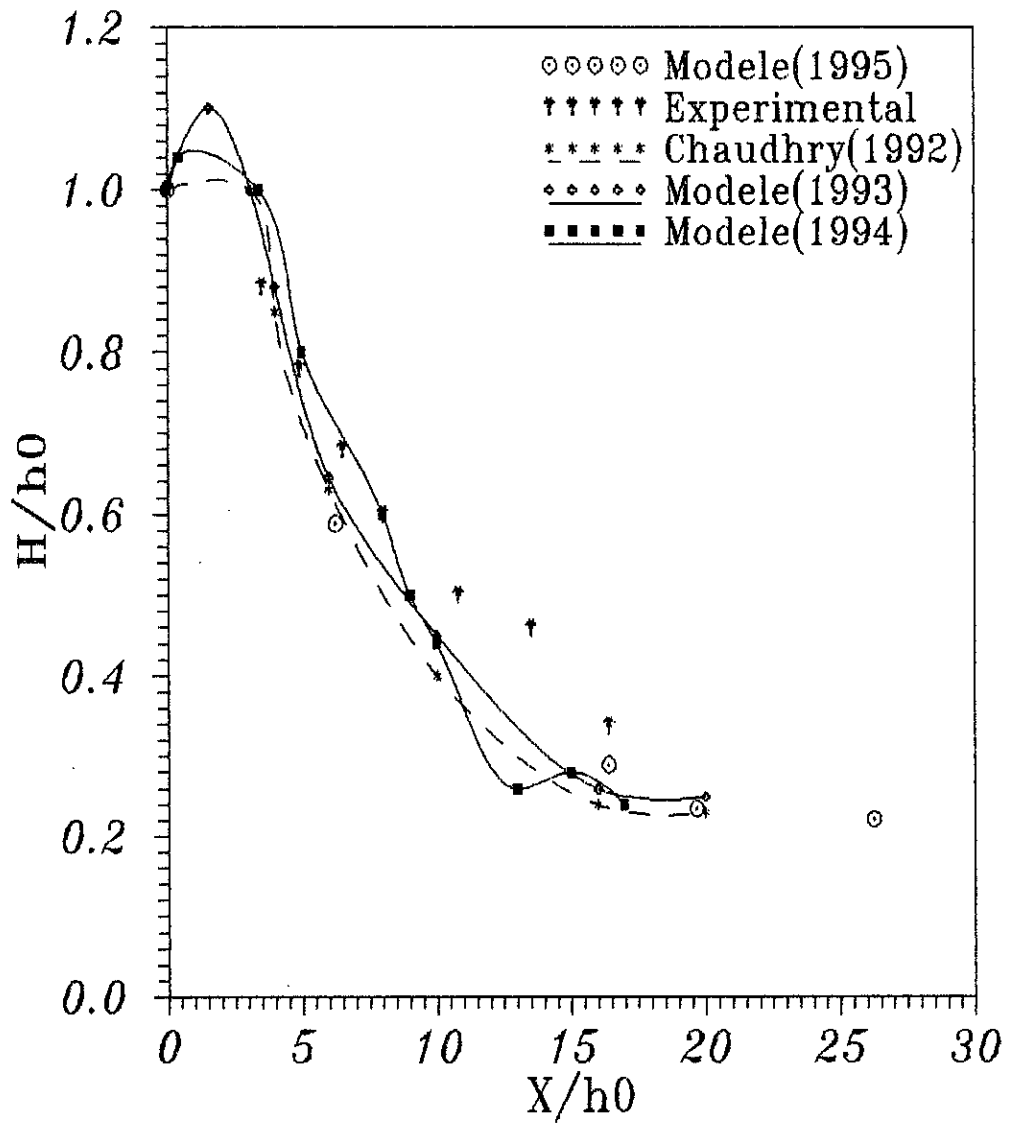
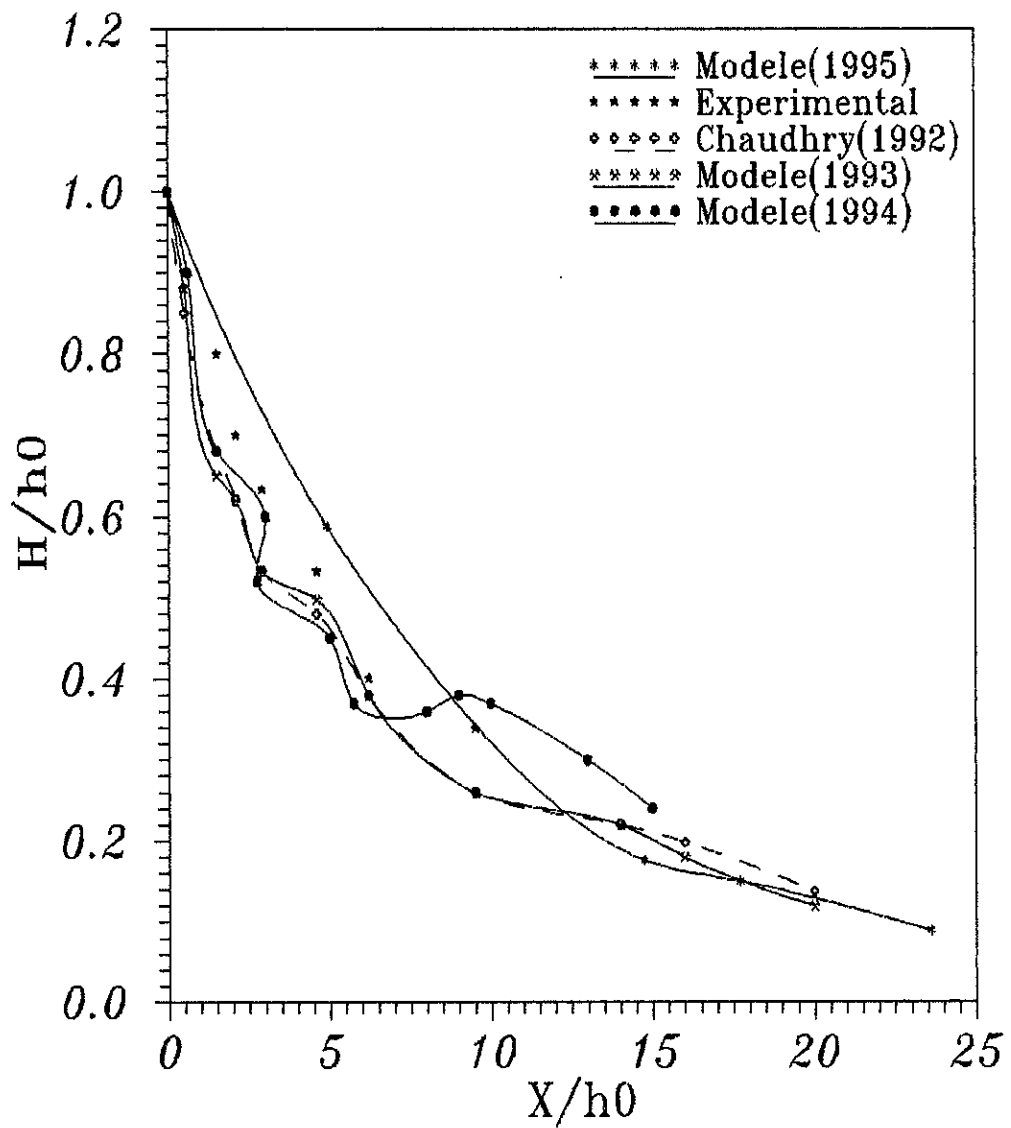


