

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

5/94

وزارة التربية الوطنية  
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT

HYDRAULIQUE

# PROJET DE FIN D'ETUDES

## SUJET

CALCUL ET CONCEPTION  
DE GRILLES D'AUBES  
EN TURBOMACHINERIE

(METHODE DES SINGULARITES,  
METHODE INVERSE)

Proposé par :

Mr. O. BELHADJ

Etudié par :

K. MESSADEK  
Y. ABADA

Dirigé par

Mr. O. BELHADJ

PROMOTION

JUILLET 1994

E.N.P. 10, Avenue Hacem Badi El-Harrach - ALGER

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

*A ma Mère*

*à mon Père*

## DEDICACES

*Karim*

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

*A ma Mere*

*A mon Pere*

*A ma Soeur*

*Karim*

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

*A mon Oncle CHERIF*

*Yassine*

## خلاصة

يهدف هذا العمل إلى دراسة الانسياب عبر شبكة

دولاب محوري .

لهذا الغرض نستعمل طريقتين : الأولى مباشرة (الأحاديات) لحساب  
الانسياب والثانية عكسية لإيجاد الشكل الهندسي للعنفة .

## Résumé

Le travail présenté a pour objet d'analyser un écoulement bidimensionnel à travers une grille d'aubes de turbomachine axiale . Une méthode directe ( Singularités ) et une méthode inverse ( H.MITON ) sont utilisées pour le calcul de l'écoulement et la détermination de la géométrie de l'aube

## Abstract

The present work aims to analyse a two-dimensional flow throw a blade cascade of an axial turbomachine . A direct method (Singulariy) and inverse method (H.MITON) are using for the flow computation and the blade design .

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## SOMMAIRE

Les méthodes numériques utilisées en turbomachinerie ont pour but principal soit de calculer le champ de vitesse ou de pression , soit de déterminer la forme du profil répondant à une répartition de vitesse imposée, ou les deux en même temps ( problèmes d'optimisation ) .

Nous présentons ici deux méthodes numériques de calcul et de définition de profil d'aubages en grilles .

La première a pour nom " Méthode des Singularités " . Elle traite le problème direct ; c'est à dire qu'elle a pour objet de calculer le champ de vitesses ou de pressions .

La deuxième est une méthode inverse proposée par H.MITON Chercheur à l'Institut de Mécanique des Fluides de Marseille. Cette méthode a pour but de déterminer les caractéristiques de l'obstacle pour un champ de vitesses donné .

Les développements et détails de calculs des deux méthodes exposées (chapitre 02 et 03) ne sont pas présentés dans notre travail.

Néanmoins ils existent dans la bibliographie .

- Pour la méthode des singularités voir la référence [10].
- Pour la méthode inverse voir la référence [04].

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## CHAPITRE UN

# INTRODUCTION ET DEFINITIONS



## INTRODUCTION

L'amélioration des performances aérodynamiques des divers composants d'une machine aéronautique (ou d'une turbomachine) nécessite la maîtrise des répartitions de vitesses à la paroi de l'organe considéré ( aile, fuselage, prise d'air, aubage de la turbomachine ... ) .

L'importance des zones visqueuses ainsi que l'intensité des ondes de choc conditionnent la traînée d'un profil (sa résistance à l'écoulement). En effet, les couches limites qui se développent le long d'une paroi ont fortement tendance à s'épaissir, voire même à décoller dans certaines conditions de l'écoulement, particulièrement sous l'effet d'une onde de choc .

Si l'on veut alors améliorer les performances de l'organe, il est nécessaire de rechercher la forme géométrique de la paroi, conduisant à une répartition de vitesses, qui diminuera les intensités des ondes de choc ainsi que les effets visqueux.

Une telle recherche peut être effectuée itérativement par modification de la paroi et calculs directs successifs; mais ce procédé est long et ne permet pas toujours de trouver le résultat escompté , laissant ainsi un doute sur l'existence d'un profil meilleur.

Il est par contre, beaucoup plus intéressant d'utiliser une méthode inverse où l'on se donne une répartition de vitesse, choisie de manière à minimiser l'importance des couches limites, la géométrie résultant du calcul. Il faut toutefois remarquer que la géométrie obtenue peut ne pas correspondre une configuration réaliste : profil trop mince ou même comportant une épaisseur négative ; mais, dans ce cas, on aura la preuve que la distribution de vitesse désirée est impossible à obtenir .

---

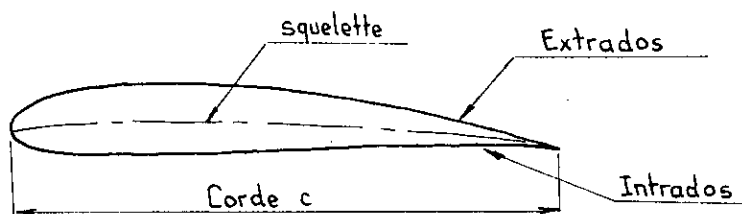
## DEFINITIONS RELATIVES AUX AUBES ET AUX GRILLES D'AUBES

---

### Aubes

Les aubes sont des obstacles plongés dans l'écoulement . Ce sont les éléments qui permettent l'échange d'énergie entre le fluide et la machine .

### Caractéristiques géométriques



### Profil

C'est la section plane de l'aube obtenue sur un plan perpendiculaire à sa ligne moyenne .

### Squelette

C'est la ligne moyenne ou la médiane entre la partie supérieure et la partie inférieure de l'aube .

### Extrados

Partie supérieure de l'aube qui correspond à la longueur curviligne la plus grande .

### Intrados

Partie inférieure de l'aube, correspondant à la longueur curviligne la plus petite .

### Corde

Segment de droite rectiligne joignant les extrémités du squelette orienté dans le sens de l'écoulement .

### Grilles d'aubes

L'assemblage d'aubes identiques déduites les unes des autres par translation ou rotation égales, forme ce qu'on appelle une grille d'aubes .

Le passage offert entre deux aubes successives est appelé canal inter-aubes .

Les grilles peuvent être classées en trois catégories selon qu'elles sont :

- Décélatrices ( canal divergent )
- Accélatrices ( canal convergent )
- Déviatrices ( canal à section constante )

Le pas relatif ( $t$ ) appelé ainsi car il est souvent exprimé en pourcentage de la corde, correspond à la distance séparant deux aubes successives .

# **CHAPITRE DEUX**

## **CALCUL DIRECT METHODE DES SINGULARITES**

GENERALITES [11]I.1] THEORIE POTENTIELLE DES ECOULEMENTS INCOMPRESSIBLES

L'écoulement irrotationnel joue un rôle important dans la théorie des écoulements potentiels. Cela provient du fait que tous les mouvements qui peuvent être engendrés dans un fluide sans frottements internes doivent vérifier le principe d'inertie à savoir :

$$\text{rot}.V = 0 \quad (\text{I.1})$$

Un écoulement potentiel est un écoulement irrotationnel appliqué aux fluides incompressibles .

L'étude de ces écoulements reste une bonne approche de la réalité puisque de nombreux écoulements réels sont similaires .

I.2] Fonction de courant

Si l'écoulement est incompressible ( $\text{div}.V = 0$ ) , on peut toujours définir une fonction vectorielle A telle que :

$$V = \text{rot} . A \quad (\text{I.2})$$

Dans le cas d'un écoulement plan , le vecteur A doit satisfaire les égalités :

$$\left\| \begin{aligned} u(x,y) &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \end{aligned} \right. \quad (\text{I.3.a})$$

$$\left\| \begin{aligned} v(x,y) &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \end{aligned} \right. \quad (\text{I.3.b})$$

Les composantes du vecteur A sont :

$$A_x = A_y = 0 \quad (\text{I.3.c})$$

$$A_z = \Psi(x,y) \quad (\text{I.3.d})$$

La fonction  $\Psi(x,y)$  telle que  $u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$  et  $v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$  est appelée fonction de courant .

### I.3] Potentiel des vitesses

Les écoulements qui satisfont à la propriété :  $\text{rot}.V = 0$  sont appelés écoulements irrotationnels . En tout point leur vecteur tourbillon ( $\Omega = (1/2) \text{rot}.V$ ) est nul .

Dans ce cas , il existe une fonction  $\Phi(x,y)$  telle que :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad ; \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (\text{I.4})$$

C'est à dire :  $V = \text{grad}\Phi(x,y)$  .

On dit alors que l'écoulement dérive d'un potentiel ou est à potentiel des vitesses .

### I.4] Ecoulements potentiels élémentaires

#### I.4.1] Ecoulement plan unidirectionnel

Considérons un écoulement plan suivant la direction X. La fonction de courant  $\Psi(x,y)$  et le potentiel des vitesses  $\Phi(x,y)$  sont déterminés à l'aide des relations suivantes

$$u = U = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (\text{I.5.a})$$

$$v = 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (\text{I.5.b})$$

on obtient les expressions suivantes :

$$\Phi(x,y) = U_{\infty} x \quad (I.5.c)$$

$$\Phi(x,y) = U_{\infty} y \quad (I.5.d)$$

#### I.4.2] Source ou puits bidimensionnel

En un point du plan XY , un écoulement radial, soit sortant soit entrant , correspond à un écoulement engendré soit par une source soit par un puits.

En utilisant les coordonnées polaires  $r, \theta$  centrées en un tel point , l'équation de continuité donne :

$$\frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} = 0 \quad (I.6)$$

La nature radiale de l'écoulement implique que  $v_{\theta}$  soit nul. L'équation de continuité se réduit à  $r v_r = \text{constante}$ . Ainsi, la fonction de courant associée, vérifie :

$$v_{\theta} = - \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad (I.7.a)$$

$$r \cdot v_r = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = C = \text{constante} . \quad (I.7.b)$$

d'où : 
$$\psi(x,y) = C \theta \quad (I.7.c)$$

La constante C s'exprime en fonction du débit Q sachant que

$$Q = 2\pi r v_r = 2\pi C \quad (I.7.d)$$

Q : donné par unité de longueur suivant l'axe Z .

Les équations (I.7.a) et (I.7.b) peuvent s'écrire en fonction du potentiel  $\Phi(x,y)$  :

$$v_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{I.8.a})$$

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{C}{r} = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{r} \quad (\text{I.8.b})$$

On obtient alors, le potentiel des vitesses  $\Phi(x,y)$  et la fonction de courant  $\Psi(x,y)$  :

$$\Phi(x,y) = \frac{Q}{2\pi} \ln(r) \quad (\text{I.8.c})$$

$$\Psi(x,y) = \frac{Q}{2\pi} \theta \quad (\text{I.8.d})$$

#### I.4.31 Vortex

Le vortex est un fil tourbillonnaire rectiligne et parallèle à l'axe Z. Il engendre un écoulement irrotationnel dans le plan XY.

En utilisant les coordonnées polaires  $r, \theta$  centrées au noyau du fil, nous pouvons écrire :

$$(\text{rot.}V)(z) = -\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot v_{\theta})}{\partial r} = 0 \quad (\text{I.9.a})$$

On aura :

$$v_r = 0 \quad (\text{I.9.b})$$

$$r \cdot v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi} \quad (\text{I.9.c})$$

$\Gamma$  : circulation du vecteur vitesse



Le potentiel des vitesses et la fonction de courant sont alors donnés par :

$$\Phi(x,y) = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (I.9.e)$$

$$\Psi(x,y) = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r) \quad (I.9.f)$$

### III] PRINCIPE DE LA METHODE DES SINGULARITES<sup>s</sup>

La méthode des singularités est une méthode numérique qui permet de traiter le mode direct .

On connaît parfaitement l'obstacle à étudier mais, la nature et l'intensité des singularités à superposer sont inconnues. Pour cela , on ajuste ces singularités afin d'obtenir les différents paramètres de l'écoulement (exemple:vitesse dans le canal inter-aubes) .

La méthode peut être résumée comme suit :

# Discrétisation de l'obstacle en nombre fini de points (sommets). Ces points sont reliés par des segments de droites (panneaux) .

# Calcul des coordonnées des points de contrôle définis au milieu de chaque panneau .

# Chargement des panneaux .

# Détermination du potentiel des vitesses en chaque point de contrôle (i) .

$$\text{Le potentiel global } \Phi_i = \Phi_{\text{éclt unif}} + \sum_{j=1}^n \Phi_j$$

$\sum_{j=1}^n \Phi_j$ : Potentiel induit par tous les panneaux(j) sur le point de contrôle (i) .

# Obtention d'un système d'équations linéaires à l'aide de la condition de glissement :

Vitesse normale au point de contrôle nulle ( $V_{ni} = 0$  ) .

# Résolution du système linéaire à l'aide de méthodes numériques .

# Calcul des différents paramètres de l'écoulement .

### III.1] EFFET DE LA PORTANCE DES PROFILS SUR LE CHARGEMENT

La portance est le résultat d'une circulation, qui est l'équivalent d'un moment.

Dans le cas d'une distribution uniforme, et si les efforts sont réduits au point de contrôle (i), on obtient un vecteur et un moment nul. Ceci est dû au fait que le point de contrôle est aussi le centre de gravité de la charge (cf. fig 1)

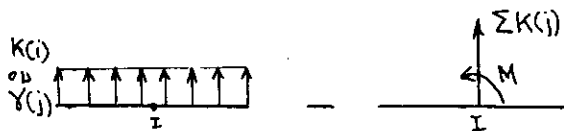


figure 01

Afin de pouvoir déterminer les différents paramètres d'un écoulement autour de profils portants, les chargements doivent être non uniformes (linéaire, parabolique, cubique...)

#### III.1.1] Cas d'un chargement linéaire

Le chargement linéaire est défini par :

$$\gamma_s(j) = \gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{L(j)} s_j \quad (\text{III.1})$$

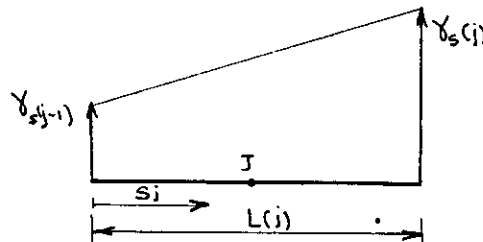


figure 02

III.2] DEVELOPPEMENT DE LA METHODE

Le profil est discrétisé en (n) sommets , ce qui nous donne (n) panneaux (cf. fig 3 ) .

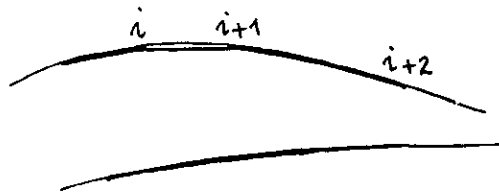


figure 03

Le chargement des panneaux se fait à partir d'une distribution linéaire de vortex ou de sources. Les inconnues  $\gamma_s(j)$  ou  $K_s(j)$  sont les intensités au niveau des sommets .

Dans ce cas on obtient (n) équations à (n+1) inconnues. Une équation supplémentaire est donnée par la condition de KUTTA - JOUKOWSKI

$$\gamma_{s(n+1)} = -\gamma_{s(1)} . \tag{III.2}$$

III.2.1] Distribution linéaire de vortex

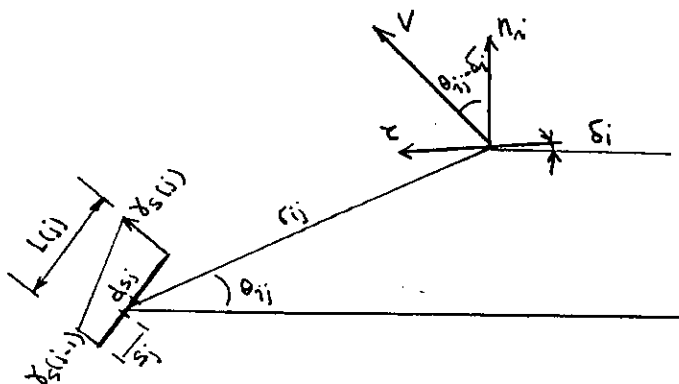


figure 04

Le potentiel des vitesses  $\Phi_j$  est :

$$\Phi_j = - \frac{\gamma_s(j)}{2\pi} \theta_{ij} \quad (\text{III.3})$$

Les composantes du vecteur vitesse  $V$  en coordonnées polaires sont :

$$V_r(j) = \frac{\partial \Phi_j}{\partial r} = 0 \quad (\text{III.3.a})$$

$$V_\theta(j) = - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \theta} = \frac{\gamma_s(j)}{2\pi r_{ij}} \quad (\text{III.3.b})$$

Le potentiel global  $\Phi_i$  est :

$$\Phi_i = \Phi_{\text{éclt unif}} + \sum_{j=1}^n \Phi_j \quad (\text{III.4})$$

$$\Phi_i = U_\infty y_i \sin(\alpha - \delta_i) + \sum_{j=1}^n \int_0^{L(j)} - \frac{\gamma_s(j)}{2\pi} \theta_{ij} ds_j \quad (\text{III.4.a})$$

La vitesse normale  $V_{ni}$  est :

$$V_{ni} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial n_i} = U_\infty \sin(\alpha - \delta_i) + \sum_{j=1}^n \int_0^{L(j)} \frac{\gamma_s(j)}{2\pi r_{ij}} \cos(\theta_{ij} - \delta_i) ds_j \quad (\text{III.5})$$

Dans le cas d'une distribution linéaire de vortex ,  $\gamma_s(j)$  est une fonction de  $s_j$ . En injectant (III.1) dans (III.5) on obtient :

$$\begin{aligned}
 V_{ni} &= U_{\infty} \sin(\alpha - \delta_i) + \sum_{j=1}^n \left[ \gamma_s(j-1) \int_0^{L(j)} \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{2 \pi r_{ij}} ds_j + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1))}{L(j)} \int_0^{L(j)} \frac{s_j \cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{2 \pi r_{ij}} ds_j \right] \\
 &= U_{\infty} \sin(\alpha - \delta_i) + \frac{1}{2 \pi} \sum_{j=1}^n \left[ G(i,j) \gamma_s(j-1) + \right. \\
 &\quad \left. + F(i,j) \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{L(j)} \right]
 \end{aligned} \tag{III.6}$$

Où :

$$G(i,j) = \int_0^{L(j)} \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{2 \pi r_{ij}} ds_j \tag{III.6.a}$$

$$F(i,j) = \int_0^{L(j)} \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{2 \pi r_{ij}} s_j ds_j \tag{III.6.b}$$

$G(i,j)$  et  $F(i,j)$  sont appelés coefficients d'influence. Ces coefficients sont calculés analytiquement .

