

وزارة التربية الوطنية  
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT *hydraulique*

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE - المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# PROJET DE FIN D'ETUDES

## SUJET

INVESTIGATION EN  
CALCUL  
DYNAMIQUE DES STRUCTURES  
PAR LA M.E.F

*application aux barrages*

Proposé par :

O. BELHADJ

Etudié par :

M.S.SI ABDERRAHMANE

M.A.ATMANE

Dirigé par

O. BELHADJ

PROMOTION

93-94

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# ERRATA

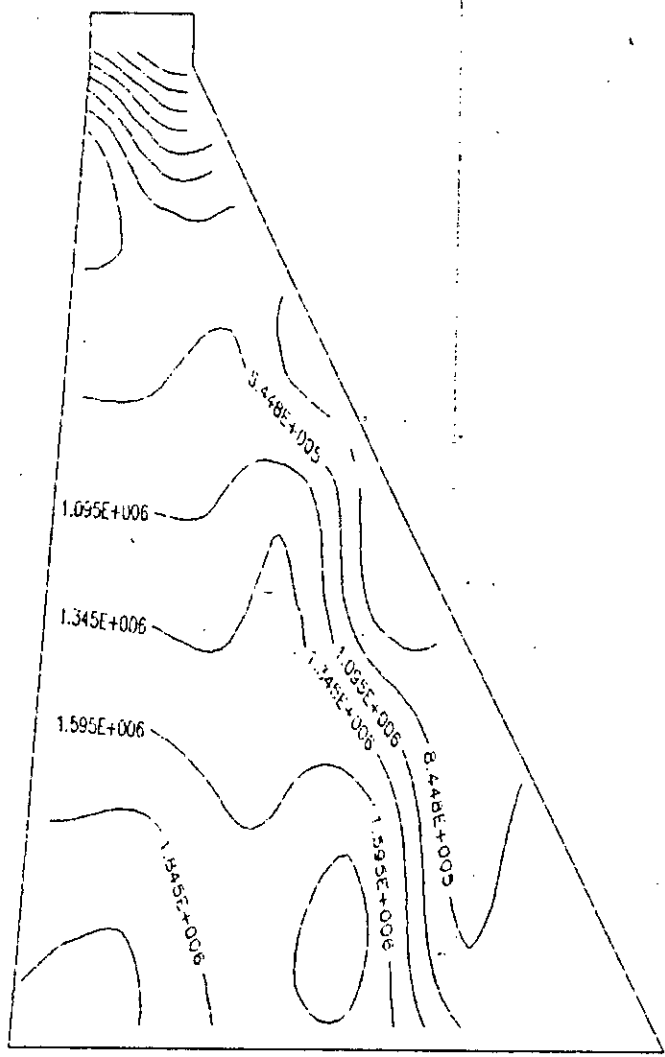
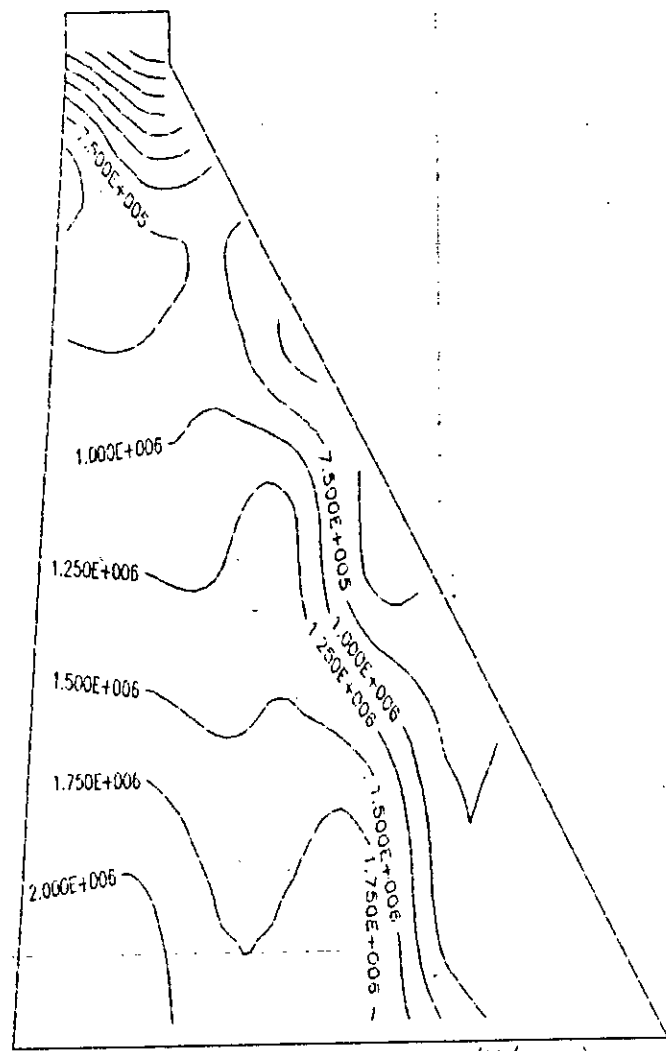


fig 2.2. 1B

courbe d'isocisaillement taux max (N/m\*m)  
cas de retenue vide avec seisme a 45 degres  
en deformation plane



- fig 2.2.15

courbe d'isocisaillement taux max (N/m\*m)  
cas de retenue pleine avec seisme a 45 degres  
en deformation plane

## Bibliographie :

10. Calcul des barrages en béton par la MEF
  - . Thèse d'ingénieur encadrée par M<sup>lle</sup> Zérfa
  - . Fait par : D. Chouaki
  - . Département : Hydraulique.
  
11. Analyse des barrages poids par la MEF
  - . Thèse d'ingénieur encadrée par M<sup>c</sup> O. Belhadj
  - . Fait par : Y. Amitouche
  - S. Messaoudene
  - M. Hamadane
  - . Département : Génie Civil - USTHB 1992 -

Page 4 :

$$Q = \frac{P}{g} \cdot \gamma \Rightarrow Q = P \cdot a$$

$\gamma$  : accélération sismique.

$a$  : coefficient d'accélération sismique =  $\frac{\gamma}{g}$

. Ligne 16 : de pression  $p_g$ .

Page 10 :

$\frac{\delta^1}{\delta^1 x}$  : Ce symbole veut dire dérivée première  $\Rightarrow \frac{\delta}{\delta x}$

Page 14 :

Méthode de Pigeaud en plus.

Page 21 :

3/  $\sigma_{comp} \leq \sigma_{lim} = (40 \div 50) \text{ kg/cm}^2$ , et peuvent être augmentés jusqu'à 25% de leur valeur  $\Rightarrow$  On peut obtenir des bétons pouvant résister :

$$\sigma_{comp} \leq \sigma_{lim} (52 \div 63) \text{ kg/cm}^2$$

Page 63 :

L'application a été faite pour le cas statique.

Page 64 :

L'axe des déplacements débute à  $4,00 \cdot \frac{1}{10} \text{ m.m}$

Page 93 :

Réponse de la structure à une excitation harmonique :  
second paragraphe : "Les figures... on peut remarquer la dominance (au lieu de faiblesse)..."

Page 94 :

Les courbes de convergence représentées sont celles d'un exemple non cité dans la thèse.

REMERCIEMENT

- Nous remercions notre manager monsieur **Benabderrahmane Lamri**, ainsi que monsieur **Cherrouf Zoheir** et tout le personnel du laboratoire informatique du  
H.C.R Cheraga.

- Nous tenons aussi à remercier toutes les personnes qui ont contribuées à  
l'élaboration de notre mémoire.

dedicaces

Au début mon pere m'accompagna, pour ma premiere rentree  
scolaire, apres deux ans, ma mere me corrigea pour une "dame souris "  
mal apprise, apres cela, c'était au tour des tables de  
multiplications, du calcul mental, du calcul en general, sans oublier la  
dictee

pour mon pere, mon exemple d'amour, de fierte, et de bonte  
a ma mere, qui nous a tous aide et si bien cheri  
a mon grand pere, qui etait la pour mes premiers pas  
a mon frere Samir, qui a tant muri  
a mon frere Abdenour, qui sait si bien aimer  
a ma soeur Naouel, qui a tant grandie  
a ma soeur Malika, qui sait si bien donner  
a Mohamed Kamel, le plus beau de la famille  
je dedie ce modeste travail

je voudrais dire aussi, que lorsqu'on empreinte si souvent les chemins  
serpentes de la vie, on retrouve, meme dans les rues les plus sombres  
de la misere humaine, des fils de lumiere des bout de lanternes, ces  
lumieres ou ces personnes, se consomment pour nous rendre le chemin  
moin penible, surtout moin abrut  
alors

a Mohamed Sghir, disparu une nuit d'ete  
a Lamine Tibourtine, disparu la meme annee une nuit d'automne  
a Kassimi messoud  
a Belhimer bilal  
a Chenak fateh  
a Cherrouk zoheir  
a Soufari ali  
a Sayah kamel  
a toutes les personnes qui m'ont fait decouvrir, le plus petit  
sentiment de bonheur je dedie ce modeste travail

*L'etranger*



## Résumé

C'est dans le but de prévoir le comportement des barrages aux sollicitations Dynamiques que ce travail a été amorcé, deux aspects l'ont donc dominés: La Modélisation par éléments finis avec utilisation d'un modèle qui n'est pas courant (élément à 24 degrés de liberté) et la Recherche des caractéristiques Dynamiques portant éventuellement informations sur les réponses de telles structures.

En plus de l'étude, a été élaboré un programme de calcul pour des configurations choisies.

## Abstract

We have to set a programm in order to study gravity dams' internal stability in static and dynamic fields and also in elastic phasis.

## ملخص

من مهام المهندس التنبأ العقلا في لردود بعض المنشئات (السدود بوجه خاص) بفعل قوى ثابتة خلال الزمن أو لا. لهذا الغرض، قدّم هذا العمل ملخصاً للطرق الأساسية التي تسمح بدراسات مثل هذه مقسمة إلى طريقة العناصر المنتهية لتمثيل الإنجاز وطريقة التواضع الخطي لتمثيل الرّة وتغيره مع الزمن.

## SOMMAIRE :

chapitre 1 :

### Méthode d'analyse des Barrages poids

Introduction :	1
I. Forces agissant sur un Barrage.....	1
1) <i>Cas statique</i> .....	1
2) <i>Cas dynamique (Pseudo-statique)</i> .....	2
II. Equilibre externe du Barrage.....	5
1) <i>Stabilité au renversement</i> .....	5
2) <i>Stabilité au glissement</i> .....	6
III. Equilibre interne du Barrage.....	7
1) <i>Calcul par la méthode d'élasticité</i>	
a) <i>Notion d'élasticité</i> .....	7
b) <i>Méthode dite de Pigeaud</i> .....	13
2) <i>Calcul par la méthode de Résistance des matériaux</i> .....	26
3) <i>Calcul par la méthode des éléments finis</i> .....	28

## CHAPITRE 2 :

### Méthodes des éléments finis : Formulation et application

I - Introduction .....	29
II - Bases et principes :	
II - 1 - <i>L'interpolation</i> .....	29
II - 2- <i>La formulation isoparamétrique</i> .....	30
II - 3- <i>Les formulations intégrales</i> .....	31
III - Application aux structures :	
III - 1 - <i>Type d'élément choisi</i> .....	32
III - 2 - <i>Opérations générales</i> .....	32
* <i>Constructions des fonctions d'interpolation</i> .....	33
* <i>Construction des opérateurs de déviation</i> .....	33
* <i>Passage élément réel. élément de référence</i> .....	33'

**IV - Adaptation numérique :**

IV -1 - *L'intégration numérique : méthode de Gauss...*35

IV - 2 - *L'assemblage.....*36

IV - 3 - *Le stockage.....*36

V - Description du programme de calcul statique.....36

**CHAPITRE 3:**

**Méthodes de calcul dynamique : présentation et application**

Introduction.....42

- historique du calcul dynamique.....42

**I - Formulations générales des équations :**

- *Modélisation d'un système simple.....*44

- *Calcul des termes d'inertie.....*45

**II- La méthode de résolutions :**

**II.1- Intégration directe :**

II.1.1 - *Méthode des éléments finis .....*46

II.1.2 - *Méthode d'intégration pas à pas .....*46

**II.2 - La superposition modale :**

**III - Les problèmes aux valeurs propres .**

III.1 - *Notions de modes, valeurs et vecteurs propres .....*51

III.2 - *Méthode de résolution aux valeurs propres .....*51

III.2.1 - *Méthode de Jacobi.....*52

III.2.2 - *Itération inverse.....*54

III.2.3 - *Calcul direct des zeros du det.....*55

III.2.4 - *Séquence de STRUM.....*55

**IV – Application aux calculs des grands systèmes : .....56**

**IV.1- *Méthode du sous espace* .....57**

**IV.2 – *Description du programme calcul dynamique*.....58**

## **CHAPITRE 4 :**

**Validation et Applications**

**CONCLUSION**

## INTRODUCTION

**Reproduire puis Prévoir** : c'est ce dont doit être capable un esprit rationnel pour répondre aux besoins du développement dans les limites sécuritaires et économiques. C'est dans ce contexte que sont faites les études des structures sensibles ou vitales telles les Barrages qui nécessitent outre les parties statiques (entreprise d'une façon classique) des modules dynamiques et c'est là précisément que doit s'étaler la magnificence de l'art de l'ingénieur car il aura à traiter des variables dans le temps; la dimension la plus redoutable et la moins claire.

C'est avec un esprit investigateur qu'a été entrepris ce travail pour lever l'ombre sur une partie minime de l'étude des structures ,avec comme première lanterne de reproduction la **méthode des éléments finis** qui permet une modélisation des grandeurs caractéristiques moyennant certaines hypothèses sur les types des liaisons internes, une partie de ce travail est consacrée à la méthode ,son développement ainsi que certaines recommandations concernant son utilisation .

Notre seconde lanterne ;celle de la prévision sera un ensemble de méthodes utilisant la **superposition modale** qui permet après détermination d' autres caractéristiques (Dynamiques celles là ) d'estimer les réponses des structures à certains signaux simulant des excitations externes.

# CHAPITRE : 1

## Methodes d'analyse des Barrages poids

## Introduction :

On a appris, depuis le temps, à représenter pour un corps donné les forces qui agissent sur ce dernier, donc à exprimer ces forces sous forme de vecteurs et manipuler ces vecteurs de façon à trouver des équations qui puissent donner la valeur exacte de ces forces, en fonction des caractéristiques du corps.

Dans ce chapitre , nous allons définir les forces qui agissent sur un Barrage en béton , étudier sa stabilité , et présenter les méthodes d'auscultation internes à savoir méthode de R.D.M , méthode d'élasticité , méthode des éléments finis .

## I. Forces agissant sur un barrage :

### I.1/ *Cas statique :*

Deux forces sont prédominantes dans les barrages poids, et elles sont :

- a) le poids propre du barrage
- b) la poussée de l'eau.

#### a) Poids propre :

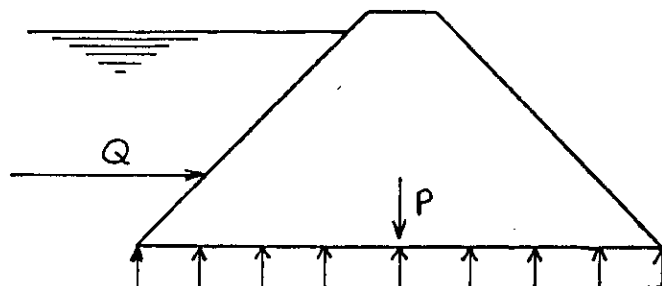
Le poids propre du barrage dépend essentiellement de la qualité du béton mis en place (compacité , poids spécifique du grains solide , et de la dimension des agregats, ...)

#### b) Poussée de l'eau:

b.1 – Elle s'exerce sur le parement en contact avec l'eau , et est perpendiculaire aux surfaces de contact .

b.2 – S'il y a risque d'envasement , on y remédie par le changement de la masse volumique de l'eau , par la masse volumique de l'eau chargée ( matériaux en suspension ) ou en ajoutant à la poussée de l'eau une poussée de terre ( la vase en depot ) .

b.3 – On doit ajouter à ces deux forces , la force de sous pression qui est une force de soulèvement .

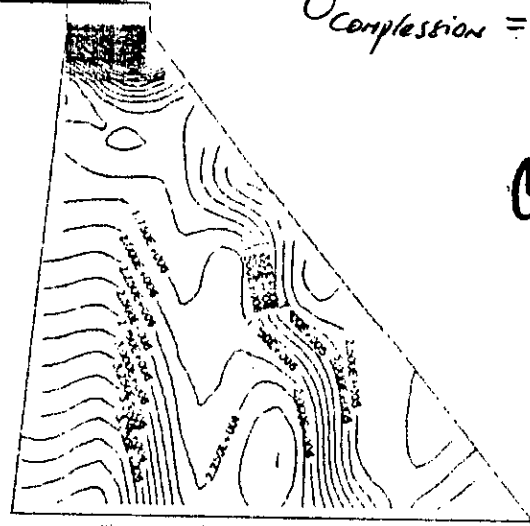


Sol de fondation considéré  
 Basalte

$\bar{\sigma}_{\text{compression}} = 168.359 \text{ MPa}$

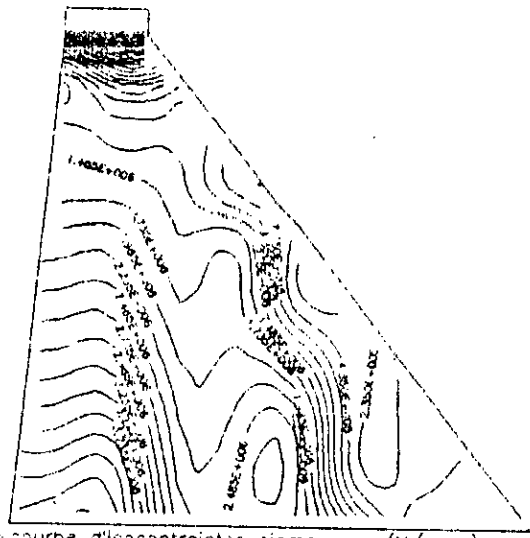
$\Delta_{\text{max}} = 4,75 \times 10^6 \text{ N/m}^2$

cas 2



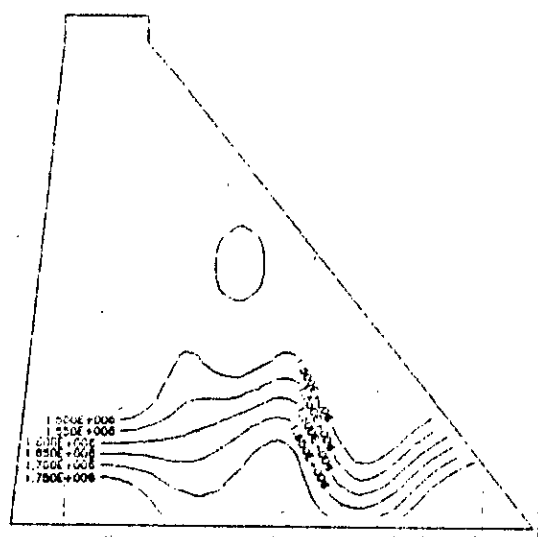
courbe d'isocontraintes sigma max (N/m².m)  
 cas de retenue vide avec seisme horizontal  
 en deformation plane

$\Delta_{\text{max}} = 4,735 \times 10^6 \text{ N/m}^2$



courbe d'isocontraintes sigma max (N/m².m)  
 cas de retenue vide avec seisme a 45 degres  
 en deformation plane

$\Delta_{\text{max}} = 1,710 \times 10^6 \text{ N/m}^2$



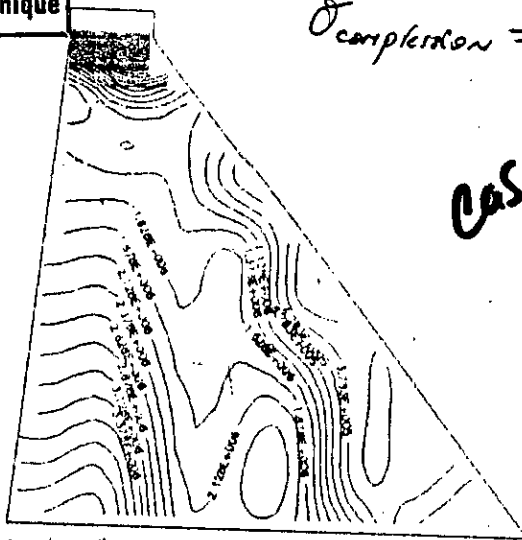
courbe d'isocontraintes sigma max (N/m².m)  
 cas de retenue vide avec seisme verticale  
 en deformation plane



Sol de fondation considéré  
 Basalte

$\bar{\sigma}_{compression} = 168.359 \text{ MPa}$

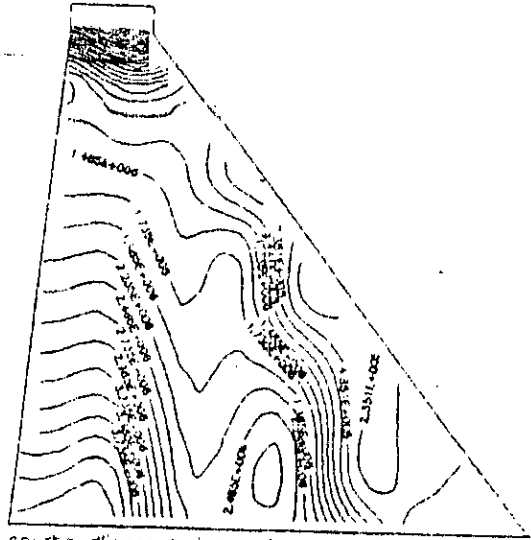
$\sigma_{max} = 4,75 \times 10^6 \text{ N/m}^2$



cas 2

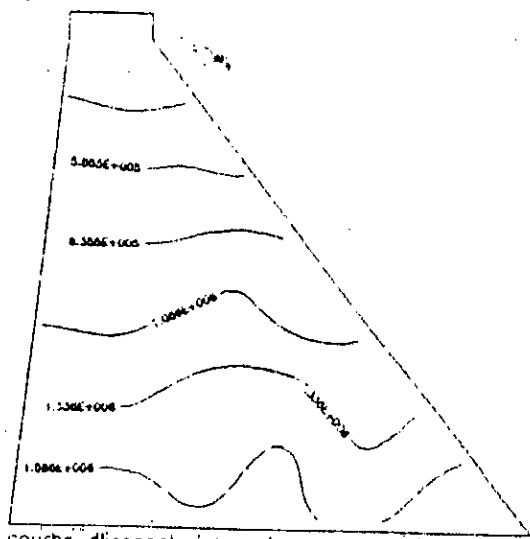
courbe d'isocontraintes sigma max (N/m²)  
 cas de retenue pleine avec seisme horizontal  
 en deformation plane

$\sigma_{max} = 4,5 \times 10^6 \text{ N/m}^2$



courbe d'isocontraintes sigma max (N/m²)  
 cas de retenue pleine avec seisme a 45 degres  
 en deformation plane

$\sigma_{max} = 1,58 \times 10^6 \text{ N/m}^2$



courbe d'isocontraintes sigma max (N/m²)  
 cas de retenue pleine avec seisme verticale  
 en deformation plane

12

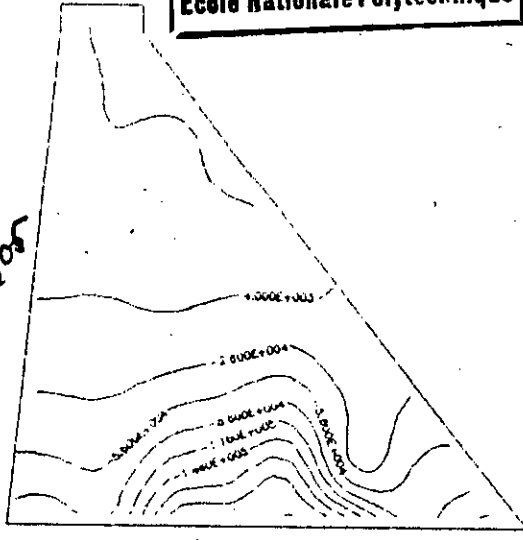
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

Sol de fondation considéré:  
Balsalte

$$\bar{\sigma}_{traction} = 7.7 \text{ MPa}$$

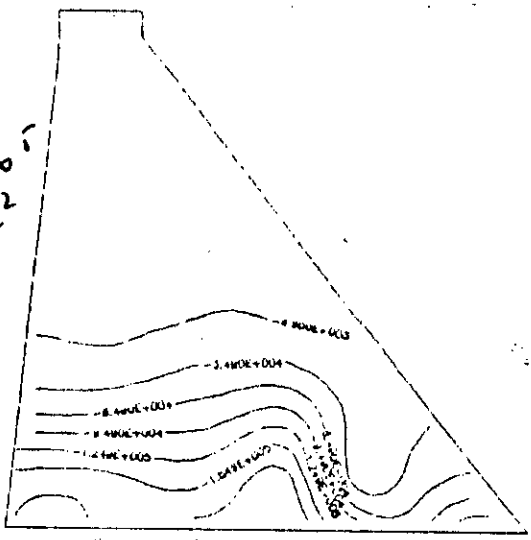
CAS 1

$$\sigma_{max} = -1,98 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$



courbe d'isocontraintes sigma max (N/m²)  
cas de retenue vide sans seisme et sans vase  
en deformation plane

$$\sigma_{max} = -2,04 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$



courbe d'isocontraintes sigma max (N/m²)  
cas de retenue vide sans seisme et avec vase  
en deformation plane

## **I.2 - Cas dynamique :**

On parle de cas dynamique , lorsque la structure et le réservoir d'eau sont soumis à un mouvement ( tremblement de Terre , ... ) .

Les tremblements de Terre engendrent donc des forces supplémentaires, dues aux accélérations de ce dernier , ces forces ne sont que passageres (durée du séisme), mais leurs dégâts sont importants.

Les accelerations d'intensités variables développées se propagent dans toutes les directions .

Les composantes verticales des secousses ne modifient pas les conditions de stabilité au glissement et au renversement de maniere notable , mais les composantes horizontales de secousses provoquent une augmentation des forces horizontales , sans augmentation des forces verticales ( risque de glissement ) .

La masse du Barrage est influencée dans ce cas , par les mouvements de la masse du reservoir d'eau et la masse de fondation . On parlera alors de l'interaction sol-structure , l'interaction fluide-structure et de l'action sur la masse du Barrage .

### **1\* Interaction sol - structure: [1 1]**

Lors d'un séisme, les perturbations du mouvement du sol modifient la réponse de la structure d'ou l'analyse complète d'Interaction sol-structure . celle-ci doit prendre en considération :

- le comportement non linéaire du sol ;
- le schéma complexe de propagation des ondes engendrant le mouvement ;
- l'Interaction avec les structures avoisinantes.

On remarque bien qu'une pareille étude nécessite un travail de recherche plus poussé, c'est pour cela que certaines simplifications sont effectuées, ( la nature du sol de fondation , les ondes incidentes , ... ) .

## 2\* Interaction fluide - structure : [1 1]

Dans cette étude, une réaction de l'eau de la retenue contre laquelle le barrage bute dans son déplacement vers l'amont vient s'ajouter, et les équations solutions du couplage hydrodynamique (fluide - structure) sont exprimées sous forme de déplacements dans la structure .

On notera plusieurs formulations , mais on gardera la formulation de westergoard.

### a/ Formulation de westergoard: [1 1] [1 2]

*Monsieur Westergoard* calcula la répartition des pressions sur un écran vertical limitant un réservoir semi fini, de profondeur constante dans l'hypothèse d'un mouvement horizontal harmonique de l'écran de période T.

Il trouva la solution suivante :

$$P(y) = 7/8 \alpha \gamma_w (h - y)^{1/2}$$

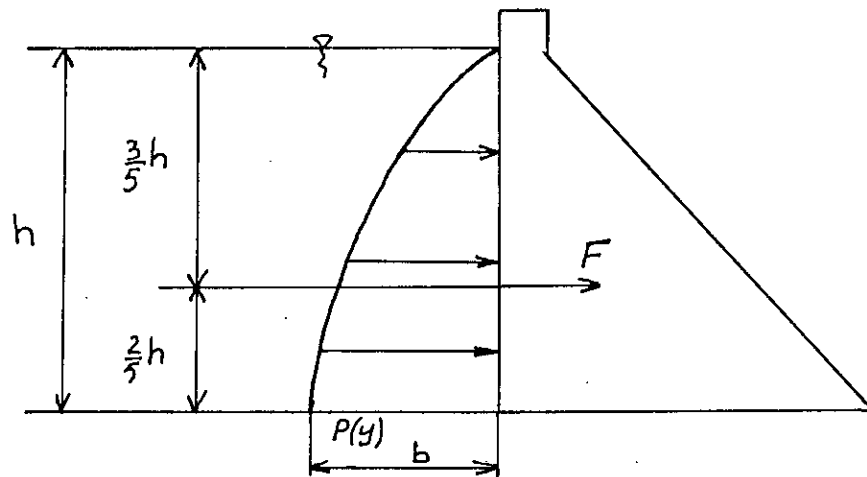
$$F = 7/12 \alpha \gamma_w h^2 .$$

D'où :

$\alpha$  : accélération sismique / accélération de la pesanteur .

H : hauteur de la retenue

y : hauteur d'eau entre le niveau de l'eau et un point submergé.



*Westergoard* suppose qu'une certaine partie de l'eau se déplace avec le barrage alors que le reste du réservoir reste inactif.

On peut avoir aussi la formule de ZANGAR qui prend en compte l'inclinaison du Parement amont d'un angle "  $\theta$  "

$$P(y) = 1/2 \alpha \gamma \omega h c_M [ y/n ( 2 - y/n ) + (y/n \{ 2 - y/n \} )^{1/2}]$$

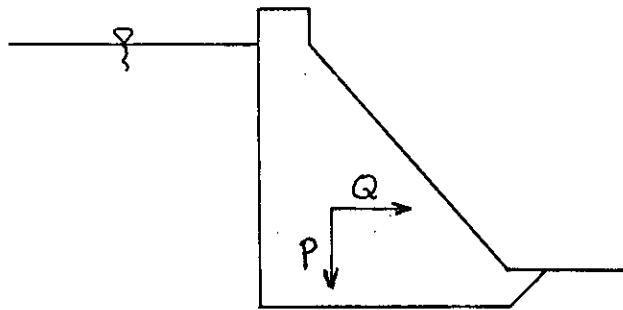
$C_M$  : Fonction de "O" par un abaque.

### 3\* Action sur la masse du barrage ou Force d'Inertie du barrage :

Le Tremblement de Terre provoque, l'apparition d'une force horizontale , dite force d'inertie de valeur :  $Q = a P$

ta : a : accélération du seisme.

P : Poids propre du barrage.



#### \*\*\*Remarque:

1/ Lorsqu'il y a un tremblement de Terre, le poids propre du barrage provoque sur le sol de fondation une variation de contraintes due à l'inertie du barrage, il faut s'attendre à une fissuration du rocher, et peut être même du béton.

Pour y remédier, il faut que les fondations soient plus profondes puisque les effets du tremblement de Terre diminuent rapidement en profondeur .

2/ Notons bien qu' au lieu des forces dynamiques qu'exercent les tremblements de terre, on a substitué ces dernières par des forces statiques équivalentes ( approches) produisant, dans le corps de l'ouvrage des contraintes de même grandeur que celles provoquées par les forces dynamiques. Cette substitution a toutefois , l'inconvénient de calculer l'ouvrage pour des forces supplémentaires permanentes alors qu'elles sont passagères et de courtes durées.

## II Stabilité externe des barrages poids :

### 1/ Introduction :

Le barrage poids comme son nom l'indique, résiste à la poussée de l'eau par son poids. Ce sont des barrages de grandes dimensions dont il faut vérifier la stabilité au renversement, et la stabilité au glissement.