Fig (B.1) LA LIGNE D'EAU LE LONG DE L'AXE DE L'ÉCOULEMENT DANS UN ELARGISSEMENT PROGRESSIF



Fig(B.2) LA LIGNE D'EAU LE LONG DE LA PAROI  
DANS UN ELARGISSEMENT PROGRESSIF

*Conclusion  
générale*



## *Conclusion générale*

L'intérêt pratique de l'étude de ce type d'écoulement à surface libre est de permettre un dimensionnement rationnel et économique des bajoyers dans différentes structures hydrauliques convergentes et divergentes de grande étendue.

Pour cela, il faut que le but de la simulation numérique est de réaliser un modèle mathématique qui s'approche aux résultats expérimentaux le plus possible et non pas avoir les mêmes ( ce qui est presque impossible ! ).

Dans notre cas :

- Nous avons utilisé un modèle dans le cas non permanent pour arriver aux résultats à l'état permanent.

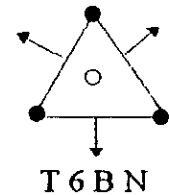
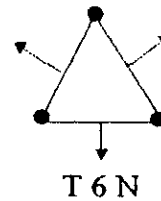
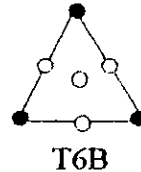
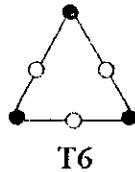
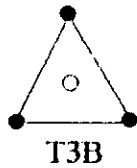
- Nous avons remarquer que les chocs, s'ils existent, sont bien pris en compte par le modèle ( position, direction et forme ).

- L'hypothèse de la distribution hydrostatique des pressions n'est plus valable dans la zone de choc.

- L'augmentation du nombre d'éléments, et la prise en compte de certains phénomènes, comme la turbulence, la distribution non hydrostatique des pressions au voisinage du choc et l'effet de la couche limite, entrainera automatiquement à des résultats plus précis, donc une bonne approche au modèle expérimental.