Le point  $(n+1)$  étant confondu avec le point  $(1)$  , on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 &|| F(i,n+1) = F(i,1) \\
 &|| G(i,n+1) = G(i,1) \tag{III.7} \\
 &|| L(i,n+1) = L(1)
 \end{aligned}$$

En tenant compte de (III.7) la vitesse  $V_{ni}$  devient :

$$\begin{aligned}
 V_{ni} &= U_{\infty} \sin(\alpha - \delta_i) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=2}^{N+1} \left[ s(j-1) G(i,j) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{L(j)} F(i,j) \right]. \quad (\text{III.8}) \\
 &= U_{\infty} \sin(\alpha - \delta_i) + \frac{1}{2\pi} \left[ \left[ G(i,2) - \frac{F(i,2)}{L(2)} \right] \gamma_s(1) + \right. \\
 &\quad + \left[ \dots \dots \dots \right] + \dots \dots \dots \\
 &\quad \left. + \left[ \frac{F(i,n)}{L(n)} + G(i,1) - \frac{F(i,1)}{L(1)} \right] \gamma_s(n) + \frac{\gamma_s(n+1)}{L(1)} F(i,1) \right]
 \end{aligned}$$

# Condition de glissement :  $V_{ni} = 0$  (Cdt1)

# Condition de KUTTA-JOUKOWSKI :  $\gamma_s(n+1) = -\gamma_s(1)$  (Cdt2)

En tenant compte de (Cdt1) et (Cdt2), on obtient le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{aligned}
 &\left[ G(i,2) - \frac{F(i,1)}{L(1)} - \frac{F(i,2)}{L(2)} \right] \gamma_s(1) + \dots + \left[ G(i,j+1) - \frac{F(i,j+1)}{L(j+1)} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{F(i,j)}{L(j)} \right] \gamma_s(j) + \dots + \left[ G(i,1) + \frac{F(i,n)}{L(n)} - \frac{F(i,1)}{L(1)} \right] \gamma_s(n) = \\
 &= 2\pi U_{\infty} \sin(\alpha - \delta_i)
 \end{aligned} \quad [\text{III.9}]$$

qui s'écrit sous la forme condensée suivante :

$$[A(i,j)] [\gamma_s(j)] = [B(t)] \quad \text{(III.9)}$$

### III.2.2] Distribution linéaire de sources

Le potentiel des vitesses  $\Phi_j$  est donné dans ce cas par :

$$\Phi_j = \frac{Ks(j)}{2\pi} \text{Ln}(rij) \quad \text{(III.10)}$$

Les composantes du vecteur vitesse  $V$  en coordonnées polaires sont :

$$V_r(j) = \frac{\partial \Phi_j}{\partial r} = \frac{Ks(j)}{2\pi} \frac{1}{rij} \quad \text{(III.10.1)}$$

$$V_\theta(j) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \theta} = 0 \quad \text{(III.10.2)}$$

Le potentiel global  $\Phi_i$  est :

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \Phi_{\text{éclt unif}} + \sum_{j=1}^n \Phi_j \\ \Phi_i &= U_\infty y_i \sin(\alpha - \delta_i) + \sum_{j=1}^n \int_0^{L(j)} \frac{Ks(j)}{2\pi} \text{Ln}(rij) ds_j \end{aligned} \quad \text{(III.11)}$$

La vitesse normale  $V_{ni}$  est donc :

$$V_{ni} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = U_\infty \sin(\alpha - \delta_i) + \sum_{j=1}^n \int_0^{L(j)} \frac{Ks(j)}{2\pi rij} \sin(\theta_{ij} - \delta_i) ds_j \quad \text{(III.12)}$$



Les expressions des coefficients d'influence deviennent:

$$G(i,j) = \int_0^{l(j)} \frac{\sin(\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}} ds_j \quad (\text{III.12.a})$$

$$F(i,j) = \int_0^{l(j)} \frac{\sin(\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}} s_j ds_j \quad (\text{III.12.b})$$

Les coefficients d'influence  $G(i,j)$  et  $F(i,j)$  sont calculés analytiquement .

Le calcul des intensités des sources  $K_s(j)$  est similaire à celui des vortex.

## VI] CALCUL DES PARAMETRES DE L'ECOULEMENT

La résolution du système d'équations linéaires nous permet d'avoir les intensités des singularités. Ces intensités serviront à calculer les paramètres de l'écoulement.

### VI.1] Calcul de la vitesse tangentielle

La vitesse tangentielle  $V_{Ti}$  est obtenue en dérivant le potentiel des vitesses  $\Phi_i$  par rapport à  $\tau$  :

$$V_{Ti} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \tau} \quad (\text{VI.1})$$

Dans le cas d'une distribution linéaire de vortex on a :

$$V_{Ti} = U_{\infty} \cos(\alpha - \delta_i) + \sum_{j=1}^n \int_0^{L(j)} \frac{\gamma_s(j)}{2\pi r_{ij}} \sin(\theta_{ij} - \delta_i) ds_j \quad (\text{VI.1.a})$$

Pour le cas d'une distribution linéaire de sources  $V_{Ti}$  est donnée par :

$$V_{Ti} = U_{\infty} \cos(\alpha - \delta_i) + \sum_{j=1}^n \int_0^{L(j)} \frac{K_s(j)}{2\pi r_{ij}} \cos(\theta_{ij} - \delta_i) ds_j \quad (\text{VI.1.b})$$

### VI.2] Calcul du coefficient de pression

L'équation de BERNOULLI écrite entre un point à l'infini amont et un point de contrôle (i) donne :

$$P_{\infty} + 1/2 U_{\infty}^2 = P_i + 1/2 V_{Ti}^2$$

Où :

$P_{\infty}, U_{\infty}$  : pression et vitesse à l'infini amont.

$P_i, V_{Ti}$  : pression et vitesse au point de contrôle (i).

L'équation de BERNOULLI devient :

$$P_i - P_\infty = (1/2) U_\infty^2 \left[ 1 - \frac{V_{ri}^2}{U_\infty^2} \right] \quad (\text{VI.2})$$

Par définition le coefficient de pression  $C_p$  est égal à :

$$C_p = \frac{2(P_i - P_\infty)}{U_\infty^2} \quad (\text{VI.3})$$

En identifiant les équations (VI.2) et (VI.3), le coefficient de pression  $C_p$  s'écrit comme suit :

$$C_p = 1 - \left[ \frac{V_{ri}}{U_\infty} \right]^2$$

Le coefficient de pression  $C_p$  peut être alors déterminé à partir de la connaissance de la vitesse tangentielle  $V_{ri}$ .

### VI.3] Calcul de la fonction de courant

Soit un point  $P(x_0, y_0)$  en dehors de l'obstacle. Ce point est influencé par les panneaux (j) (cf. fig 05).

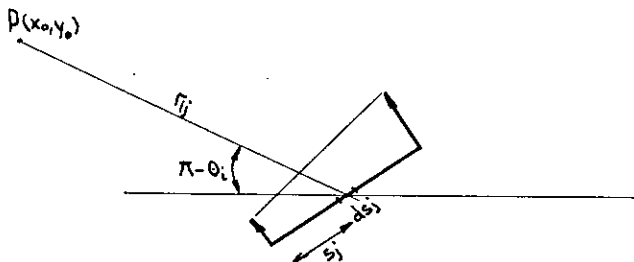


figure 05

$r_{ij}$ : distance entre le point de contrôle (j) et P  
 $\theta_i$ : l'angle que fait  $r_{ij}$  avec l'axe x

La fonction de courant au point  $P(x_0, y_0)$  est donnée par :

$$\Psi(x_0, y_0) = \Psi \text{ éclt unif} + \sum_{j=1}^n \Psi_i(x_0, y_0)$$

$\sum_{i=1}^n \Psi_i(x_0, y_0)$  : fonction de courant induite par tous les panneaux (j).

Pour les vortex, la fonction de courant est :

$$\Psi(x_0, y_0) = U_\infty y_0 \cos \alpha + U_\infty x_0 \sin \alpha + \sum_{j=1}^n \int_0^{L(j)} \frac{\gamma_s(j)}{2\pi} \ln(r_{ij}) ds_j$$

Dans le cas des sources, elle s'écrit comme suit :

$$\Psi(x_0, y_0) = U_\infty y_0 \cos \alpha - U_\infty x_0 \sin \alpha + \sum_{j=1}^n \int_0^{L(j)} \frac{K_s(j)}{2\pi} \theta_i ds_j$$

avec :

$$\theta_i = \text{arctg} \frac{y_0 - y_i}{x_0 - x_i}$$

Les intégrales figurant dans les expressions précédentes seront évaluées numériquement par la méthode de SIMPSON .

#### VI.4] TRACE DES LIGNES DE COURANT

##### Méthode de tracé d'une ligne de courant

# Choisir un point de référence  $O(x_0, y_0)$  à l'infini amont

# Calculer la fonction de courant en ce point

# Repérer les points situés sur un cercle de rayon  $R$  donné et de centre le point  $O(x_0, y_0)$  . Ces points sont repérés

par un angle  $\beta$  tel que :

$$\begin{cases} X = X_0 + R \cos \beta \\ Y = Y_0 + R \sin \beta \end{cases}$$

# Repérer les deux sommets A et B du cercle tel que :

$$\beta_a = \pi/2 \quad \text{et} \quad \beta_b = -\pi/2$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} X_a = X_0 + R \cos \beta_a \\ Y_a = Y_0 + R \sin \beta_a \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} X_b = X_0 + R \cos \beta_b \\ Y_b = Y_0 + R \sin \beta_b \end{cases}$$

# Calculer  $\Psi(X_a, Y_a)$  et  $\Psi(X_b, Y_b)$

# Repérer le point C tel que :  $\beta_c = (\beta_a + \beta_b)/2$

$$\text{Et} \quad \begin{cases} X_c = X_0 + R \cos \beta_c \\ Y_c = Y_0 + R \sin \beta_c \end{cases}$$

# Calculer  $\Psi(X_c, Y_c)$

# Calculer  $\Psi_1 = (\Psi_a - \Psi_0) (\Psi_c - \Psi_0)$

- Si  $\Psi_1 < 0$ , il existe alors un point appartenant au cercle et compris entre A et C tel que  $\Psi_1$  est égale à  $\Psi_0$

Dans ce cas on remplace AB par AC

- Si  $\Psi_1 > 0$  on remplace AB par CB

# Après avoir trouver le point C tel que  $\Psi_c = \Psi_0$ , on refait toute cette procédure en remplaçant le point C par O.

### VJ ANALYSE DE L'ECOULEMENT DANS UNE GRILLE D'AUBES

Prenons le cas de deux aubes identiques, le travail reste le même que pour une seule aube, sauf qu'on étudiera l'influence de  $(2n)$  panneaux sur le panneau  $(i)$ .

On procède comme suit :

Si  $j=1$  on remplace  $(j-1)$  par  $n$ .

Si  $j=n+1$  on remplace  $(j-1)$  par  $2n$ .

On notera que les solutions du système d'équations linéaires  $s(j)$  ou  $Ks(j)$  sont obtenues en faisant :

$j=1, n$  pour la première aube .

$j=n+1, 2n$  pour la deuxième aube .

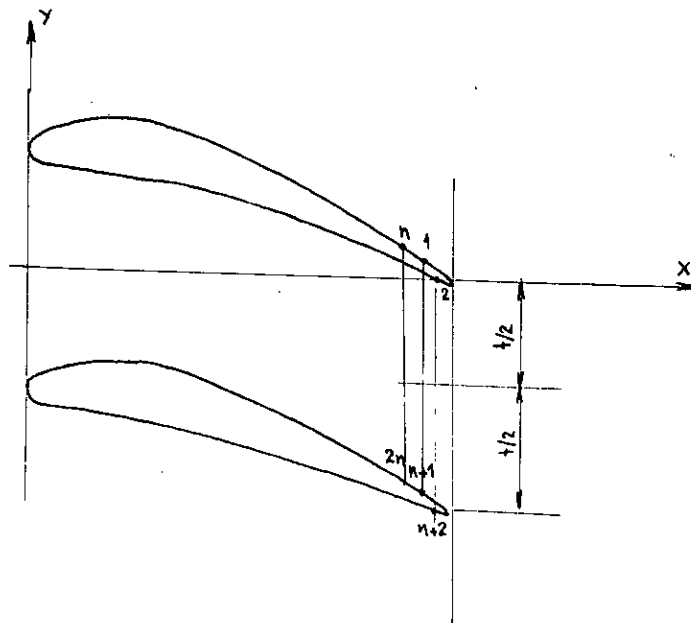


figure 06

## IV] RESOLUTION NUMERIQUE

Le système à résoudre est un système linéaire de dimension N de la forme :

$$\left[ A(i,j) \right] \left[ Xs(j) \right] = \left[ B(i) \right] .$$

La matrice des coefficients d'influence  $A(i,j)$  et le second membre  $B(i)$  sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} A(i,1) &= G(i,2) - \frac{F(i,2)}{L(2)} - \frac{F(i,1)}{L(1)} \\ A(i,j) &= G(i,j+1) + \frac{F(i,j)}{L(j)} - \frac{F(i,j+1)}{L(j+1)} \\ A(i,n) &= G(i,1) + \frac{F(i,n)}{L(n)} - \frac{F(i,1)}{L(1)} \\ B(i) &= 2\pi U_{\infty} \sin(\alpha - \delta i) . \end{aligned}$$

La résolution se fait numériquement à l'aide de la méthode de GAUSS .

Les différents paramètres de l'écoulement seront ensuite déterminés .

# **CHAPITRE TROIS**

## **CALCUL INVERSE MODELE DE H. MITON**



## PRESENTATION DU MODELE

Le modèle proposé par H.MITON [08] se base sur l'hypothèse de périodicité de l'écoulement. D'autres hypothèses simplificatrices concernant le fluide et la grille d'aubes sont introduites lors du développement.

Le principe consiste à déterminer les expressions des composantes de la vitesse  $V(x,y)$  dans sur la paroi du profil

Moyennant ces résultats, un schéma de résolution en mode inverse est proposé.

### I.1] HYPOTHESES ET EQUATIONS DU MOUVEMENT

Soit un écoulement bidimensionnel (dans le plan  $X,Y$ ) traversant un canal constitué de deux parois solides distantes l'une de l'autre de  $h(x)$  (fig:1).

Les hypothèses du modèle sont:

- 1]- Ecoulement isentropique (énergie constante)
- 2]- Fluide non visqueux
- 3]- Fluide incompressible
- 4]- Ecoulement subsonique et uniforme à l'infini amont et aval.
- 5]- Ecoulement périodique suivant la direction  $Y$
- 6]- Grille déviatrice ( contraction nulle )

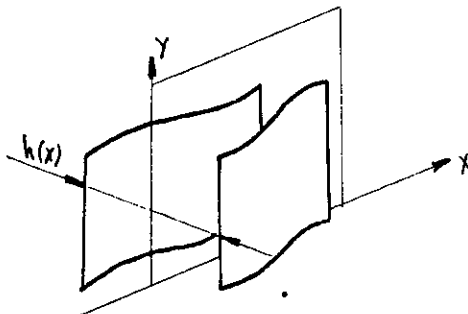


figure 01

Les lois régissant l'écoulement sont les suivantes :

$$Q(x,y) = \frac{\operatorname{div} \rho(x,y) V(x,y)}{\rho(x,y)} + u(x,y) W'(x) \quad \text{continuité} \quad (I.1.a)$$

$$R(x,y) = \operatorname{rot} V(x,y) \quad \text{rotationnel} \quad (I.1.b)$$

$$H(x,y) = \frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = H_0 \quad \text{energie} \quad (I.1.c)$$

$W'(x)$  : coefficient de contraction du tube de courant.

Dans le domaine d'écoulement où il n'y a pas d'obstacles, les relations précédentes se réduisent aux formes suivantes :

$$Q(x,y) = 0 \quad (I.2.a)$$

$$R(x,y) = 0 \quad (I.2.b)$$

$$H(x,y) = H_0 \quad (I.2.c)$$

L'obstacle est donc défini par deux fonctions indépendantes.

- $Q(x,y)$  caractérisant l'effet de déplacement.
- $R(x,y)$  caractérisant l'effet de portance et de traînée.