### 2/ Définition :

La stabilité externe ou d'ensemble, des barrages poids, est l'étude de l'équilibre de ces ouvrages vis à vis des forces extérieures.

### 3/ Hypothèses :

- On se place dans les cas extrêmes.
- On calcule le barrage poids par tranches verticales d'épaisseur unité, supposées indépendantes les unes des autres.

### 4/ Stabilité au renversement : [1 2]

Forces :

- $Q = \delta Z^2/2$ . C'est l'aire du triangle de Pression  $\delta gZ$  (hydrostatique)
- $P$  : Poids propre du barrage  
 $P = \Delta m Z^2/2$        $m = \text{tg } B$  : Fruit avale.

c) Sous pression :

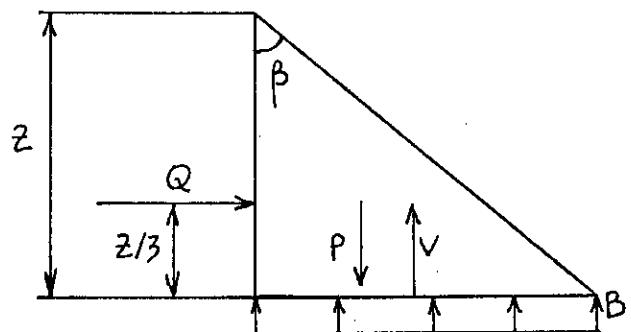
- On prend le cas le plus défavorable (sous pression uniforme).  $V = \delta m Z^2$

Si l'on calcule la somme des moments / B, nous aurons :

$$\sum M / B = 0 \quad (\text{dans le cas statique})$$

$$\implies M_p + M_v + M_Q = 0$$

$$\implies M_p - M_v - M_Q = 0.$$



On résumera cette équation dans le tableau suivant :

Forces	Intensité	Bras de levier	Moments de renversement	
Poussée Q	$\delta Z^2/2$	$Z/3$	$-\delta Z^3/6$	$\frac{Z^3 (\Delta M^2 - d/2)}{3}$
Poids P	$\Delta M Z^2/2$	$Z M Z/3$	$\Delta M^2 Z^3/3$	3
S Nulle	0	0	0	$\frac{Z^3(\Delta M^2 - \delta/2)}{3}$
P linéaire	$\delta M Z^2/2$	$2M Z/3$	$-\delta M^2 Z^3/3$	$Z^3(M^2[\Delta - \delta] - \delta/2)/3$
Maximale /3 uniforme	$\delta M Z^2$	$M Z/2$	$-\delta M^2 Z^3/2$	$Z^3[M^2 (D - 3 \delta/2) - \delta/2]$

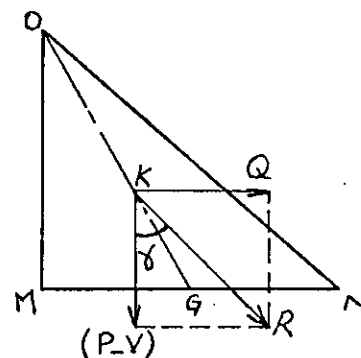
5/ Stabilité au glissement : [1 1] [1 2]

Si on réduit l'ensemble des forces extérieures au centre de gravité de la structure, nous aurons une résultante R qui aura pour composantes :

- a) suivant l'horizontale : Q
- b) suivant la verticale : P - V.

On a R qui fait un angle  $\alpha$  avec la verticale telle que :

$$\text{tg } \gamma = Q / (P - V)$$



Pour qu'il n'y ait pas glissement il faut que les forces, qui naissent du frottement des deux matières structure roche, soient supérieures aux forces de glissement.

==> l'angle de frottement > l'angle de glissement.

$$\begin{aligned} \implies & f = \text{tg } \varphi > \text{tg } \gamma \\ \implies & f > Q / (P - V). \quad (1) \end{aligned}$$

**\*\* Remarque :**

On admet un coefficient de frottement  $f = 0.75$  ( angle de frottement de  $37^\circ$  ) comme pour la maçonnerie .

### **III. Equilibre Interne du barrage:**

L'équilibre interne du barrage est une auscultation détaillée du corps du barrage vis à vis des sollicitations extérieures .

#### **1/ Calcul par la méthode d'élasticité .**

##### **Notion d'élasticité.**

#### **IV.1.1- Introduction:**

Un modèle élastique linéaire est caractérisé par la correspondance directe entre les déformations et les contraintes. Cette correspondance implique le caractère réversible de la déformation, autrement dit, un corps élastique revient à son état initial une fois déchargé.

La théorie de l'élasticité est une méthode directe de formulation des équations forces - déplacements.

Pour un solide soumis à un chargement donné, cette théorie a pour but l'étude des contraintes et déformations qui en résultent avec des hypothèses :

- Les déformations sont supposées petites .
- La loi de comportement reliant les contraintes et les déformations est linéaire.
- Le solide est élastique, homogène, isotrope ;

#### **III.1.2 - Equations gouvernantes :**

##### **III.1.2.1 - Equations d'équilibre :**

L'état de contrainte en un point du corps est défini par le tenseur de contrainte  $[\sigma]$  tel que :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$



Où :

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31}$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32}$$

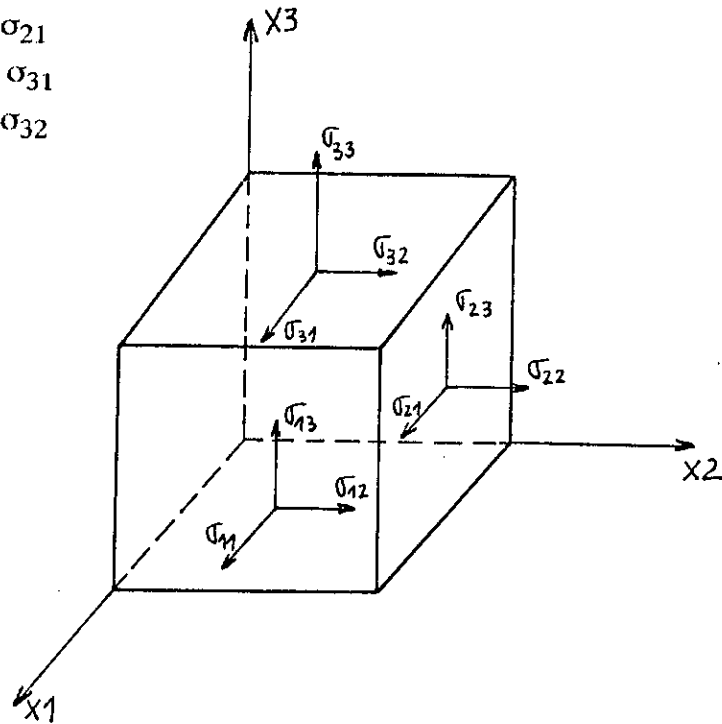


Fig - 1 tenseur de contrainte  $[\sigma]$

Les composantes de ce tenseur doivent satisfaire les équations d'équilibre, qui s'exprime, comme suit : ( en notation Indicielle )

$$\sigma_{j k,j} + b_k = 0 \text{ sur } \Omega \quad \begin{matrix} k = 1, \dots, 3 \\ j = 1, \dots, 3 \end{matrix}$$

Dans lesquelles :

$b_k$  : représente les composantes des forces volumiques suivant les directions k sur la frontière . Les équations d'équilibre sont satisfaites par les équations suivantes :

$$P_i = \sigma_{ij} n_j = P_i \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, 3 \\ j = 1, \dots, 3 \end{matrix}$$

Où n : sont les cosinus directeurs de la normale n par rapport à la direction x

P : forces surfaciques prescrites sur la frontière.

### III. 1.2.2 - Equations déformation - déplacements :

L'état de déformation  $[\epsilon]$  tel que :

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{21}$$

$$\epsilon_{13} = \epsilon_{31}$$

$$\epsilon_{23} = \epsilon_{32}$$

Les relations déformations - déplacements pour la théorie linéaire sont :

$$\epsilon_{ij} = 1/2 (U_{i,j} + U_{j,i}) \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, 3 \\ j = 1, \dots, 3 \end{array}$$

### III.1.2.3 - Equations de compatibilité :

Il existe des relations qui expriment les restrictions sur la forme des déformations pour que le système d'équations soit intégrable .

Ces conditions d'intégrabilité sont appelées conditions de compatibilité de déformation , elles sont exprimées par les relations suivantes :

$$2 \frac{\delta^2 \epsilon_{11}}{\delta^1 x_2 \delta^1 x_3} = \frac{\delta^1}{\delta^1 x_1} \left[ \frac{\delta^1 \gamma_{12}}{\delta^1 x_3} + \frac{\delta^1 \gamma_{13}}{\delta^1 x_2} - \frac{\delta^1 \gamma_{23}}{\delta^1 x_1} \right]$$

$$2 \frac{\delta^2 \epsilon_{22}}{\delta^1 x_1 \delta^1 x_2} = \frac{\delta^1}{\delta^1 x_2} \left[ \frac{\delta^1 \gamma_{23}}{\delta^1 x_1} + \frac{\delta^1 \gamma_{12}}{\delta^1 x_3} - \frac{\delta^1 \gamma_{13}}{\delta^1 x_2} \right]$$

$$2 \frac{\delta^2 \epsilon_{22}}{\delta^1 x_1 \delta^1 x_2} = \frac{\delta^1}{\delta^1 x_3} \left[ \frac{\delta^1 \gamma_{13}}{\delta^1 x_2} + \frac{\delta^1 \gamma_{23}}{\delta^1 x_1} - \frac{\delta^1 \gamma_{12}}{\delta^1 x_3} \right]$$

$$\frac{\delta^2 \gamma_{12}}{\delta^1 x_1 \delta^1 x_2} = \frac{\delta^2 \epsilon_{11}}{\delta^1 x_2} + \frac{\delta^2 \epsilon_{22}}{\delta^1 x_1}$$

$$\frac{\delta^2 \gamma_{23}}{\delta^1 x_1 \delta^1 x_2} = \frac{\delta^2 \epsilon_{22}}{\delta^1 x_3} + \frac{\delta^2 \epsilon_{33}}{\delta^1 x_1}$$

$$\frac{\delta^2 \gamma_{13}}{\delta^1 x_1 \delta^1 x_2} = \frac{\delta^2 \epsilon_{11}}{\delta^1 x_3} + \frac{\delta^2 \epsilon_{33}}{\delta^1 x_1}$$

d/dx : dérivée première

#### VI - 1-2-4- Relation contraintes -Déformation:

Les états de contraintes et de déformations sont reliés de la manière suivante :

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl}$$

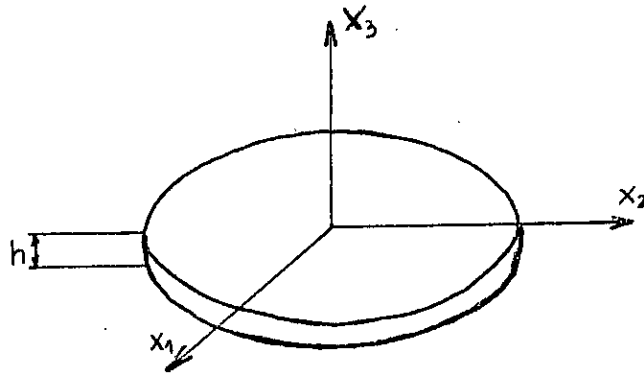
$D_{ijkl}$  : matrice d'élasticité

#### VI -1-3- Elasticité plane :

Les problèmes de la théorie d'élasticité sont simplifiés dans une large mesure lorsque les tensions ou les déformations sont toutes parallèles à un plan . On a affaire à des problèmes bidimensionnels .

##### VI-1-3-1- Etat de contraintes planes :

Considérons un cylindre de hauteur très petite par rapport aux dimensions dans le plan  $(x_1, x_2)$  (fig -2)



Le cylindre est chargé latéralement et indépendamment de l'axe  $x_3$ . Le chargement doit être parallèle au plan moyen et distribué symétriquement par rapport à celui-ci.  
Le modèle de contrainte plane ainsi obtenu convient bien aux plaques minces sollicitées dans leur plan. Les hypothèses de base de ce modèle sont :

$$\sigma_{33} = \sigma_{32} = \sigma_{31} = 0$$

Pour un matériau isotrope, la loi de *HOOKE* donne :

$$\varepsilon_{11} = \sigma_{11}/E - \nu \sigma_{22}/E$$

$$\varepsilon_{22} = -\nu \sigma_{11}/E + \sigma_{22}/E$$

$$\varepsilon_{12} = (1 + \nu) \sigma_{12}/E$$

D'où l'on tire les relations contraintes - déformations suivantes :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Les contraintes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$  sont indépendantes de  $X_3$ , de même les déplacements seront des fonctions de  $X_1$  et  $X_2$  seulement :

$$U_1 = U_1(X_1, X_2)$$

$$U_2 = U_2(X_1, X_2)$$

Ces déplacements sont supposés être constants sur toute l'épaisseur du cylindre.

L'effet de *POISSON* donne naissance à un déplacement  $U$  qui peut être calculé à partir de la relation contraintes-déformations.

Pour  $\varepsilon_{33}$  :

$$\varepsilon_{33} = \delta^1 U_3 / \delta^1 x_3 = -\nu \sigma_{11}/E - \nu \sigma_{22}/E = -\nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})/E$$

#### IV.1.3.2 – Etat de déformation plane :

Considérons un cylindre élancé dont la dimension suivant la direction  $x$  est grande par rapport aux deux autres dans le plan  $x_1 x_2$  (fig 3).

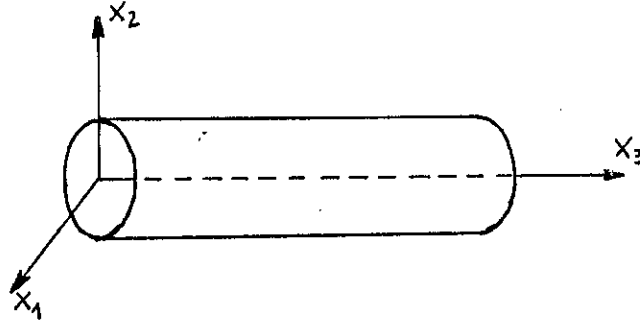


Fig - 3 Etat de déformation plane.

Ce modèle est considéré comme étant un cas de déformation plane.

Les hypothèses de base se traduisent par les relations :

$$\epsilon_{33} = \epsilon_{31} = \epsilon_{32} = 0$$

Les déplacements dans le plan  $(x_1, x_2)$  sont indépendants de  $x_3$  i.e :

$$U_1 = U_1(x_1, x_2)$$

$$U_2 = U_2(x_1, x_2)$$

Il faut noter que la contrainte est telle que  $\sigma_{33} \neq 0$ , elle peut être déterminée à partir de la loi de *HOOKE* :

$$\epsilon_{33} = (1 + \nu) \sigma_{33} / E - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) / E = 0$$

D'où : 
$$\sigma_{33} = \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22}) / E$$

De la même manière qu'en contrainte plane, on établit les relations contraintes-déformations en utilisant les équations suivantes :

$$\epsilon_{11} = \sigma_{11} / E - \nu \sigma_{22} / E - \nu \sigma_{33} / E$$

$$\epsilon_{22} = -\nu \sigma_{11} / E + \sigma_{22} / E - \nu \sigma_{33} / E$$

$$\epsilon_{12} = (1 + \nu) \sigma_{12} / E$$

On obtient donc :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix}$$

**\*\*Remarque :**

On peut passer aisément des formules relatives aux déformations planes, aux formules relatives aux contraintes planes, en remplaçant le module de *YOUNG* par  $E = E(1 - \nu^2)$  et le coefficient de *POISSON* par :

$$\nu = \nu / (1 + \nu)$$

**Méthode de Pigeaud :** [ 1 2 ] [ 1 3 ]

Découpons du corps du barrage un volume élémentaire de dimensions unités.

Les forces qui s'appliquent sur ce cube de volume unitaire sont :

\* Sur ces faces opposées // à OX

On a :

Effort normal : +/-  $\sigma_y$

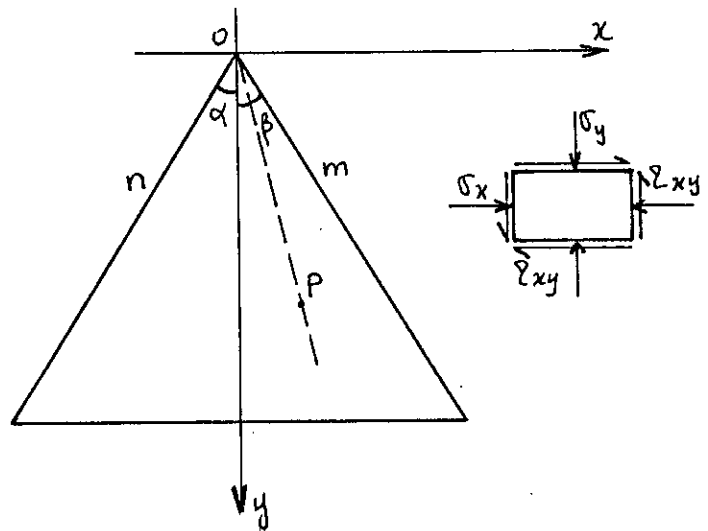
Effort tangentiel : +/-  $\tau_{xy}$

\*\* Sur ces faces opposées // à OY

Effort normal : +/-  $\sigma_x$

Effort tangentiel : +/-  $\tau_{xy}$

(voir schéma)



Ecrivons maintenant le bilan des forces internes // à ce volume élémentaire, on verra que  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  équilibreront la résultante des forces de volumes de composantes x et y.

$$\text{Alors : } \frac{\delta \sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta y} = x$$

$$\frac{\delta Z_{xy}}{\delta x} + \frac{\delta \sigma_y}{\delta y} = y$$

Par ailleurs on sait que la composante des forces de volume dans la direction  $x$  est nulle et sa composante par rapport à  $y$  n'est autre que la masse volumique du béton .

On aura :

$$\frac{\delta \sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\delta \tau_{xy}}{\delta x} + \frac{\delta \sigma_y}{\delta y} = \Delta \quad (2)$$

Méthode de Pigeaud :

Ajoutant au système d'équation précédent , la condition d'intégrabilité des déformations , qui s'exprime , la densité  $D$  étant constante par :

$$(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

et les conditions au limites sur le parment on aboutit :

$$\sigma_x = a_1 x + b_1 y$$

$$\sigma_y = a_2 x + b_2 y$$

$$\sigma_{xy} = c x + d y$$

Avec ,  $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2$ , dépendent des pressions sur les parements amont et aval.

En reportant ces résultats sur les équations générales , on trouve :

$$d = a_1$$

$$c = \Delta - b_1, \text{ cela réduit donc le nombre de coefficients à 4.}$$

Après avoir déterminé l'allure des contraintes, passons maintenant à la détermination des contraintes en un point .

1. Calcul des contraintes en un point du barrage : [ 1 2 ] [ 1 0 ]

Rappelons l'allure des contraintes :

$$\sigma_x = a_1 x + b_1 y$$

$$\sigma_y = a_2 x + b_2 y$$

$$\sigma_{xy} = (\Delta - b_2)x - a_1 y.$$

**conditions aux limites :**

1- Sur le parement amont on a sur un point de coordonnées  $(-n y, y)$  les composantes de la poussée sont : (retenue pleine)

$$X = y \delta \cos \alpha$$

$\delta$  : masse volumique de l'eau

$$Y = y \delta \sin \alpha$$

L'équilibre des force nous conduit à :

$$(1) X = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha = y \delta \cos \alpha$$

$$(2) Y = \sigma_y \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha = y \delta \sin \alpha$$

Sachant que  $n = \operatorname{tg} \alpha$  (1) et (2) deviennent :

$$\sigma_x + n \tau_{xy} = y \cdot \delta$$

$$\sigma_{xy} + n \tau_y = n \cdot y \cdot \delta$$

b- Considerons sur le parement aval un autre point à la même profondeur  $x = m y$  la poussée de l'eau en ce point est nulle

$$\text{on aura : } \sigma_x - m \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{xy} - m \sigma_y = 0$$

Ainsi nous aurons le système suivant à résoudre :

$$\sigma_x + n \tau_{xy} = y \delta$$

$$\tau_{xy} + n \sigma_y = n y \delta$$

$$\tau_{xy} - m \sigma_y = 0$$

$$\sigma_x - m \tau_{xy} = 0$$

$$d + a_1 = 0$$

$$c + b_2 = \Delta$$



finalement on aura :

$$a_1 = \frac{\Delta m n (m - n)}{(m + n)^2} + \frac{\delta m (m n - m^2 - 2)}{(m + n)^3}$$

$$b_1 = \frac{2 \cdot \Delta \cdot m^2 \cdot n^2}{(m + n)^2} - \frac{\delta m^2 (2 m n^2 - 3n - m)}{(m + n)^3}$$

$$a_2 = \frac{-\Delta (m - n)}{(m + n)^2} - \frac{\delta (3 m n + n^2 - 2)}{(m + n)^3}$$

$$b_2 = \frac{\Delta \cdot (m^2 + n^2)}{(m + n)^2} - \frac{d \cdot (m - n - 2 m^2 n)}{(m + n)^3}$$

$$c = \Delta - b_2$$

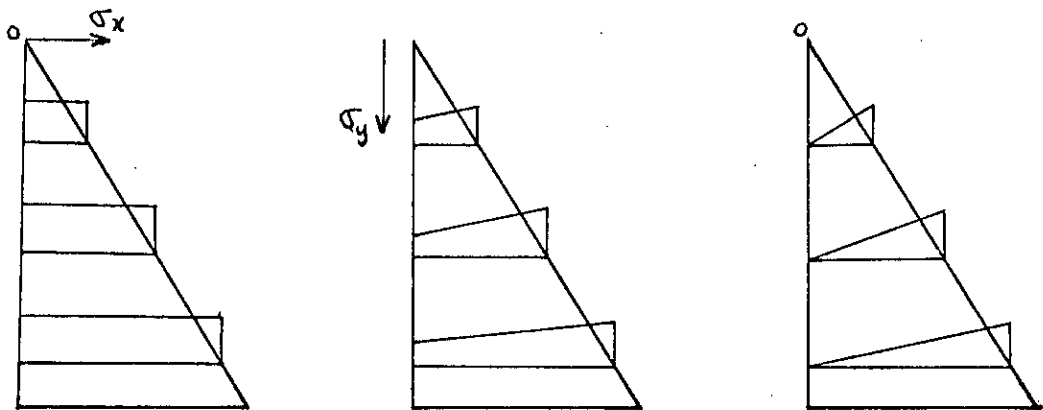
$$d = -a_2$$

finalement on aura la forme des contraintes comme suit :

$$\sigma_x = \delta y$$

$$\sigma_y = (-(\Delta - 2 \delta / m^2) x / m) + (\Delta - \delta) y / m^2$$

$$\tau_{xy} = \delta x / m^2$$



Si on a une retenue vide il est évident que :

$$\delta = 0 \quad \sigma_x = 0 \quad \sigma_y = \Delta (y - x) / m \quad \tau_{xy} = 0$$

## 2 - Recherche des contraintes principales : [ 1 0 ] [ 1 2 ]

a- Expression de l'équilibre du tétraédre élémentaire

$$\sigma = x \cos \psi + y \sin \psi$$

$$\tau = -x \sin \psi + y \cos \psi$$

Par un simple arlifice de calcul trigonométrique on aboutit à :

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\psi + 2xy \sin 2\psi$$

$$\tau = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\psi + \tau_{xy} \cos 2\psi$$

b - Contraintes principales

Pour trouver les contraintes principales et les directions principales ==> on cherche l'angle pour lequel  $\sigma$  est maximal ou minimal

donc :

$$\frac{\delta \sigma}{\delta \psi} = 0$$

$$2 \tau_{xy}$$

$$\text{On trouve } \operatorname{tg} 2\psi = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$

Pour des valeurs particulières de  $\psi$  qui sont  $\beta$  et  $(\beta + \pi/2)$  appelés aussi direction principales les contraintes sont principales de valeurs :

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\beta + \tau_{xy} \sin 2\beta$$

En évaluant  $\cos 2\beta$  et  $\sin 2\beta$  à partir de  $\tan 2\beta$  les contraintes principales s'écrivent :

$$A = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{1/2}}{2}$$

$$B = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{1/2}}{2}$$

### 3/ Cisaillement effectif maximum [1 0] [1 2]

On a déjà vu que  $\tau$  s'écrivait comme suit :

$$\tau = 1/2 (\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\psi + \tau_{xy} \cdot \cos 2\psi$$

Pour trouver son maximum, on n'a plus qu'à faire ceci :

$$\delta \tau / \delta \psi = 0$$

$$\text{On aboutit à : } \tan 2\psi = (\sigma_y - \sigma_x) / 2\tau_{xy}$$

La valeur de  $\psi$  pour laquelle  $\tau$  est max et  $\gamma$  tels que :

$$\tan 2\gamma = (\sigma_y - \sigma_x) / 2\tau_{xy} \implies \tan 2\gamma = 1/\tan 2B$$

$$\implies 2\gamma = 2B \pm \pi/2 \implies \gamma = B \pm \pi/4$$

$$\implies \tau_{\max} = (A - B) / 2 \sin(2\omega)$$

$$\tan \omega = \pm \pi/4$$

$$\implies |\tau_{\max}| = (A - B) / 2 = [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{1/2} / 2$$

Sachant aussi que les forces qui équilibrent le cisaillement  $\tau$  sont :

- \* la force de frottement ( $\sigma \tan \phi$ )
- \* la cohésion du matériau  $c$ . (déterminer par des essais expérimentales)

La condition de Coulomb s'écrit :

$$|\tau| - |\sigma| \tan \phi < c$$

avec  $|\tau| = |\sigma| \operatorname{tg} \phi$  appelé cisaillement effectif et ayant pour valeur :

$$\tau_{\text{eff}} = \frac{A - B}{2} \sin(2\omega - \phi) + \frac{A + B}{2} \operatorname{tg} \phi$$

et pour max :

$$\tau_{\text{eff max}} = \frac{1}{2 \cos \phi} ((A - B) - (A + B) \sin \phi)$$

(obtenue en faisant  $\delta \tau_{\text{eff}} / \delta \omega = 0$ )

#### 4/ Résumé :

On désignera par :

m : fruit aval

n : fruit amont

$\sigma_1$  : la contrainte principale

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{((\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2)^{1/2}}{2}$$

$\sigma_2$  : la contrainte principale

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{((\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2)^{1/2}}{2}$$

$\tau_{\text{max}}$  : la contrainte de cisaillement max

$\delta$  : masse volumique de l'eau

$\Delta$  : masse volumique du béton

y : cote de l'eau à partir de la référence

Tableau récapitulatif

Contraintes sur le parement Amont			Contraintes sur le parement Aval.	
	Retenue pleine	Retenue vide	Retenue pleine	Retenue vide
$\sigma_1$	$\delta y$	0		
$\sigma_2$	$\sigma_y + (\sigma_y - y\delta)n^2$	$\sigma_y(1+n^2)$	$(1+m^2)\sigma_y$	$\delta = 0$
$\sigma_y$	$(\Delta - \delta/m^2)y$	$ym\Delta/m+n$	$y/(m+n)^2 / n\Delta(m+n) + (1-mn)\delta$	
$\sigma_x$	$y\delta - (y\delta - \sigma_y)n^2$	$n^2\sigma_y$	$m^2\sigma_y$	
$\sigma_{xy}$	$y\delta n - n\sigma_y$	$-n\sigma_y$	$\sigma_y m$	
$\tau_{max}$	--	$\frac{\sigma_y(1+n^2)(1-\sin\phi)}{2\cos\phi}$	----	
$\tau_{eff}$			$\frac{(1+m^2)(1-\sin\phi)y}{2\sin\phi}$	

### 5/ Condition de Maurice Levy :

L'infiltration de l'eau dans les microfissures, existant dans le parement amont, conduit à l'apparition de sous pressions capables d'engendrer la ruine de l'ouvrage , c'est pourquoi la condition Maurice Levy a été introduite pour parer à ces sous pressions , elle consiste à dire qu'en chaque section horizontale, la contrainte de compression max  $\sigma_2$  est supérieure à la pression hydrostatique .

$$\begin{aligned} \sigma_2 &> \sigma_y \\ \sigma_y + n^2 (\sigma_y - y\delta) &> \sigma_y \\ \sigma_y (1 + n^2) &> y \delta (1 + n^2) \\ \sigma_y &> y \delta \\ \Delta (m + n) m - \delta (1 + m^2) &> 0 \end{aligned}$$

## 6/ Condition de non extension :

Cette condition vise à l'élimination des contraintes de traction :  $\sigma_2 > 0$

d'où :

$$\Delta m (1 + n^2) (m + n) - \delta (1 - m n)^2 > 0$$

1/ Pour toutes les contraintes qu'on vérifie et pour n'importe quelle section ,  
les trois conditions doivent être vérifiées

1/ Condition de non extension

2/ Condition de Maurice Levy

3/ Les contraintes trouvées doivent être inférieures au taux de travail limité

$$\sigma_{\text{comp}} \leq \sigma_{\text{lim}} = (40 - 50) \text{ Kg/cm}^2 \text{ cas statique}$$

$$\sigma_{\text{comp}} \leq \sigma_{\text{lim}} = (52 - 63) \text{ Kg/cm}^2 \text{ cas pseudo dynamique}$$

$$\sigma_{\text{traction}} \leq \sigma_{\text{lim}} = (3 - 4) \text{ Kg/cm}^2$$

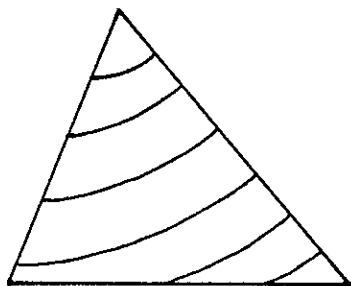
$$\sigma \leq \tau_{\text{lim}} = (20 - 25) \text{ Kg/cm}^2$$

## 7/ Lignes caractéristiques :

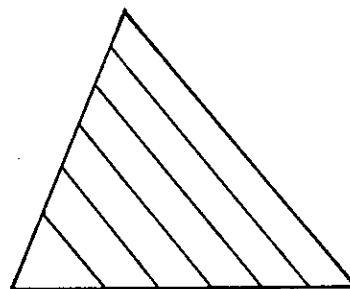
Les lignes de ces courbes nous permettent de faire une autopsie sur notre Barrage , elle décelle les endroits ou le Barrage travail le plus , donc les parties qu'on doit renforcer et les parties ou il est préférable d'économiser , parmi ces courbes il y'a :

a / Courbes d'égale compression maximales :

C'est les courbes qui joignent les contraintes maximales de même intensités , elles sont déduite par homothétie càd il suffit de construire une et on en déduit les autres .



Barrage plein



Barrage vide

c / Lignes isostatiques :

Elles nous renseignent sur la propagation des contraintes de compression principales dans le corps du Barrage , elles sont formées en traçant des lignes tangentes en chaque point à l'une des deux contraintes principales , elles sont de deux espèces:

\* lignes isostatiques de premières espèces ==> tangentes aux compressions max

\* lignes isostatiques de deuxième espèces ==> tangentes aux compressions min

La tangente d'une isostatique en un point fait un angle avec  $ox$  tel que :

$$\begin{aligned} \text{tg}(2B) &= \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \text{or} \quad \text{tg}(2B) = \frac{2 \text{tg} B}{1 - \text{tg}^2(B)} \\ \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} &= \frac{2 \text{tg} B}{1 - \text{tg}^2(B)} \quad \text{et sachant que } \text{tg} B = \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

$$2\tau_{xy} (1 - (dy/dx)^2) = 2(dy/dx) (\sigma_x - \sigma_y)$$

$$\tau_{xy} (dy/dx)^2 + (\sigma_x - \sigma_y) dy/dx - \tau_{xy} = 0 \quad (1)$$

(1) a pour solution des courbes orthogonales de première et de deuxième espèce.