*A N N E X E*

## ANNEXE

Présentation des éléments:

- noeuds de pression et de vitesse
- noeud de vitesse
- ↗ noeud de la vitesse normale

Symbole	Approximation de la vitesse	nombre de degré de liberté	nombre de degré de liberté après condensation	la stabilité
T 3 B	linéaire pour "u" et "v" + une bulle interne	11	9	oui
T 6	quadratique pour "u" et "v"	15	15	oui
T 6 B	quadratique pour "u" et "v" + une bulle interne	17	15	oui
T 6 B N	quadratique pour la composante normale et linéaire pour la composante tangentielle + une bulle interne	14	12	oui
T 6 N	identique à T6BN mais sans bulle interne	11	11	non

$C = \sqrt{gh}$  : C : Célérité de l'onde en [ m/s ]

g : Accélération terrestre en [ m/s<sup>2</sup> ]

h : la profondeur en [ m ]

M . C : milieu continu

M . D . F : mécanique des fluides

C . F . L : courant - Friedrichs - Lewy

La condition C . F . L :

$$C_n = \frac{(V + \sqrt{gh}) \Delta t}{b(x) \cdot \Delta \xi \cdot \Delta \eta} \left[ \Delta \xi^2 + (b(x) \cdot \Delta \eta)^2 \right]^{1/2} \leq 1$$

$\Delta \xi, \Delta \eta$  : pas d'espace

V : vitesse résultante,  $V = \sqrt{u^2 + v^2}$

$C_n$  : Choisi par expérimentation pour que la condition soit vérifiée, il faut que  $b(x)$  soit minimum et  $(V + \sqrt{gh})$  soit maximum.

# *Bibliographie*

## **BIBLIOGRAPHIE**

[ 1 ] D. LAROUÏ

" Contribution à l'étude bidimensionnelle de la dispersion de polluants dans les milieux à découvert par la méthode simple modifiée de PATNKAR "

thèse de Magister E.N.P. 1994 .

[ 2 ] O. C. ZIENKIEWICZ

"the finite element methods Volume 2 "

Mc graw - Hill book co. London 1991

[ 3 ] V.T. CHOW

" open chanel hydraulics "

Mc graw hill book co. New-york 1959

[ 4 ] M. CARLIER

"hydraulique générale appliquée "

Ed. Eyrols 1972

[ 5 ] O. SINNIGER W. H.HAGER

"constructions hydrauliques "

Traité de génie civil de l'école polytechnique fédérale de Lausane 1988

[ 6 ] A. BERREKSI - A. BOUHADJI - O. BELHADJ

"Simulation et analyse des écoulements bidimensionnels à surface libre en zones de transition"

thèse d'ingénieur E.N.P. 1993

[ 7 ] J.Y.YANG C.A. HSU

"computation of free surface flows"

Part2 : tow dimensional unsteady bore diffraction"

Jour . of hydraulic research, Vol.31, N° 3 . 1993

[ 8 ] R.ABSI - S. RETIEB - O. BELHADJ

"modélisation et simulation numérique des problèmes de diffraction bidimensionnelle d'un mascaret en régime instationnaire "

thèse d'ingénieur E.N.P 1994

[ 9 ] G. DHATT G. TOUZOT

" une présentation de la méthode des éléments finis "

E.D MALOINE 1984

[ 10 ] M.H.CHAUDHRY - S.M. BHALLAMUDI

"computation of flows in open channel transitions"

Jour. of hydraulic research, Vol 30, N° 1, 1992

[ 11 ] G. DHATT A. SOULAIMANI Y.QUELET and M.FORTIN

"development of new triangular elements for free surface flows"

International journal for numerical methods in fluids V6, 1986

[ 12 ] " Shock waves in chutes "

Spillways and recommandations schoks waves and air entrainment

Review and recommendation C.I.G.B Bulletin N° 81, 1992

[ 13 ] I.M. NAVON

"A numerov-Galerkin technique applied to a finite element shallow-water equations model with enforced conservation of integral invariants and selective lumping"

Journal of computational physics 1983 .

[ 14 ] RICHARD L. COOLEY AND SYED AFAQ MOIN

"Finite element solution of saint venant equations

Journal of the hydraulics division Juin 1976

[ 15 ] B. ZHANG

"Modélisation d'écoulement à surface libre avec fond mobile par éléments finis"

Thèse présentée pour l'obtention du grade de docteur de l'université de technologie de compiegne 1992 .

[ 16 ] M.G.G. FORMAN

"Analysis of two-step time discretisation in the solution of the linearized shallow- water equations"

Journal of computational physics 1983

[ 17 ] K.P. SRIDHAR and R.T. DAVIS

" A schawaz-christoffel method for Generating two dimensional flow grids  
transaction of the ASME"

Vol 107 Sptembre 1985 .

[ 18 ] J.Y. YANG C.A. HSU and S.H. CHANG

"computations of free surface flows "

part1: one dimensionnel dam-break flow

Journal of hydraulic reseach Vol. 31, N°1, 1993 .

[ 19 ] MARINKO NUJIC

" Développement de schemas numériques performants non oscillatoires pour les écoulements à surface libre"

Journal of hydraulic research Vol. 33, N°1, 1995

[ 20 ] J.A. CUNGE

" Simulation des écoulements non permanents dans les rivières et canaux "

Institut national polytechnique de Grenoble 1988