Les relations (I.1.a) et (I.1.b) peuvent être exprimées dans un repère orthogonal. Ce qui donne le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} + u(x,y) W'(x) = Q(x,y) + F(x,y) \quad (I.3.a)$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = R(x,y) \quad (I.3.b)$$

$F(x,y)$  : fonction tenant compte de l'effet de compressibilité du fluide qui peut être définie à partir de (I.1)

### I.2] PERIODICITE DE L'ECOULEMENT SUIVANT LA DIRECTION Y

Dans le cas d'un espace périodique selon la direction  $y$ , toutes les grandeurs caractéristiques de l'écoulement ainsi que celles caractérisant l'obstacle peuvent être décomposées en série de FOURIER par rapport à  $y$ . (Hypothèse 5)

Les équations (I.3.a) et (I.3.b) peuvent être alors discrétisées sous la forme du système d'équations différentiel suivant :

$$\frac{du_k(x)}{dx} + i k w v_k(x) + u_k(x) W'(x) - q_k(x) - f_k(x) = 0 \quad (I.4.a)$$

$$\frac{dv_k(x)}{dx} - i k w u_k(x) + r_k(x) = 0 \quad (I.4.b)$$

$$w = 2\pi/t \quad t \text{ étant le pas inter-aubes}$$

Les équations (I.4.a) et (I.4.b) peuvent être résolues pour toute valeur significative de  $k$  ( $k \geq 0$ )

#### Vitesses moyennes et perturbatrices

$u(x,y)$  étant une fonction continue et périodique suivant la direction  $y$ , elle peut être décomposée en série de FOURIER comme suit :

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \exp(i k w y) = u_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \exp(i k w y)$$

$u_0(x)$  obtenue pour  $k=0$  est dite vitesse moyenne. Elle est caractéristique du point  $(x,y)$  considéré. Physiquement c'est la valeur de la vitesse  $u(x,y)$  mesurée au point  $(x,y)$ .

Les harmoniques d'ordre supérieur, c'est à dire les vitesses  $u_k(x)$  correspondant à  $k \geq 1$  sont appelées vitesses fluctuantes ou vitesses perturbatrices.

### I.3] CALCUL DE L'ÉCOULEMENT MOYEN

Détermination des composantes moyennes  $u_0(x)$  et  $v_0(x)$  de la vitesse.

Ces valeurs moyennes sont solutions du système [I.4] obtenu pour  $k=0$ .

$$\left\| \begin{array}{l} \frac{du_0(x)}{dx} - u_0(x) W'(x) - q_0(x) - f_0(x) = 0 \end{array} \right. \quad (I.5.a)$$

$$\left\| \begin{array}{l} \frac{dv_0(x)}{dx} = -r_0(x) \end{array} \right. \quad (I.5.b)$$

Les solutions  $u_0(x)$  et  $v_0(x)$  sont déterminées pour  $W'(x)=0$  (Hypothèse 6)

$$u_0(x) = u_0(x_0) + \int_{x_0}^x [q_0(\tau) + f_0(\tau)] d\tau \quad (I.5.c)$$

$$v_0(x) = v_0(x_0) - \int_{x_0}^x r_0(\tau) d\tau \quad (I.5.d)$$

$\tau$  : coordonnée axiale d'intégration  
 $x_0$  : origine du repère

Ces équations prennent en compte les conditions aux limites à l'infini amont ( $u_0(x_0)$  et  $v_0(x_0)$ ), ainsi que les forces globales agissant sur les aubes ( $q_0(\tau)$  et  $r_0(\tau)$ ).

#### I.4] CALCUL DES HARMONIQUES D'ORDRE SUPERIEUR<sup>s</sup> (k ≥ 1)

Pour des raisons de simplicité, le développement se fait pour  $W'(x)=0$  (cas des grilles déviatrices).

Après passage par la transformée de LAPLACE du système [I.4], nous obtenons les solutions des composantes de la vitesse ( $u_k(x)$  et  $v_k(x)$ ) pour  $k \geq 1$ .

$$u_k(x) = (u_k(x_0) + \int_{x_0}^x A_{1k}(\tau) d\tau) \cosh(kw(x-x_0)) - i (v_k(x_0) + \int_{x_0}^x A_{2k}(\tau) d\tau) \sinh(kw(x-x_0)) \quad (\text{I.6.a})$$

$$v_k(x) = (v_k(x_0) + i \int_{x_0}^x A_{2k}(\tau) d\tau) \cosh(kw(x-x_0)) + i (u_k(x_0) + \int_{x_0}^x A_{1k}(\tau) d\tau) \sinh(kw(x-x_0)) \quad (\text{I.6.b})$$

Où  $A_{1k}(\tau)$  et  $A_{2k}(\tau)$  deux fonctions définies par:

$$A_{1k}(\tau) = [q_k(\tau) + f_k(\tau)] \cosh(kw\tau) - i r_k(\tau) \sinh(kw\tau) \quad (\text{I.6.c.1})$$

$$A_{2k}(\tau) = -[q_k(\tau) + f_k(\tau)] \sinh(kw\tau) - i r_k(\tau) \cosh(kw\tau) \quad (\text{I.6.c.2})$$

$u_k(x_0)$  et  $v_k(x_0)$  : solutions pour une valeur initiale ( $x_0$ )

On constate d'après (I.6.a) et (I.6.b) que  $g_k(x)$  et  $v_k(x)$  ne sont pas bornées quand  $x \rightarrow \infty$  (du fait que  $\cosh x$  et  $\sinh x$  tendent vers l'infini).

En fait, à l'infini amont et aval ( $x \rightarrow \pm \infty$ ), l'écoulement est uniforme (en régime stationnaire).

L'écoulement uniforme est obtenu pour des valeurs constantes de  $g_k(x)$ ,  $f_k(x)$  ainsi que  $r_k(x)$ .

Dans ce cas, il existe des conditions aux limites  $u_k(x_0)$  et  $v_k(x_0)$  telles que  $u_k(x)$  et  $v_k(x)$  restent constantes à partir d'une certaine distance  $\pm D$  de l'origine  $x_0$ .

Ces conditions aux limites ont à satisfaire les équations suivantes :

$$(I.7.a) \quad u_k(x_0) - i v_k(x_0) = - \frac{K_M}{A_{1k}(D) + A_{2k}(D)} + \int_D^{x_0} [A_{1k}(\tau) - A_{2k}(\tau)] d\tau$$

$$(I.7.b) \quad u_k(x_0) + i v_k(x_0) = \frac{K_M}{A_{1k}(-D) - A_{2k}(-D)} - \int_D^{x_0} [A_{1k}(\tau) - A_{2k}(\tau)] d\tau$$

(I.7.a) donne une solution finie pour  $x - x_0 > D$

(I.7.b) donne une solution finie pour  $x - x_0 < D$

En injectant (I.7.a) et (I.7.b) dans (I.6.a) et (I.6.b) nous obtenons les composantes de la vitesse pour  $x$  compris entre  $-D$  et  $D$  (cf fig 02).

$$u_k(x) = \frac{X_k(x, -D) - X_k(x, D)}{kw} - \int_{-D}^D \delta(x, \tau) X_k(x, \tau) d\tau \quad (I.8.a)$$

$$v_k(x) = -i \frac{X_k(x, -D) + X_k(x, D)}{kw} - i \int_{-D}^D X_k(x, \tau) d\tau \quad (I.8.b)$$

avec :

$$X_k(x, \tau) = 1/2 [ [q_k(\tau) + f_k(\tau)] + i\delta(x, \tau) r_k(\tau) ] \exp(kw|\tau-x|) \quad (I.8.e)$$

$\delta(x, \tau)$ : fonction étagée définie comme suit:

$$\delta(x, \tau) = \begin{cases} -1 & \text{si } \tau < x \\ 0 & \text{si } \tau = x \\ 1 & \text{si } \tau > x \end{cases} \quad (I.8.f)$$

Les solutions (I.8.a) et (I.8.b) font intervenir des intégrales couvrant tout le domaine  $[-D, +D]$ , et sont fonction seulement de  $x$  pour une ligne de courant donnée.

Du point de vue numérique, le champs de calcul doit être le plus petit possible.

A cet effet, le champs d'écoulement est divisé en trois domaines [J1], [J2] et [J3] (fig 02).

Les fonctions  $q_k(\tau)$  et  $r_k(\tau)$  seront identiquement nulles sur [J1] et [J3].

Dans le domaine [J2] (définissant l'infini amont et aval) les solutions (I.8.a) et (I.8.b) s'écrivent sous la forme:

$$u_k(x) = W_{1k}(x) + W_{3k}(x) - \int_{-c/2}^{c/2} \delta(x, \tau) X_k(x, \tau) d\tau \quad (\text{I.9.a})$$

$$v_k(x) = -i [W_{1k}(x) - W_{3k}(x) + \int_{-c/2}^{c/2} X_k(x, \tau) d\tau] \quad (\text{I.9.b})$$

$W_{1k}(x)$  et  $W_{3k}(x)$  étant définies par :

$$\begin{aligned} W_{1k}(x) = & -1/2 u_k(-D) \exp[-k|D+x|] \\ & + [u_k(-c/2) + i v_k(-c/2)] \exp[-k|x+c/2|] \end{aligned} \quad (\text{I.9.e})$$

et

$$\begin{aligned} W_{3k}(x) = & -1/2 u_k(D) \exp[-k|D-x|] \\ & + [u_k(c/2) - i v_k(c/2)] \exp[-k|x-c/2|] \end{aligned} \quad (\text{I.9.d})$$

Les solutions correspondant aux domaines [J1] et [J3] sont calculées à partir de (I.6.a) et (I.6.b) en prenant  $x_0 = c/2$ .

# Si l'écoulement est subsonique (à l'infini amont et à l'infini aval) il doit être alors uniforme pour  $x \geq D$  et  $x \leq -D$  ( $D$  et  $-D$  caractérisant l'"infini"). Dans ces conditions  $u_k(D)$  et  $u_k(-D)$  sont nulles ( $k \geq 1$ )

# Si l'écoulement est incompressible ( $f_k(x) = 0$ ) alors  $W_{1k}$  et  $W_{3k}$  sont identiquement nulles.



Dans ce cas, les relations (I.9.a) et (I.9.b) deviennent

$$u_k(x) = - \int_{-c/2}^{c/2} \delta(x, \tau) X_k(x, \tau) d\tau \quad (\text{I.9.a1})$$

$$v_k(x) = -i \int_{-c/2}^{c/2} X_k(x, \tau) d\tau \quad (\text{I.9.b1})$$

Ces solutions sont valables pour toute valeur de  $x$  comprise entre  $-D$  et  $+D$ .

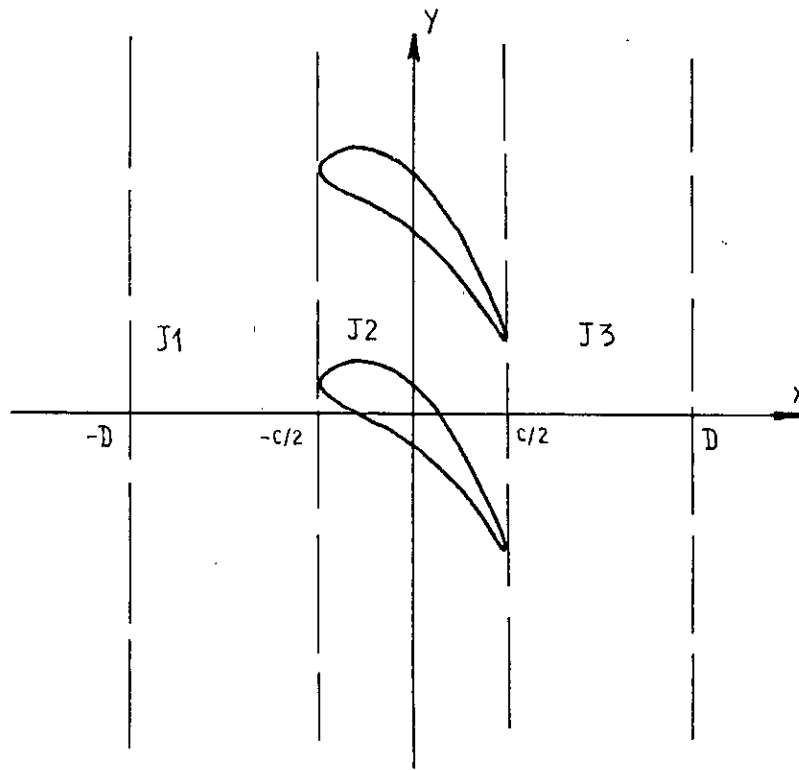


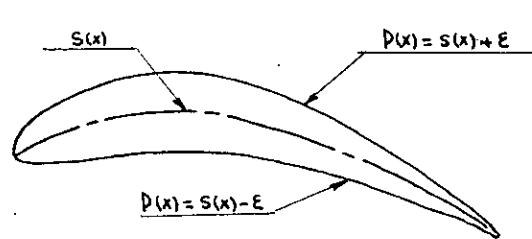
figure 02

I.5] MODELISATION DE L'OBSTACLE [08]

Les aubes comprises entre  $(-c/2, c/2)$  sont définies par leur ligne moyenne  $s(x)$  et par une loi d'épaisseur  $\epsilon(x)$  qui est distribuée symétriquement par rapport à  $s(x)$  ( fig 03 ).

Le profil d'une aube est ainsi donné par :

$$P(x) = s(x) + l \epsilon(x)$$



$l = +1$  sur l'extrados  
 $l = -1$  sur l'intrados

figure 03

La tangente au profil aux points d'abscisses  $\pm c/2$  est parallèle à  $oy$ .

Rappelons (cf eqt I1 et I2) que l'effet d'obstacle est introduit en considérant les deux fonctions  $Q$  et  $R$  [réf:1].

Le problème ici est d'exprimer  $Q(x,y)$  et  $R(x,y)$  en fonction des caractéristiques géométriques du profil.

Pour cela, on définit une fonction périodique  $T(x,y)$  [08] dont la forme générale est représentée par la figure (fig 04).  $Q(x,y)$  et  $R(x,y)$  peuvent s'exprimer en fonction de  $T(x,y)$  comme suit

$$Q(x,y) = \alpha(x) T(x,y) \tag{I.10.a}$$

$$R(x,y) = \beta(x) T(x,y) \tag{I.10.b}$$

et ce sur le domaine [A] défini par :

$$[A] \quad \left| \begin{array}{l} x \in ]-c/2, c/2[ \\ y \in ]s(x) - \epsilon(x), s(x) + \epsilon(x)[ \end{array} \right.$$

$T(x,y)$  étant une fonction périodique suivant  $Y$  qui s'écrit:

$$T(x,y) = \sum_{k=0}^g tk(\epsilon(x)) \exp(i kw [y-s(x)]) \quad \text{avec } tk(0) = 0$$

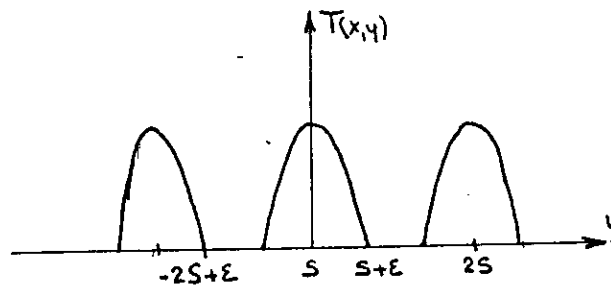


figure 04

Les fonctions  $Q(x,y)$  et  $R(x,y)$  peuvent, comme nous l'avons vu (hypothèse 5) être décomposées en série de FOURIER.

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= \sum q_k(x) \exp[i kwy] \\ &= \alpha(x) \sum t_k(\epsilon(x)) \exp[i kw(y-s(x))] \end{aligned} \quad (\text{I.10.c})$$

$$\begin{aligned} R(x,y) &= \sum r_k(x) \exp[i kwy] \\ &= \beta(x) \sum t_k(\epsilon(x)) \exp[i kw(y-s(x))] \end{aligned} \quad (\text{I.10.d})$$

Pour  $k=0$ ,  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$  peuvent être exprimées comme suit:

$$q_0(x) = \alpha(x) t_0(\epsilon(x)) = - \frac{du_0(x)}{dx} - f_0(x) \quad (\text{I.11.a})$$

$$r_0(x) = \beta(x) t_0(\epsilon(x)) = - \frac{dvo(x)}{dx} \quad (\text{I.11.b})$$

( $f_0(x)=0$  en incompressible)

$q_k(x)$  et  $r_k(x)$  sont alors obtenues après identification des relations (I.10.c) et (I.10.d)

$$q_k(x) = \frac{du_0(x)}{dx} \frac{t_k(\epsilon(x))}{t_0(\epsilon(x))} \exp[-i kws(x)] \quad (\text{I.12.a})$$

$$r_k(x) = \frac{dvo(x)}{dx} \frac{t_k(\epsilon(x))}{t_0(\epsilon(x))} \exp[-i kws(x)] \quad (\text{I.12.b})$$

(pour un écoulement incompressible)

La relation (I.8.e) ( donnant  $X_k(x, \tau)$  en<sup>s</sup> incompressible ) s'écrit alors en  $y$  injectant (I.12.a) et (I.12.b) comme suit

$$X(x, \tau) = 1/2 \left[ \frac{du_0(\tau)}{d\tau} + i \delta(x, \tau) \frac{dvo(\tau)}{d\tau} \right] * \\ * \frac{tk(\epsilon(x))}{to(\epsilon(x))} \exp[-i kws(\tau)] \exp[-i kw|\tau-x|] \quad (I.13)$$

Expression des vitesses :

En injectant (I.13) dans (I.8.a) et (I.8.b) on obtient les relations suivantes :

$$u(x, y) = u_0(x) - \int_{-c/2}^{c/2} \frac{du_0}{d\tau}(\tau) G_u(x, \tau, y) d\tau + \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dvo}{d\tau}(\tau) G_v(x, \tau, y) d\tau \quad (I.14.a)$$

$$v(x, y) = v_0(x) - \int_{-c/2}^{c/2} \frac{du_0}{d\tau}(\tau) G_v(x, \tau, y) d\tau + \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dvo}{d\tau}(\tau) G_u(x, \tau, y) d\tau \quad (I.14.b)$$

$G_u$  et  $G_v$  sont données par :

$$G_u(x, \tau, y) = \delta(x, \tau) G(x, \tau, y)$$

$$G_v(x, \tau, y) = i G(x, \tau, y)$$

$$G(x, \tau, y) = 1/2 \frac{tk(\epsilon(x))}{to(\epsilon(x))} \exp[-kw [|\tau-x| + i (s(\tau) - s(x))]]$$

$G(x, \tau, y)$  est discontinue en  $x = \tau$

Parties réelles des composantes  $u(x,y)$  et  $v(x,y)$ .