\* Reservoir plein :

1 / Si la condition de *Maurice Levy* est satisfaite , alors le parement amont est une isostatique de première espèce , ainsi que pour le parement aval , les isostatiques de deuxième espèce en sont perpendiculaire ( voir figure ( 1 ) ).

2 / Si elle n'est pas satisfaite , le parement amont est une isostatique de deuxième espèce , le parement aval est une isostatique de première espèce, les lignes isostatiques de deuxième espèce partent du parement amont et coupent perpendiculairement le parement aval .

( voir figure(2) ).

\* Réservoir vide:

Le parement amont est une isostatique de première espèce ainsi que le parement aval. Les isostatiques de deuxième espèce les coupent perpendiculairement . figure ( 3 )

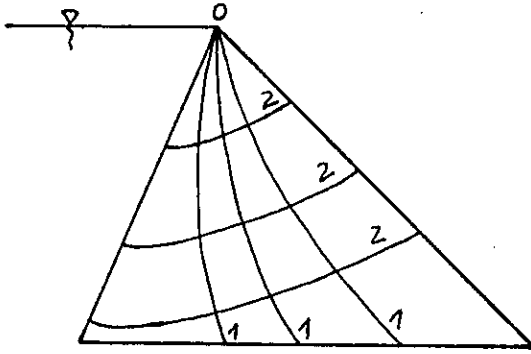


figure ( 1 )

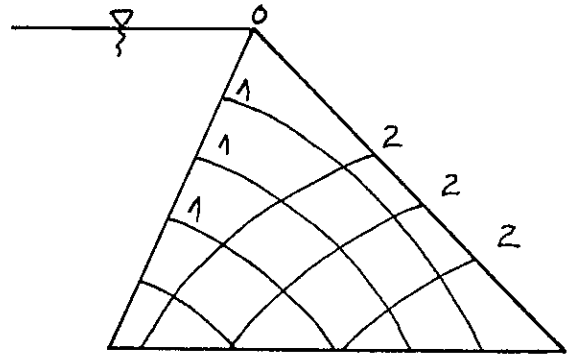


figure ( 2 )



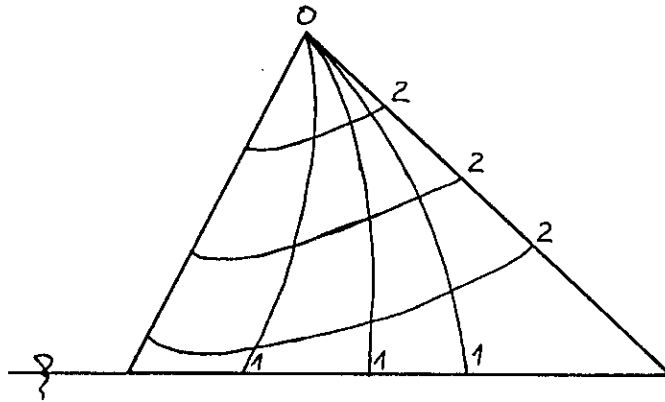


figure (3)

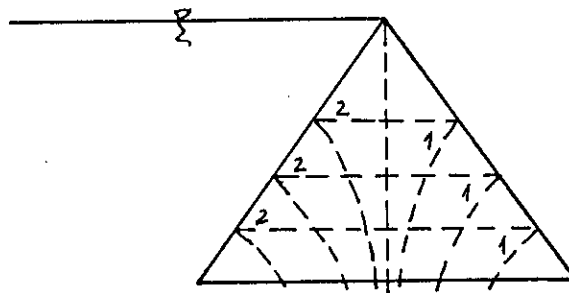
**d / Lignes de glissement effectif :**

Ce sont des lignes admettant comme tangente, en chaque point, la direction de l'élément plan sur lequel le glissement effectif est maximal, ces lignes coupent les isostatiques de première espèce sous l'angle constant de  $\pm (\pi/2 - \Phi/2)$ .

Il passe en chaque point deux lignes de glissement :

- Une ligne presque verticale rencontre le sol de fondation à l'intérieur du massif, c'est la moins dangereuse.

L'autre ligne ne rencontre pas le sol de fondation à l'intérieur du massif, c'est évidemment la plus dangereuse. Elles imposent d'éviter de faire des reprises de Bétonnage suivant cette direction. De même qu'il serait souhaitable d'éviter d'installer des conduites suivant le plan de glissement.



**\* Remarque :**

Pour le calcul d'un Barrage réel il faut savoir que les hypothèses de calculs effectuées préalablement ignorent certains phénomènes ayant leur importance.

Le couronnement, les sous pressions, les effets capillaires, les variations thermiques, l'hydrodynamique, et dans certains pays la poussée des glaces intervient également et engendre un supplément de contrainte non négligeable.

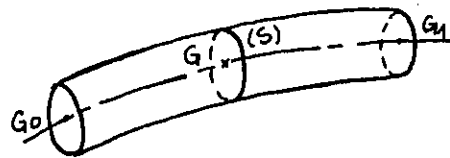
### III – 6 – Calcul par la méthode de R.D.M :

#### 1 – Hypothèse de calcul :

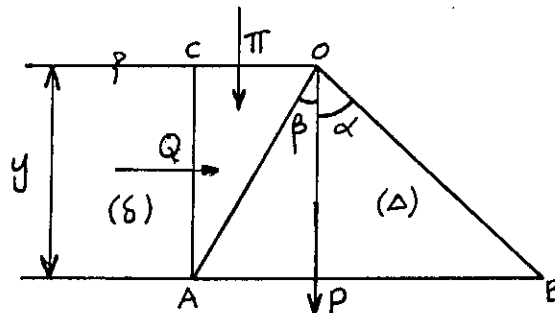
- 1/ Barrage en liaison parfaite avec le sol
- 2/ Barrage, solide soumis à des forces extérieures et est en état d'équilibre.
- 3/ Déformation très petite . 4/ Déformation purement élastique
- 5/ Les forces intérieures suivent la loi de Hooke .

#### 2 – Rappel des règles de calcul :

- 1/ On a des poutres prismatiques  
engendrées par des sections planes  $S$  dont le centre de gravité  $G$  décrit une certaine courbe plane  $G_0G_1$ .
- 2/ Les forces s'appliquent suivant des lignes d'action situées dans le plan de l'axe longitudinal  $G_0G_1$ . Ce plan est un plan de symétrie de la poutre . (voir figure)



#### 3 – Application:



Considérons une section de largeur unité à la base de l'ouvrage. Le système de forces extérieures est le suivant.

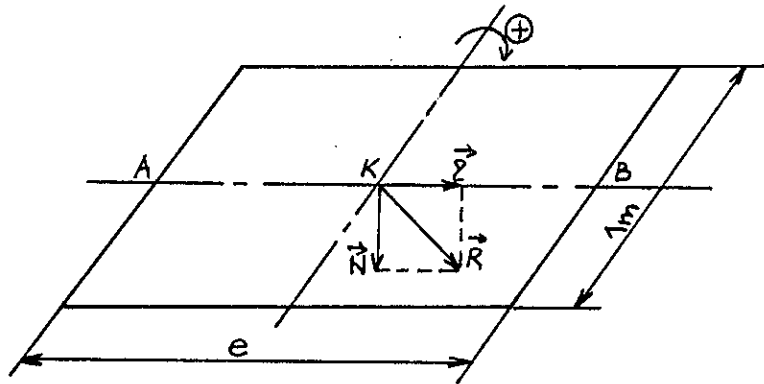
$$P = \Delta [0,5 (m+n)y^2] \text{ . Le poids propre du barrage.}$$

$Q = (\delta/2) y^2$  Poussée horizontale de la retenue appliquée au tiers (1/3) inférieur à  $y$

$\pi$  : Poussée verticale de la retenue appliquée au centre de gravité A CO.

$$\pi = 0,5 \delta n y^2.$$

Réduisons maintenant ces forces ( voir schéma )



Effort normal :

$$N = P + \pi = 0,5 y^2 [ \Delta(m + n) + \delta n ].$$

Effort tranchant :

$$T = Q = 0,5 \delta y^2.$$

Moment fléchissant :  $M$  (axe perpendiculaire OAB)

$$M = -1/12 \Delta y^3 (m^2 - n^2) + 1/6 \delta y^3 - 1/12 \delta y^3 n (3m + n)$$

Appliquons la formule classique qui donne la composante normale  $\sigma$

$$\sigma = N/s \pm Mh/I$$

$S$  : aire de la section horizontale =  $e \times 1 = (m + n)y$ .

$$h = [ -e/2 : e/2 ]$$

$I$  : moment d'Inertie de la surface  $S \Rightarrow$

$$I = e^3/12 = [(m+n)^3 y^3]/12$$

$$\sigma = 0,5y \left[ \frac{\Delta + \delta n}{m + n} \right] + \left[ [ \delta(2 - 3mn - n^2) - \Delta(m^2 - n^2) ] / (m + n)^3 \right] h$$

$\Rightarrow$  On peut trouver aisément les contraintes aux pieds amont et aval du barrage.

**Inconvénients de la méthode :** [10]

Incapable de fournir la possibilité de déterminer les valeurs des contraintes principales agissant en un point  $M$  de la structure , mais on peut le faire pour les pieds Amont et Aval du Barrage.

### 3/ Calcul par la méthode des éléments finis.

Le calcul par la méthode des éléments finis consiste surtout à discrétiser le corps du barrage, et sa fondation de ce dernier.

Elle permet d'ausculter le corps et l'assise du barrage.

et utilise pour cela :

- La mécanique des milieux continus ( la formulation du problème ) .
- Les méthodes de modélisation des structures .
- Les techniques ou méthodes d'approximations donc de résolution et d'Intégration.

## **CHAPITRE : 2**

### **Méthode des éléments finis: Formulation et Application**

## I - Introduction :

C'est en étudiant quelques types de structures, que les ingénieurs se sont rendus compte de la puissance que pouvait offrir la représentation de tout phénomène physique par de mêmes modèles :

### *Des modèles à plusieurs degrés de liberté :*

Ces modèles concevaient un milieu continu tel un ensemble de points reliés entre eux par une configuration donnée. L'application des équations pouvait être faite directement sur ces points, les problèmes aux **E - D - P** devenaient moins complexes dans ce cas et plusieurs manières de les cerner ont vu le jour.

Avec le développement de l'outil informatique, la supériorité des méthodes numériques s'est consolidée et est devenue l'axe principal sur lequel tout le monde travaille .

## II - Bases et Principes :

\* La méthode des éléments finis est un ensemble de procédures combinant les deux philosophies précédentes : c'est la combinaison des modèles mathématiques aux méthodes de résolution évoluées ; ces bases , une application aux structures et son adaptation numérique seront présentées dans ce qui suivra.

La principale attraction de la méthode réside dans le fait qu'elle permette le passage: Equations aux dérivées partielles ----> Equations algébriques qui, combinées aux techniques d'automatisation des calculs permettent d'approcher d'une manière assez bonne les solutions exactes.

Pour ce faire, on discrédite le domaine de travail (D) en noeuds où sont inconnues des grandeurs : *Les déplacements  $U_i$*  dans notre cas.

Sur un domaine (D), en connaissant les valeurs ( $U_i$ ) , on pourra , moyennant une interpolation linéaire en  $U_i$ , approcher la valeur de la grandeur U en n'importe quel point de (D) :

$$U(x,y) = \sum_{i=1}^n N_i(x,y) U_i$$

$U_i$  : variables modales

$N_i(x,y)$  : fonctions d'interpolation.

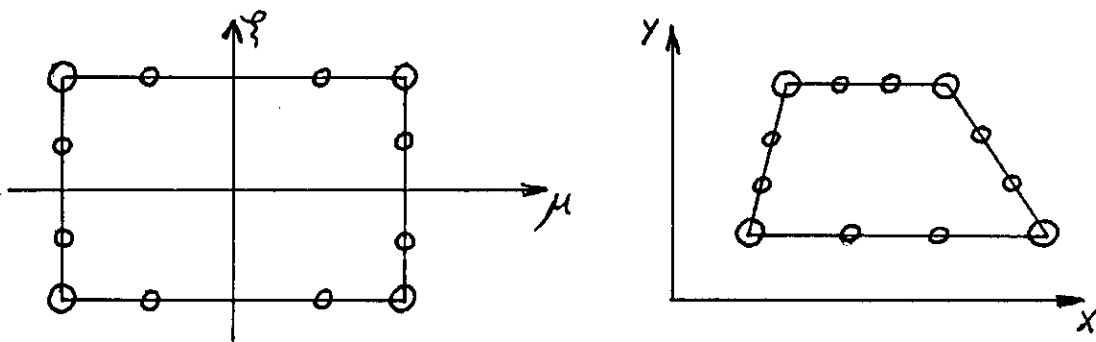
La partition de (D) en sous domaines ( $D_i$ ) permet le traitement de problèmes avec possibilité d'extension du nombre de variables nodales, sur chaque sous domaine l'approximation précédente est faite : c'est l'approche de la méthode des éléments finis.

Cette partition exige néanmoins quelques conditions pour que soient valides les modèles construits :

- La continuité : l'ensemble  $\Sigma D_i$  doit reformer (D) .
- Le non chevauchement des frontières entre deux éléments.

*1ère base : Le 1er principe de la méthode est l'interpolation.*

\* Le problème tel que posé permet une assez bonne approche des solutions mais ne diminue que de très peu le volume de calcul à effectuer car il faudra pour chaque sous domaine (élément) construire les fonctions d'interpolation  $N_i(x,y)$  ,(puisqu'elles dépendent de la position du sous domaine) . C'est dans le but de ressortir les calculs communément faits pour chaque élément que l'on introduit un élément de référence.



Les calculs sont ainsi faits pour un élément et moyennant une transformation géométrique, on passe à l'élément réel, cette transformation a la forme :

$$T: \zeta(\zeta, \mu, \dots) \longrightarrow X(x_1, x_2, x_3, \dots)$$

Elle donne l'image d'un point  $(\zeta, \mu)$ , de l'élément de référence située sur l'élément réel, cette image dépendant bien sûr de la position de cet élément donc des coordonnées de ses noeuds.

La transformation géométrique est représentée en reliant les coordonnées sur l'élément réel  $(x, y)$  en fonction de  $\zeta, \mu$ . Elle s'écrit :

$$\begin{aligned} x &= \sum N_i(\zeta) X_i & X_i, Y_i &: \text{coordonnées aux noeuds.} \\ y &= \sum N_i(\zeta) Y_i \end{aligned}$$

**2ème base** : Une transformation géométrique pure permet le passage d'un élément de référence à un élément réel, ce qui allège le volume de calcul réduisant plusieurs opérations (communes) en une seule. On pourra donc faire une subdivision assez précise du domaine , c'est la formulation isoparamétrique .

\* Le passage = équations différentielles (résultant de la formulation initiale ) aux équations intégrales qui, après discrétisation donneront les équations algébriques.

En mettant toutes les équations différentielles sous la forme :

$$\mathbf{OP}(\mathbf{U}) + \mathbf{f}_r = \mathbf{0} \quad \mathbf{OP} : \text{opérateur différentiel.}$$

On pourra passer , moyennant l'utilisation de la méthode des résidus pondérés aux formes intégrales nulles :

$$\mathbf{W} = \int_{\mathbf{D}} \Psi \{ \mathbf{OP}(\mathbf{U}) + \mathbf{f}_r \} d\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

et ce pour n'importe quelle fonction de pondération  $\Psi$ .

Le choix de  $\Psi$  conduit ( [3] p 187) à différentes méthodes de résolution des problèmes, la plus utilisée étant celle de *Galerkin*  $\Psi = \delta(\mathbf{U})$  , l'opérateur  $\delta$  étant une variation de  $\mathbf{U}$ . Les autres ne jouissent pas de la même "popularité" chez les utilisateurs pour différentes raisons : difficulté de mise en oeuvre , utilisation difficile....

Combiné aux deux premières bases , la technique aboutira à :

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \int_{\mathbf{D}} \delta \mathbf{U} (\mathbf{OP}(\mathbf{U}) + \mathbf{f}_r) d\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \mathbf{W} &= \delta \mathbf{U}_i \int_{\mathbf{D}} \{ \mathbf{N} \} [ \mathbf{OP}(\mathbf{N}) \{ \mathbf{U} \} + \mathbf{f}_r ] d\mathbf{v} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

L'équation devant être respectée pour chaque élément , on aura :

$$(i = 1, n \text{ élément}) . \mathbf{W}_i = \int_{\mathbf{D}_i} \{ \mathbf{N} \} (\mathbf{OP}\{\mathbf{N}\}^T \{ \mathbf{U} \} + \mathbf{f}_r) d\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$



**Base 3** : La résolution d'équations algébriques étant moins difficiles, on reformule le problème de telle manière à pouvoir discréditer le domaine (D); c'est le passage EDP ---> Equations intégrales.

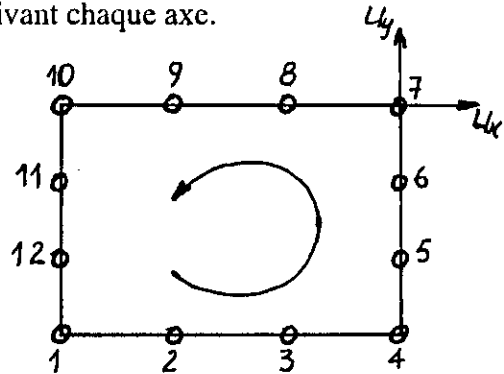
### III - Application aux structures :

#### 1- Type d'élément choisi :

a) L'élément choisi est un élément quadrilatéral à 12 noeuds (fig. ). A chaque noeud, sont attribués deux degrés de liberté : un suivant chaque axe.

Cet élément a été choisi pour :

- \* voir l'intérêt d'augmentation du nombre de variables nodales;
- \* comparer éventuellement avec les éléments couramment utilisés.
- \* trouver la configuration adéquate pouvant représenter la structure tout en trouvant un compromis entre le nombre de noeuds total et le nombre d'éléments.
- \* détecter d'éventuels effets - de ce choix - sur les procédures de calcul et leurs vitesses en dynamique.



Les fonctions d'interpolation seront donc du 4er degré et le polynome correspondant ne formera pas une base complète.

L'élément est de plus isoparamétrique, c'est à dire que les fonctions d'interpolation seront les mêmes que les fonctions de transformation géométriques.

#### 1 -Formulation des opérations générales en études des structures :

a/ Relier les déplacements  $U(x,y)$  aux déplacements modaux :

$$U(x,y) = \{ N \} \{ U_i \}$$

b/ Relier les déplacements aux déformations :

Equations données par l'élasticité :

$$\varepsilon(x,y) = [B] \{ U \}$$

c/ Relier les déformations aux contraintes :

$$\sigma(x,y) = [D] \varepsilon(x,y) = [D][B] \{ U \}$$

d/ Relier les contraintes aux forces extérieures :

$$\begin{array}{ccc} \leftarrow & \text{Plusieurs choix sont disponibles résumés en :} & \rightarrow \\ \text{déplacements unitaires} & \text{travaux internes (contraintes)} & \text{Travaux virtuels} \\ & = & \\ & \text{forces extérieures} & \end{array}$$

$$\{F^e\} = \left[ \int_D [B]^T [D] [B] dv \right] \{U\}$$

la quantité  $[K] = [B]^T [D][B]$  est dite matrice de rigidité

$\{F^e\}$  : ensemble de forces extérieures

**\* Construction des fonctions d'interpolation :**

1 - choix de la base polynomiale :

$$\{P\}^T = \{ 1, \zeta, \mu, \zeta^2, \zeta\mu, \mu^2, \zeta^3, \zeta^2\mu, \zeta\mu^2, \mu^3, \zeta^3\mu, \zeta\mu^3, \}$$

2 - Former la matrice polynomiale  $[P_n]$ .

$$[P_n] = \begin{bmatrix} \{P_1\}^T \\ \{P_2\}^T \\ \dots \\ \{P_{12}\}^T \end{bmatrix}$$

$\{P_i\}^T$  est le vecteur résultant de  $\{P\}^T$  en remplaçant  $\zeta$  et  $\mu$  par leurs valeurs dans l'élément de référence. ( $\xi, \mu$  : coordonnées du noeud numero  $i$ )

3 - Vecteur nodal :

$$\{N\}^T = \{P\}^T [P_n]^{-1}$$

**\* Construction de l'opérateur de dérivation  $[B]$**

Ayant les composantes de  $\{N\}$ , on les dérive par rapport aux deux variables  $\zeta$  et  $\mu$   $[B]$  aura la forme :

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \delta N_i / \delta x & 0 \\ 0 & \delta N_i / \delta y \\ \delta N_i / \delta y & \delta N_i / \delta x \end{bmatrix} \quad i = 1, 12.$$

$(3 \times 24)$

**\* Passage élément réel - élément de référence.**

Au cours de la construction de  $[K]$  et  $\{F\}$ , on aura à répéter plusieurs opérations pour chacun des éléments, l'élément de référence permet dans un premier temps de réduire ces opérations à lui seul mais exige l'existence d'étapes de passage d'une variable réelle à une variable de référence, cette étape sera le calcul de déterminants pour chaque élément qui permettra de relier les deux vecteurs :

$$\begin{bmatrix} \delta / \delta x \\ \delta / \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \zeta / \delta x & \delta \mu / \delta x \\ \delta \zeta / \delta y & \delta \mu / \delta y \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \delta / \delta \zeta \\ \delta / \delta \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x / \delta \zeta & \delta y / \delta \zeta \\ \delta x / \delta \mu & \delta y / \delta \mu \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \delta / \delta \zeta \\ \delta / \delta \mu \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overline{\{N\}^T} [\{X_n\} \{Y_n\}] \Rightarrow \begin{bmatrix} \delta/\delta\xi \\ \delta/\delta\mu \end{bmatrix} (x \ y) = \begin{bmatrix} \delta/\delta\xi & \delta/\delta\zeta \\ \delta/\delta\mu & \delta/\delta\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\{N\}^T} \\ \{N\}^T \end{bmatrix} [\{X_n\} \{Y_n\}]$$

$$\begin{bmatrix} \delta x/\delta\xi & \delta y/\delta\xi \\ \delta x/\delta\mu & \delta y/\delta\mu \end{bmatrix}^{-1} = (\delta x/\delta\xi \ \delta y/\delta\mu - \delta y/\delta\xi \cdot \delta x/\delta\mu)^{-1} \begin{bmatrix} \delta y/\delta\mu & \delta y/\delta\xi \\ \delta x/\delta\mu & \delta x/\delta\xi \end{bmatrix}$$

La quantité  $(\delta x/\delta\xi \cdot \delta y/\delta\mu - \delta y/\delta\xi \cdot \delta x/\delta\mu)$  est le déterminant de la transformation.

En ce qui concerne l'intégration, on n'aura qu'à remplacer :

$$\int_{V_{\text{réel}}} N(x,y) \, dx \, dy \quad \text{par} \quad \int_{V_{\text{réf}}} N(\zeta,\mu) \, \det. \, d\zeta \cdot d\mu.$$

L'élément de référence peut simplifier les calculs de façon remarquable, ce qui nous poussera à faire les calculs le touchant au début puis à rappeler ces fonctions au moment opportun.

### - Adaptation numérique :

La principale raison qui a contribué au succès de la méthode, auprès des Ingénieurs, est sa capacité à être automatisée, ce qui renvoie directement à l'utilisation de la programmation informatique.

Après avoir établi les bases solides, les efforts des Chercheurs se sont orientés vers l'étude des techniques numériques permettant ce conditionnement.

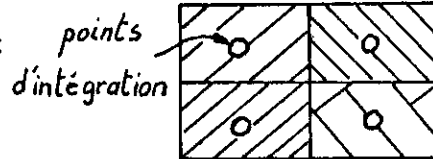
Les plus grandes difficultés sont rencontrées au niveau de l'étape qui détermine les caractéristiques du domaine, donc l'adéquation du modèle choisi. Au cours de cette étape, nous sommes confrontés à un problème d'intégration qui doit être lui aussi automatisé, or le calcul numérique de ces intégrales reste très délicat. On le verra donc plus en détail.

**- L'intégration numérique:**

Elle consiste à transformer le terme d'intégration en terme de somme. C'est à dire qu'au lieu de sommer les valeurs des fonctions en chaque point du domaine, on sélectionne quelques uns en leur attribuant une zone d'influence et on fait la somme des valeurs pondérées des fonctions en ces points.

Techniquement, deux problèmes se posent :

- choix des points ;
- attribution des zones d'influences.



Le premier problème sera résolu en imposant une intégration exacte des termes des fonctions dans le souci d'éviter que les matrices construites ne soient singulières.

La règle pour déterminer le nombre de points est la suivante :

"Si le nombre d'inconnues ( $U_i$ ) total dépasse le nombre de relations indépendantes aux noeuds d'intégrations.  $[K]$  sera singulière." [4] page 179.

Au second problème , on remédiera par l'utilisation de la méthode de Gauss qui donnera les coordonnées des points d'intégration et leurs poids qui caractérisent leur influence.

**- Méthode d'intégration numérique de Gauss :**

Permet le passage de l'intégrale à la sommation tout en imposant des conditions sur les points d'intégration et leurs poids.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\zeta, \mu) d\zeta d\mu = \sum_i \sum_j W_{ij} f(\zeta_i, \mu_j).$$

En développant  $f(\zeta, \mu)$  sous forme polynomiale et en exploitant le fait que les fonctions impaires donnent des intégrales nulles sur des domaines symétriques, on peut par identification avec l'équation précédente déterminer les poids et les points  $(\zeta_i, \mu_j)$ . [3]

Au cours de l'intégration , on utilisera les caractéristiques de cette méthode développée pour des cas unidimensionnels.

Pour un élément cubique incomplet à 12 noeuds, les fonctions d'interpolation sont du 4er degré, les termes de  $[K]$  seront du 3ème degré. Le nombre de points choisis pour l'intégration, devra intégrer un polynôme d'ordre 3. Ce qui est le cas , puisque le travail est fait avec 9 points d'intégration (3 x 3) qui peuvent intégrer des polynômes allant jusqu'au  $2 \times 3 - 1 = 5^e$  degré.

### **- L'Assemblage :**

Une fois le calcul de  $[K]^e$ .  $\{f\}^e$  fait pour tous les éléments, il faudra former les matrices , nous intéressant directement, c'est à dire les matrices globales : *c'est la phase d'assemblage.*

Cette opération purement numérique - géométrique fait intervenir la configuration de la structure et la disposition des éléments, elle sera différente pour chaque cas suivant la manière avec laquelle sont connectés ces éléments.

Pratiquement, l'opération consiste à remplir les matrices initialement denses après calcul de chaque élément, c'est l'assemblage par expansion. La détection de l'emplacement des termes à ajouter à chaque endroit exige la création de variables.

### **- Le Stockage :**

L'une des particularités de la méthode est qu'elle aboutit à des systèmes aux très grandes dimensions, néanmoins, ces systèmes offrent certains avantages d'exploitation : matrices symétriques , non pleines, diagonales...

Quelques unes de ces caractéristiques (symétrie, diagonalité) dépendent du type de problème traité - des équations - qui donc peuvent être initialement connues. Les précautions sont à prendre au départ et les conditions de stockage sont définies initialement (stockage en vecteur seul pour la diagonale, stockage d'un triangle de la matrice en cas de symétrie ) .

Au cours de l'assemblage sont tirées aussi d'autres informations concernant la place réelle qu'occupe la matrice dans l'espace qui lui a été alloué , c'est à dire que suivant la structure on n'aura plus qu'à utiliser une partie de la matrice initiale . C'est dans l'optique de rationaliser l'utilisation de la mémoire qu'ont été adoptées plusieurs méthodes . La plus élégante et efficace est celle dite " ligne de ciel " , que l'on explicitera par la suite - parce qu'utilisée - bien que posant des difficultés de mise en oeuvre au départ, paraît la plus appropriée.

### **Description du programme : ( cas statique )**

Le programme a été réalisé sous forme modulaires il permet l'introduction des données soit sous forme Interactive , soit sous forme de fichier .

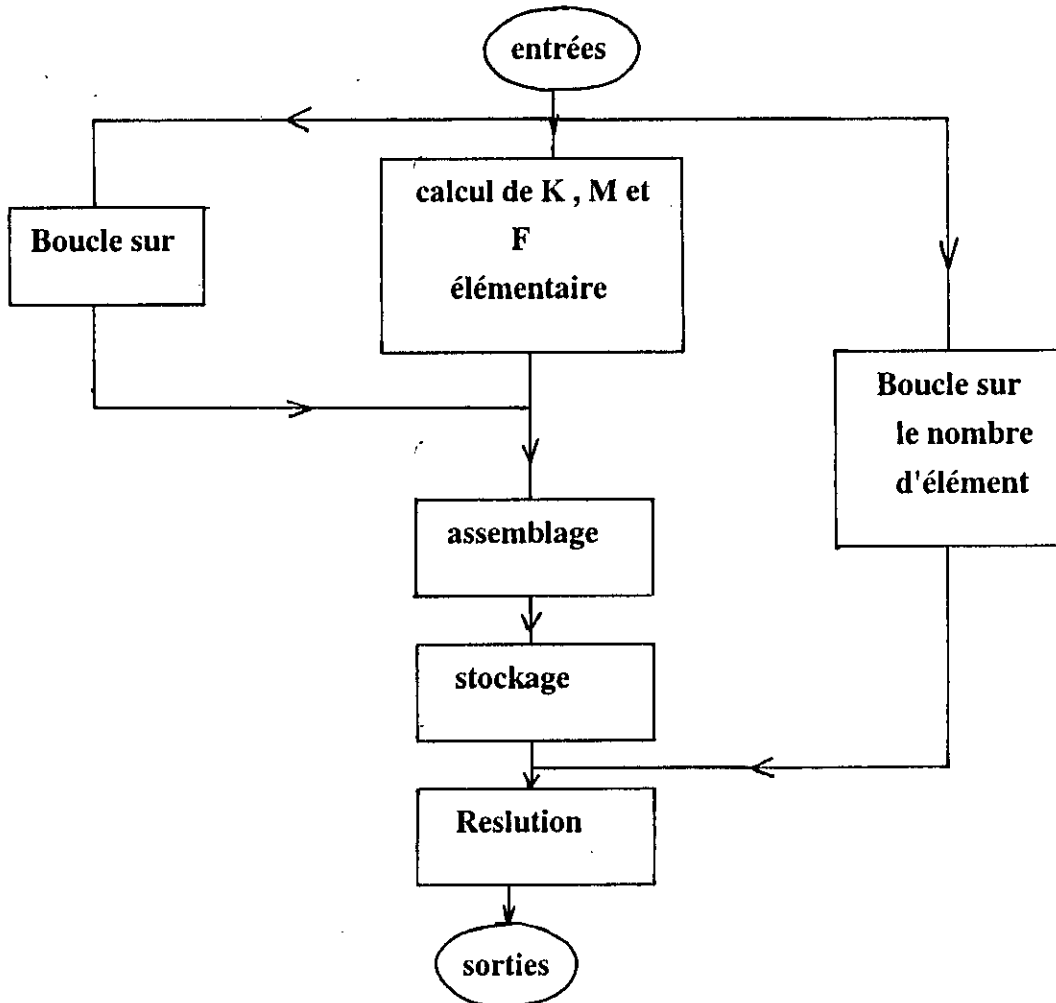
Ces grandes parties sont :

1/ formation de K , M ,F volume ( élémentaire )

2/ assemblage et stockage des K , M et F élémentaire

3/ résolution du systeme

( voir organgramme ci contre )



## Methodes de stockage :

Il existe deux méthodes de stockage qui sont :

1) *Stockage par bande* : elle permet de stocker la matrice  $k$  globale dans une bande, donc réduire le nombre de variables, donc le nombre d'espace mémoire.

2) *Stockage ligne de Ciel (sky line)* : cette méthode de stockage utilise de manière rationnelle l'espace en ne gardant des termes des matrices que ceux figurant dans des emplacements précisés par la configuration de la structure :

1/ **VKTS** : vecteur  $K$  triangulaire sup .

2/ **VKD** : vecteur  $K$  diagonal .

3/ **VKTI** : vecteur  $K$  triangulaire Inf .

**Attention :** Le stockage ligne de ciel n'élimine que les termes nuls qui existent en début de ligne ou début de colonne.

Les étapes sont les suivantes :

1) On a besoin d'un vecteur où l'on stocke les valeurs du nombre maximum d'éléments contenus sur une même colonne, qui ne sont pas nuls. Ce vecteur est  $h3$  .

**Caractéristique :**  $h3$  : est la hauteur de la colonne / à la diagonale exp (voir schéma) .  $h3$  est de dimension du nombre total de variables.

$$h3 = \langle 0 \ 0 \ 0 \ 3 \rangle \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

C'est à dire que pour la matrice considérée dans l'exemple , la première valeur de  $h3 \langle 0 \ 0 \ 0 \ 3 \rangle \Rightarrow 0$  veut dire que / à la diagonale, il n'existe aucun élément et c'est juste car le premier terme  $a(1,1) = 1$  est un élément de la diagonale, et ainsi de suite. Pour la dernière valeur de  $h3(4) = 3$  il est évident que par rapport à  $a(4,4)$  il y a quatre éléments au dessus de lui.

**N.B :** On appelle  $h3$  la hauteur de la bande.

2) On a aussi besoin de **VKLD** : C'est un vecteur qui nous donne le nombre de variables à stocker, il est formé à l'aide du vecteur  $h3$  et il a la dimension du nombre total de variables +1.

VKLD : appelé table de localisation des débuts de colonnes, il est défini par :

$$\text{VKLD}(1) = 1$$

$$\text{VKLD}(2) = 1$$

NNT : nbre de noeuds totaux.

$$I = 3, \text{NNT} + 1$$

$$\text{VKLD}(I) = h3(I-1) + \text{VKLD}(I-1)$$

Continue.

**\*\*Avantage :** – il permet de savoir le nombre max de variables à stocker ;  
– il nous donne une information sur l'emplacement de l'élément de la matrice globale dans le vecteur VKTS

\*Pour l'exemple précédent

$$\text{VKLD} = \langle 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 4 \rangle$$

Cela veut dire qu'on a stocké 3 éléments au maximum, alors VKTS est formé comme suit :

Colonne (1) de la matrice A, Pas d'élément

Colonne (2) de la matrice A, Pas d'élément

Colonne (3) de la matrice A, Pas d'élément

Colonne (4) de la matrice A, 3 éléments.

$$\Rightarrow \text{VKTS} = \langle 4 \ 5 \ 0 \rangle$$

Alors pour déterminer l'emplacement de l'élément  $a(4,1)$  dans VKTS, il suffit de trouver la valeur de l'indice de VKTS qui est I :

$$I = \text{VKLD}(J+1) - I + J. \quad I = 4 \quad J = 1.$$

$$I = \text{VKLD}(5) - 4 + 1$$

$$I = 4 - 4 + 1$$

$$I = 1 \Rightarrow \text{L'élément } A(4,1) \text{ se trouve dans VKTS (1).}$$

#### Stockage ligne de ciel segmenté sur disque :

Cette méthode permet encore de réduire le nombre de variables à stocker , donc un gain d'espace mémoire.

#### Avantages du stockage ligne de ciel :

Si l'on a une matrice  $n \times n$  ,

On stockera dans VKD n éléments,

et dans VKTS  $\text{VKLD}(n+1) - 1$

Si la matrice est symétrique.



Methodes de resolution :

$$Ku = F$$

### Méthodes de résolution

Méthodes directes

Méthodes itératives

#### 1/ Méthodes directes :

- excellente fiabilité

**Avantages** - résolvent des problèmes de grandes tailles avec de bonnes performances .

**Inconvénients** - risque de troncature.

a) Méthode de Cramer :

$$\text{On a } Ku = f \implies U = k^{-1}f$$

$\implies$  il suffit de trouver  $k^{-1}$ , la matrice inverse  $\implies$  passer par le det (K), la matrice des cofacteurs . Beaucoup d'opérations, beaucoup de problèmes de troncature .

b) Méthode de Gauss :

- Très simple

- Très performante .

- elle consiste à rendre  $k, k'$  triangulaire supérieur par l'algorithme suivant :

\*\* Triangularisation :

$$W = a_{ik} / a_{kk} \quad k = 1, n-1$$

$$f(I) = f(I) - w f(k) \quad J = k+1, n+1 \quad i = k+1, n$$

$$a_{ij} = a_{ij} - w a_{kj}$$

\*\* Résolution :

$$U(i) = [ f(i) - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} - u(j) ] / a_{i,i} \quad i = n, n-1, 1.$$

- notre travail ne s'est pas arrêté là, puisqu'on a un peu modifié Gauss

pour :

\* permettre son utilisation pour plusieurs vecteurs de sollicitations.

\* pour éviter de triangulariser un système  $ku = f$  plusieurs fois.

c) Méthode de croute :

C'est une décomposition en deux matrices :

L Triangulaire Inf.

$$Tq LU(X) = B$$

U Triangulaire Sup.

$$\implies \text{on résoud } Ly = b$$

$$Ux = y$$

d) Méthode de Chdevsky :

C'est une décomposition en une matrice et sa transposée  $\implies K = R^T \cdot R$ .

puis résoudre :  $R^T y = b$

$$Rx = y$$

2/ Méthodes itératives : ont une utilisation restreinte

a) Méthode de Jacobi :

On décompose K en  $K = D - (L + U)$

D : matrice diagonale

L : matrice inf.

U : matrice sup.

avec  $D_{ii} = K_{ii} \forall i$ .

$$L_{ij} = -K_{ij} \quad \text{pour } i > j$$

$$L_{ij} = 0 \quad \text{pour } i \leq j$$

$$U_{ij} = -K_{ij} \quad \text{pour } j > i$$

$$U_{ij} = 0 \quad \text{pour } j \leq i$$

b) Méthode de Gauss - Sidel :

Elle permet surtout le calcul des matrices plus grandes et creuses .

$$K = (D - L) - U$$

## **CHAPITRE :3**

### **Methode de Calcul dynamique : presentation et Application**

## **Introduction :**

Avec l'accélération du développement industriel apparurent les ouvrages gigantesques, et vitale était la nécessité d'assurer leur sécurité. Cette sécurité se traduit de nos jours par la garantie face aux phénomènes transitoires : ce sont les séismes la plupart du temps .

Un séisme est un phénomène libérateur d'énergie sous forme de vibrations, il se traduit par un mouvement de croûte terrestre dans plusieurs sens donnant naissance à des contraintes (donc de déformations) au niveau de la surface influençant directement sur les ouvrages , leur sécurité dépendait donc de la compréhension du phénomène sismique dans un premier temps puis de la traduction de l'interaction sol-structure dans de tels cas afin d'aboutir à l'effet des mouvements terrestres sur les ouvrages et d'améliorer leurs méthodes de conception.

Seront présentées dans ce qui suit les approches –principales – permettant de cerner les problèmes ainsi que les solutions proposées.

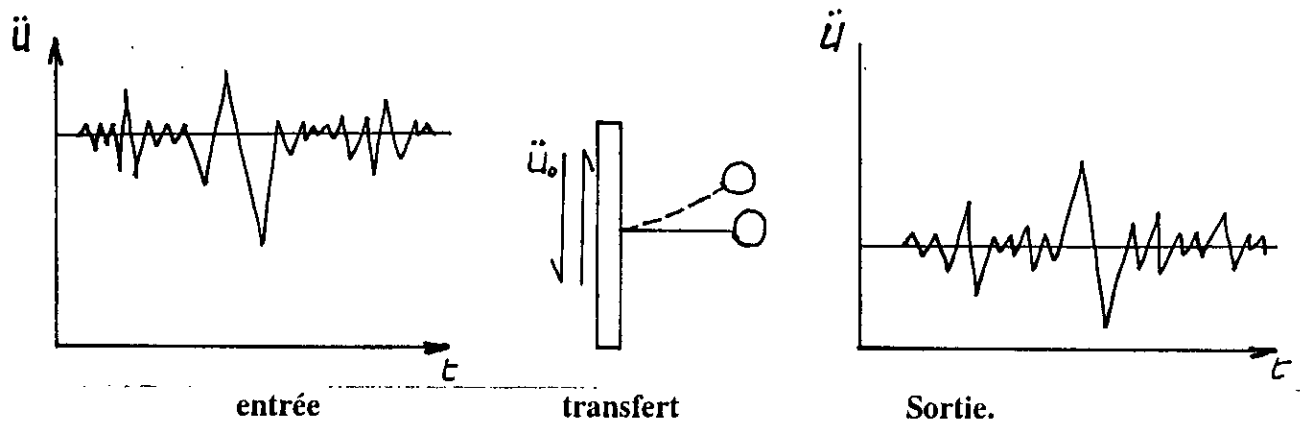
## ***Historique du calcul dynamique :***

C'est à la fin du siècle précédent qu'apparurent les premières analyses aboutissant au calcul parasismique. Le raisonnement était très simple : en considérant les structures comme parfaitement rigides, on peut assimiler les forces sismiques agissant au niveau de la surface (leur maximum en fait) à une force que l'on intégrera par la suite dans des calculs. C'était une manière de passer du calcul dynamique (non stationnaire) au calcul statique et c'est pour cette raison que cette approche est dite statique.

Physiquement, la théorie signifiait que la structure a le même mouvement que le sol et que sa déformabilité était négligée. Cette méthode bien que très grossière dans son approche a été utilisée dans de très nombreux cas et a fait ses preuves pour des structures particulières (structures infiniment rigides).

Vinrent ensuite les modèles dits dynamiques qui comblaient les carences de l'approche statique en introduisant des "coefficients dynamiques", ce coefficient étant fonction de la période de vibration de la structure, on assimilait ainsi celle-ci à un système à un degré de liberté. Ce coefficient dynamique servait au calcul d'une force sismique.

Avec le développement des appareils d'enregistrement des séismes et l'enrichissement des données sur leurs caractéristiques apparut la méthode spectacle qui ne prend en considération que les valeurs maximales des caractéristiques cinématiques des structures; elle consiste à établir le signal de réponse (dits plus souvent "spectres de réponse") d'un oscillateur simple excité par un signal d'entrée (accélérogramme réel ou fictif) voir figure ci dessous.



**\*\* Remarque : \*** L'avantage que présente la méthode spectrale par rapport à la méthode utilisant le coefficient dynamique est le fait qu'elle tienne compte de l'effet d'amortissement visible sur les signaux..

\* Les méthodes décrites donnent toutes des estimations "pessimistes" puisque ne considérant que les valeurs maximales.

Partant de ces méthodes (la dernière surtout) les ingénieurs développèrent plusieurs procédés de calcul butant tous sur deux problèmes majeurs :

1/ La connaissance des caractéristiques exactes des séismes, mais surtout celles concernant directement les structures, ce qui revient à déterminer pour chaque site certaines grandeurs relatives au mouvement local à son niveau, ceci passe nécessairement par une collecte de données en quantité et ceci le plus rapidement possible.

2/ La fiabilité des modèles mathématiques développées pour reconstituer le comportement réel des structures soumises à des excitations réelles.

## I. Formulations générales :

L'équilibre peut être énoncé pour une structure par plusieurs formulations, elles aboutissent toutes aux mêmes formules le décrivant.

Le choix de la formulation se fait suivant le type de problèmes : Pour les simples, on préfère la formulation **NEWTONIENNE** et égalant la somme des forces (pesanteur, élastique..) à la force d'inertie :

C'est le principe de **d'ALEMBERT**.  $\Sigma \text{ Forces} = M \gamma (t)$

Pour les systèmes complexes, comprenant plusieurs degrés de liberté, on adopte les formulations énergétiques : formulation de **HAMILTON** ou le principe des travaux virtuels.

Le premier cas exprime l'égalité entre la somme des variations entre énergie cinétique et énergie potentielle et les travaux effectués par les forces non conservatives, on fait intervenir dans ce cas les notions d'énergie cinétique et énergie potentielle.

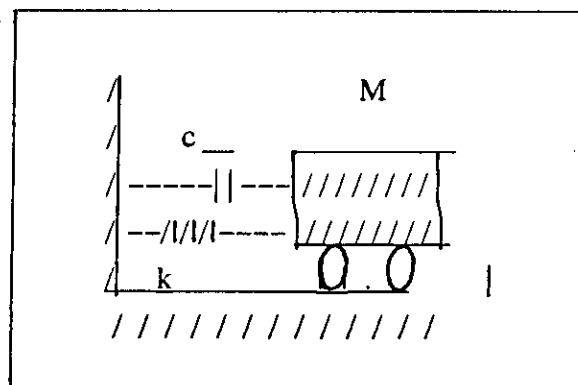
$$\int (E_{\text{cinétique}} - E_{\text{potentielle}}) dt + \int \Delta W_{\text{Forces conserva}} dt = 0$$

Dans le 2ème cas , on fait déplacer tous les points de la structure de manière à respecter la configuration des liaisons , on égalera ensuite la somme des travaux de chaque point à 0 .

$$\sum^n \text{ Forces}_i \times \text{déplacements}_i = 0$$

### I.1 Modélisation d'un système simple :

Soit le système représenté par le schéma :



Le décompte des forces est le suivant :

- une force de rappel élastique due au ressort :

$$f_e = k U.$$

- une force représentant l'amortissement du mouvement :

$$f_{am} = C. U'$$

- une force d'inertie  $f_i$ :

$$f_i = m. U''$$

- Les autres forces extérieures sont représentées par :

$$f_{ex}(t)$$

La loi d'équilibre exigera donc :

$$kU + CU' + mU'' = f_{ex}(t).$$

Bien sûr, dans le cas de systèmes à grand degré de liberté  $k$ ,  $M$  et  $C$  seront des matrices.  $U, U', U''$  et  $f_{ex}(t)$  des vecteurs.

### I.2 - Calcul des termes d'inertie :

Les forces d'inertie résultent de l'accélération propre de la masse, pour cette raison on définit les matrices de masse  $[M]$ .

Le problème de la modélisation de cette quantité demeure posé puisque physiquement le concept de masse est un concept continu que l'on n'a pu correctement rétablir mathématiquement, ainsi deux types de représentations peuvent être définies .

a/ Représentation en matrice concentrée :

Se traduisant par une matrice diagonale et signifiant l'indépendance totale des concentrations des masses les unes par rapport aux autres.

b/ Représentation en matrice cohérente :

Qui traduit la dépendance entre les concentrations des masses, c'est à dire que si une masse subit une accélération, elle influera sur les autres.

Les calculs se faisant par éléments finis  $[M]$  aura la forme :

$$\varphi \int_{\text{volume}} [N]^T [N] dv : \text{ Dans le cas d'une représentation "cohérente".}$$

$$1/N \int_{\text{volume}} \varphi dv : \text{ Dans le cas d'une représentation en matrice concentrée.}$$

La matrice  $[M]$  dépend directement de  $[N]$ , le nombre de points devra intégrer dans notre cas un polynôme d'ordre 4 ce qui est possible avec 9 points d'intégration.

## II – Les méthodes de résolution :

Les équations du type  $MU'' + CU' + KU = F(t)$  sont traitées suivant deux axes principaux :

1/ L'axe où domine l'intégration pure de l'équation différentielle : ce sont les méthodes d'intégration directes.

2/ L'axe préférant un changement d'espace, c'est à dire celui qui permet de localiser des informations concentrées pouvant résoudre le problème : ce sont les méthodes de superposition modales.

### II.1 – L'intégration directe des équations :

Ces méthodes sont subdivisables aussi en deux groupes :

– Un premier groupe se basant sur la forme des membres comportant les termes dérivées (différences finies, intégration pas à pas)

– Le deuxième groupe comportant la méthode des éléments finis en augmentant d'une dimension la taille du problème.

**II.1.1 – La méthode des éléments finis :** peut traiter ce type de problème mais est généralement déconseillée, vus les volumes de calcul qu'elles impliquent, elle peut s'avérer néanmoins efficace dans un certain type de problème (8) (p 400).

**II.1.2 – La méthode d'intégration "pas à pas" :** basée sur le principe d'intégration sur chaque intervalle, la méthode exige une forme ou fonction accélération à intégrer.

$$\text{Soit : } X''(t + \theta) = X'_t + f(\theta)$$

L'intervalle étant limitée par  $t$  et  $t + \theta$ .

Les vitesses auront les formes :  $X'(t + \theta) = X'_t + X''_t \theta + \int_0^\theta f(\theta') d\theta'$

Les déplacements :  $X(t + \theta) = X_t + X'_t \theta + X''_t \theta^2/2 + \int_0^\theta \int_0^{\theta'} (f(\theta'') d\theta'') d\theta'$ .

Le problème réside donc dans la détermination de la fonction  $f(\theta)$  adéquate.

On propose (8) p 401 généralement la forme :

$$f(\theta) = \alpha(X''_{t+h} - X''_t) (\theta/h)^n$$

$h$  : longueur de l'intervalle d'intégration =  $\tau$

Les expressions des vitesses et des déplacements seront :

$$X'_{t+h} = X'_t + X''_t h + \alpha/n+1 (X''_{t+h} - X''_t) h$$



$$x_{t+h} = x_t + x'_t h + x''_t h^2 / 2 + \alpha / (n+1)(n+2) \cdot (x''_{t+h} - x'_t) h^2.$$

Ce schéma est dit de "NEWMARK"

Une modification de la méthode permet le passage au schéma de "WILSON", il impose le calcul non à l'instant (t+h) mais en  $t+(1 + \epsilon)h$ , les caractéristiques au 1er temps dans tous les schémas numériques, des conditions sont donc imposées pour l'assurer sur les pas de temps à adopter.

## II.2 - La superposition modale:

La méthode consiste à intégrer les équations du système (différentielles) une par une, ceci revient à exiger le changement de base du système ou encore la projection des matrices K,C,M sur un espace de façon à avoir des formes regroupant les équations modifiées permettant l'intégration. C'est la phase de découplage des équations.

Soit le système non amorti représenté par l'équation :

$$[K]\{U\} + [M]\{U''\} = \{F\}$$

[K] : matrice de rigidité globale

[M]: matrice de masse.

Le but à atteindre est d'écrire chaque équation avec comme nombre de variable, une seule pour ce faisant un changement de variable  $\{U\} = [X]\{V\}$

[X] étant une matrice de passage entre les deux systèmes et constituée de vecteurs propres du 1er système (ce sont aussi ceux du second).

$$[X] = [\{X_1\} \dots \dots \dots \{X_n\}].$$

n : degré de liberté.

La détermination des vecteurs propres est subordonnée à la détermination des valeurs propres du système:

Supposons un mouvement harmonique de notre système suivant une loi :

$$\{U\} = \{U_0\} e^{i\omega t}$$

En remplaçant dans l'équation du système, on aura en vibration libre :

$$\omega^2 [M]\{U_0\} e^{i\omega t} + [K]\{U_0\} e^{i\omega t} = 0.$$

d'où :  $[K - \omega^2 M]\{U_0\} = 0$

Une solution triviale de ce système est le vecteur  $\{U_0\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

Pour aboutir à d'autres solutions, il faudra annuler le déterminant :

$$|K - \omega^2 M|_{\det} = 0$$

C'est l'équation aux fréquences du système. Cette équation fournira N solutions ( $\omega^2_i$ ) qui, assemblés dans le vecteur :

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \dots \\ \omega_N \end{bmatrix} \text{ forment le vecteur des fréquences } \omega_i$$

A chaque mode correspond une fréquence  $\omega_i$ , leur classement se fait suivant un ordre croissant.

Pour déterminer le vecteur  $\{U_0\}$  d'amplitude, revenons au système :

$$(K - \omega_i^2 M) \{U_{0i}\} = 0$$

$\{U_{0i}\}$  étant l'amplitude propre au mode i.

Un problème se pose néanmoins, vu que le système présente une singularité. Il sera contourné en imposant la 1ère valeur du vecteur  $\{U_{0i}\}$ , ceci revient à retrancher de la matrice  $(K - \omega_i^2 M)$  la 1ère colonne et la 1ère ligne, on aura à résoudre un sous système.

L'équation retranchée sera remplacée par l'équation de normalisation. Pour chaque mode i sera déterminé donc  $\{U_{0i}\}$

La matrice  $[U_0] = [ \{U_{01}\} \dots \{U_{0n}\} ]$ , représentera tous les modes vibratoires.

Parmi les propriétés des matrices de vibrations propres, on peut citer :

1/ *L'orthogonalité :*

Par rapport à [K] :  $\{U_{0j}\} [K] \{U_{0i}\} = 0 \quad i \neq j$

(2) p. 189 Par rapport à [M]

$$\{U_{0j}\} [M] \{U_{0i}\} = 0 \quad i \neq j$$

Les deux vecteurs sont dits respectivement :

[K] ou [M] orthogonaux .

2/ *La normalisation :* est une caractéristique des vecteurs propres utilisée pour déterminer leurs amplitudes. Cette normalisation se fait dans notre cas par rapport à la matrice masse, c'est à dire en satisfaisant :

$$\{U_{0i}\} [M] \{U_{0i}\} = 1.$$

**\*\* Remarque :** Si les matrices de vibration  $[U_0]$  satisfont aux conditions d'orthogonalité et de normalisation, on dit que les vecteurs propres sont orthonormés.

En remplaçant  $\{U\}$  par son expression dans :

$$[K]\{U\} + [M]\{U''\} = \{F\}.$$

On aura :

$$[K][X]\{V\} + [M][X]\{V''\} = \{F\}$$

avec  $[X] = [U_0]$ .

En multipliant l'équation précédente par  $\{U_{0n}\}^T$ , on obtient :

$$\{U_{0n}\}^T [K][U_0]\{V\} + \{U_{0n}\}^T [M][U_0]\{V''\} = \{U_{0n}\}^T \{F\}$$

Moyennant les caractéristiques de normalisation et d'orthogonalité, on aura :

$$\{U_{0n}\}^T [K]\{U_{0n}\}V_n + \{U_{0n}\}^T [M]\{U_{0n}\}V_n'' = \{U_{0n}\}^T \{F\}.$$

Cette équation représente le mouvement du système au mode  $n$  que l'on résoudra facilement puisqu'étant une équation différentielle à une variable  $V_n$ , c'est l'équation en coordonnées principales.

Le résultat total est obtenu en assemblant les solutions propres à chaque mode, d'où le nom de Superposition des modes.

### *Intégration de l'amortissement :*

L'étude des systèmes précédents laissent supposer un mouvement continu, ce qui n'est pas le cas puisque toute structure de quelque type de matériau soit-elle, atténue les mouvements.

L'hypothèse de base pour représenter cet amortissement est sa modélisation par une force visqueuse donc proportionnelle à la vitesse, l'équation sera du type :

$$[M]\{U''\} + [C]\{U'\} + [K]\{U\} = \{F\}.$$

$[C]$  : matrice d'amortissement.

L'écriture en coordonnées principales de cette équation donne :

$$\{U_{0n}\}^T [M]\{U_{0n}\}V_n'' + \{U_{0n}\}^T [C]\{U_{0n}\}V_n' + \{U_{0n}\}^T [K]\{U_{0n}\}V_n = \{U_{0n}\}^T \{F\}.$$

Le coefficient d'amortissement est défini par :

$$\zeta_n = \left[ \frac{\{U_{0n}\}^T [C] \{U_{0n}\}}{2 \{U_{0n}\}^T [M] \{U_{0n}\}} \right] \left[ \frac{\{U_{0n}\}^T [K] \{U_{0n}\}}{\{U_{0n}\}^T [M] \{U_{0n}\}} \right]^{1/2}.$$

Il est propre à chaque mode.

Pour justifier le passage à la dernière équation, on a supposé que la matrice [C] pouvait satisfaire la condition d'orthogonalité des modes. Pour ce faire, on propose (8) p359), les formes :

$$[C] = [M] \sum_n a_n (M^{-1}K)^n.$$

On se contente néanmoins d'une combinaison :

$$C = a_0 M + a_1 K.$$

Dans la plupart des cas, ce type d'amortissement est dit de "Rayleigh" ([2] P 199).

**\*\* Remarque :** Vue la lourdeur des calculs qu'entraîne la procédure ci-dessus exposée, on préfère généralement introduire directement les coefficients  $\zeta_i$ .

### *Les lois de superposition :*

Le calcul pour chaque mode fait, nous sera important d'évaluer la réponse globale de la structure, c'est-à-dire la réponse englobant les réponses de chaque degré de liberté.

La première estimation : La plus évidente est celle obtenue par sommation arithmétique des réponses de chaque mode.

$$\{U\} = \sum_{i=1}^n \{U_i\}$$

La seconde estimation : la plus utilisée

$$(\{U_T\})^2 = \sum_{i=1}^n (\{U_i\})^2$$

En plus de sa concordance avec les résultats réels, l'argument majeur de cette estimation est le fait qu'elle tient compte de l'aspect d'indépendance des modes. (8) p360.

### III. Les problèmes aux valeurs propres :

Vu la puissance de la méthode de superposition , on s'est naturellement intéressée aux procédés pouvant faciliter les calculs de ces caractéristiques, on essayera de résumer ces procédés après avoir expliqué plus profondément quelques concepts essentiels.

#### III.1 - *Notions de modes, vecteur et valeur propre :*

Ces trois notions peuvent résumer à elles seules la nature du comportement des structures, elles définissent un aspect (ou forme) d'un mouvement potentiel du système.

"Un mode propre et un mode de déformation des structures libres non soumis à des excitations et correspondant à des efforts de la structure, équilibrant des forces d'inertie (de masse) à une variation sinusoïdale" (8) p 357.

La nature de la déformation est représentée par les vecteurs propres, ils regroupent pour un mode donné l'ensemble des amplitudes de déplacements des points choisis comme représentation directe de la structure.

#### III.2- *Méthodes de résolution des problèmes aux valeurs propres :*

La détermination des modes de vibrations demeure le problème principal auquel sont confrontés leurs efforts dans divers domaines (Algèbre , Physique Vibratoire, Mathématiques Appliquées.) pour maîtriser les procédures de calcul adéquates, l'aboutissement (jusqu'à maintenant) peut être résumé en quatre groupes d'Algorithmes :

- Les méthodes itératives vectorielles ;
- Les méthodes de transformation ;
- Les méthodes itératives polynomiales ;
- Les méthodes de résolution des polynômes caractéristiques par les suites de **STURM**.

Il est à remarquer que :

\* Toutes les méthodes sont itératives vu que le problème initial l'est (détermination des solutions d'une équation à polynôme de degré élevé )

\* Les deux derniers types de méthodes se ressemblent et peuvent être groupés en un seul.

On exposera dans ce qui suivra , un Algorithme de chaque groupe en expliquant ses spécificités ( avantages, inconvénients, situation d'utilisation adéquate.).

### III.2.1 - Méthode de JACOBI : [8] p 398 ; [3] p 395.

La méthode est applicable aux systèmes générants des matrices [K] et [M] définies positives, elle consiste à transformer la base de leur écriture de manière à avoir à la fin des matrices diagonales. A partir des termes des diagonales, sont déduites les valeurs propres :

$$\omega^2_i = K_{ii} / M_{ii} .$$

La diagonalisation des matrices exige un processus itératif se basant sur les valeurs des termes non diagonaux de [K] et [M] ( le but étant de les annuler ).

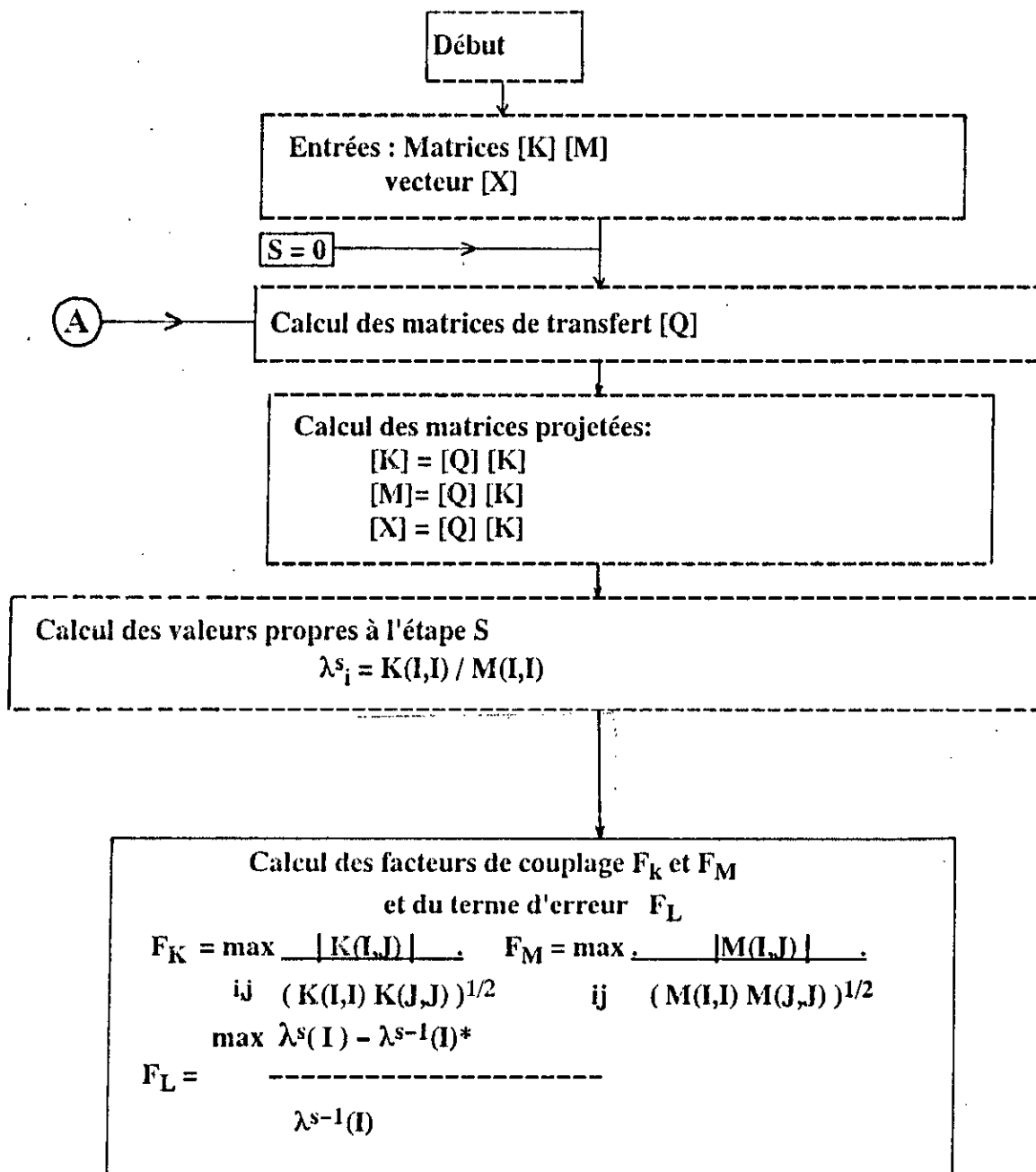
Pour ce faire, on calcule à chaque itération (k) , les termes d'une matrice de passage [Q]<sub>k</sub>, chaque itération permettant à deux termes non diagonaux de [K] et [M] d'approcher la valeur nulle.