Tous les développements ont été faits dans le plan complexe. Physiquement, les valeurs des composantes de la vitesse correspondent aux parties réelles des équations (I.14..)  
Ce qui nous donne:

$$u(x,y) = u_0(-c/2) - \int_{-c/2}^{c/2} \frac{du_0}{d\tau}(\tau) C_u(x,\tau,y) d\tau - \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dv_0}{d\tau}(\tau) C_v(x,\tau,y) d\tau \quad (I.15.a)$$

$$v(x,y) = v_0(-c/2) - \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dv_0}{d\tau}(\tau) C_u(x,\tau,y) d\tau + \int_{-c/2}^{c/2} \frac{du_0}{d\tau}(\tau) C_v(x,\tau,y) d\tau \quad (I.15.b)$$

Avec :  $C_u(x,\tau,y) = \delta(x,\tau) C_1(x,\tau,y) - 1/2$

où :  $C_v(x, ,y) = C_2(x,\tau,y)$

$$C_1(x,\tau,y) = 1/2 + \sum_{k=0}^{\infty} E_k(\epsilon(\tau)) \exp[-kw|\tau-x|] \cos[kw(y-s(\tau))]$$

$$C_2(x,\tau,y) = \sum_{k=0}^{\infty} E_k(\epsilon(\tau)) \exp[-kw|\tau-x|] \sin[kw(y-s(\tau))]$$

$$E_k(\epsilon(\tau)) = \frac{3}{k^2 \epsilon^2 w^2} \left[ \frac{\sin kwe}{k \epsilon w} - \cos kwe \right]$$

$\frac{dvo(\tau)}{d\tau}$  : variation de la composante moyenne verticale de la vitesse par rapport à  $\tau$

$\frac{duo(\tau)}{d\tau}$  : variation de la composante moyenne horizontale de la vitesse par rapport à  $\tau$

### I.6] APPLICATION POUR UN CALCUL EN GRILLE D'AUBE

Les relations (I.15.a) et (I.15.b) telles qu'elles sont ne nous permettent pas de déterminer  $u(x,y)$  et  $v(x,y)$  à partir de la connaissance de  $s(x)$  et  $\epsilon(x)$ .

Il nous faut donc introduire une condition relative à l'écoulement afin de pouvoir traiter le problème direct. Une telle condition peut être exprimée par une condition de glissement du fluide sur la paroi solide.

#### I.6.1] CONDITION DE GLISSEMENT

Cette condition se traduit par le fait que le vecteur vitesse est en tout point tangent au profil (fig 05). Sur la paroi du profil les composantes du vecteur vitesse sont obtenues en remplaçant  $y$  par  $P(x)$  dans (I.15.a) et (I.15.b)



figure 05

$$u_k(x, P(x)) = u_{pk}(x) = u_0(-c/2) - \int_{-c/2}^{c/2} \frac{du_0}{d\tau}(\tau) C_{up}(x, \tau) d\tau - \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dvo}{d\tau}(\tau) C_{pv}(x, \tau) d\tau \quad (I.16.a)$$

$$v_k(x, P(x)) = v_{pk}(x) = v_0(-c/2) - \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dvo}{d\tau}(\tau) C_{vp}(x, \tau) d\tau + \int_{-c/2}^{c/2} \frac{du_0}{d\tau}(\tau) C_{pv}(x, \tau) d\tau \quad (I.16.b)$$

La condition de glissement s'écrit :

$$\frac{v_p(x)}{u_p(x)} = P'(x)$$

ce qui nous donne l'équation :

$$\int_{-c/2}^{c/2} H_u(x, \tau) \frac{du_0}{d\tau}(\tau) + \int_{-c/2}^{c/2} H_v(x, \tau) \frac{dvo}{d\tau}(\tau) = -v_0(x) + P'(x) u_0(x) \quad (I.17)$$

Avec:  $H_u(x, \tau) = P'(x) C_u(x, \tau, P(x)) + C_v(x, \tau, P(x))$

$$H_v(x, \tau) = P'(x) C_v(x, \tau, P(x)) + C_u(x, \tau, P(x))$$

$H_u$  et  $H_v$  sont discontinues en  $x = \tau$ .

L'évaluation des intégrales figurant dans (I.17) se fait par la méthode de GAUSS :

$$\int_0^c F(\alpha) d\alpha = c/2 \sum_{i=1}^N w(i) F(\alpha(i))$$

$\alpha(i)$  et  $w(i)$  sont appelés respectivement points et poids de GAUSS ;  $c$  étant la corde.

La relation (I.17) peut alors être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N c/2 w(j) [P'(x_i) C_u(x_i, \tau_j) + C_v(x_i, \tau_j)] \frac{du_o}{d\tau}(\tau_j) \\ & + \sum_{k=1}^N c/2 w(j) [P'(x_i) C_v(x_i, \tau_j) - C_u(x_i, \tau_j)] \frac{dv_o}{d\tau}(\tau_j) \\ & = P'(x_i) u_o(-c/2) - v_o(-c/2) \end{aligned} \quad (I.18)$$

La relation (I.18) peut être écrite en chaque point  $x(i)$  du profil ( $N$  points sur l'extrados et  $N$  points sur l'intrados). Ce qui nous donne, sous forme condensée, ceci :

$$\begin{bmatrix} HUE(i,j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \frac{DU_o}{D\tau}(j) \\ \cdot \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} HVE(i,j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \frac{DV_o}{D\tau}(j) \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ BE(j) \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (I.18.1)$$

» Système de  $N$  équations (correspondant à  $N$  points sur l'extrados)

$$\begin{bmatrix} HUI(i,j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \frac{DU_o}{D\tau}(j) \\ \cdot \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} HVoI(i,j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \frac{DV_o}{D\tau}(j) \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ BI(j) \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (I.18.2)$$

» Système de  $N$  équations (correspondant à  $N$  points sur l'intrados)

# XE désignant les variables écrites aux points de l'extrados

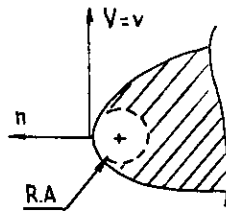
# XI désignant les variables écrites aux points de l'intrados



### I.7J TRAITEMENT DU BORD D'ATTAQUE ET DU BORD DE FUITE [08]

La condition de glissement explicitée par la relation (I.17) n'est pas applicable aux points du bord d'attaque et du bord de fuite, car comme il a été défini, les tangentes du profil  $P'(x)$  en ces points tendent vers l'infini (fig 06).

Des relations supplémentaires appliquées aux points BA et BF sont obtenues en posant la condition de KUTTA-JOUKOWSKI qui impose des vitesses finies au bord d'attaque et de fuite .



Bord d'attaque

figure 06

# La conservation du moment s'écrit (aux points BA et BF) :

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{V}{R} \quad (\text{I.19.a})$$

Où  $V$  : module de la vitesse  
 $R$  : rayon de courbure de la paroi  
 $n$  : vecteur normal

# D'autre part la composante axiale  $u$  de la vitesse  $V$  est nulle aux points BA et BF .

$$u_p(\pm c/2) = 0 \quad (\text{I.19.b})$$

La projection de la relation (I.18.a) suivant l'axe X nous donne :

$$\frac{\partial v_p}{\partial x} = \frac{\partial u_p}{\partial y} = \frac{V_p(\pm c/2)}{R} \quad (\text{I.19.c})$$

En tenant compte de (I.15.a), (I.15.b) et (I.16.a), (I.16.b) les relations (I.18.b) et (I.18.c) s'écrivent :

$$\int_{-c/2}^{c/2} \frac{du_0}{d\tau}(\tau) F_u(x, \tau, e) d\tau + \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dv_0}{d\tau}(\tau) F_v(x, \tau, e) d\tau = v_0(x) \quad (\text{I.20.a})$$

$$\int_{-c/2}^{c/2} \frac{du_0}{d\tau}(\tau) G_u(x, \tau, P(x)) d\tau + \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dv_0}{d\tau}(\tau) G_v(x, \tau, P(x)) d\tau = u_0(x) \quad (\text{I.20.b})$$

Où  $e$  représente une petite fraction du pas  $t$  vérifiant :

$$e < 0.01 \frac{w}{2\pi}$$

la dérivée  $\partial u / \partial y$  aux points  $(x = c/2, y = s(c/2))$  et  $(x = -c/2, y = s(-c/2))$  est évaluée par différences finies centrales .

$$\partial u / \partial y = [u(x, y+e) - u(x, y-e)] / (2e)$$

Ces relations sont valables uniquement pour  $x = \pm c/2$

$F_u$  et  $F_v$  sont définies par :

$$F_u(x, \tau, e) = [(G_u(x, \tau, s(x)+e) - G_u(x, \tau, s(x)-e))] \frac{R}{2e} + G_v(x, \tau, s(x))$$

$$F_v(x, \tau, e) = -[(G_v(x, \tau, s(x)+e) - G_v(x, \tau, s(x)-e))] \frac{R}{2e} + G_u(x, \tau, s(x))$$

$G_u$  et  $G_v$  étant déjà définies en (I.14..) .

## II.1] RESOLUTION NUMERIQUE DE LA METHODE EN MODE DIRECT [08]

Le système d'équations différentielles [I.16] relie :

- # Les composantes  $u_p(x)$  et  $v_p(x)$  de la vitesse  $V$  en chaque point  $(x, P(x))$  du profil
- # Les vitesses moyennes  $u_0(x)$  et  $v_0(x)$  sur le domaine [J2]
- # Les caractéristiques géométriques de la grille et plus précisément la courbure et l'épaisseur du profil ( $s(x)$  et  $(x)$ ).

Connaissant la géométrie du profil, et moyennant une condition sur l'écoulement il nous est possible de déterminer les vitesses  $u(x,y)$  et  $v(x,y)$  dans le champ de calcul .

Dans le cas où la condition à imposer serait une condition de glissement du fluide sur les parois solides de l'aube, la résolution du système [I.16] revindrait à résoudre l'équation (I.17) écrite en chaque point du profil .

En utilisant l'intégration de GAUSS, L'équation (I.17) peut être écrite , pour un nombre fini  $N$  de points compris entre  $(-c/2$  et  $c/2)$  , en un système linéaire :

$$L_a(x_i, \tau(j)) \frac{DU_0}{D\tau}(\tau_j) + L_b(x_i, \tau(j)) \frac{DV_0}{D\tau}(\tau_j) = 0 \quad [I.21]$$

Le système [I.21] peut s'écrire sous la forme condensée :

$$A(i,j) \frac{DU_o}{D\tau}(j) + B(i,j) \frac{DV_o}{D\tau}(j) = 0 \quad [I.21']$$

Où:  $\frac{DU_o}{D\tau}$  et  $\frac{DV_o}{D\tau}$  sont des matrices colonnes de la forme :

$$\frac{DU_o}{D\tau} = \begin{bmatrix} \vdots \\ du_o \\ \frac{d}{d\tau}(\tau(j)) \\ \vdots \end{bmatrix} ; \quad \frac{DV_o}{D\tau} = \begin{bmatrix} \vdots \\ dvo \\ \frac{d}{d\tau}(\tau(j)) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

et  $A(i,j)$  et  $B(i,j)$  des matrices carrées de la forme :

$$A(i,j) = \begin{bmatrix} La(x(i), \tau(j)) \end{bmatrix} ; \quad B(i,j) = \begin{bmatrix} Lb(x(i), \tau(j)) \end{bmatrix}$$

Afin d'obtenir une solution nous devons avoir comme données:

$$\text{et} \quad \frac{DU_o}{D\tau}(j) \text{ ou } \frac{DV_o}{D\tau}(j) \\ u_o(\tau(1)); v_o(\tau(1))$$

### III.1] UTILISATION DE LA METHODE EN MODE INVERSE

Contrairement au mode direct, les inconnues du système [I.16] sont les caractéristiques de l'aube.

Le problème est donc de déterminer la corde  $s(x)$  et l'épaisseur  $\epsilon(x)$  à partir de la connaissance des propriétés de l'écoulement ( $u_0(-c/2)$ ,  $v_0(-c/2)$ ,  $u_{op}(x)$  et  $v_{op}(x)$ ) C'est le cas du mode inverse 1

Une autre possibilité peut être envisagée. Elle consiste à s'imposer une loi d'épaisseur et la repartition de la composante  $v_0(x)$  afin d'obtenir la distribution de la courbure  $s(x)$ . Ce qui correspond au mode inverse 2.

#### III.1.1] RESOLUTION EN MODE INVERSE 1

Dans ce cas,  $u_0$  et  $v_0$  sont imposées le long du champs d'écoulement, c'est à dire entre le bord d'attaque et le bord de fuite.

L'équation (I.18) écrite en chaque point  $x_i$  le long de la corde nous donne un système de  $2N$  équations non linéaires ( $N$  points sur l'extrados et  $N$  points sur l'intrados) vérifiées par les  $2N$  inconnues:

$$s(\tau_j) \quad j = 1, N$$

$$\epsilon(\tau_j) \quad j = 1, N$$

Les fonctions  $H_u$  et  $H_v$  figurant dans l'équation (I.18) sont des fonctions non linéaires de  $s(x)$  et  $\epsilon(x)$ . Elles sont de la forme :

$$H_u = h [ E_k(\epsilon) ; \exp(x_i) ; \cos[s(x_i) \pm \epsilon(x_i) - \beta_j] ; .. \\ .. \sin[s(x_i) \pm \epsilon(x_i) - \beta_j] ]$$

$E_k$  étant aussi une fonction non linéaire de  $\epsilon$  :

$$E_k(\epsilon(x)) = e [ 1/\epsilon(x) ; \cos[\epsilon(x)] ; \sin[\epsilon(x)] ]$$

Il paraît donc, selon MITON [08] quasi-impossible de transformer le système (I.17) en un système linéaire en vue d'une résolution en mode inverse 1.

### III.1.2] RESOLUTION NUMERIQUE EN MODE INVERSE 2

L'équation (I.17) écrite en chaque point  $x(i)$  compris entre  $-c/2$  et  $c/2$  nous donne un système de  $2N$  équations non linéaires .

Dans le cas du mode semi-inverse ( inverse 2) on s'impose la répartition de  $v_0$  ( Composante moyenne verticale de la vitesse ) et une loi d'épaisseur .

A partir des systèmes [I.18.1] et [I.18.2] nous pouvons écrire :

$$\left[ \frac{Dv_0}{D\tau}(j) \right] = \left[ Hue(i,j) \right]^{-1} \left[ Be(j) - \left( Hve \frac{Dv_0}{D\tau} \right)(j) \right] \quad [I.22.a]$$

$$\left[ \frac{Dv_0}{D\tau}(j) \right] = \left[ Hui(i,j) \right]^{-1} \left[ Bi(j) - \left( Hvi \frac{Dv_0}{D\tau} \right)(j) \right] \quad [I.22.b]$$

En égalant les deux expressions de droite on obtient alors un système non linéaire de dimension  $N$  dans lequel le vecteur  $dv_0/d$  est donné.

Soit :

$$\begin{aligned} & \left[ Hue(i,j) \right]^{-1} \left[ Be(j) \right] - \left[ Hui(i,j) \right]^{-1} \left[ Bi(j) \right] = \\ & = \left[ \begin{array}{cc} -1 & -1 \\ Hue(i,j) & Hve(i,j) - Hui(i,j) & Hvi(i,j) \end{array} \right] \left[ \frac{dv_0}{d\tau}(j) \right] \end{aligned} \quad [I.23]$$

### Résolution du système [I.23]

La méthode de NEWTON-RAPHSON nous permet de passer d'un système non linéaire tel que le système [I.23] en système linéaire de la forme

$$[A]^k(x)^{k+1} = (B)^k$$

Le système [I.23] comporte des matrices inverses. Afin d'éviter le calcul de telles matrices quelques modifications sont introduites dans l'équation [I.23].

#### Développement

Le système [I.23] peut être développé sous la forme suivante

$$\begin{aligned} & \left[ \text{HUE} \right]^{-1} \left[ \text{BE} \right] - \left[ \text{HUI} \right]^{-1} \left[ \text{BI} \right] - \\ & - \left[ \left[ \text{HUI} \right]^{-1} \left[ \text{HVE} \right] - \left[ \text{HUI} \right]^{-1} \left[ \text{HVI} \right] \right] \left[ \frac{\text{DVO}}{\text{D}\tau} \right] = \left[ 0 \right] \end{aligned} \quad \text{[I.23.1]}$$

En multipliant les deux membres par la matrice [HUE] on obtient le système :

$$\begin{aligned} & \left[ \text{BE} \right] - \left[ \text{HVE} \right] \left[ \frac{\text{DVO}}{\text{D}\tau} \right] - \left[ \text{HUE} \right] \left[ \text{HUI} \right]^{-1} * \\ & * \left[ \left[ \text{BI} \right] - \left[ \text{HVI} \right] \left[ \frac{\text{DVO}}{\text{D}\tau} \right] \right] = \left[ 0 \right] \end{aligned} \quad \text{[I.23.2]}$$

En posant :

$$\begin{bmatrix} X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BE \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} HVE \end{bmatrix} \begin{bmatrix} DV_0 \\ D\tau \end{bmatrix} \quad [I.23.3]$$

et

$$\begin{bmatrix} Y \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} BI \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} HVI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} DV_0 \\ D\tau \end{bmatrix} \right\} \quad [I.23.4]$$

Le système [I.23.2] devient

$$\begin{bmatrix} X \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} HUE \end{bmatrix} \begin{bmatrix} HUI \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad [I.23.5]$$

En écrivant le vecteur (Y) sous la forme suivante

$$\begin{bmatrix} Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} HUI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \end{bmatrix} \quad [I.23.6]$$

on évite ainsi le calcul de la matrice inverse  $\begin{bmatrix} HUI \end{bmatrix}^{-1}$

Le système [I.23.5] devient alors

$$\begin{bmatrix} X \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} HUE \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad [I.23.7]$$

ou sous une forme plus compacte

$$\begin{bmatrix} F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad [I.23.8]$$

Ce système peut être résolu par la méthode de NEWTON-RAPHSON

$s(x)$  étant la solution cherchée, le système [I.23.8] non linéaire en  $s(x)$  est transformé en un système linéaire itératif de la forme :



$$\left\| \begin{aligned} & \left[ A(i,j) \right]^k \left[ s(j)^{k+1} - s(j)^k \right] = \left[ B(i) \right]^k \\ & \left[ s(j)^0 \right] : \text{vecteur solution initial} \end{aligned} \right. \quad \text{[III.1]}$$

Avec

$$A(i,j) = \frac{\partial F(i)}{\partial s(j)} \bigg|_{s = s(j)} = F'(i) \bigg|_{s(j)}$$

et

$$B(i) = - F(i) \bigg|_{s = s(j)}$$

Pour remplir la matrice [A], il nous faut dériver les éléments du vecteur F(i) par rapport à s(j).