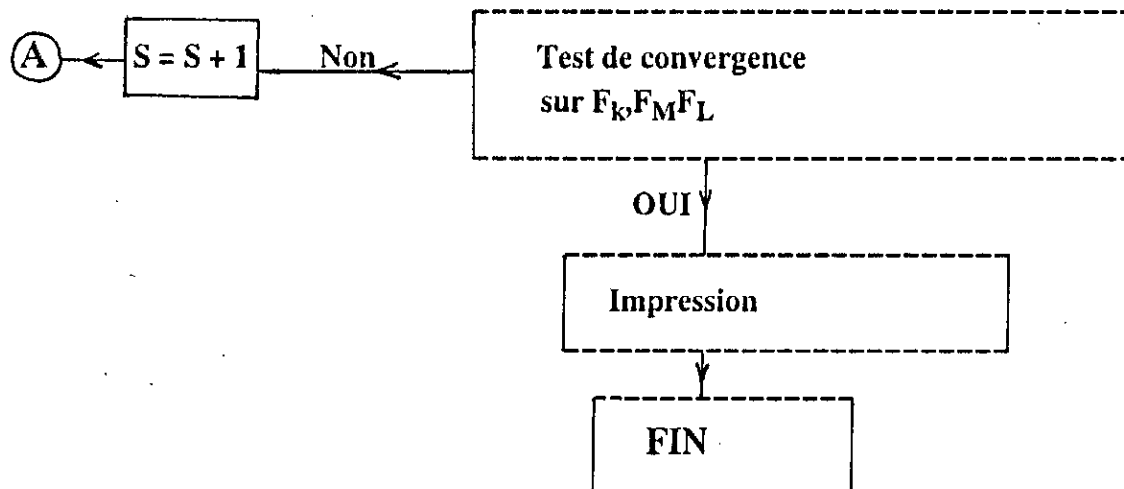
Les matrices de passage conservent la symétrie des matrices mais n'assurent pas leurs caractéristiques initiales de stockage, c'est à dire que si [K] et [M] sont stockées d'une certaine manière (bande ou ligne de ciel) , les matrices transformées ne gardent plus ces caractéristiques, ce qui limite considérablement le champ d'utilisation de la méthode le réduisant aux systèmes à la petite dimension.

Elle présente cependant, l'avantage de pouvoir traiter en même temps les matrices [K] et [M], elle évite donc une standardisation des problèmes.

Organigramme de calcul :

Méthode de JACOBI





### III.2.2 - Méthode de l'itération inverse : [7] (p 228)

[6]

Elle permet de calculer la plus petite valeur propre  $\omega^2_1$  d'un système, elle n'exige aucune condition sur les matrices [K] et [M].

La vitesse de convergence du processus de l'itération inverse dépend fortement de l'éloignement des  $\omega^2_j$  les uns des autres ( plus il est grand , plus la convergence est rapide).

Un décalage ('shifting')  $\lambda_0$  peut améliorer sensiblement la convergence s'il est bien choisi.

Une procédure de recherche successive peut être appliquée en éliminant le mode déjà déterminé d'où réduction au fur et à mesure de la dimension du système , on dit dans ce cas que l'on a appliqué une déflation.

L'indépendance des modes doit être assurée en forçant le vecteur propre résultant de la dernière itération à rester [M] – orthogonal aux vecteurs déjà trouvés, un processus d'orthogonalisation doit accompagner la procédure de déflation.

Le principe du décalage doit être revu dans le cas de la déflation , vu que les valeurs à déterminer diffèrent suivant l'étape.

#### Algorithme méthode de l'itération inverse :

A/ Décomposer  $[K] = [L][S]$

B/ Choix initial du vecteur propre  $\{U_0\}$

C/ Calcul de  $\{F\} = [M] \{U_0\}$



**Début des itérations  $i = 1$**

résoudre  $[L][S][U_0^{i+1}] = \{F^i\}$

calculer  $\{F\} = [M] \{U_0^{i+1}\}$ .

calcul de la valeur propre :

$$\lambda^{i+1} = (\{U_0^{i+1}\}^T \{F^i\}) / (\{U_0^{i+1}\} \{F\}).$$

$$F^{i+1} = [1 / \{U_0^{i+1}\}^T \{F\}]^{1/2} \{F\}$$

**Test de convergence : oui revenir étape (C)**

**non étape suivante**

**D/ Vecteur propre**

$$\{U_0\} = [1 / \{U_0^{i+1}\}^T \{F\}]^{1/2} \{U_0^{i+1}\}$$

### III.2.3 - Méthode de calcul direct des zéros du déterminant : [8] p 399.

Consiste à développer les termes du déterminant caractéristique. Ce développement se fait après triangularisation de la matrice  $(K - \omega^2 M)$ , le déterminant étant après ce, le produit des termes de la diagonale.

Une correction est faite à chaque étape par :

$$(\omega^2)_{k+1} = (\omega^2)_k + \frac{\det(K - \omega_k^2 M) (\omega_k^2 - \omega_{k-1}^2)}{\det(K - \omega_k^2 M) - \det(K - \omega_{k-1}^2 M)}$$

jusqu'à avoir  $\omega_{k+1}^2 = \omega_k^2$ .

La détermination de  $\omega^2$  permettra le calcul du vecteur propre associé.

La méthode permet le calcul d'une seule valeur généralement et ne donne aucune autre information sur elle.

Le risque d'instabilité est grand si ce schéma est appliqué à des systèmes dont les valeurs propres sont proches les unes des autres.

Une combinaison de la procédure avec d'autres, permet une amélioration considérable.

### III.2.4 - Méthode de la séquence de STURM : [3] p 391

Partant du principe des suites de STRUM, cette méthode dichotomique permet la localisation des valeurs propres, localisation qui peut être poussée jusqu'à la détermination moyennant l'augmentation de la précision.

### *Principe des suites de STRUM :*

En fixant une valeur  $\omega^2_0$  et en calculant les mineurs principaux de la matrice  $[K - \omega^2 M]$ , on peut déterminer le nombre de valeurs propres vérifiant :  $\omega^2 < \omega^2_0$ .

Le calcul des mineurs principaux se fait après triangularisation , ils seront égaux aux produits successifs des termes de la diagonale de la matrice triangularisée.

Le nombre de changement de signe dans la série des mineurs principaux est égal au nombre de valeurs propres  $\omega^2 < \omega^2_0$ .

En fixant une valeur  $\omega^2_0$ , on déterminera le nombre de valeurs propres  $\omega^2 < \omega^2_0$  , s'il est  $> 1$  on diminue  $\omega^2_0$  et on refait l'opération jusqu'à n'avoir aucune valeur propre au dessous de  $\omega^2_0$  . On aura donc localisé une valeur propre .

Il est visible que la méthode est "onéreuse" en temps de calcul, donc déconseillé pour les systèmes de grande taille, elle ne peut pas dans ce cas aussi être utilisée parce qu'elle demande une mise en oeuvre spéciale.

### **IV. Application aux calculs des grands systèmes :**

L'approche adoptée généralement est d'essayer de modéliser les structures avec le plus grand nombre de degrés de liberté possible pour reproduire son comportement d'une façon idéale et c'est à ce niveau qu'interviennent les contraintes de calcul ( en temps donc en coût ). En effet l'augmentation du nombre de degrés de liberté engendrera la croissance des tailles des matrices  $[M]$  et  $[K]$  qui quelque soient les conditions de leur stockage, prendront de plus en plus d'espace et augmenteront le nombre d'opérations surtout en calcul dynamique qui voit se répéter plusieurs processus de résolution.

A/ Dans le but de réduire les surcoûts moyennant certaines concessions ( pertes d'informations) , on propose en général dans le calcul dynamique de réduire les tailles des matrices  $[K]$  et  $[M]$  , mais en prenant garde de ne pas altérer certaines données nécessaires: les fréquences propres .

Le principe est le suivant : les données concernant les séismes donnent une certaine fourchette de périodes propres aux phénomènes , on a donc une idée sur les valeurs propres aux constructions qui sont excitées (ce sont les plus petites) , ce qui constitue le premier critère de sélection des modes . [8].

B/ La nature de l'équation  $[K]\{U_0\} = \omega^2[M]\{U_0\}$  ne permet pas suivant le mode de stockage de  $[K]$  et  $[M]$  (en ligne de ciel) de résoudre le problème standard aux valeurs propres :

$$[A]\{U_0\} = \omega^2[I]\{U_0\}$$

Puisque ceci impliquerait l'inversion de  $\{M\}$ , ce qui ne peut être envisageable.

Les deux points A/ et B/ laissent envisager une solution de la forme suivante :

- Réduire les tailles de  $[K]$  et  $[M]$  en les écrivant dans une autre base par exemple, ce qui revient à les projeter sur un autre espace .
- Calcul des premières valeurs propres (donc fréquences) du système projeté.
- Tester les valeurs calculées sur l'espace originel. On devra adopter un processus itératif qui porte le nom de méthode du sous espace.

#### IV.1 – Méthode du sous espace :

Cette méthode est en effet un "mariage" des méthodes de l'itération inverse, de Jacobi et une méthode de projection dite de "RITZ" qui permet l'écriture de  $[K]$  et  $[M]$  dans un espace de dimension réduite (d'où le nom de sous espace) tout en contraignant les vecteurs propres  $\{X_i\}$  à former une base orthogonale (la condition sine qua non de l'obtention des valeurs propres.).

La convergence étant assurée par l'utilisation de l'itération inverse qui ajuste au cours des itérations la base donnée par la méthode de RITZ.

**\*\*Remarque :** La méthode exige une première approximation des vecteurs propres qui influence énormément sur la suite des calculs.

[3] propose une 1ère approximation assez intéressante.

## IV.2-Description de la partie calcul dynamique du programme :

La partie "calcul dynamique" a nécessité l'ajout de deux sousroutines.

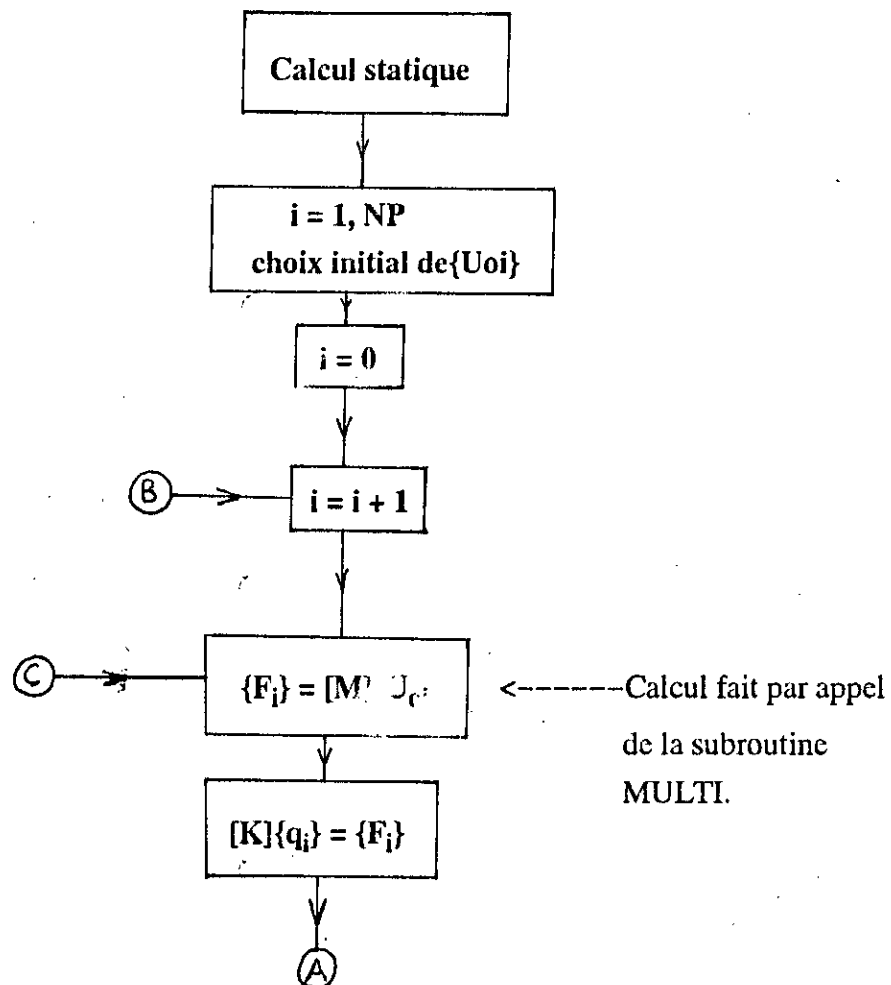
\* La première faisant le produit d'un vecteur par une matrice stockée en ligne de ciel ( sousroutine multi ).

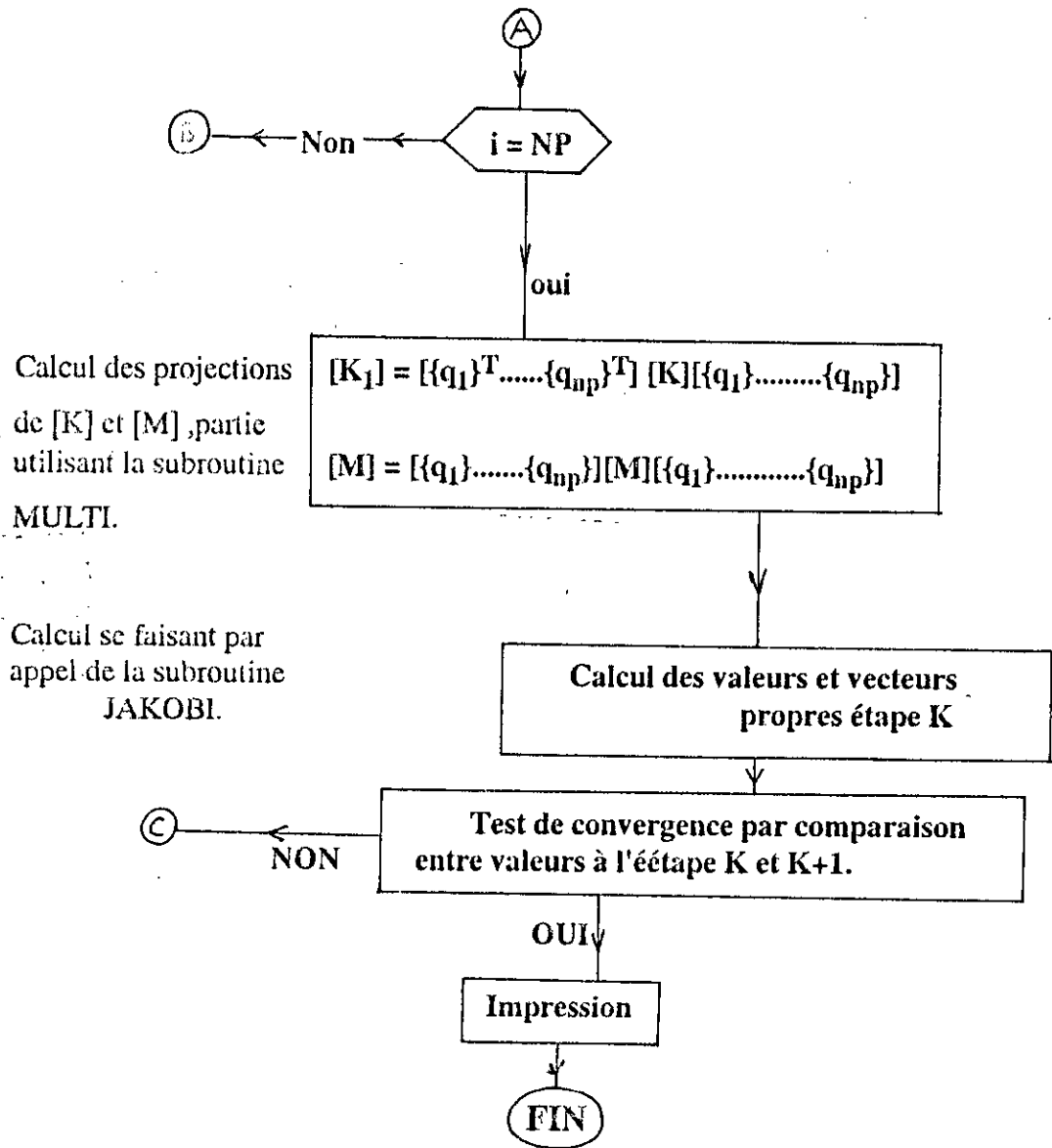
La seconde donnant les valeurs et vecteurs propres d'un système par la méthode de JACOBI .

Cette partie utilise les vecteurs de la matrice [K] avant transformation par triangularisation de même que ceux d'après.

La méthode utilisée est celle du sous espace avec réduction à une dimension  $n_p \leq 20$ . Ce choix a été fait en prenant compte du fait que pour les séismes 10 modes (les premiers) peuvent être assez représentatifs [5].

### Organigramme Méthode du sous espace .





## **CHAPITRE : 4**

### **Validation et Applications**

## VALIDATION DU PROGRAMME

La validation des modèles est l'étape précédant leur exploitation, elle décidera en fait de leur utilisation ou non.

Le programme de calcul établi (Le Trump f.e) a été testé sur un modèle simple : la Poutre. Suivant le type de chargement (ponctuel dans le cas 1, linéaire dans le cas 2) on aura à calculer les déplacements en certains points, ces résultats seront comparés par la suite à ceux donnés par la théorie.

Il est à signaler que la Validation a été faite dans le cas statique seulement car une bonne estimation des déplacements en statique signifierait une bonne modélisation de la structure donc la possibilité d'extension au calcul dynamique qui ne nécessite pas dans ses procédures un autre type de modélisation.

### EXEMPLE N° 1:

soit la poutre de la figure ci-contre(7):

\* Les 2 dimensions en plan étant du même ordre de grandeur le travail sera fait en déformation plane .

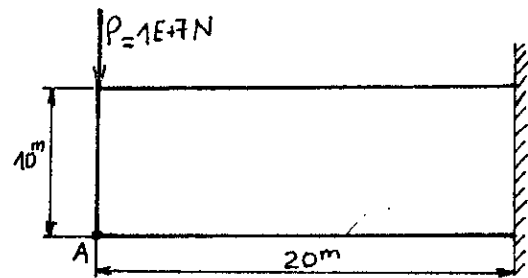
\* Le point A est pris comme repère pour comparer les valeurs théorique et calculée.

\* En prenant en compte tous les effets de la force P le déplacement théorique en A sera:

$$F_a = 3.72 \text{ mm}$$

\* En adoptant plusieurs configurations du maillage et en augmentant le nombre d'élément , on arrive à avoir des valeurs sensiblement égales à partir de 15 éléments  $F' = 3.548 \text{ mm}$  comme l'indique la figure VA-1.

\* Une erreur de 4.62% de la valeur exacte sépare celle-ci de la solution calculée ce qui est généralement acceptable.



$$E = 1E+11 \text{ N/m}^2$$

$$\nu = 0.3$$

$$\text{Epaisseur} = 1 \text{ m}$$

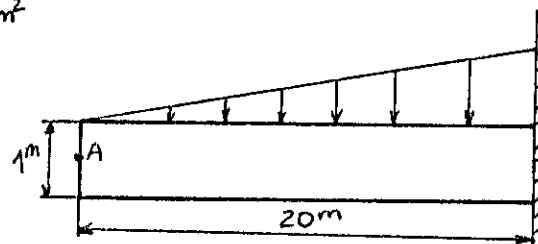
## EXEMPLE N° 2:

Cet exemple diffère du premier à 2 niveaux:

- Les dimensions: on a (fig. ci-dessous) une direction privilégiée par rapport aux deux autres, le travail se fera en contraintes planes.

$$E = 3.085 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$\nu = 0.167$$



- Le chargement : qui n'est pas concentré au niveau de A et qui permettra d'approcher la solution avec une erreur minimale.

La solution exacte est  $F_a = 0.407028 \text{ m}$

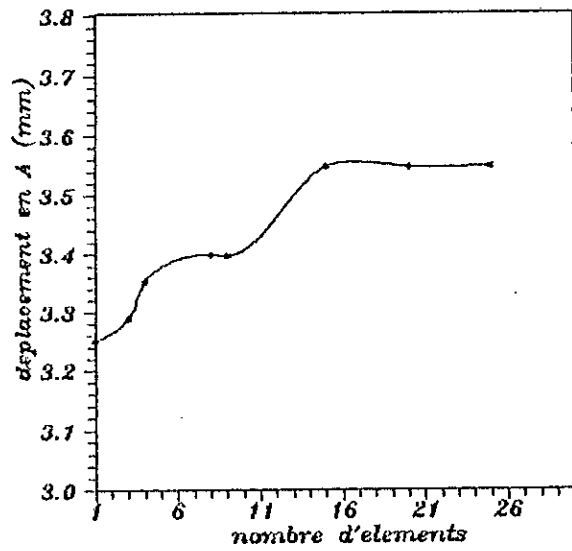
Les solutions données par le programme pour différents nombres d'éléments suivent (Fig VA-2) dans un premier temps une courbe ascendante pour se stabiliser ensuite à  $F' = 0.407 \text{ m}$  ce qui veut dire que la solution a été pratiquement atteinte.

Des deux exemples précédents on peut déjà remarquer que:

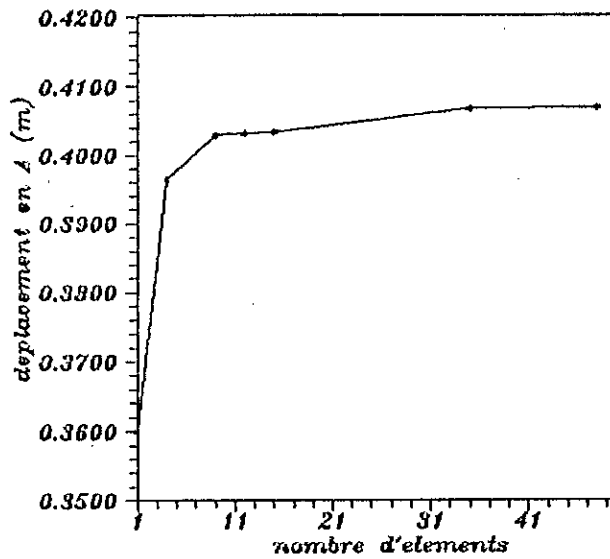
Vu les configurations régulières que peut prendre le maillage, une concentration de la force en un point perturberait la solution et demanderait une discrétisation assez fine au niveau de ce point.

Sous un chargement régulier (linéaire) le programme a permis d'atteindre la solution avec un nombre d'éléments assez petit (avoisinant 30).





COURBE DE CONVERGENCE  
exemple de validation 1.



COURBE DE CONVERGENCE  
exemple de validation 2.

Application n° 1: Barrage fictif :

- Caractéristiques:

Largeur à la base:  $bb = 37$  m

Fruit amont :  $m = 0$

Fruit aval :  $n = 0,8$

Hauteur du déversoire:  $hd = 40$  m

Largeur de la crête:  $bc = 5$  m

Hauteur totale:  $ht = 48$  m

Hauteur normale de retenue:  $hnr = 46,26$  m

Masse volumique du béton:  $= 2300$  kg/m<sup>3</sup>

Module de Young:  $E = 0,3 \cdot 10^{11}$  n/m<sup>2</sup>

Coefficient de Poisson:  $= 0,167$

Cas A : retenue pleine en déformation plane.

Cas B : retenue vide en déformation plane.

Cas C : retenue pleine en contrainte plane.

Cas D : retenue vide en contrainte plane.

- Applications :

L'application a été faite pour les cas suivants:

Cas A : retenue pleine en déformation plane.

Cas B : retenue vide en déformation plane.

Cas C : retenue pleine en contrainte plane.

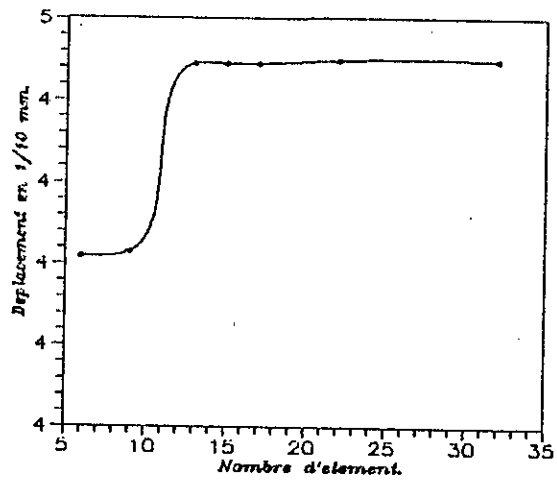
Cas D : retenue vide en contrainte plane.

On présentera dans l'application:

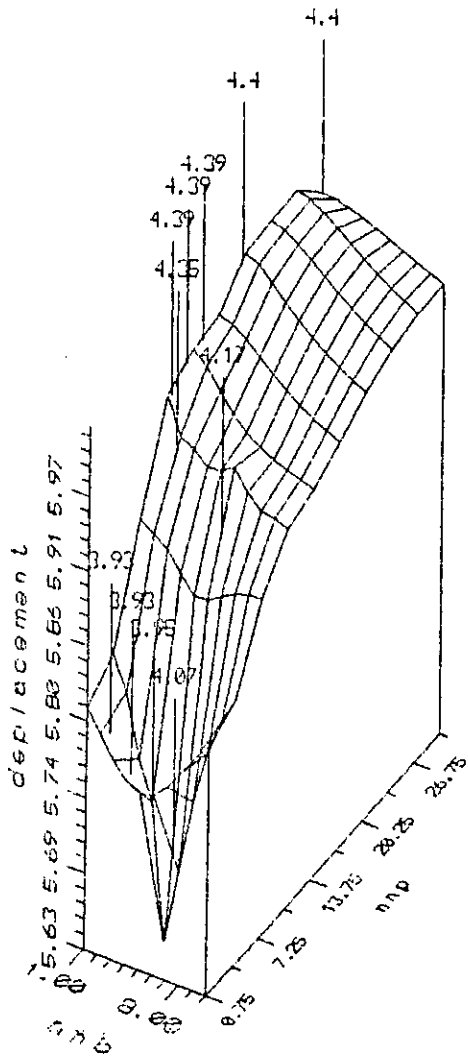
1/ La courbe de convergence du barrage.

2/ La courbe de convergence suivant la discrétisation.

3/ Les courbes d'isocontraintes maximum

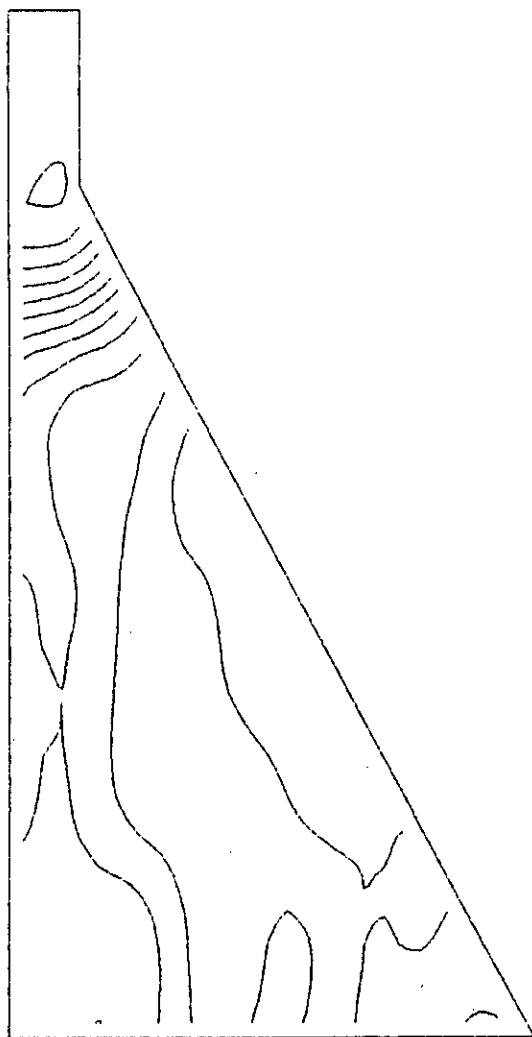


Courbe de convergence  
Barrage Fictif.