Compte tenu de [I.23. 3, 4, 5, 6, 7] on a :

$$\left[ F' \right] = \left[ BE' \right] - \left[ HVE' \right] \left[ \frac{DV_0}{Dt} \right] - \left[ HUE' \right] \left[ Z \right] - \left[ HUE \right] \left[ Z \right] \quad \text{[I.23.9]}$$

En dérivant l'équation [I.23.6] nous obtenons :

$$\left[ Y' \right] = \left[ HVI' \right] \left[ Z \right] + \left[ HUI \right] \left[ Z' \right] \quad \text{[I.23.10]}$$

Les matrices [HUE], [HUI], [HVE], [HVI] et les vecteurs (BE) (BI) ainsi que leurs dérivées respectives par rapport à s(x) peuvent être calculées pour une valeur initiale so(x).

Dans ce cas, les vecteurs (X) et (Y) peuvent être déterminés pour une valeur initiale so(x).

# Le système [I.23.7] donne (Z)

# Le système [I.23.10] donne (Z')

Les vecteurs (F) et (F') peuvent être alors déterminés , ce qui nous permet de remplir la matrice [A] et le vecteur (B).

# **CHAPITRE QUATRE**

## **RESULTATS**

Dans cette partie, nous présentons les résultats du programme [ AUB-SG.FOR ] en calcul direct ( méthode des singularités ).

Le programme [ AUB-SI.FOR ] concernant la résolution numérique de la méthode semi-inverse n'a pas donné de résultats.

#### VALIDATION DE LA METHODE

Vu le manque de données expérimentales, nous n'avons pu valider la méthode des singularités appliquée aux grilles d'aubes qu'avec un seul exemple Page 52

Le profil utilisé est le NACA 65-(12)06 [02]

## PRESENTATION DES RESULTATS

L'analyse de l'écoulement autour d'aubes isolées ou en grilles a consisté à déterminer le champs de vitesse sur le profil, puis à mettre en évidence l'influence de quelques paramètres géométriques (angle d'incidence, pas inter-aubes).

Les résultats sont présentés sous forme de graphes donnant la variation du coefficient de pression le long de la corde:  $C_p=f(X)$  ;  $X$  étant exprimée en pourcentage de  $c$  .

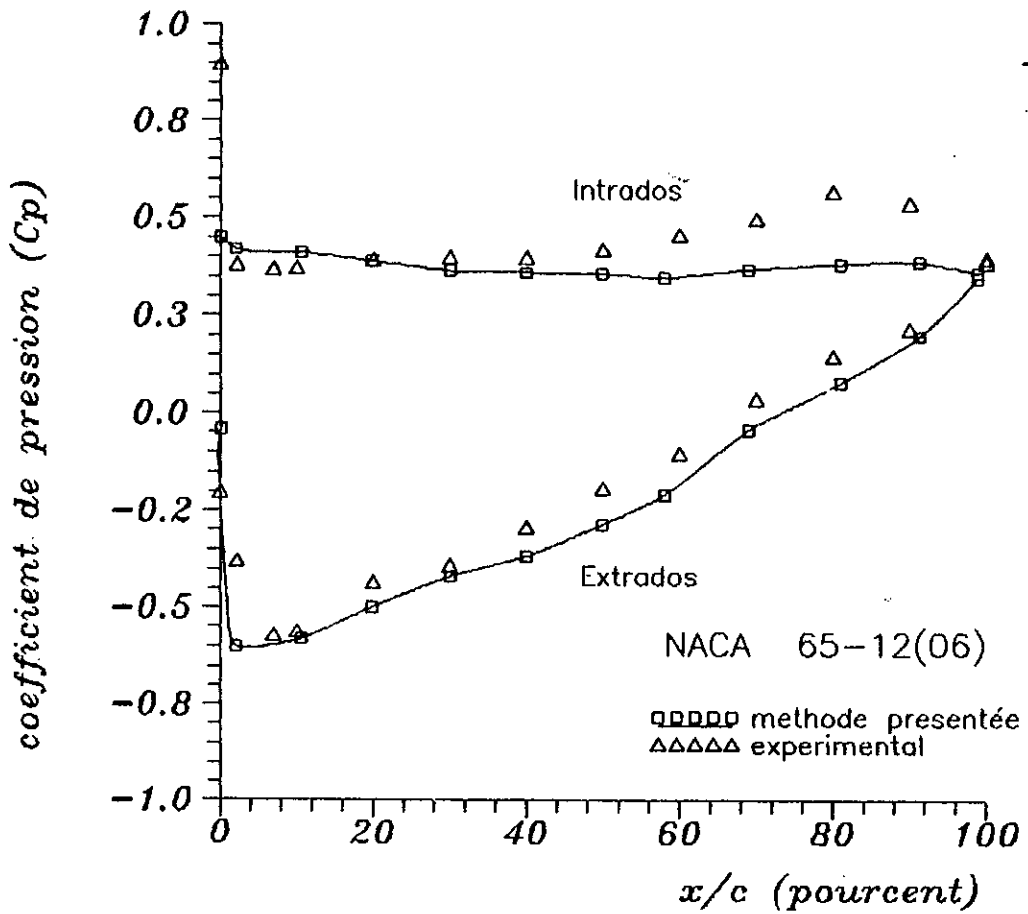
Les profils que nous avons étudié sont présentés en page 53. Il sagit d'un profil symétrique (NACA 4412) et d'un profil cambré de turbine (GOTTENBERG) de cordes  $c = 0.006m$  .

Nous présentons quelques résultats ( $C_p$  en fonction de la corde) obtenus pour une aube isolée (NACA 4412) page 54, puis pour une grille d'aubes (NACA 4412 et GOTTENBERG) pages(55 à 63) .

Les graphes des pages (64 et 65) donnent la variation du  $C_p$  en fonction de la corde  $X=x/c$  pour un pas inter-aube donné et pour différentes valeurs de l'angle d'incidence  $i$  . ("influence de l'angle d'incidence")

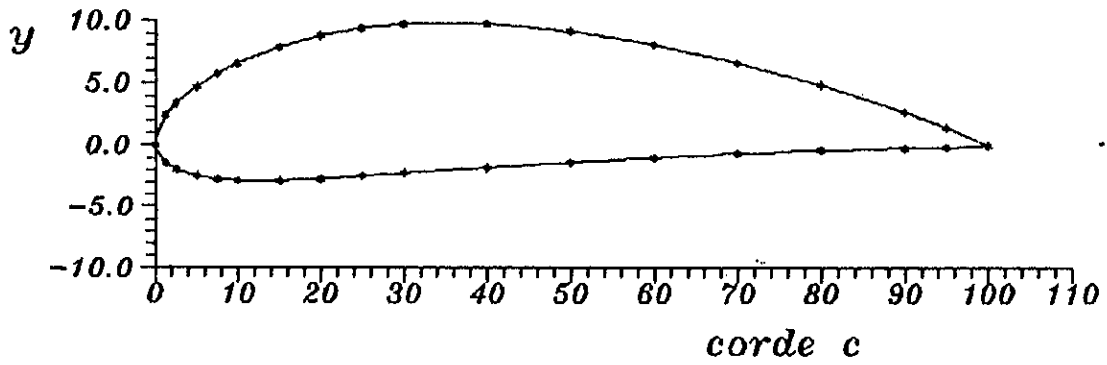
L'influence du pas relatif  $t$  à un angle d'incidence donné, est illustrée par les graphes des pages (66 et 67) .

Enfin, nous avons remarqué qu'à partir d'un certain pas  $t$  qui n'est pas le même pour les deux profils, l'interaction aube à aube tendait à s'annuler; ce qui est tout à fait prévisible du fait que, plus la distance entre deux aubes augmente, plus celles-ci se comportent de la même manière qu'une aube isolée. (pages 68 et 69) .

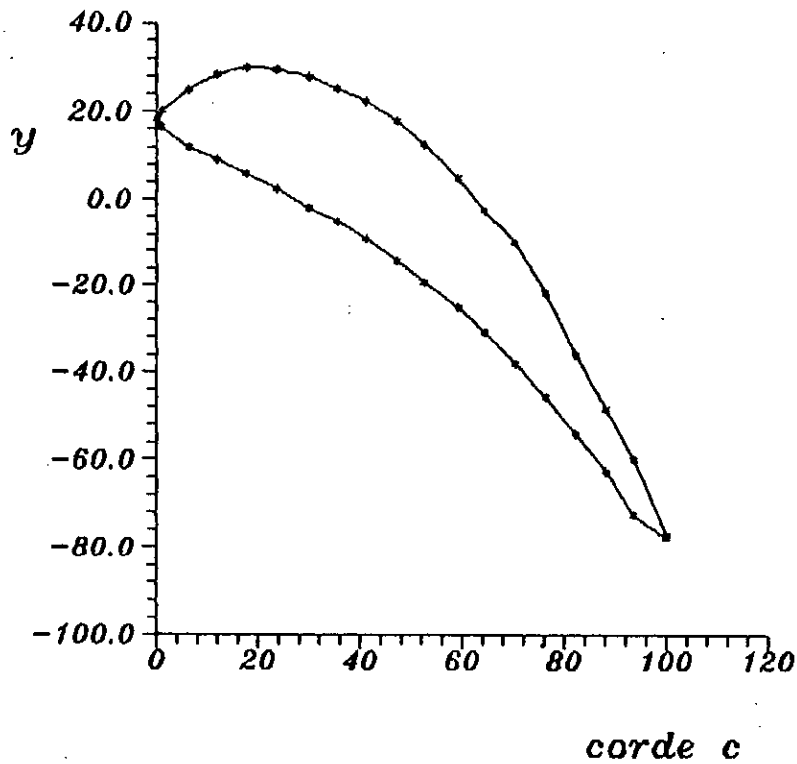


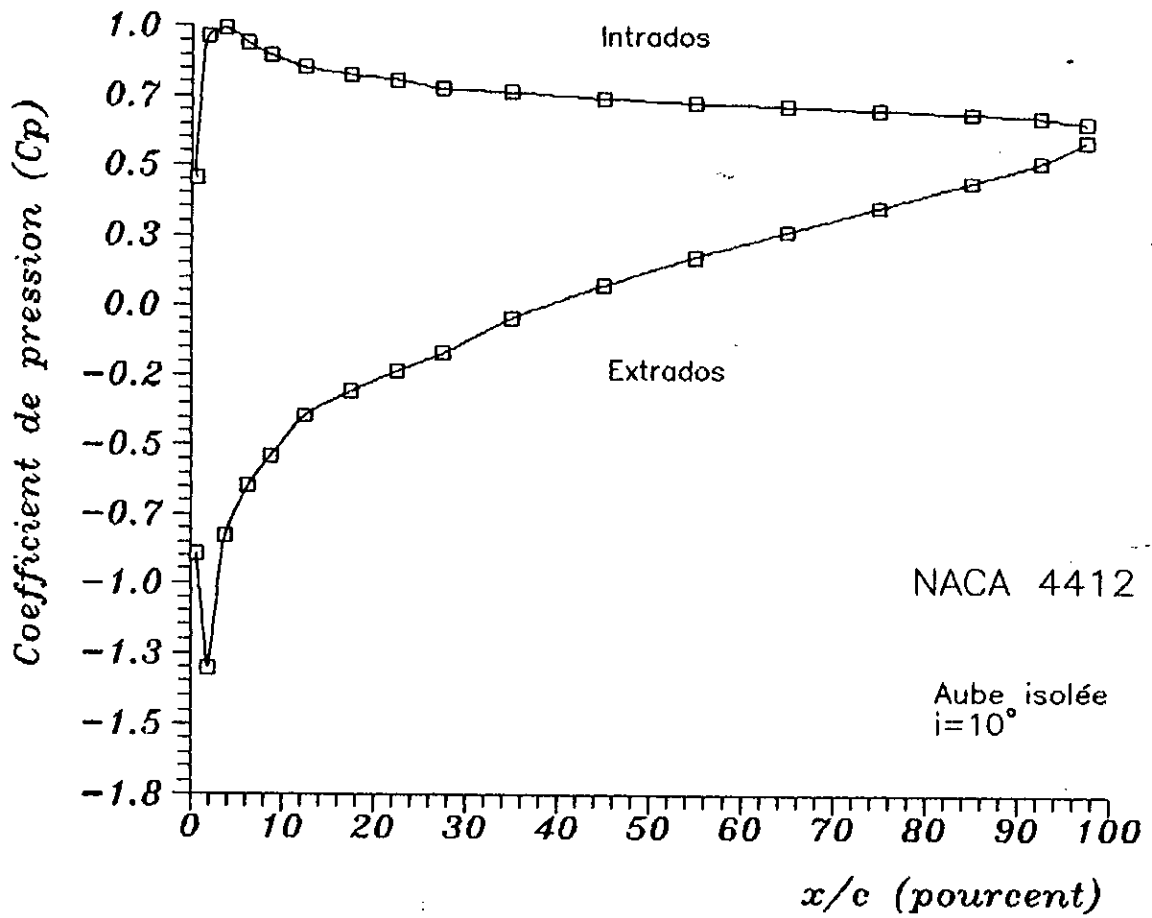
Validation de la méthode  
des singularités

Profil NACA 4412

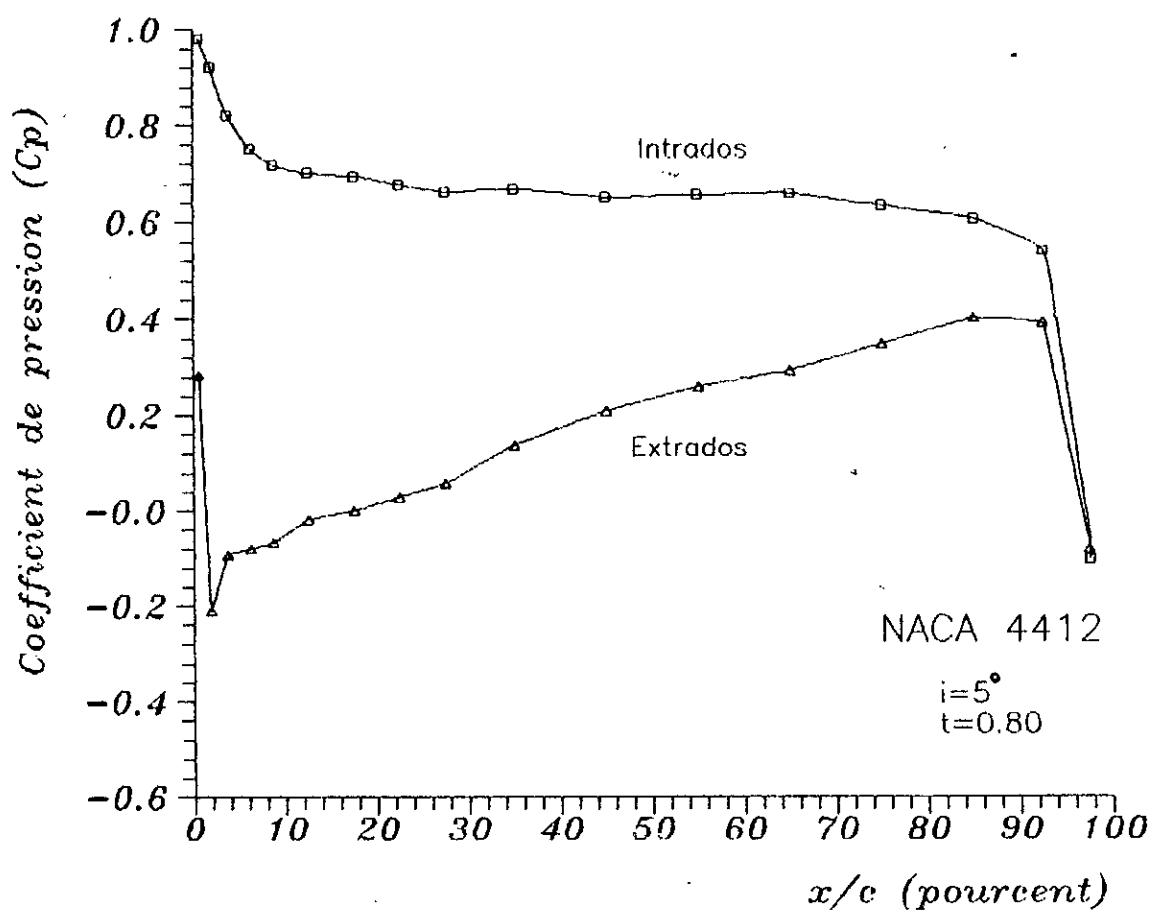


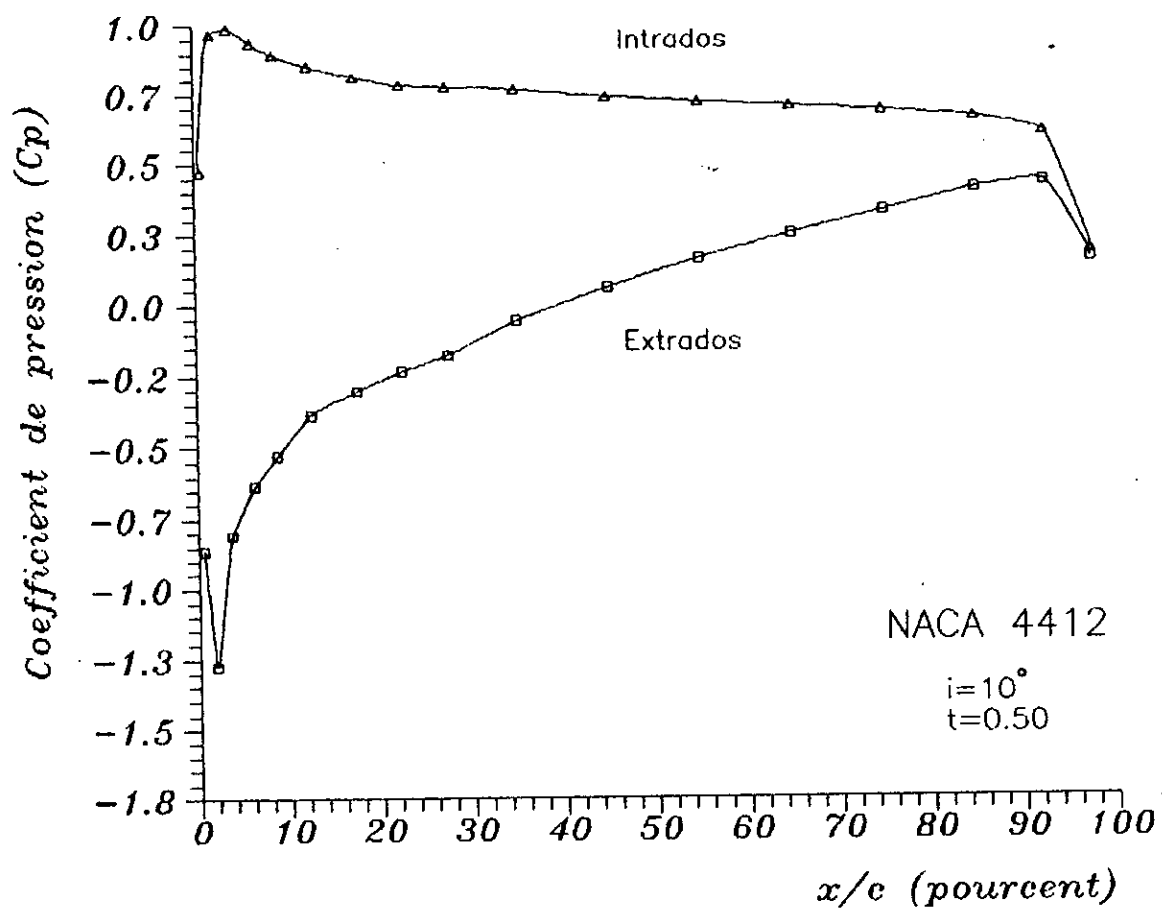
Profil GOTTENBERG

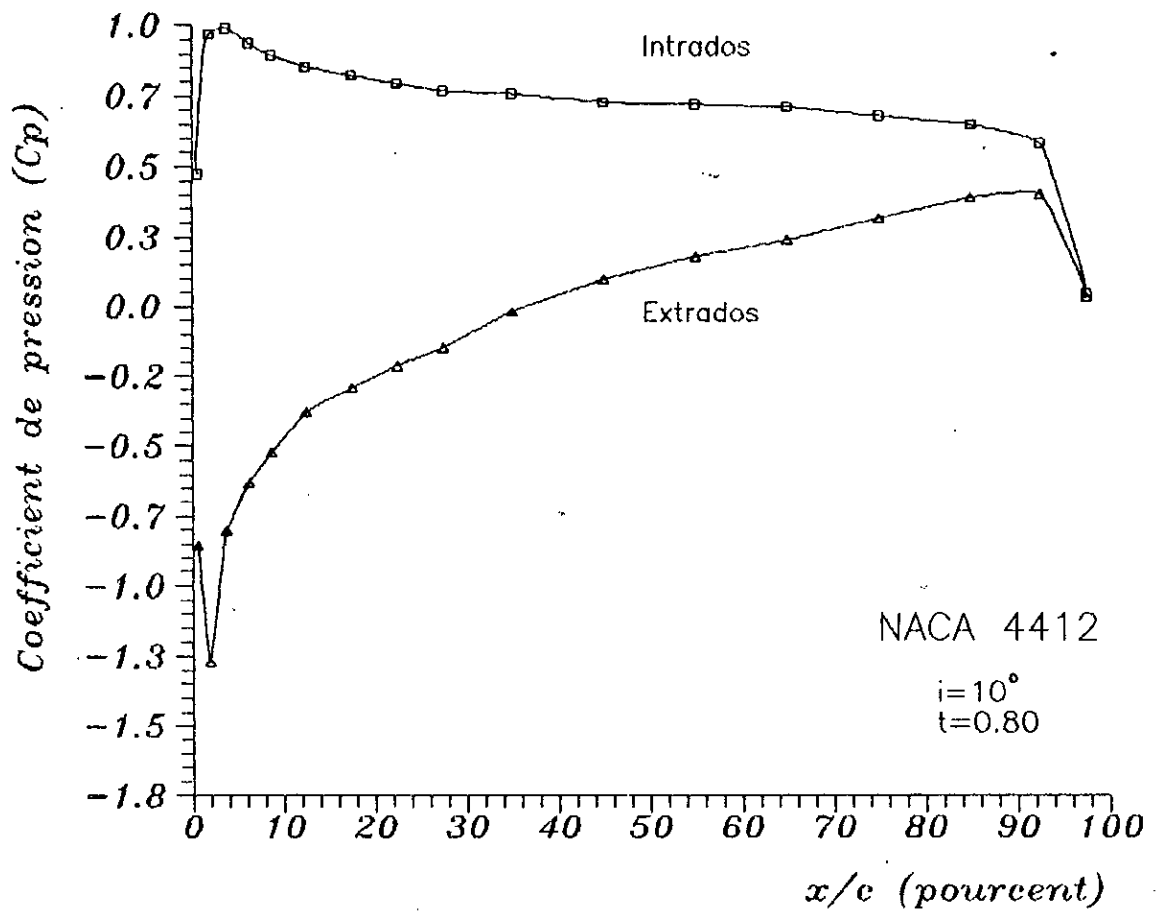


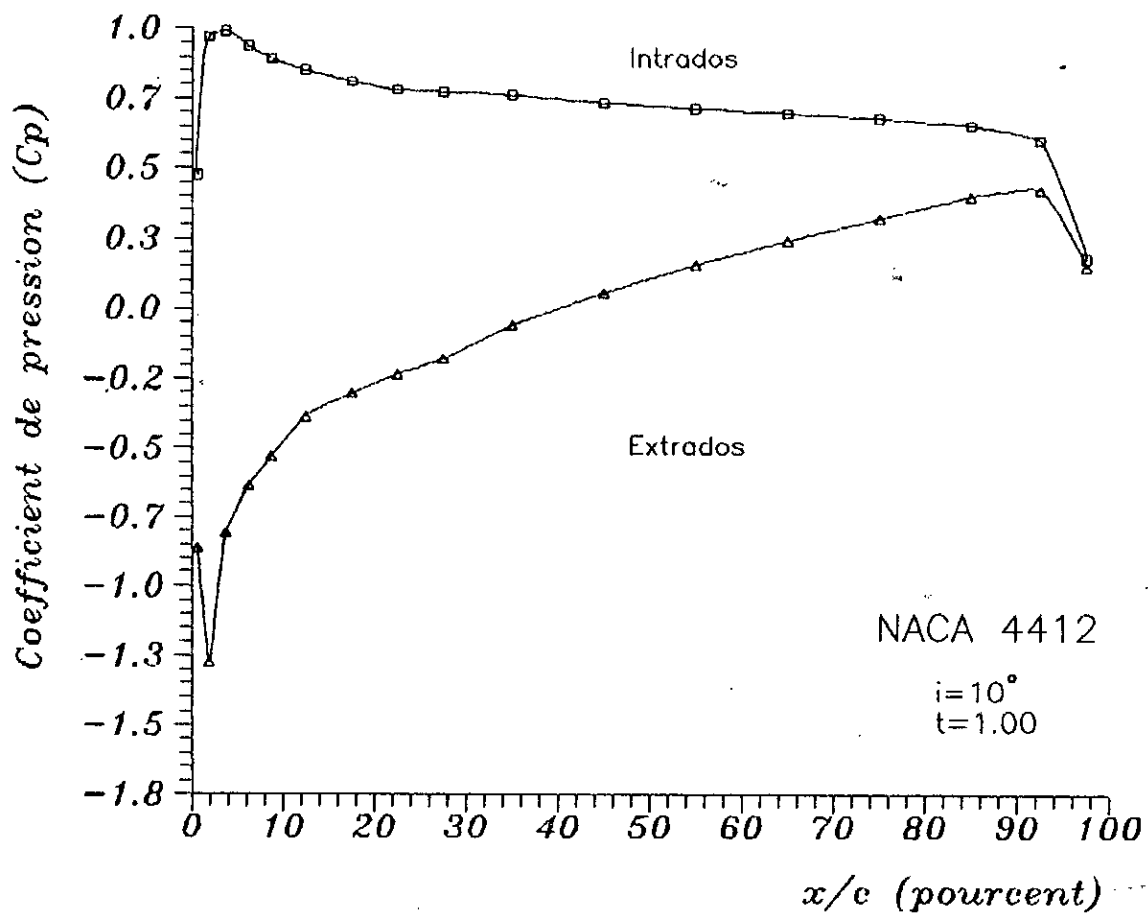


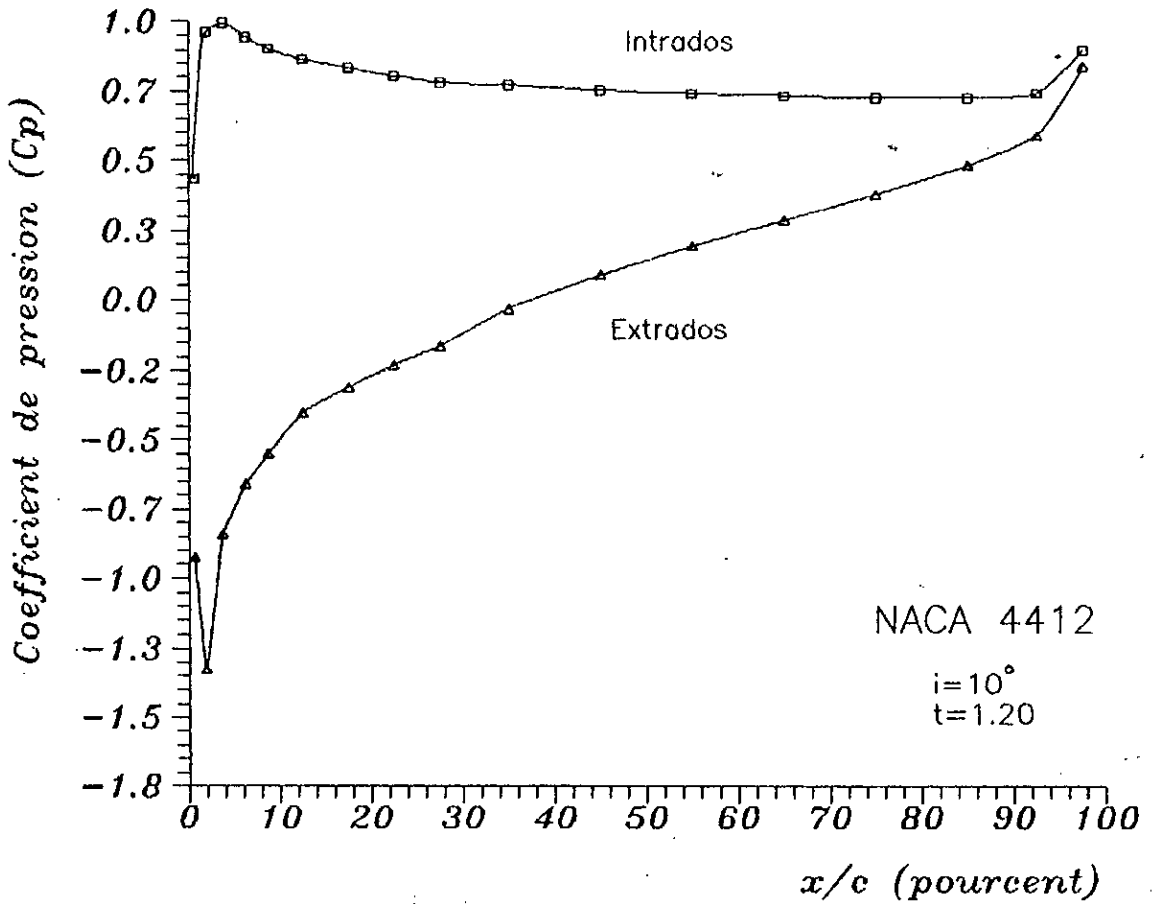


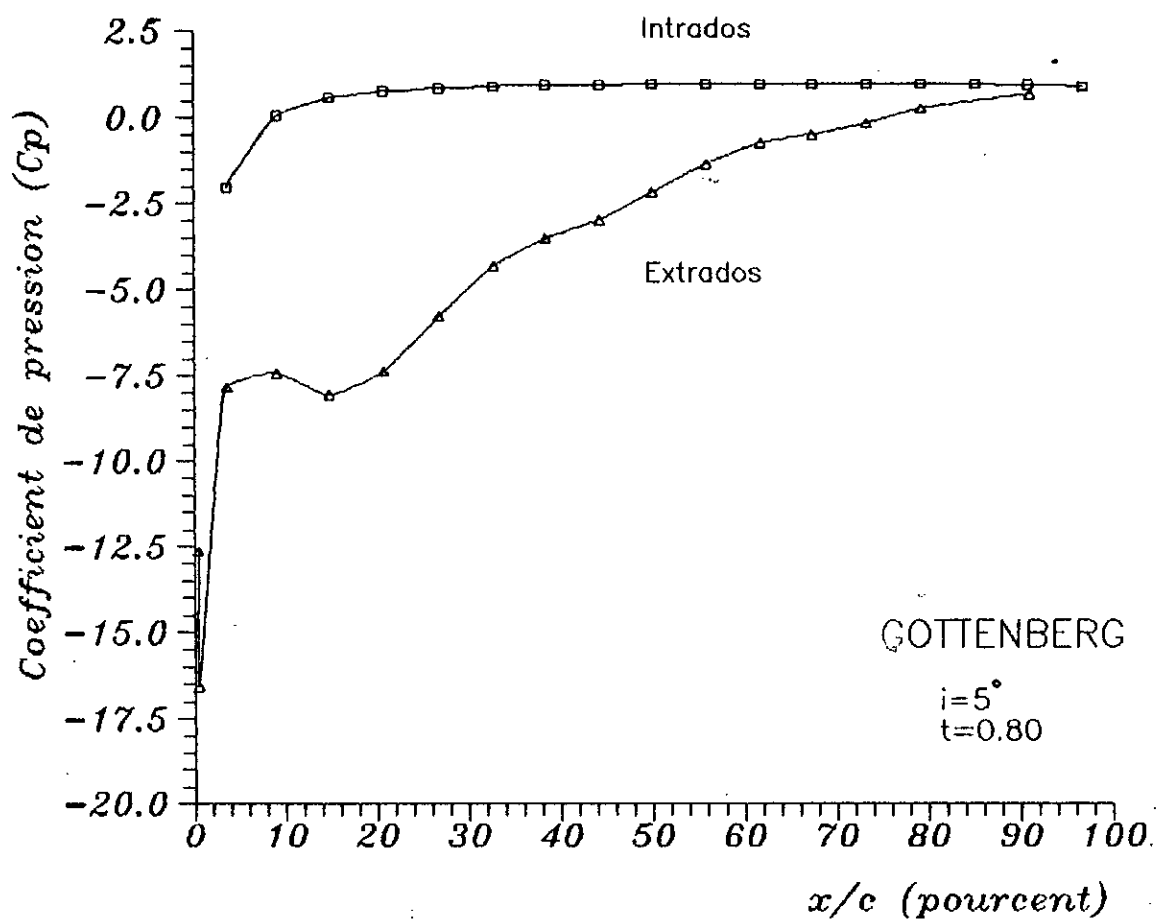


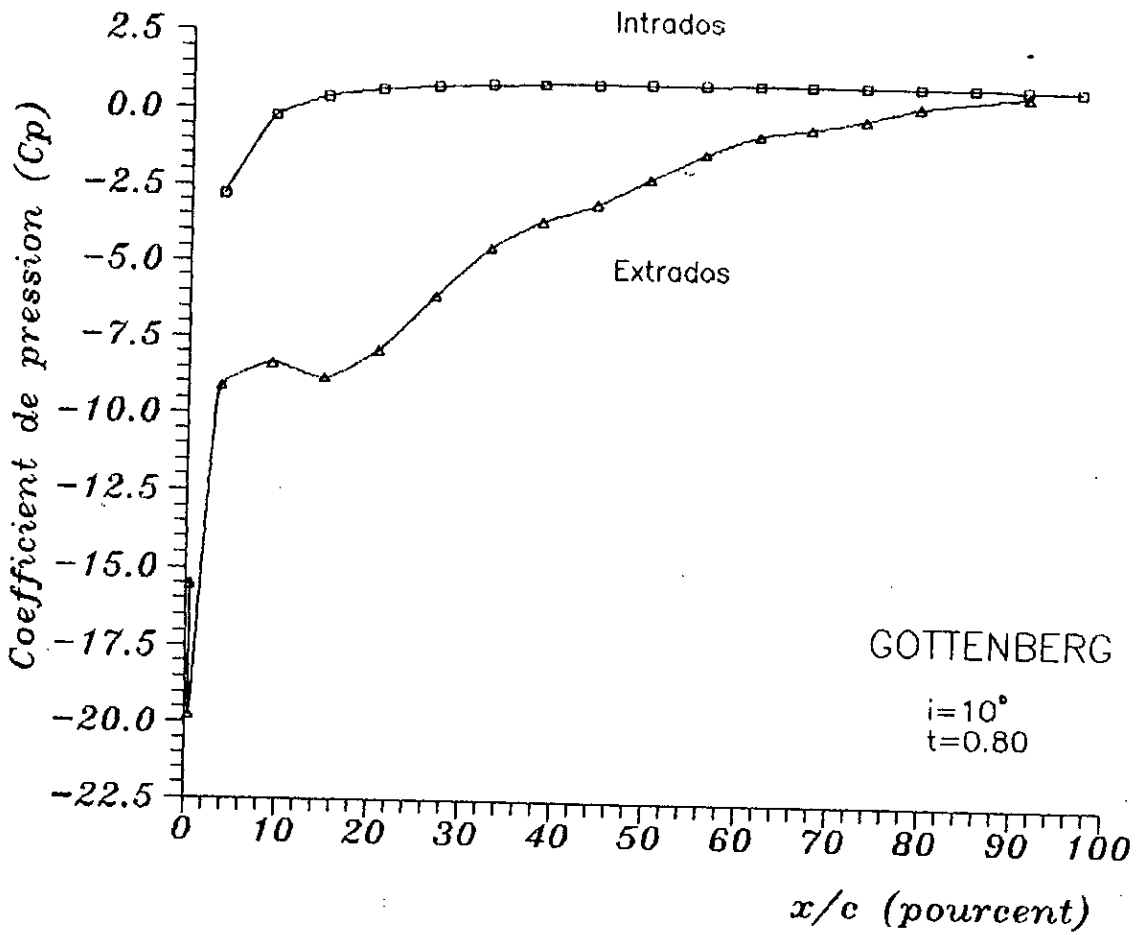


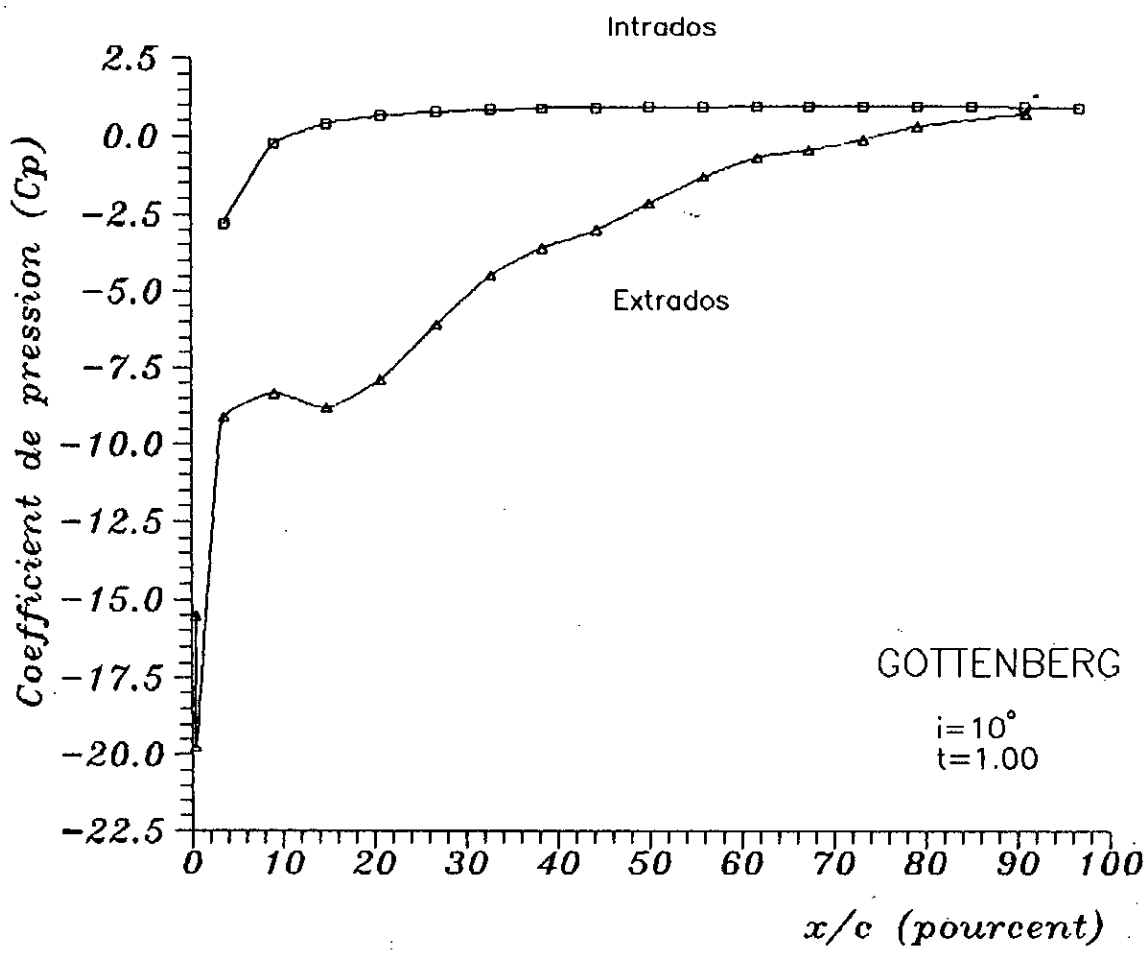




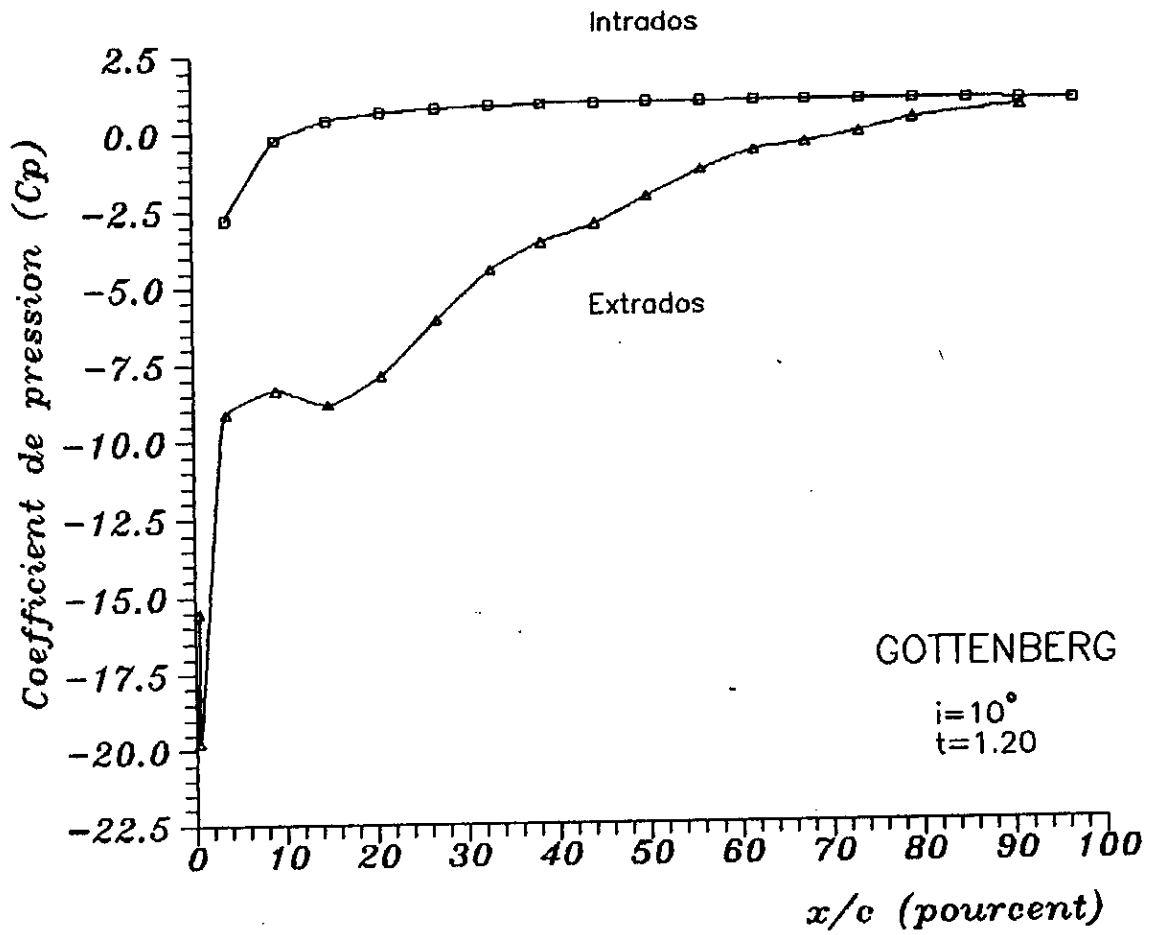


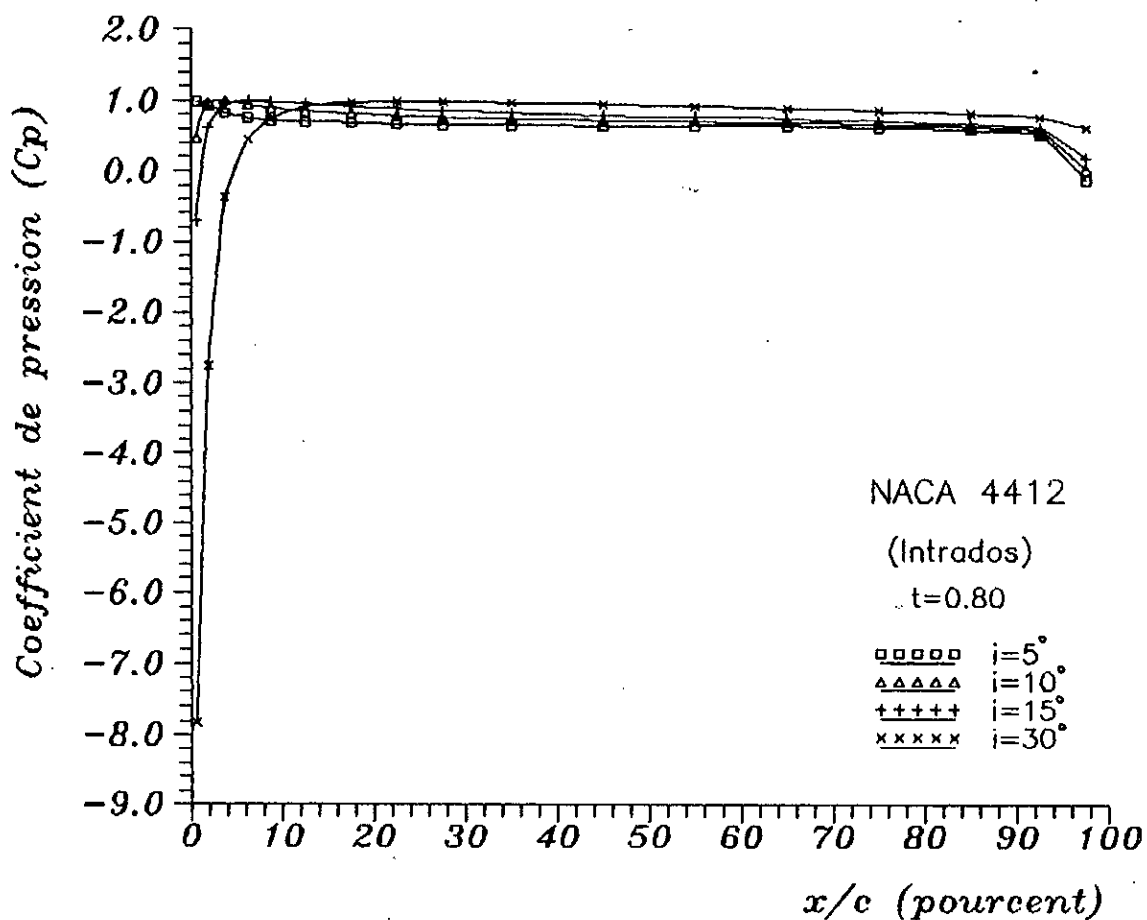




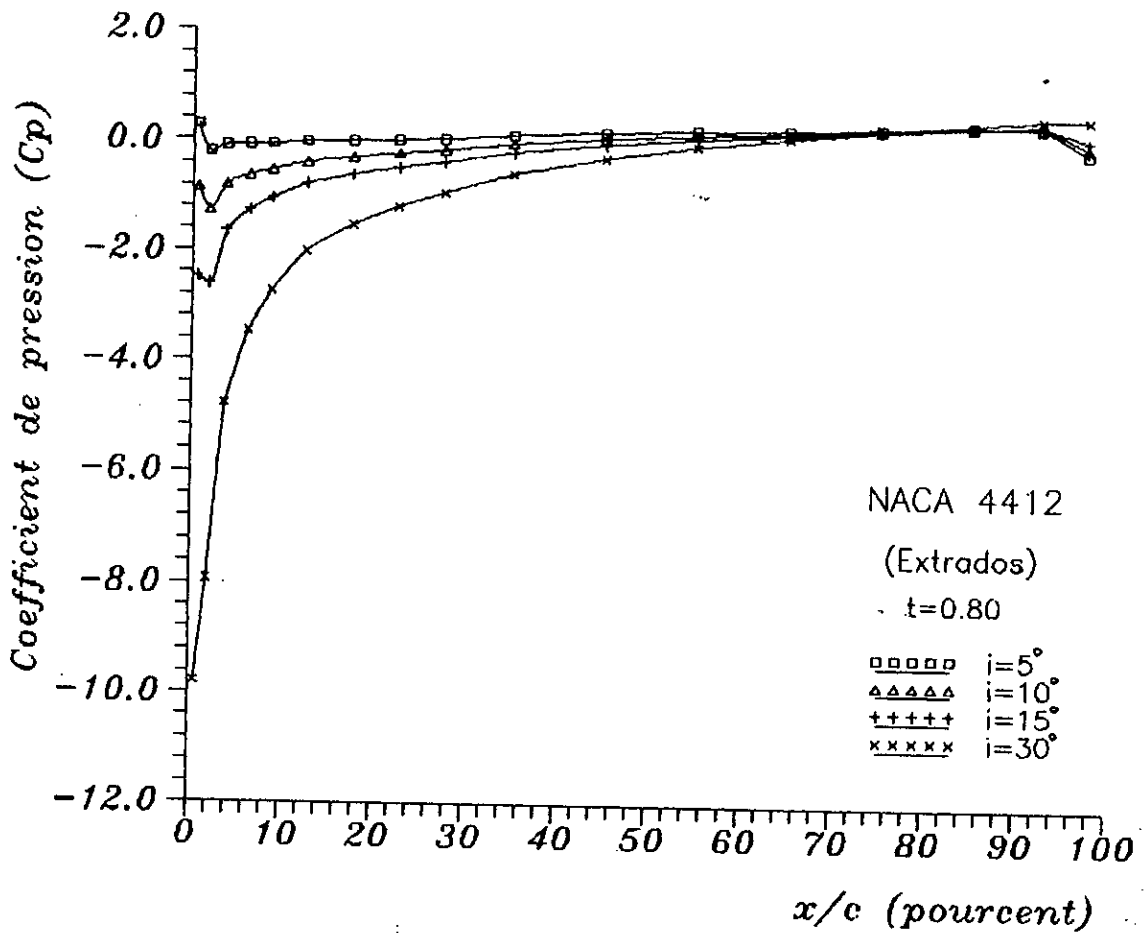




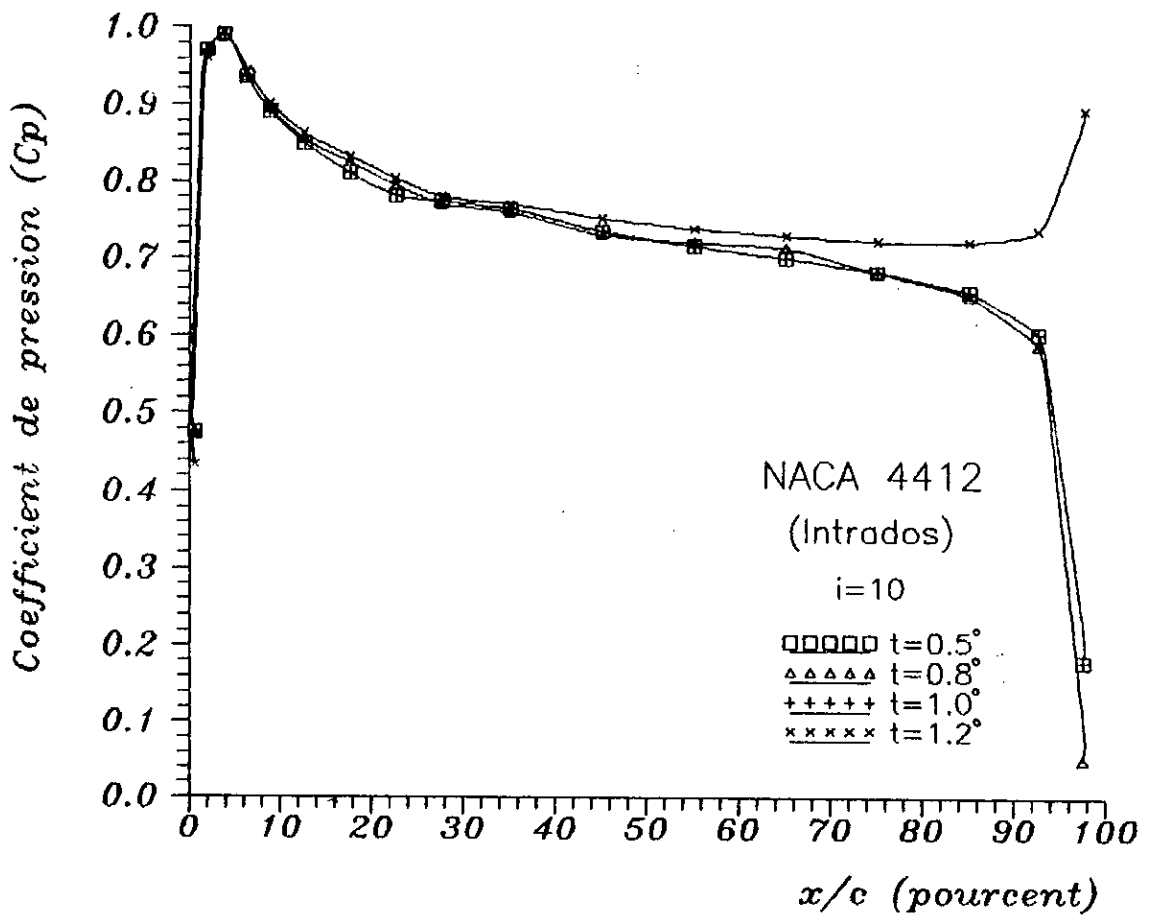




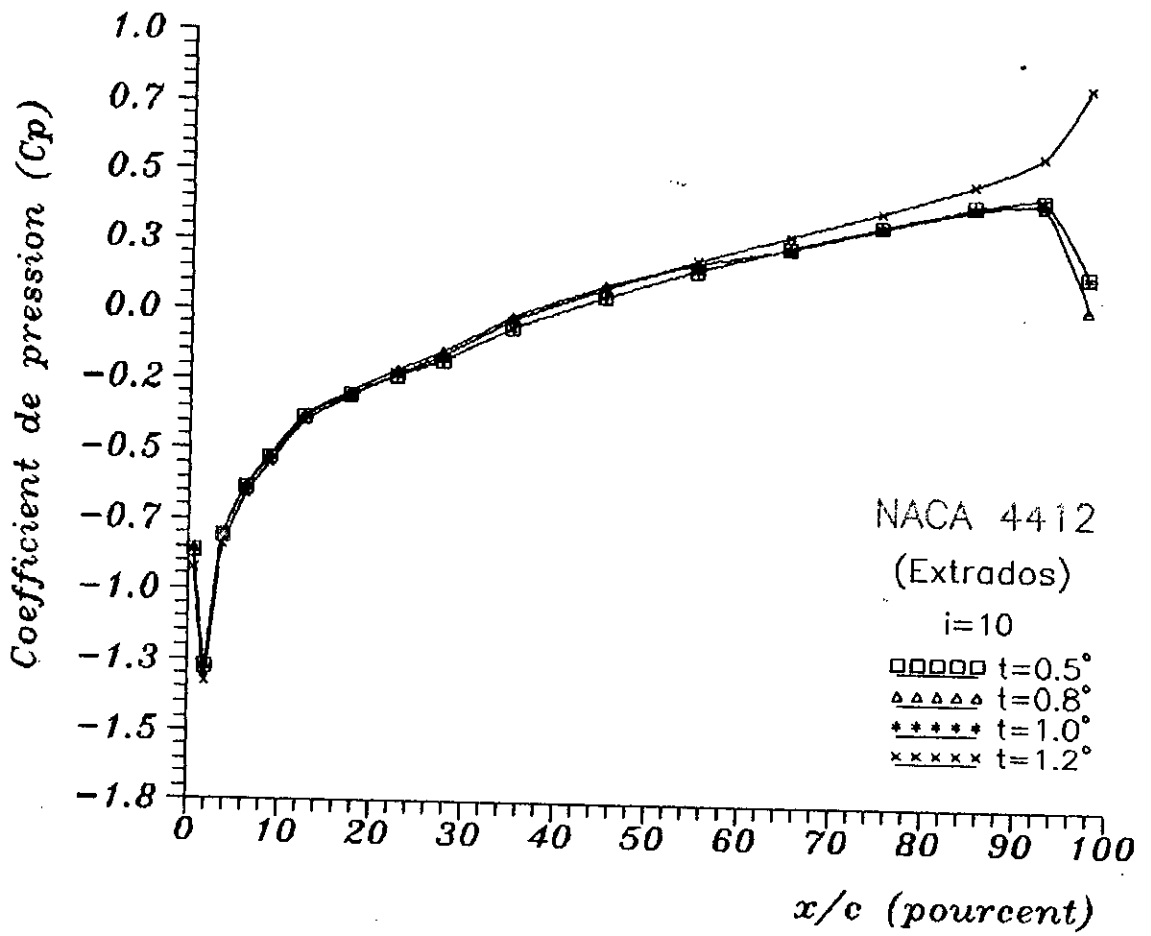
*Influence de l'angle  
d'incidence i*



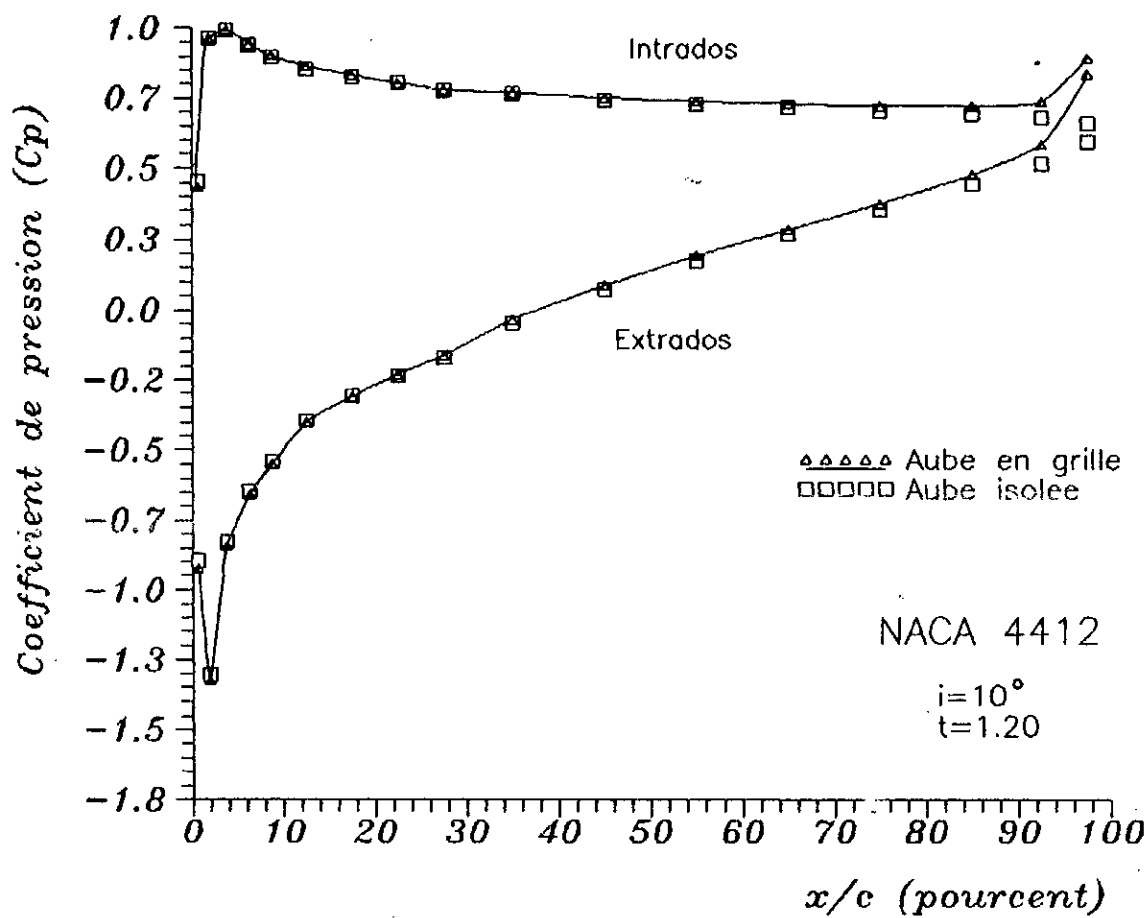
*Influence de l'angle  
d'incidence i*

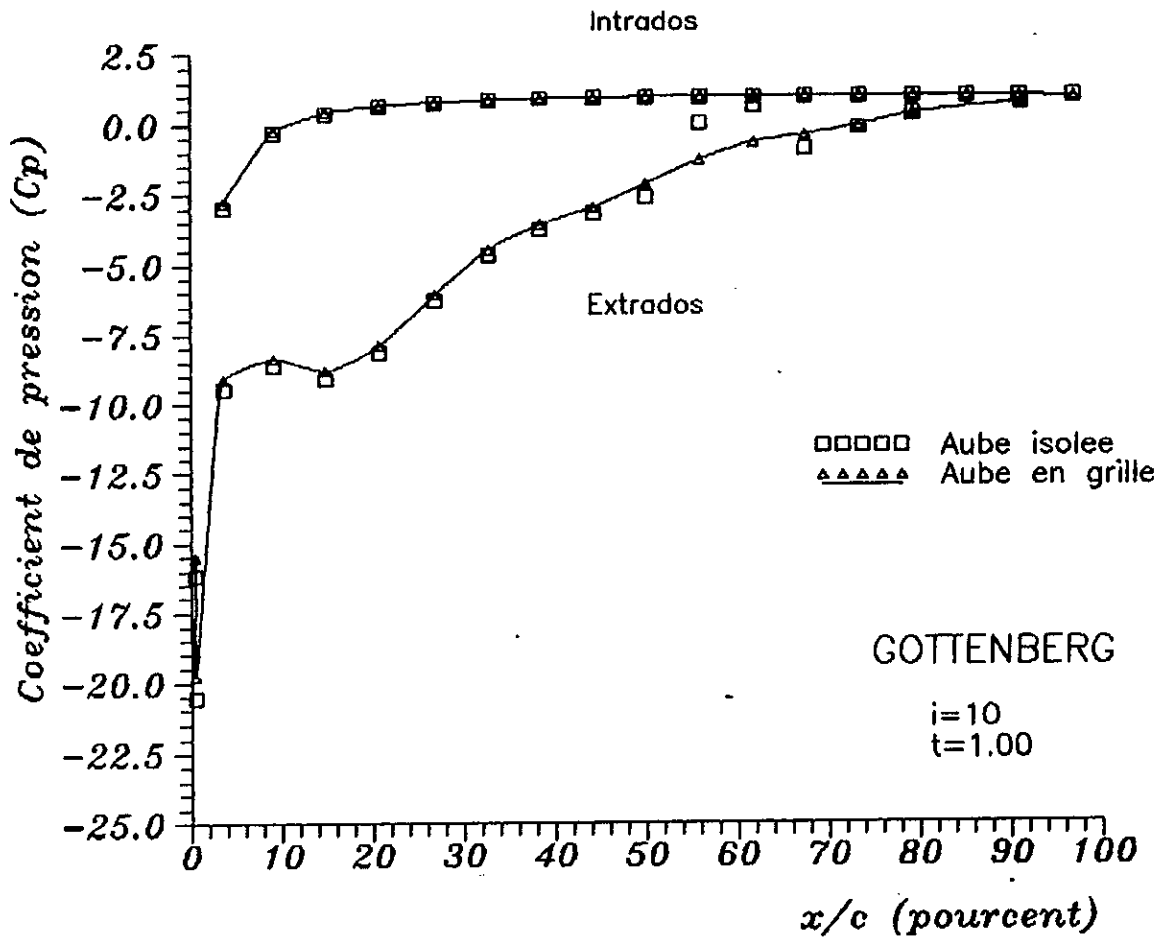


*Influence du pas relatif  $t$*



*Influence du pas relatif t*





## **CONCLUSION**



Le but fixé n'a été atteint qu'en partie, car faute de temps nous n'avons pu obtenir les résultats du mode semi-inverse.

Néanmoins, nous avons pu déterminer le profil des vitesses autour des aubes isolées ou en grilles à partir de la connaissance d'une vitesse infinie amont (écoulement uniforme) et de la géométrie de l'obstacle.

Un résultat intéressant est celui trouvé lorsque, nous avons varié le pas inter-aubes  $t$  en calcul direct.

En effet nous avons vu qu'à partir d'une certaine valeur de ce pas  $t$  (propre à chaque profil), le calcul direct en grille (aube à aube) serait similaire à un calcul autour des profils isolés.

Ceci peut être exploité pour un calcul inverse autour de profils isolés et en grilles.

Nous tenons à présenter quelques suggestions en vue de la continuation de ce travail.

- Essayer de trouver une solution qui permettrait de déterminer les vitesses aux points du bord d'attaque et du bord de fuite en ce qui concerne la méthode des singularités, car telle qu'elle est présentée la vitesse en ces points n'est pas calculée.