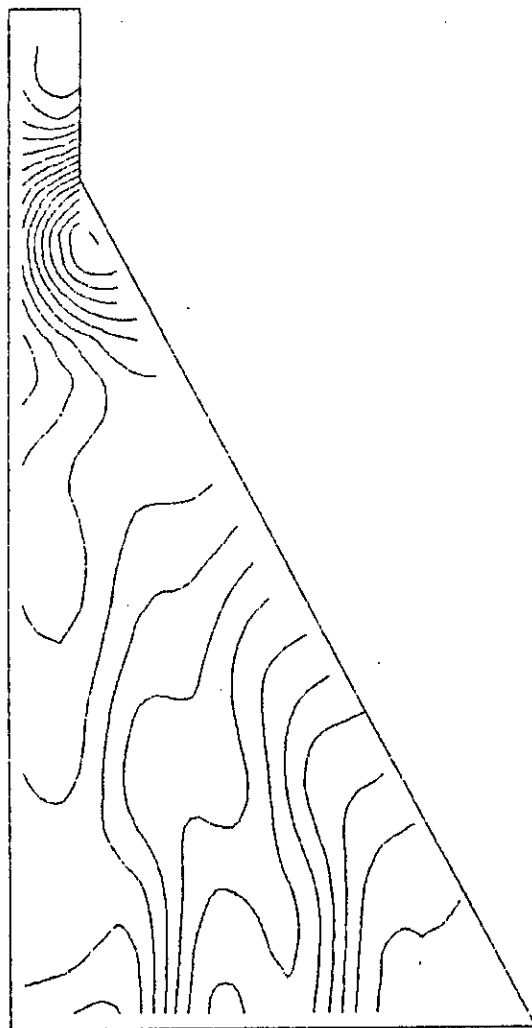


courbe de convergence

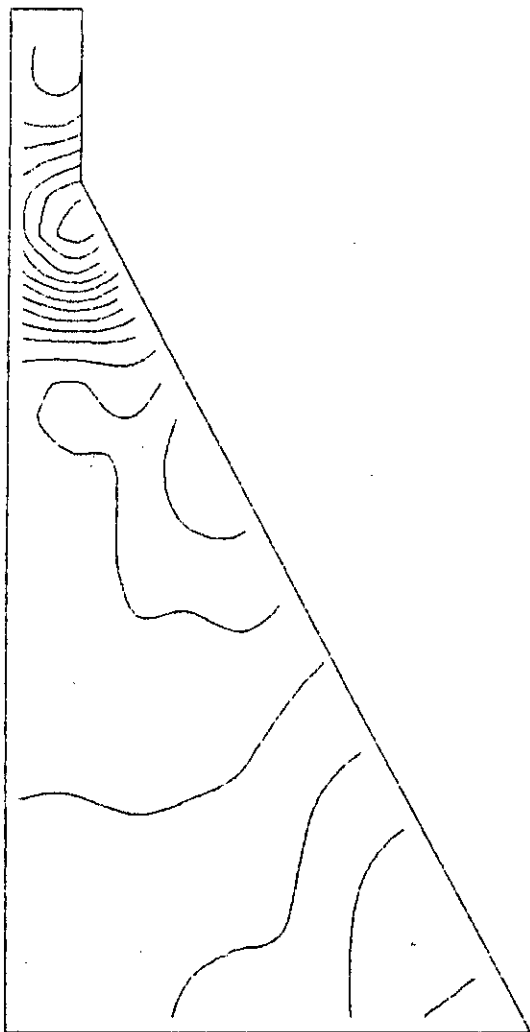
nnp: nombre d'element sur la base  
 nnp: nombre d'element sur le parment  
 barrage fictif



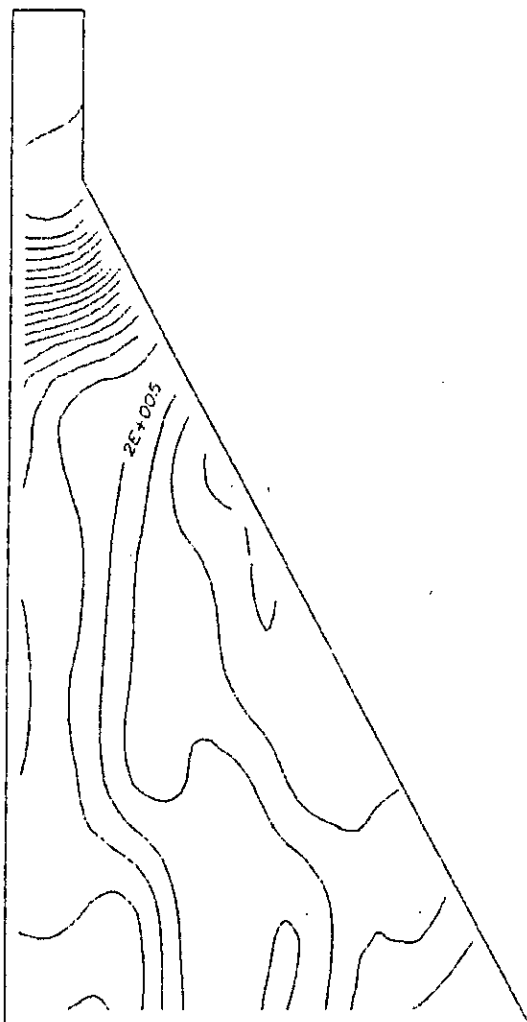
courbe d'isocontraintes  $\sigma_{\max}(n/m^2)$   
cas de retenue pleine sans seisme (dp)



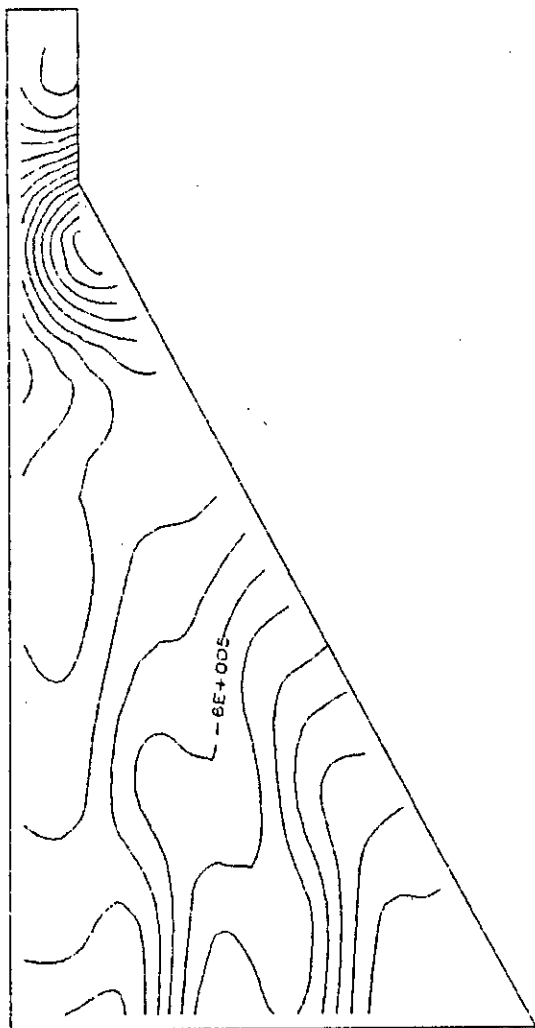
courbe d'isocontraintes  $\sigma_{\min}(n/m^2)$   
cas de retenue pleine sans seisme (dp)



courbe d'isocisaillement taux  $\max(n/m \cdot m)$   
cas de retenue pleine sans seisme (dp)



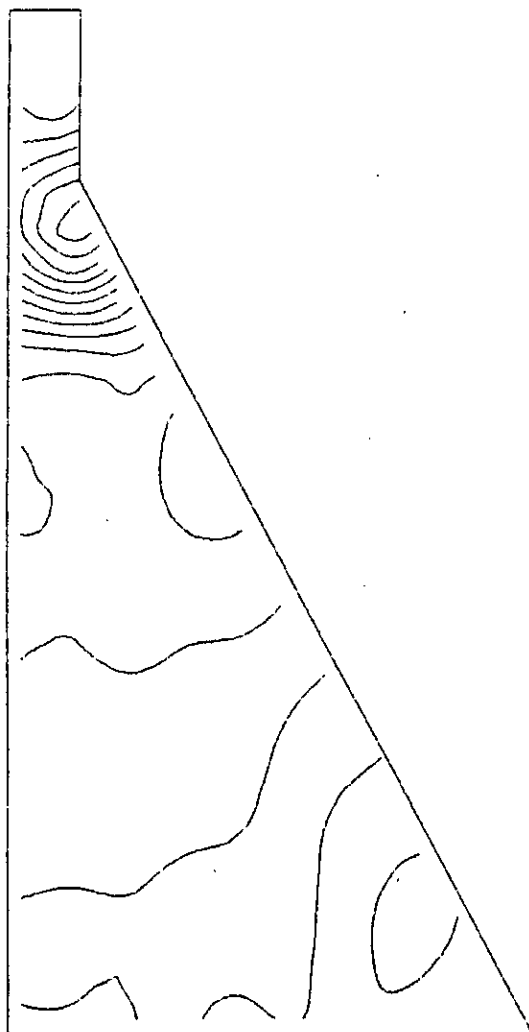
courbe d'isocontraintes sigma max(n/m²)  
cas de retenue pleine sans seisme (cp)



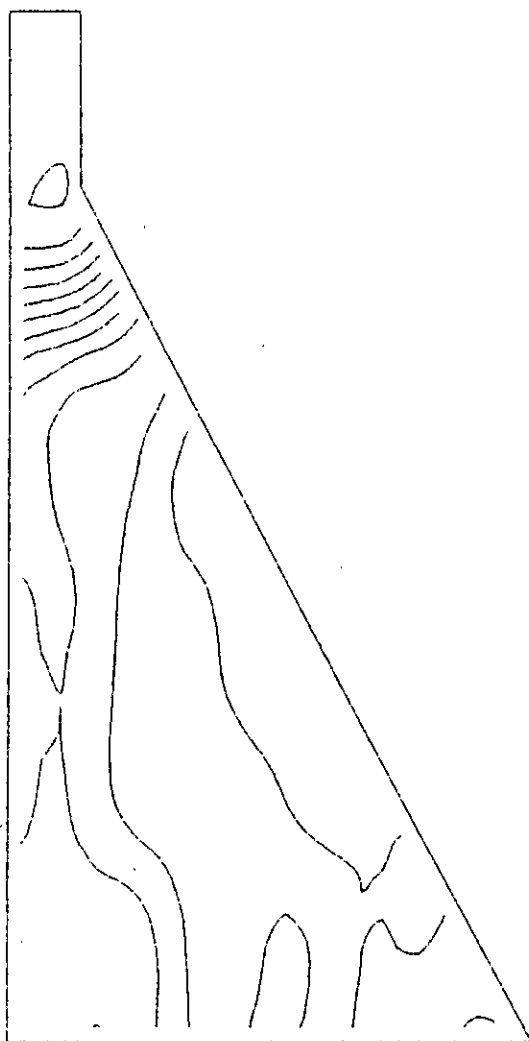
courbe d'isocontraintes sigma min(n/m\*m)

cas de retenue pleine sans seisme (cp)

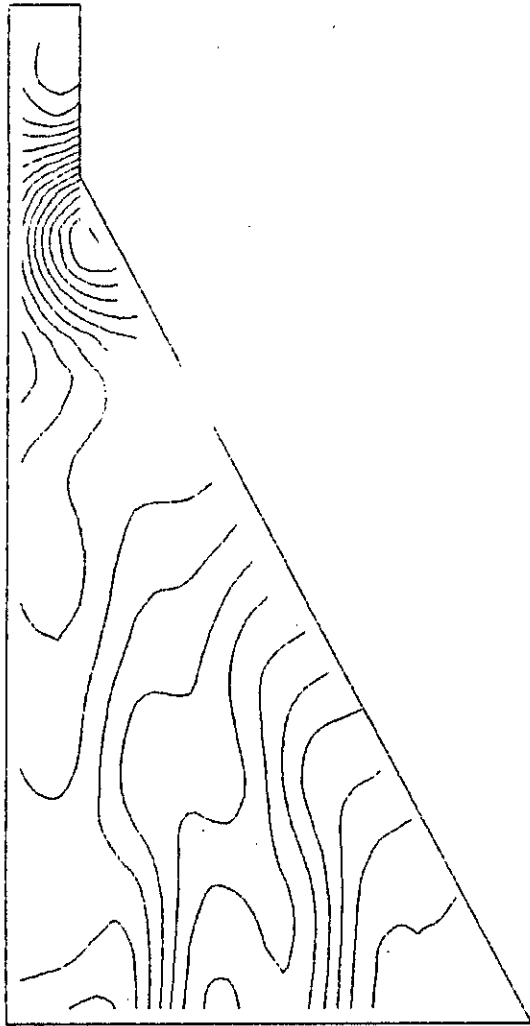




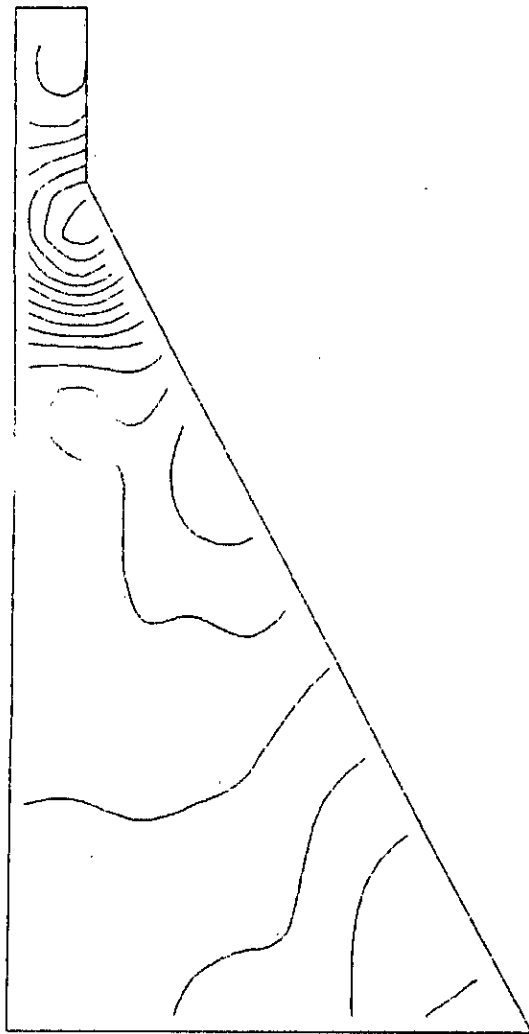
courbe d'isocisaillement taux max( $n/m+m$ )  
cas de retenue pleine sans seisme (co)



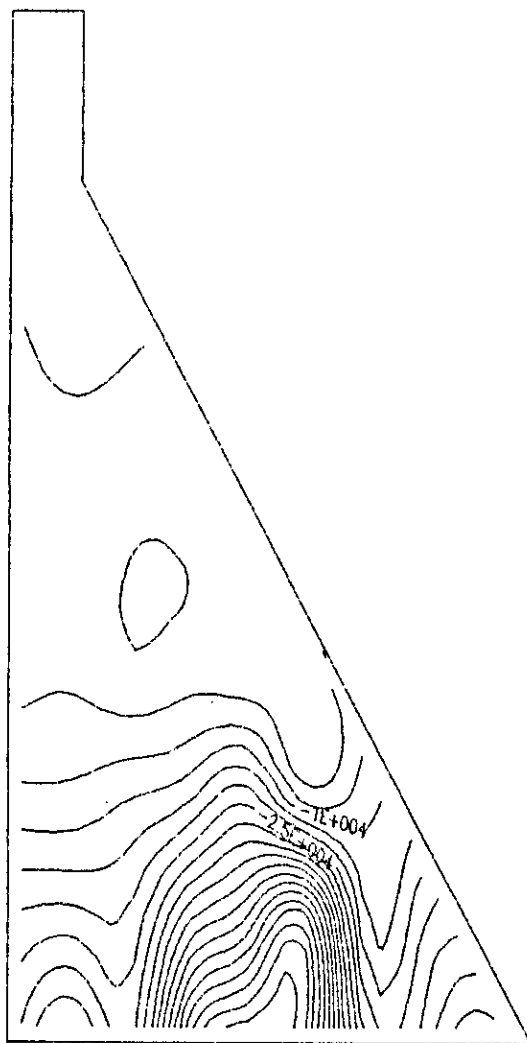
courbe d'isocontraintes  $\sigma_{\max}(n/m^2)$   
cas de retenue vide sans seisme (dp)



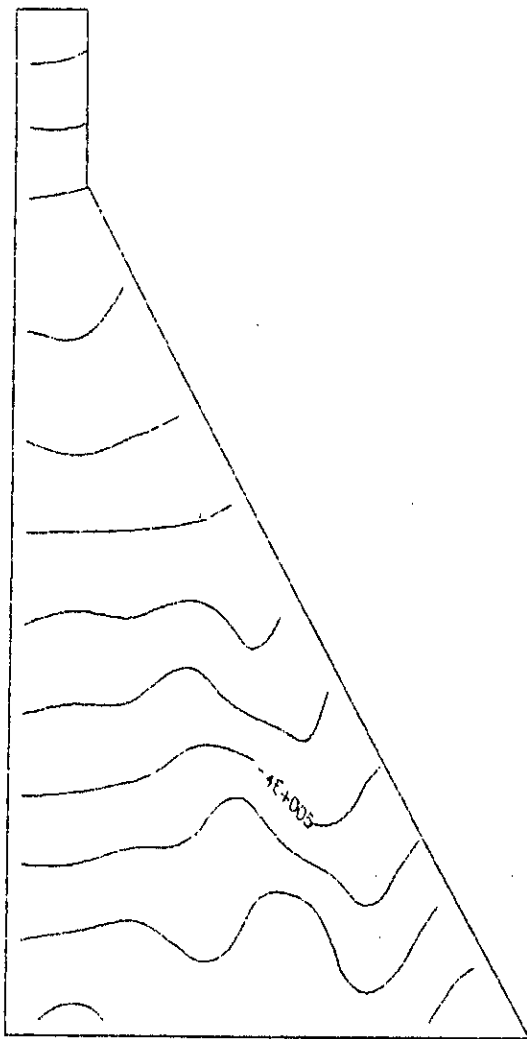
courbe d'isocontraintes  $\sigma_{min}(n/m^2)$   
cas de retenue vide sans seisme (dp)



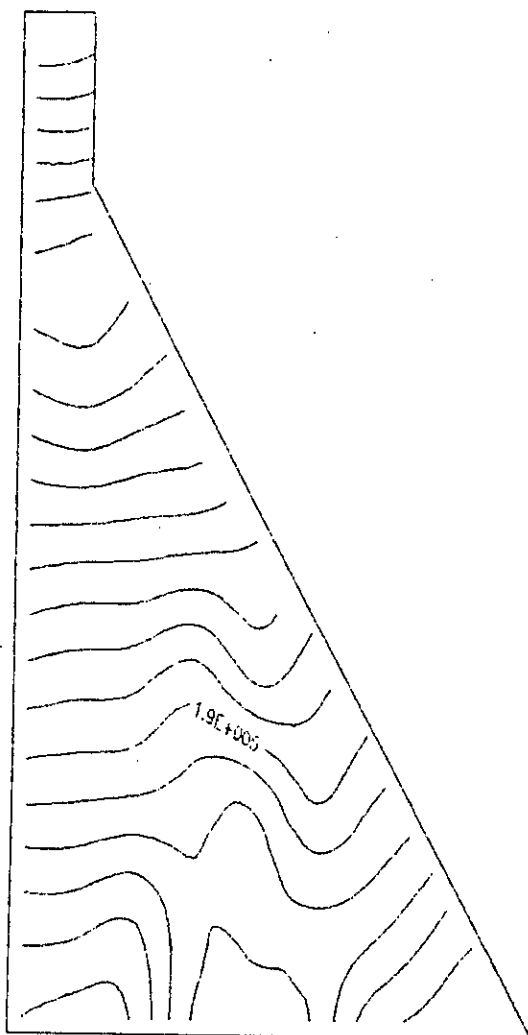
courbe d'isocisaillement taux max(n/m\*m)  
cas de retenue vide sans seisme (dp)



courbe d'isocontraintes sigma max(n/m+m)  
cas de retenue vide sans seisme (cp)



courbe d'isocontraintes  $\sigma_{\min}(n/m^2)$   
cas de retenue vide sans seisme (cp)



courbe d'isocisaillement taux  $\max(n/m+m)$   
cas de retenue vide sans seisme (cp)

## Application n° 2: Barrage de Cheurfas 2:

### - Caractéristiques:

Largeur à la base:  $bb = 52,8$  m

Fruit amont :  $m = 0$

Fruit aval :  $n = 0,77$

Hauteur du déversoir:  $hd = 62$  m

Largeur de la crête:  $bc = 5$  m

Hauteur totale:  $ht = 69$  m

Hauteur normale de retenue:  $hnr = 46,26$  m

Masse volumique du béton:  $= 2300$  kg/m<sup>3</sup>

Module de Young:  $E = 0,30581 * 10^{11}$  n/m<sup>2</sup>

Coefficient de Poisson:  $= 0,167$

### - Applications:

L'application a été faite pour les cas suivants:

Cas A : retenue pleine en déformation plane.

Cas B : retenue vide en déformation plane.

Cas C : retenue pleine en contrainte plane.

Cas D : retenue vide en contrainte plane.

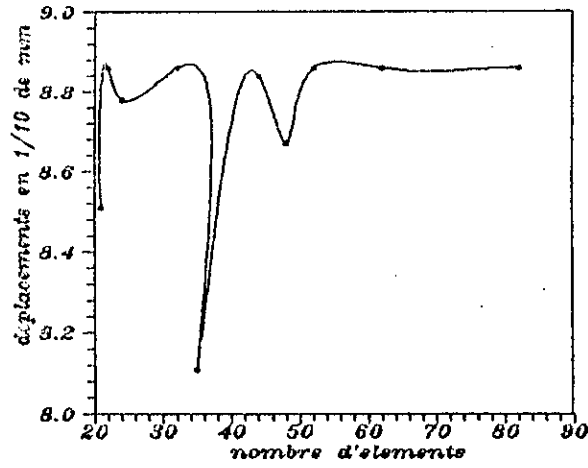
On présentera dans l'application:

1/ La courbe de convergence du barrage.

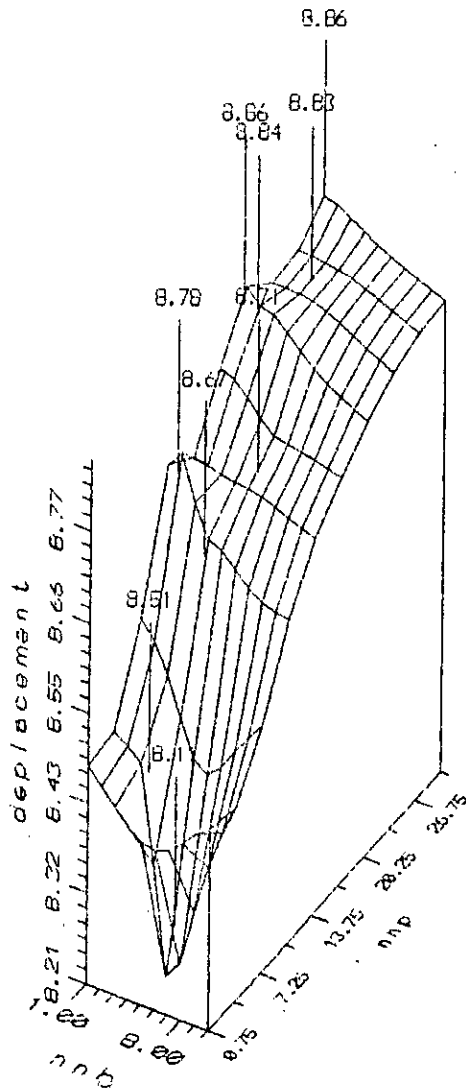
2/ La courbe de convergence suivant la discrétisation.

3/ Les courbes d'isocontraintes maximum.



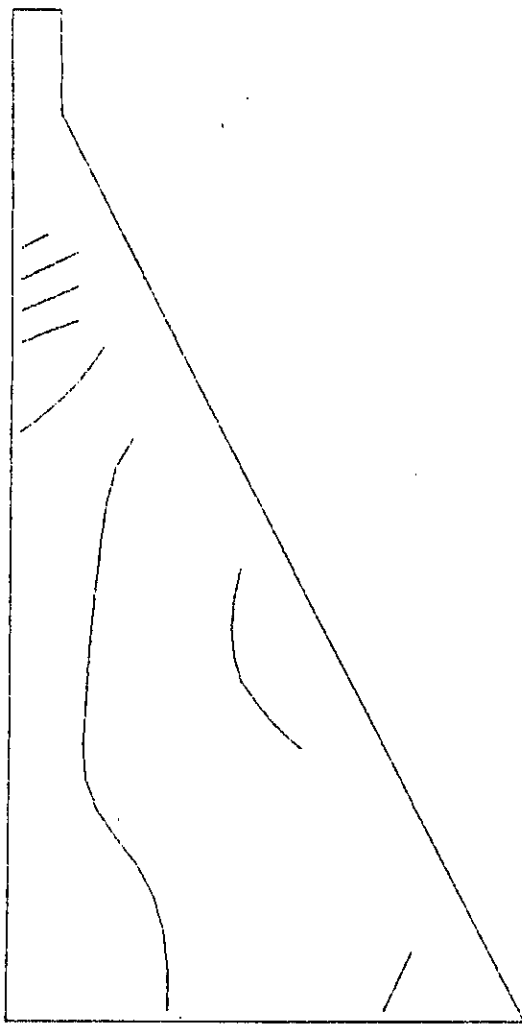


Courbe de convergence  
Barrage de Cheurfas.

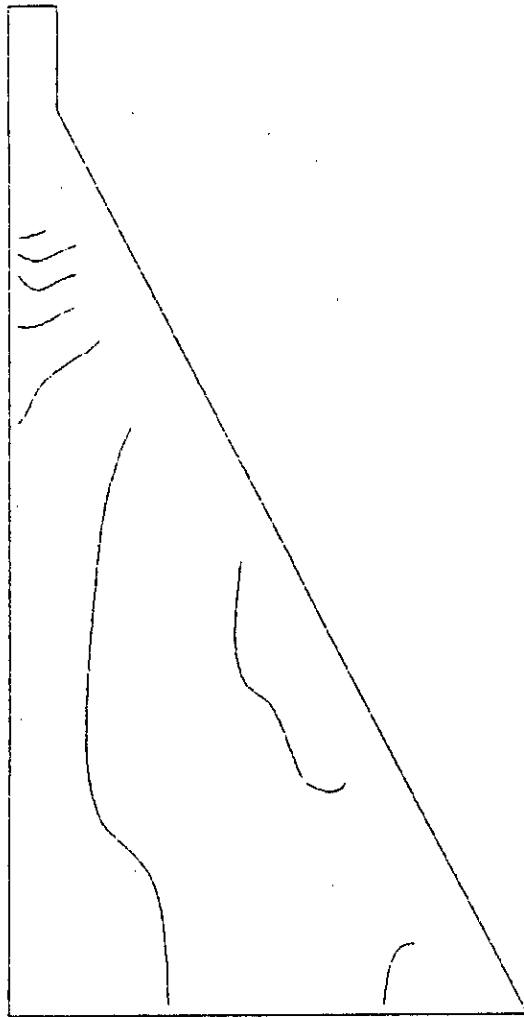


courbe de convergence

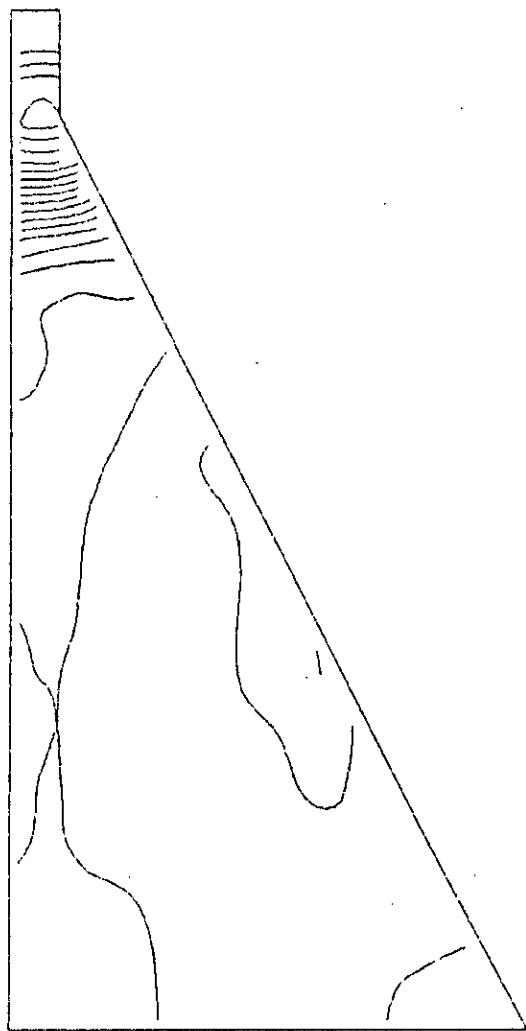
nnp: nombre d'élément sur la base  
nnp: nombre d'élément sur le parment  
barrage de cheurfas



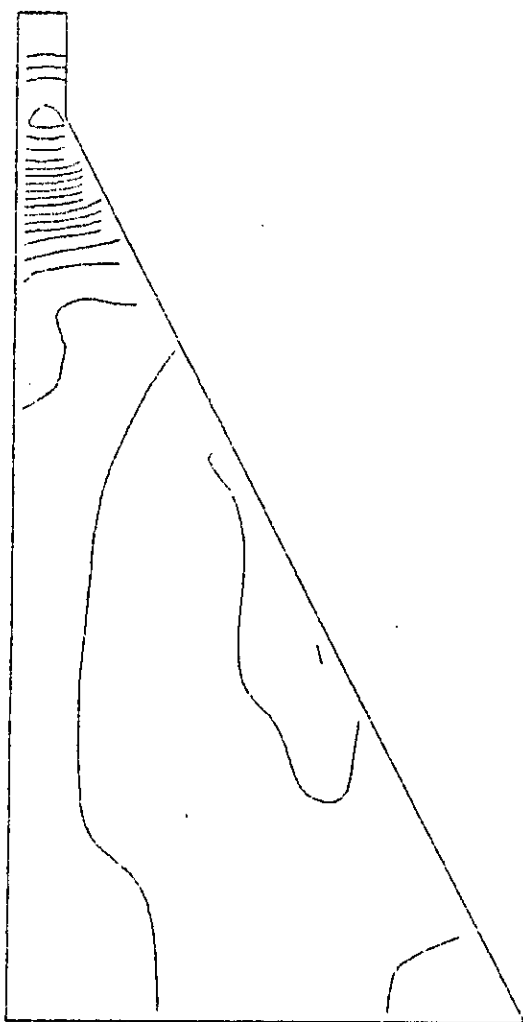
courbe d'isocontraintes  $\sigma_{\max}(n/m^2)$   
cas de retenue pleine sans seisme (dp)



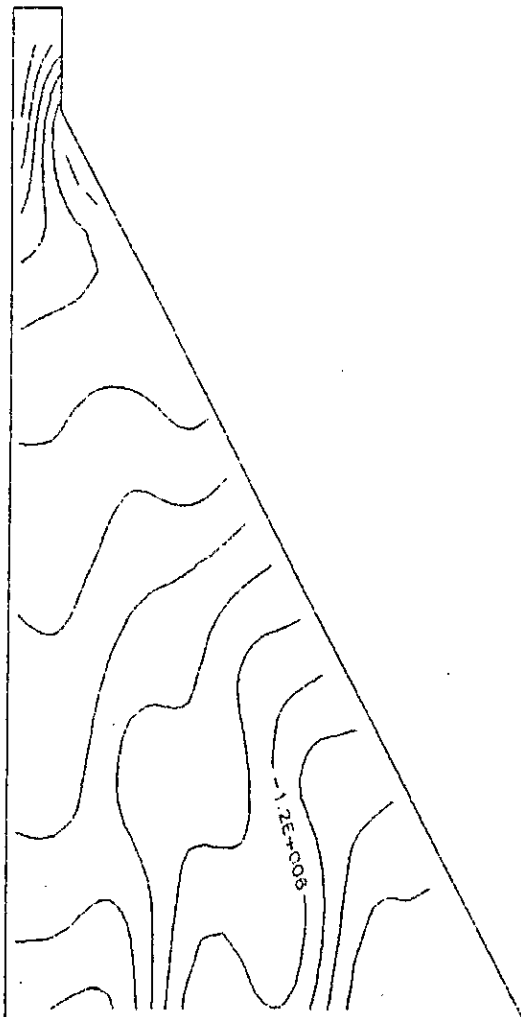
courbe d'isocontraintes  $\sigma_{min}(n/m^2)$   
cas de retenue pleine sans seisme (dp)



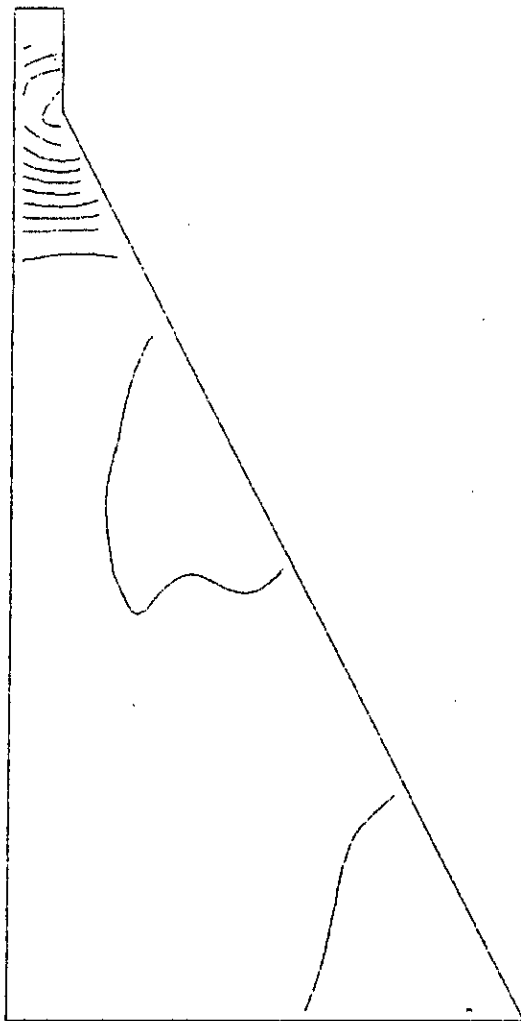
courbe d'isocisaillement taux  $\max(n/m \cdot m)$   
cas de retenue pleine sans seisme (dp)



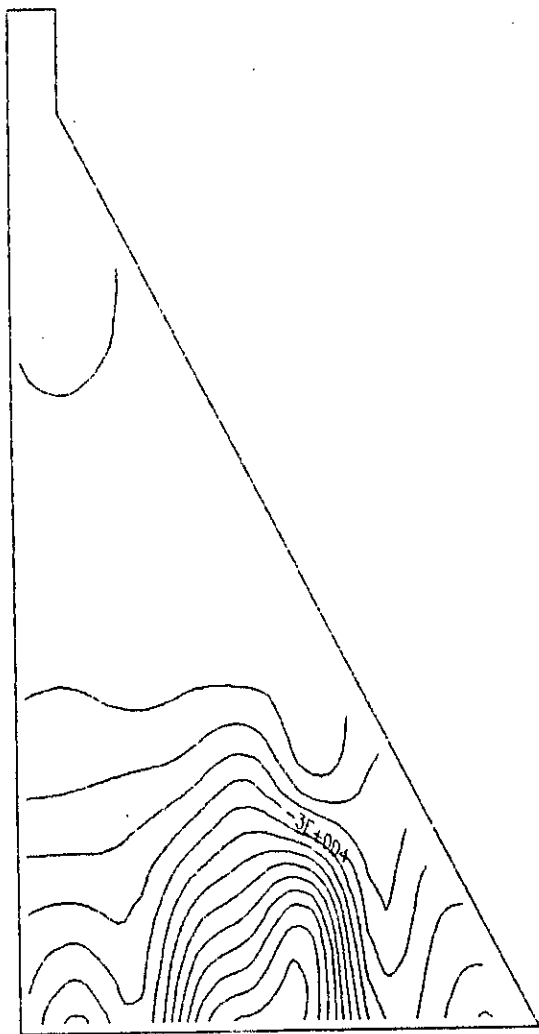
courbe d'isocontraintes  $\sigma_{\max}(n/m^2)$   
cas de retenue pleine sans seisme (cp)



courbe d'isocontraintes sigma min(n/m\*m)  
cas de retenue pleine sans seisme (cp)

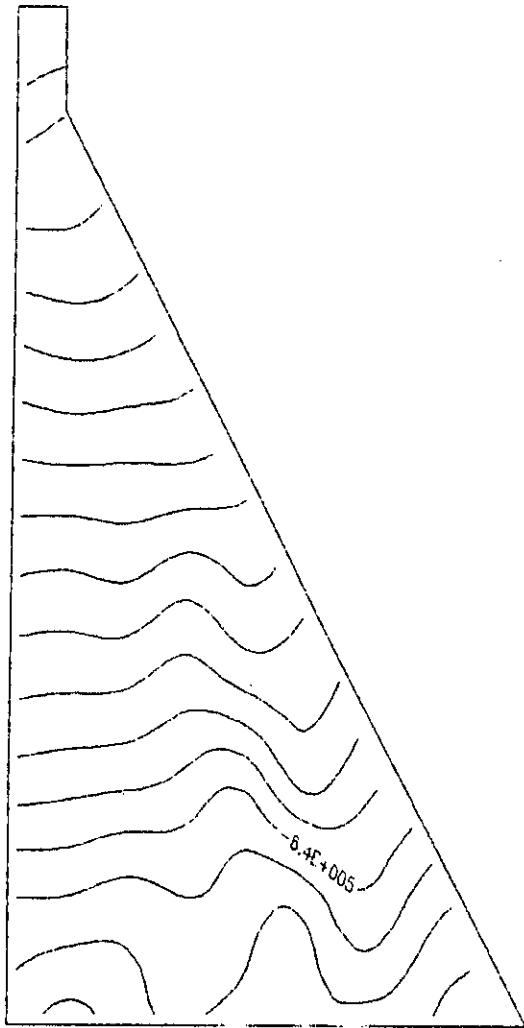


courbe d'isocisaillement taux  $\max(n/m \cdot m)$   
cas de retenue pleine sans seisme (cp)

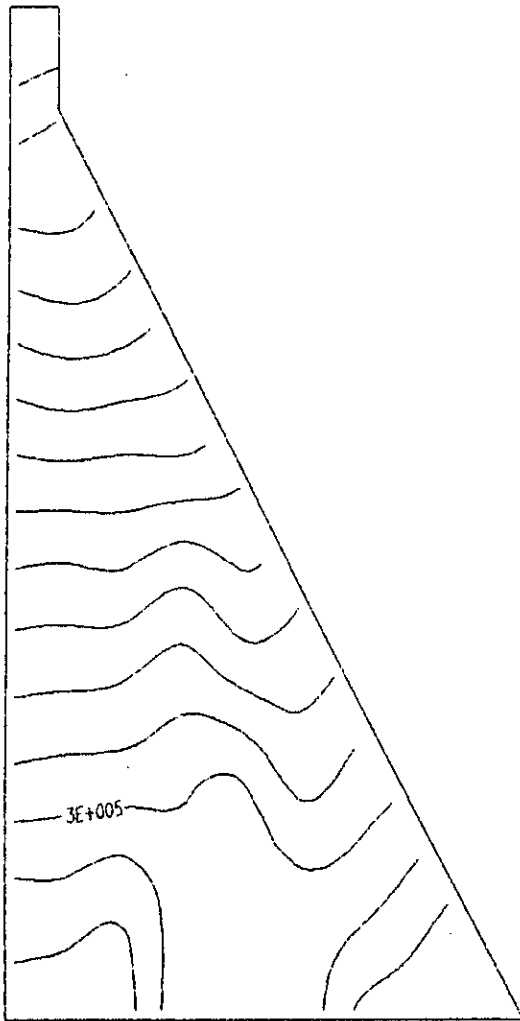


courbe d'isoc    ain s    sigma max(n/m\*m)  
 cas de rete    vid. so    eisme (dp)

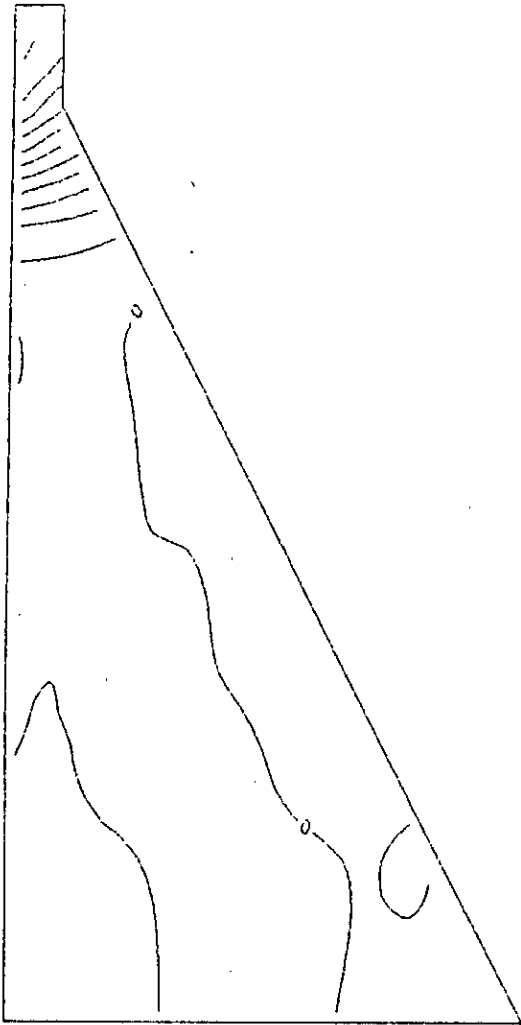




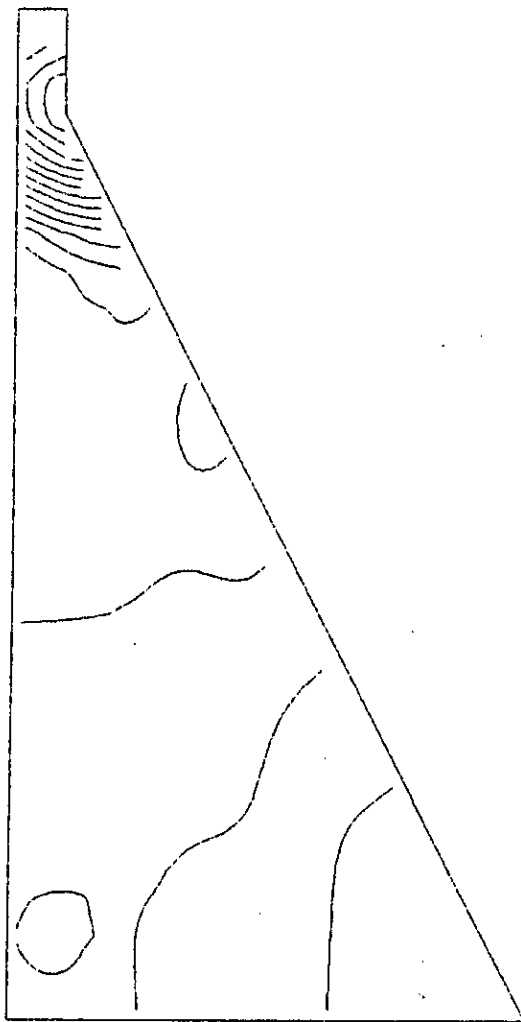
courbe d'isocontraintes  $\sigma_1$   $\min(n/m^2m)$   
cas de retenue vide sans sisme (dp)



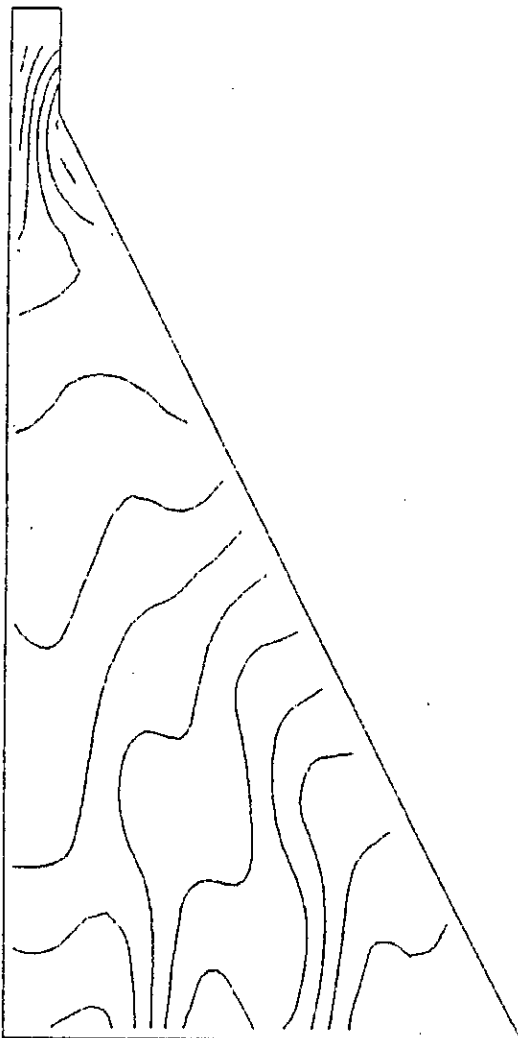
courbe d'isocisaillement taux max(n/m\*m)  
cas de retenue vide sans seisme (dp)



courbe d'isocontraintes sigma max(n/m²)  
cas de retenue vide sans seisme (cp)



courbe d'isocisaillement taux  $\max(n/m \cdot m)$   
cas de retenue vide sans seisme (cp)



courbe d'isocontraintes sigma min(n/m\*m)  
cas de retenue vide sans seisme (cp)

### **Interprétation des résultats:**

Les résultats obtenues pour le barrage fictif et le barrage de Cheurfas 2 (situé sur l'oued Mebouh environ 20 km de la ville de Sig wilaya de Mascara), montre que la base du barrage est la plus sollicitée lorsque la retenue est vide. Lorsque ce dernier est plein, c'est à dire il atteint son niveau normal de retenue, les courbes d'isocontraintes sont plus intenses au sommet du barrage. Ceci est dû au fait du rétrécissement au niveau de la crête, cela crée des tensions d'une grande importance, mais admissible.

### **Conclusion:**

Pour le barrage de Cheurfas 2, il serait à craindre une fissuration à la base de la crête.

### APPLICATION 4

Soit le barrage fictif à la forme trapezoidale et aux caracteristiques suivantes:

- \* Barrage en béton de masse volumique 2300kg/m<sup>3</sup>
- \* Module d'Young :E=3.085E+10 n/m<sup>2</sup>
- \* coefficient de poisson  $\nu=0.167$ .
- \* Hauteur totale Ht=43 m
- \* Largeur à la base Bb=35 m
- \* Pente amont  $n=0$
- \* Pente aval  $m=0.7$

Le travail se fera avec l'hypothèse de contraintes planes

#### Détermination des Valeurs Propres:

En plus des données précédentes, figurent comme entrées du programme le nombre de valeurs propres dont la convergence doit être vérifiée.

Les valeurs propres obtenues (après vérification de la convergence Fig. 4-0) sont classées ci-dessous :

<i>Valeur propre</i>	<i>Fréquence(1/s)</i>	<i>Période(s)</i>
4119.61	10.22	0.097
25029.3	25.19	0.0396
30353.8	27.74	0.036
111235	53.1	0.0188

Sachant que les fréquences qui sont excitées par les seismes se situent entre 0 et 30 Hz on pourra limiter le nombre de valeurs recherchées afin de diminuer le temps de calcul.

Pour le Barrage fictif, 3 fréquences peuvent être excitées (il en est de même pour tous les cas de Barrages poids traités) .

Les valeurs propres sont atteintes au bout de 4 ou 5 itérations avec une erreur de l'ordre du millièème.

Les vecteurs propres sont déterminés au même temps que les valeurs propres et expriment un mode de déformation de la structure (Fig 4-1 à 4-8).

Il est visible sur les déformées (amplifiées à  $1E+3$ ) que l'action est due au mouvement d'un certain point différent d'un cas à l'autre: c'est ce qui caractérise la notion de mode.

### Energie de déformation:

Le mouvement d'ensemble du Barrage est caractérisé par une énergie permettant ce mouvement, elle est calculée pour chaque mode et dépend de l'élasticité de la structure.

La Fig 4-9 donnant le pourcentage de l'énergie propre au mode par rapport à l'énergie de tous les modes confirme l'hypothèse de dominance des premiers modes, ceux qui sont excités par les seismes, ces modes dégagent dans ce cas de grandes énergie ce qui les rend destructeurs.

Une telle distribution de l'énergie permet en outre la diminution des calculs au cours des études poussées, on peut donc tronquer les réponses suivant un minimum d'énergie de déformation.

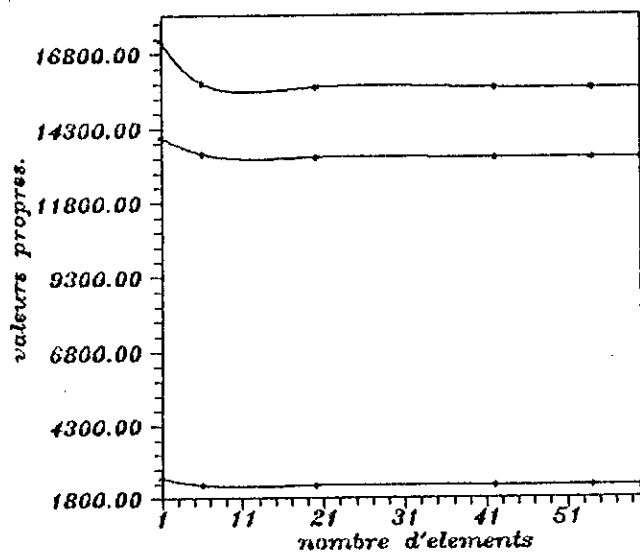
### Réponse de La structure à une excitation harmonique:

La réponse de la structure est la somme d'une réponse libre et d'une réponse forcée. Les deux réponses sont caractérisées par des amplitudes fonctions de l'excitation et des pulsations propres. (l'excitation ayant une forme sinusoïdale).

Les figures 4-10, 4-11, 4-12 donnent les variations des amplitudes forcées et libres pour des excitations verticales ou horizontales, on peut remarquer la faiblesse de la réponse à la seconde excitation par rapport à la première ce qui nous permet de dire que la structure est plus stable dans un sens (vertical) que dans l'autre, de ces figures peuvent être faites les remarques précédentes de dominance des fréquences faibles.

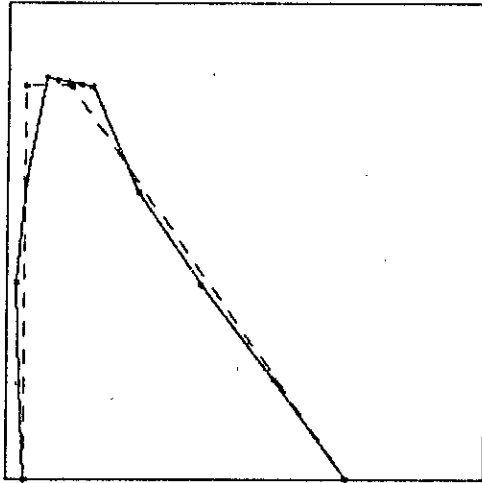
Dans le cas où la fréquence d'excitation GAMMA atteint une des pulsations propres apparaîtra la résonance (Fig 4-13), l'amplitude de la réponse forcée sera infinie ce qui signifie la destruction de l'ouvrage.



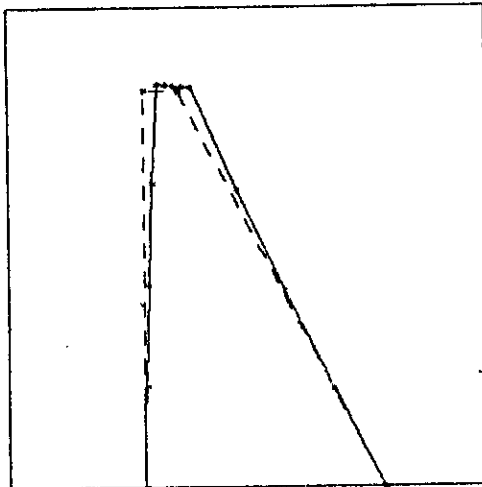


COURBES DE CONVERGENCES VERS  
 LES TROIS PREMIERES VALEURS PROPRES.  
 exemple d'un barrage fictif.

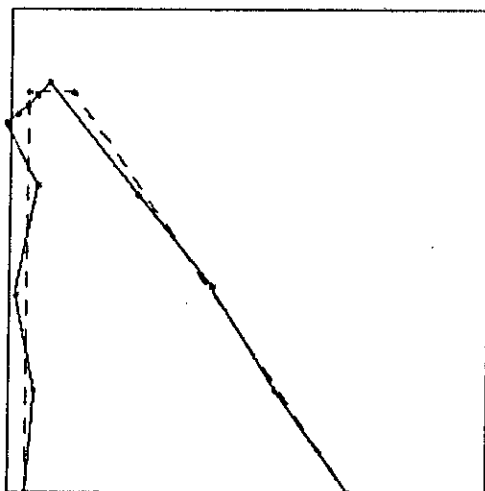
FIG 4-0



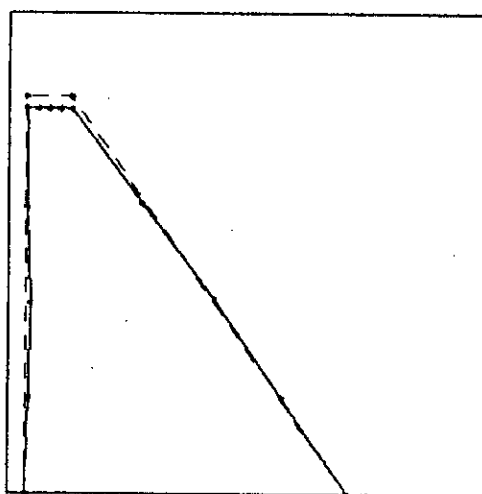
MODE 3  
FIG. 4-3



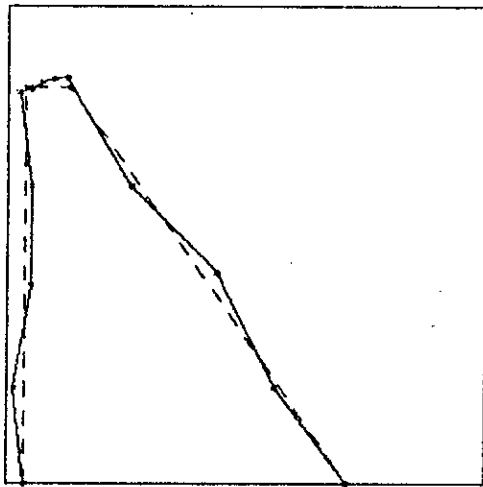
MODE 1  
FIG. 4-1



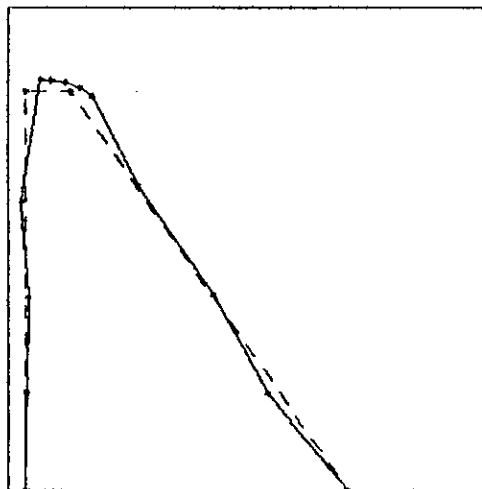
MODE 5  
FIG. 4-5



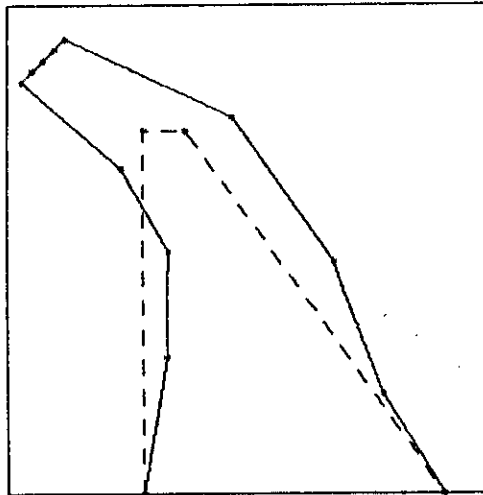
MODE 4  
FIG. 4-4



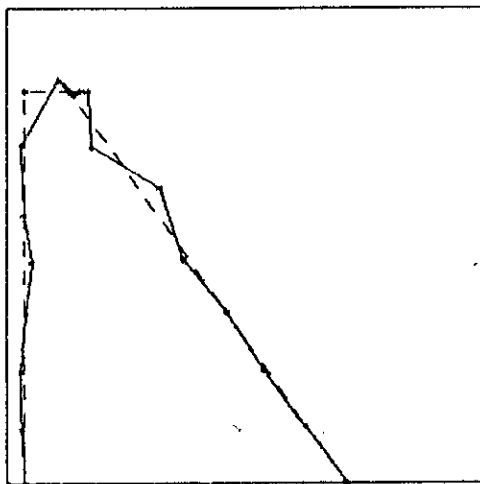
MODE 7  
FIG. 4-7



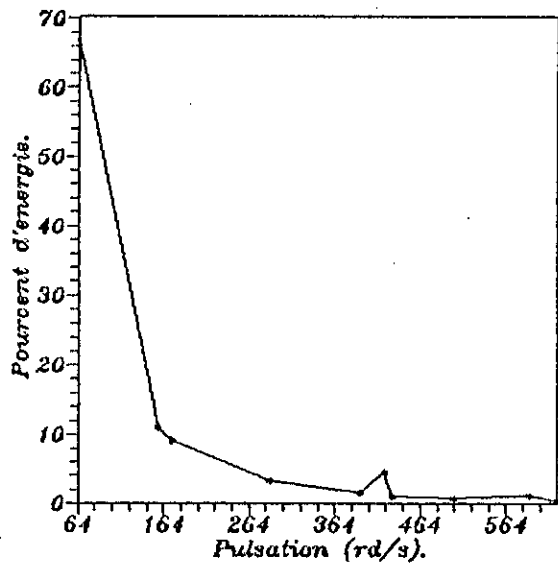
MODE 6  
FIG. 4-6



MODE 2  
FIG. 4-2

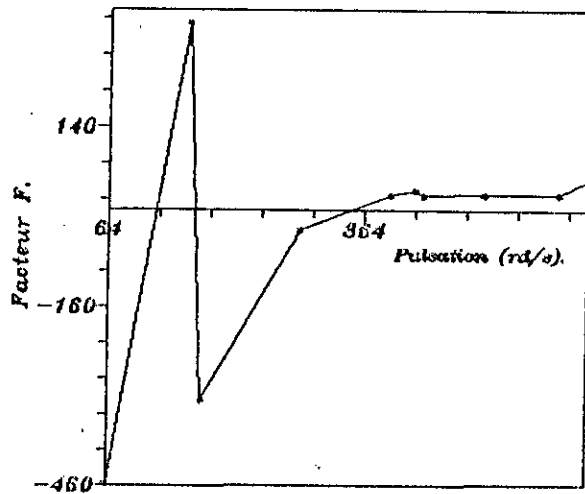


MODE 8  
FIG. 4-8



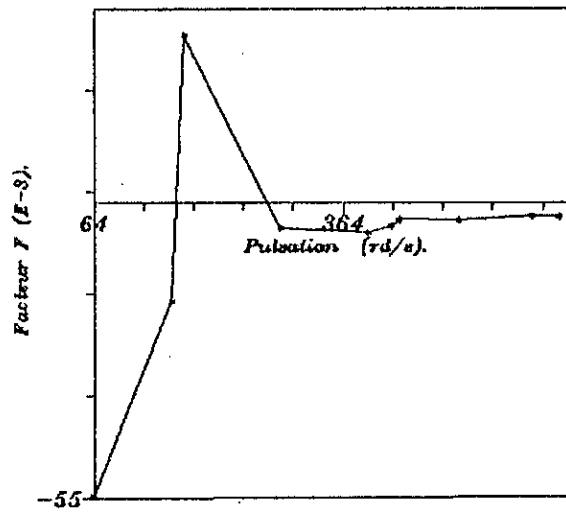
Variation de l'energie de deformation fonction de la pulsation

FIG 4-9



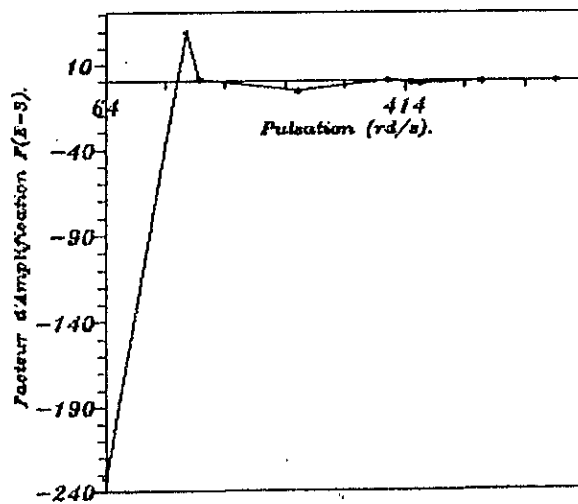
Variation du Facteur f en fonction de la pulsation en Regime Libre.

FIG 4-10



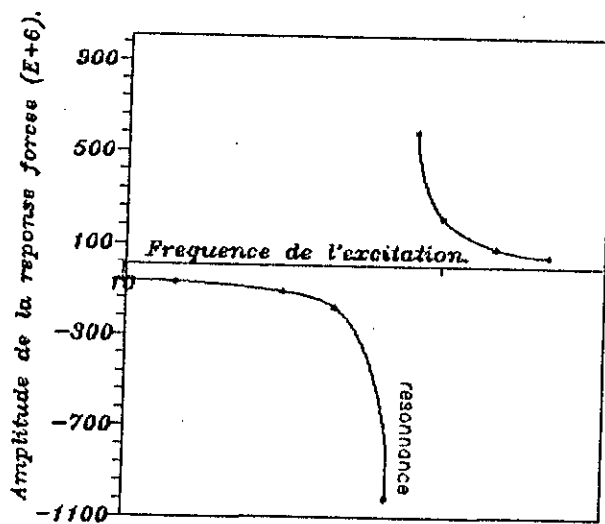
Variation du Facteur d'Amplification  
en Fonction de la Pulsation.  
Cas d'un seisme Vertical.

FIG 4-11



Facteur d'Amplification en Reponse Forcee .

FIG 4-12



Variation de l'amplitude en fonction de la  
 Frequence d'excitation GAMMA  
 OMEGA1=61.88 rd/s

FIG 4-13



## APPLICATION 4

En reprenant la meme hypothèse que pour l'application 4 (contraintes planes) on reprend les calculs pour un Barrage réel; celui de Hammam Grouz

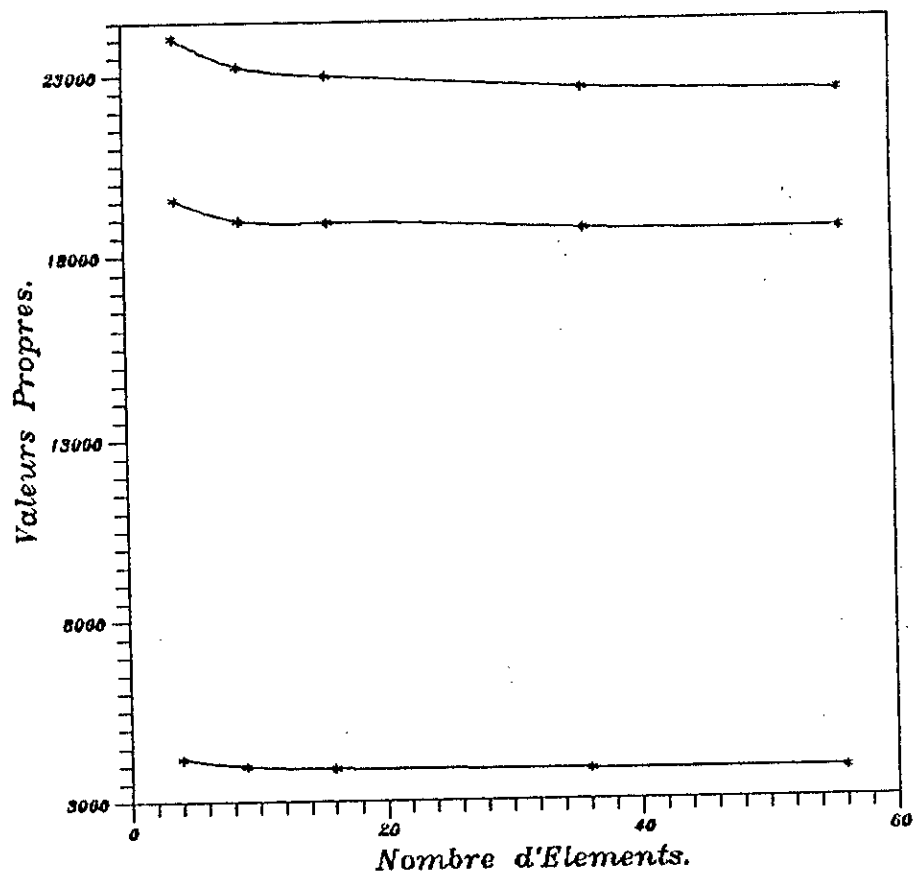
### Détermination des Valeurs Propres

La convergence a été testée sur les 5 premières valeurs seulement, après convergence (Fig 5-0) on aura:

<i>Valeur Propre</i>	<i>Fréquence(1/s)</i>	<i>Période (s)</i>
3829.7	9.85	0.1014
18642.9	21.74	0.04599
22476.38	23.87	0.04188
73736.74	43.23	0.0231

une remarque importante s'impose à la vue des courbes de convergence: les premières valeurs qui convergent sont les plus petites, ceci s'explique par le fait qu'on a utilisé un processus d'itération inverse répété et ce processus ajuste d'abord les premières valeurs.

5 déformées peuvent être visualisées sur les figures allant de (5-5) à (5-9). A la différence du Barrage fictif, ce Barrage est couronné par une crête qui dans les cinq modes est le centre du mouvement, la structure agit dans ce cas comme une console dans la masse est uniformément répartie et à qui on a rajouté une autre inertie locale.



Courbes de Convergence vers les trois Premieres Valeurs Propres.

FIG 5-0.