- Il serait intéressant dans la mesure du possible, de résoudre numériquement les deux problèmes Direct et Inverse moyennant n'importe quel modèle, en vue de pouvoir traiter le problème d'optimisation de profils (profil répondant à telle ou telle contrainte).

## REFERENCES

- 
- [1] I.H.ABBOTT , A.E.VON DOENHOFF  
Theory of wing sections , including a summary of airfoil data .  
Dover publications,inc . NEW YORK , 1949
- [2] R.COMOLET  
Mécanique des grilles d'aubes planes .  
Bulletin de la direction des études  
et recherches N°2 , 1974
- [3] O.FUZY  
Employment of the singularity carrier auxiliary curve  
for designing airfoil cascades  
Dept.of Hydraulic Machinery ,Budapest
- [4] M.A.GUELLATI  
Contribution au calcul de profils d'aubages par la  
méthode inverse .  
Ecole Nationale Polytechnique d'Alger , 1991
- [5] M.HART , S.WHITEHEAD  
A design method for two-dimensional cascades of  
turbomachinery blades .  
International journal of numerical methods in fluids ,  
1987
- [6] B.MAHFOUD , M.AIT-TALEB  
Couplage, calcul de couche limite - méthode inverse .  
Ecole Nationale Polytechnique d'Alger , 1992
- [7] G.MEAUZE  
Méthode de calcul aérodynamique inverse pseudo-  
instationnaire .  
La Recherche Aérospatiale , 1980
- [8] H.MITON  
Proprieties of a space wise periodic flow .  
Application to flow computation design for blade  
cascades  
Institut de Mécanique des Fluides de Marseille , 1986

- [9] H.MITON , H.SANKALE  
Méthode inverse de calcul de profils d'aubages  
Projet et analyse aérodynamique des turbomachines par  
méthodes numériques .  
Ecole Centrale de Lyon , 1984
- [10] N.NOUIDUA , R.NACEREDINE  
Etude comparative de la méthode des singularités  
distribuées appliquée aux écoulements autour  
d'obstacles .  
Ecole Nationale Polytechnique d'Alger , 1993
- [11] I.L.RYHMING  
Dynamique des fluides .  
Presses Polytechniques Normandes , 1985
- [12] J.P.VEUILLLOT  
Calcul de l'écoulement moyen dans une roue de  
turbomachine axiale  
La Recherche Aérospatiale , 1971

SOMMAIRE .....	01
Chapitre UN : Introduction et définitions .....	02
Chapitre DEUX :                    CALCUL DIRECT " Méthode des singularités "	
II.1 Généralités .....	05
II.2 Principe de la méthode des singularités .....	10
II.3 Effet de la portance des profils sur le chargement. 11	
II.3.1 Cas d'un chargement linéaire .....	11
II.3.2 Développement de la méthode .....	12
II.3.2.1 Distribution linéaire de vortex .....	12
II.3.2.2 Distribution linéaire de sources .....	16
II.4 Calcul des paramètres de l'écoulement .....	18
II.4.1 Calcul de la vitesse tangentielle .....	18
II.4.2 Calcul du coefficient de pression .....	18
II.4.3 Calcul de la fonction de courant .....	19
II.4.4 Trace des lignes de courant .....	20
II.5 Analyse de l'écoulement dans une grille d'aubes ...	22
II.6 Résolution numérique .....	23
Chapitre TROIS :                    CALCUL INVERSE " Modèle de H.MITON "	
III. Présentation du modèle .....	24
III.I.1 Hypothèses et équations du mouvement .....	24
III.I.2 Périodicité de l'écoulement suivant la direction Y .....	26
III.I.3 Calcul de l'écoulement moyen .....	27
III.I.4 Calcul des harmoniques d'ordre supérieur .....	28
III.I.5 Modélisation de l'obstacle .....	33
III.I.6 Application pour un calcul en grille d'aubes ...	37
III.I.6.1 Condition de glissement .....	37
III.I.7 Traitement du bord d'attaque et du bord de fuite .....	40
III.II.1 Résolution numérique de la méthode en mode direct .....	42
III.III.1 Utilisation de la méthode en mode inverse ....	44
III.III.1.1 Résolution en mode inverse 1 .....	44
III.III.1.2 Résolution numérique en mode inverse 2 .....	45

---

Chapitre QUATRE :	RESULTATS	
Validation de la méthode .....		50
Présentation des résultats .....		51
CONCLUSION .....		70
REFERENCES .....		71