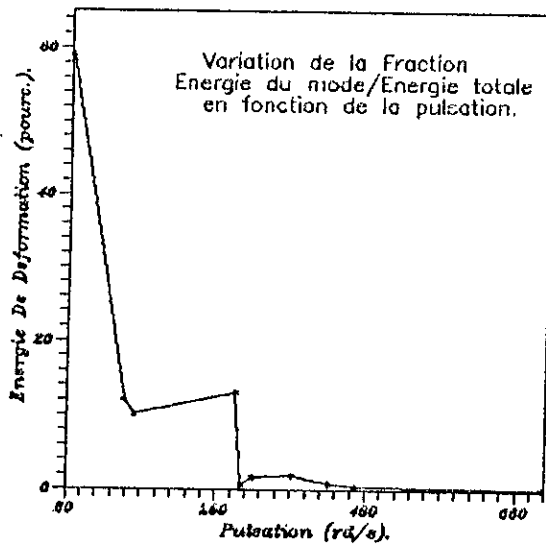


FIG. 5-1

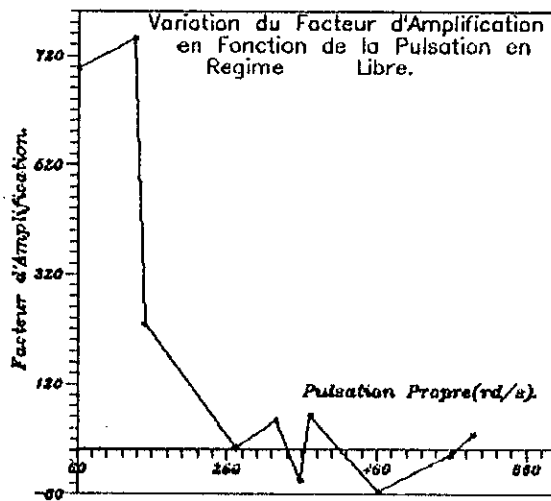


FIG. 5-2

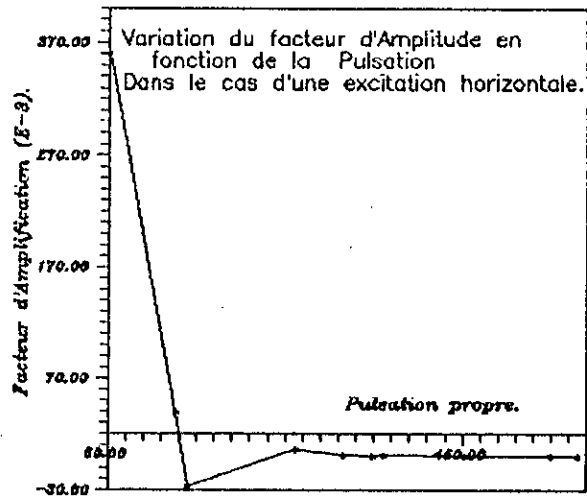


FIG. 5-3 .

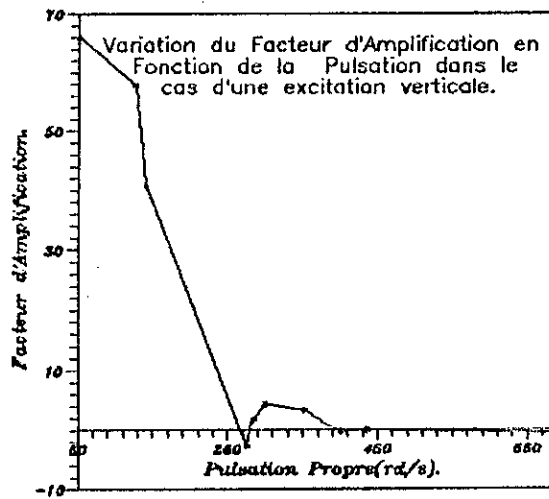
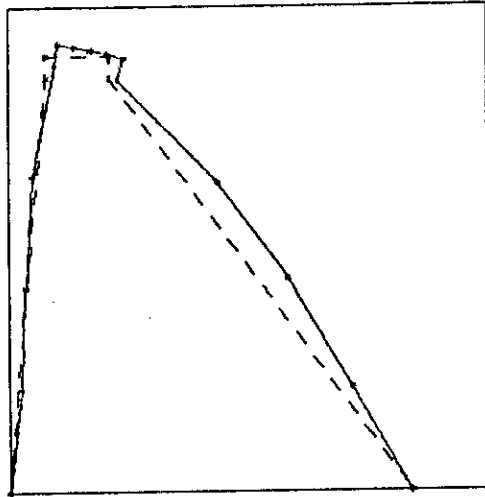
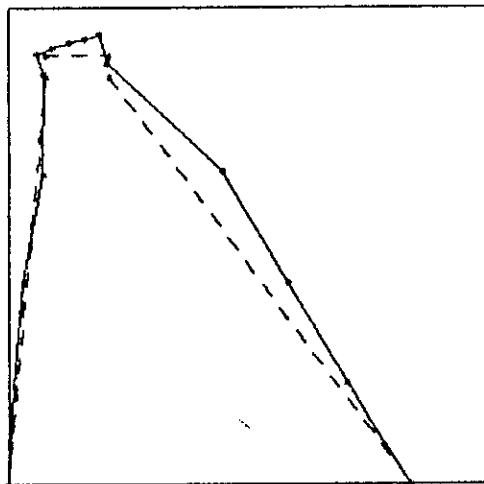


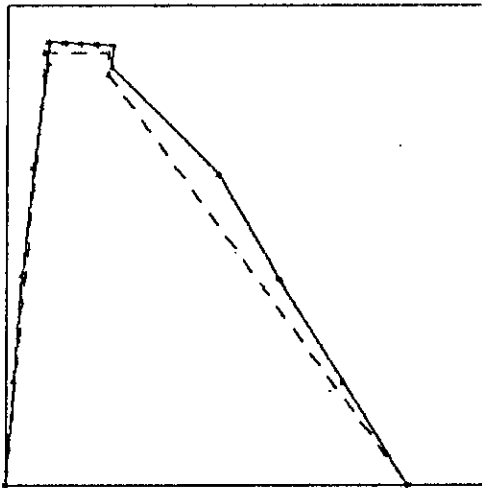
FIG. 5-4



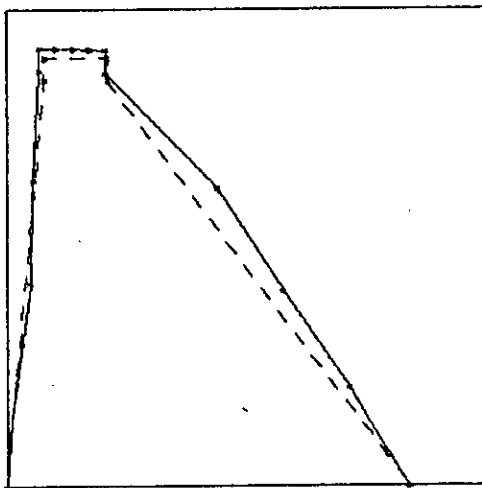
MODE 7  
FIG. 5-5



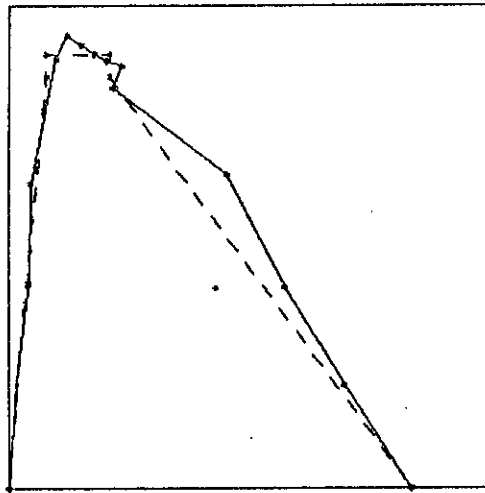
MODE 6  
FIG. 5-8



MODE 5  
FIG. 5-7



MODE 4  
FIG. 5-6



MODE 3  
FIG. 5-9

## Application n° 5: Barrage de Hammam Grouz

### - Caractéristiques:

Largeur à la base:  $bb = 50,4$  m

Fruit amont :  $m = 0,1$

Fruit aval :  $n = 0,67$

Hauteur du déversoir:  $hd = 47$  m

Largeur de la crête:  $bc = 8$  m

Hauteur totale:  $ht = 49,5$  m

Hauteur normale de retenue:  $hnr = 49,5$  m

Masse volumique du béton:  $= 2360$  kg/m<sup>3</sup>

Module de Young:  $E = 2,8 * 10^{10}$  n/m<sup>2</sup>

Coefficient de Poisson:  $= 0,25$

### - Applications:

L'application a été faite pour les cas suivants:

1/ Sans prendre en compte les sous pression, ni la vase en depot:

Cas 1.1 : retenue pleine en déformation plane.

Cas 1.2 : retenue vide en déformation plane.

Cas 1.3 : retenue pleine en contrainte plane.

Cas 1.4 : retenue vide en contrainte plane.

2/ En prenant en compte les sous pression, avec vase en depot:

hauteur de la vase : 10 m

masse volumique de la vase : 980 kg/m<sup>3</sup>

Cas 2.1: retenue pleine et vide en déformation plane.

Cas 2.2: retenue pleine et vide en déformation plane dans les cas suivants:

1/ Seisme horizontale.

2/ Seisme verticale accélération montante.

3/ Seisme à 45 % accélération verticale montante.

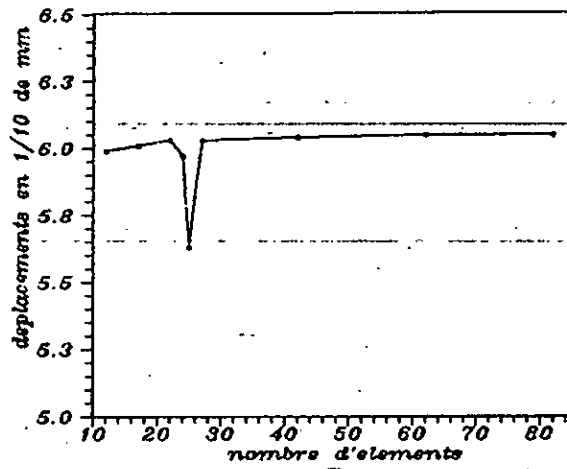
On présentera dans l'application:

1/ La courbe de convergence du barrage.

2/ La courbe de convergence suivant la discrétisation.

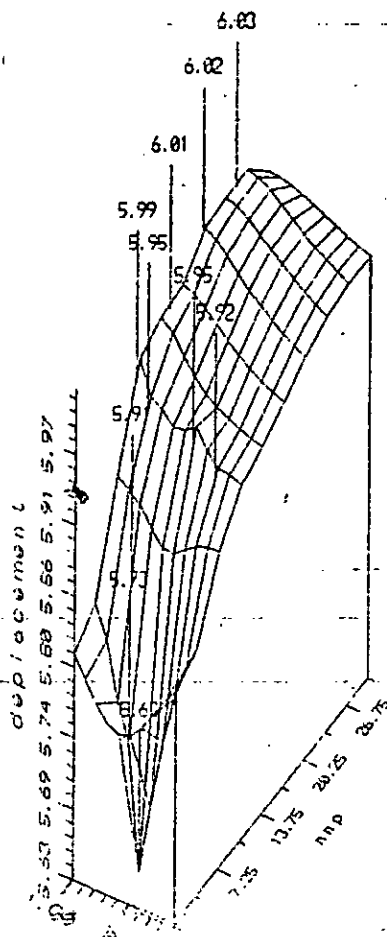
3/ Les courbes d'isocontraintes maximum.





Courbe de convergence  
Barrage de H.Grouz.

-fig1-



-fig2- courbe de convergence

nnp: nombre d'élément sur la base  
nnp: nombre d'élément sur le parment  
barrage de hammam grouz

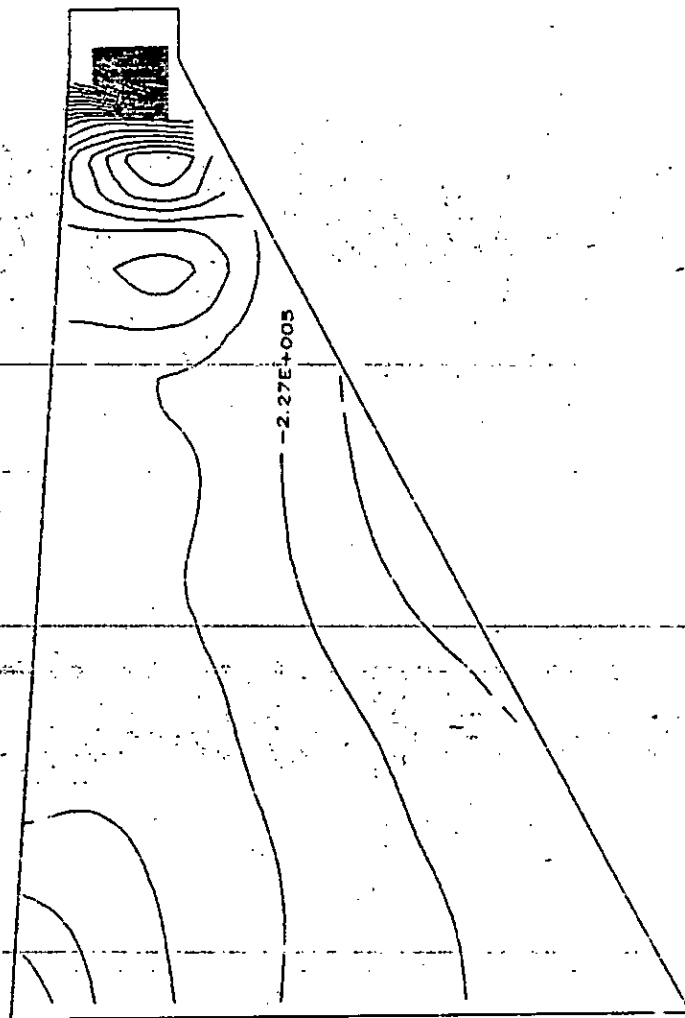
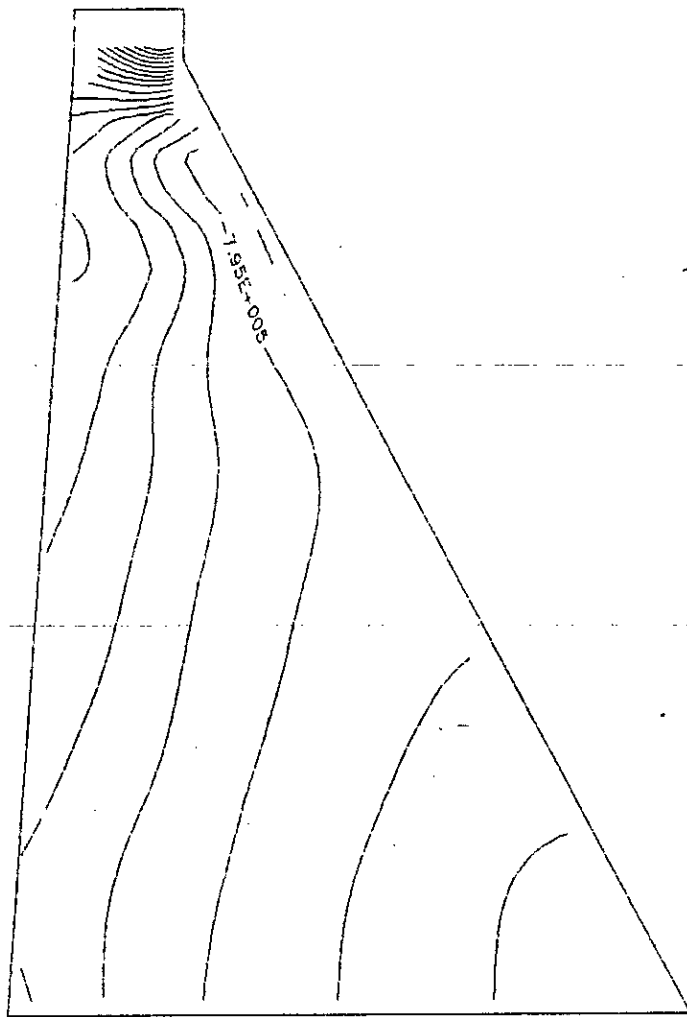
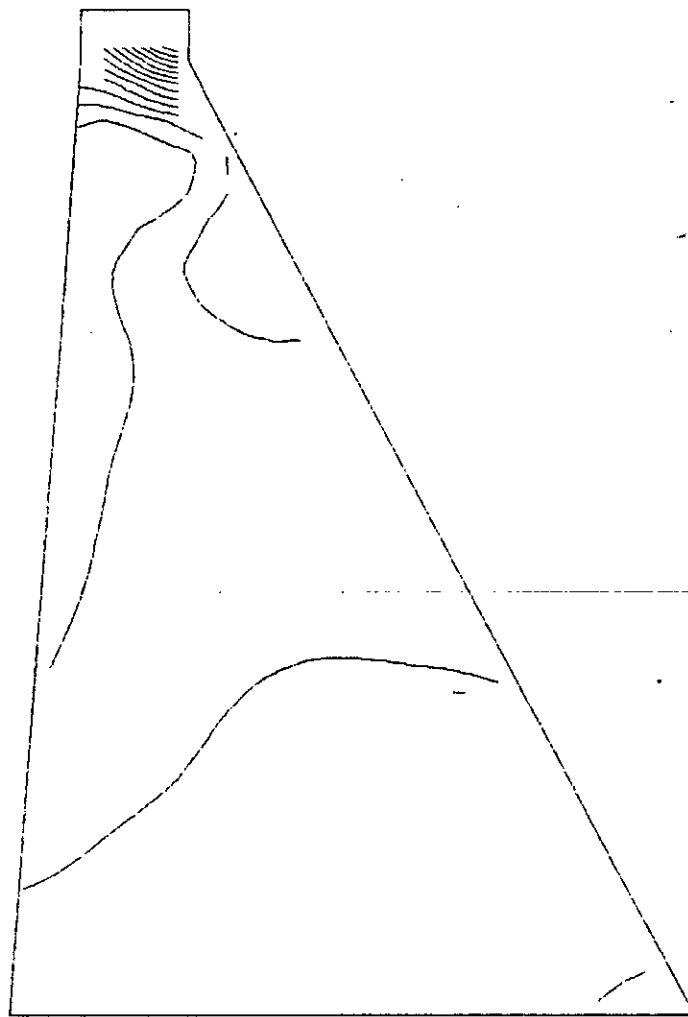


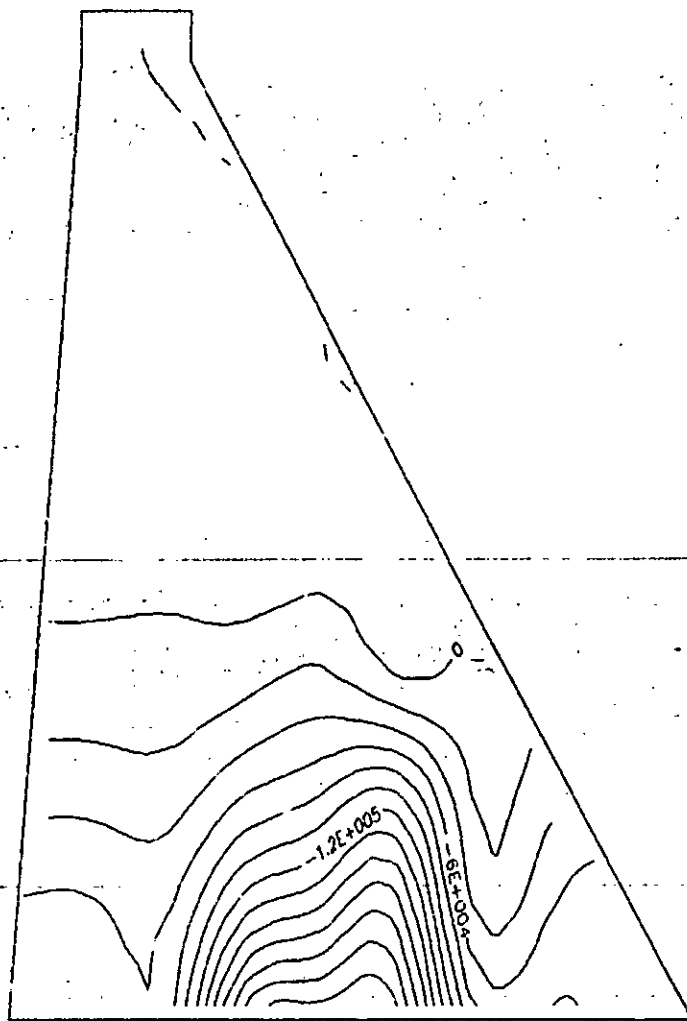
Fig 1.1.1. courbe d'isocontraintes  $\sigma_{max}$  (n/mm<sup>2</sup>)  
cas de retenue pleine sans seisme



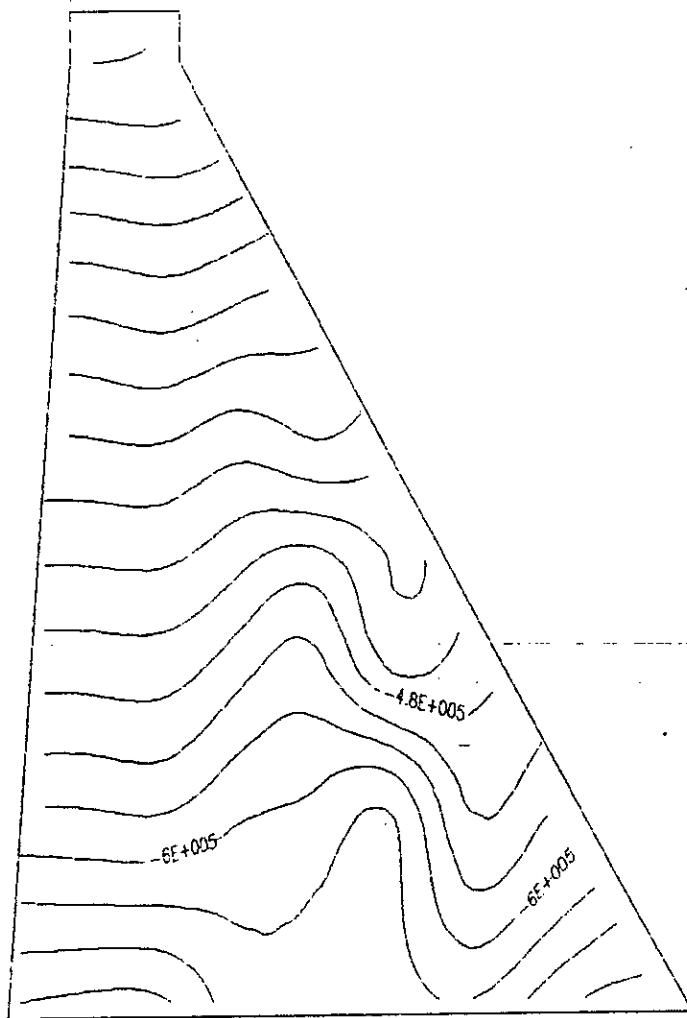
-fig 1.1.2- courbe d'isocontraintes  $\sigma_{\min}$  (n/m<sup>2</sup>)  
cas de retenue pleine sans seisme



\_fig 1.1.3\_ courbe d'isocisaillement taux max( $n/m \cdot m$ )  
cas de retenue pleine sans seisme



-fig 1.2.1\_ courbe d'isocontraintes sigma max(n/m\*m)  
cas de retenue vide sans seisme (dp)



-fig 1.2.2 - courbe d'isocontraintes sigma min(n/m\*m)  
cas de retenue vide sans seisme (dp)

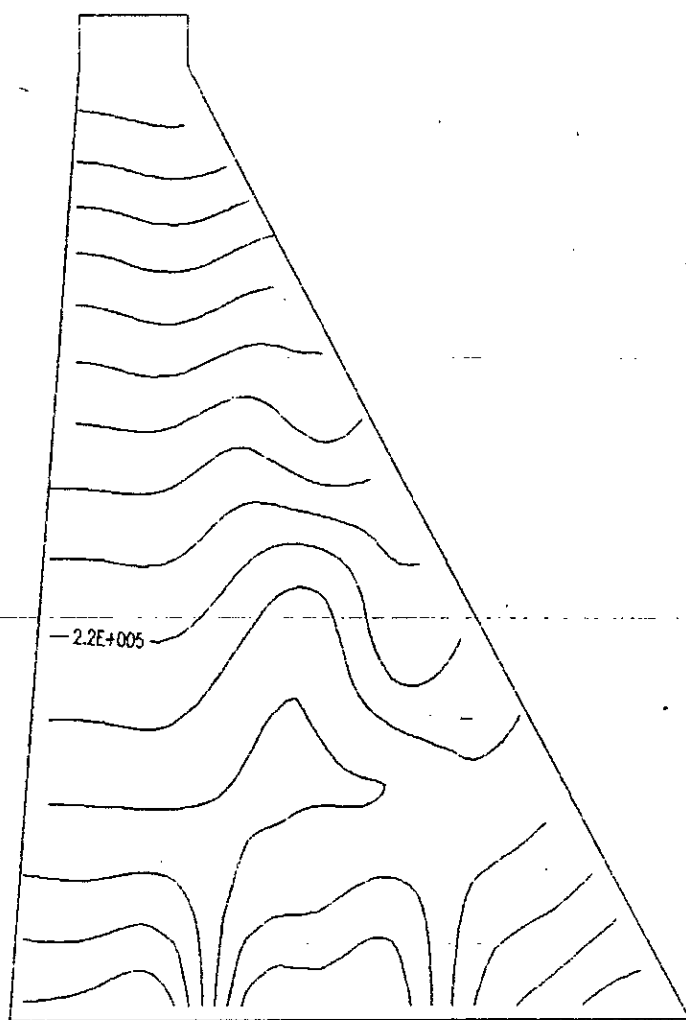
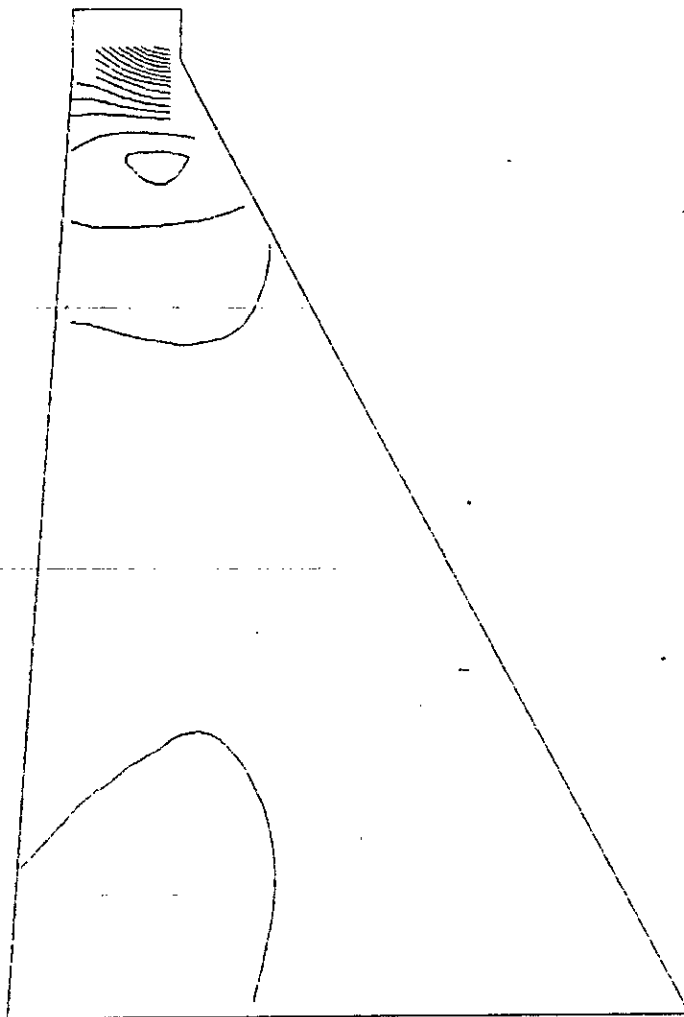
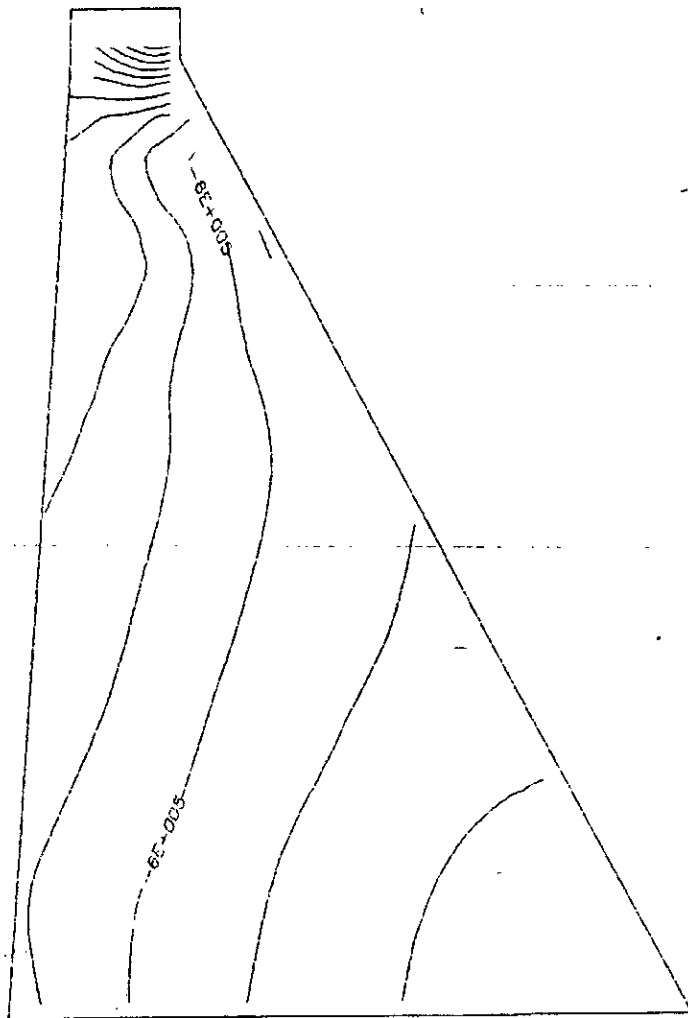


Fig 1.2.3 - courbe d'isocisaillement taux max(n/m+m)  
cas de retenue vide sans seisme (dp)



-fig 1.3.1. courbe d'socontraintes  $\sigma_{\max}(n/m+m)$   
cas de retvue pleine sans seisme (cp)

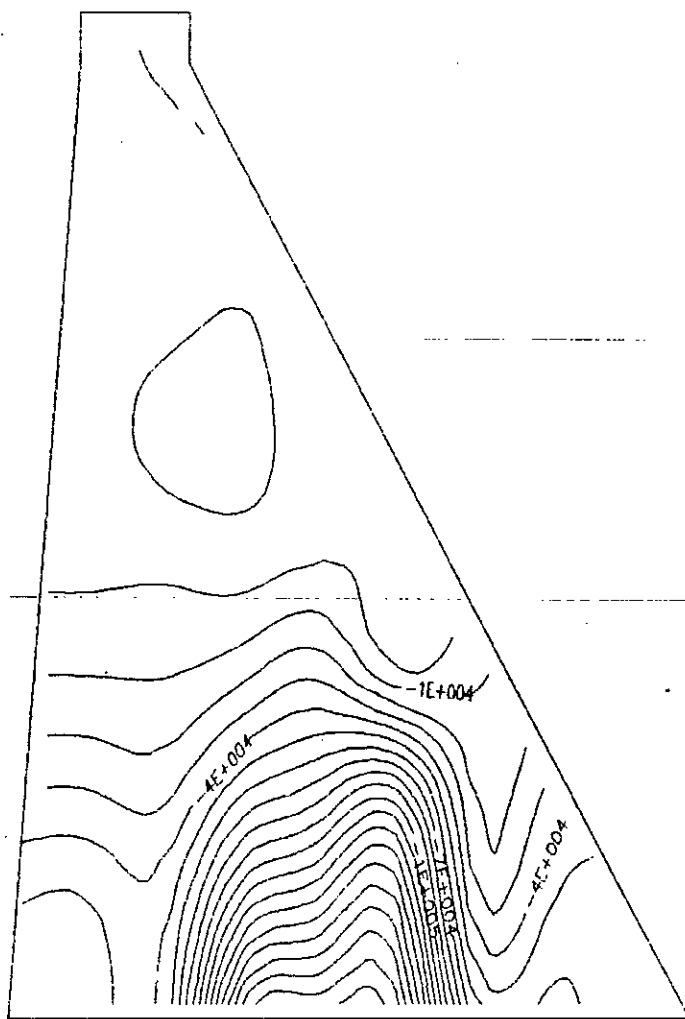




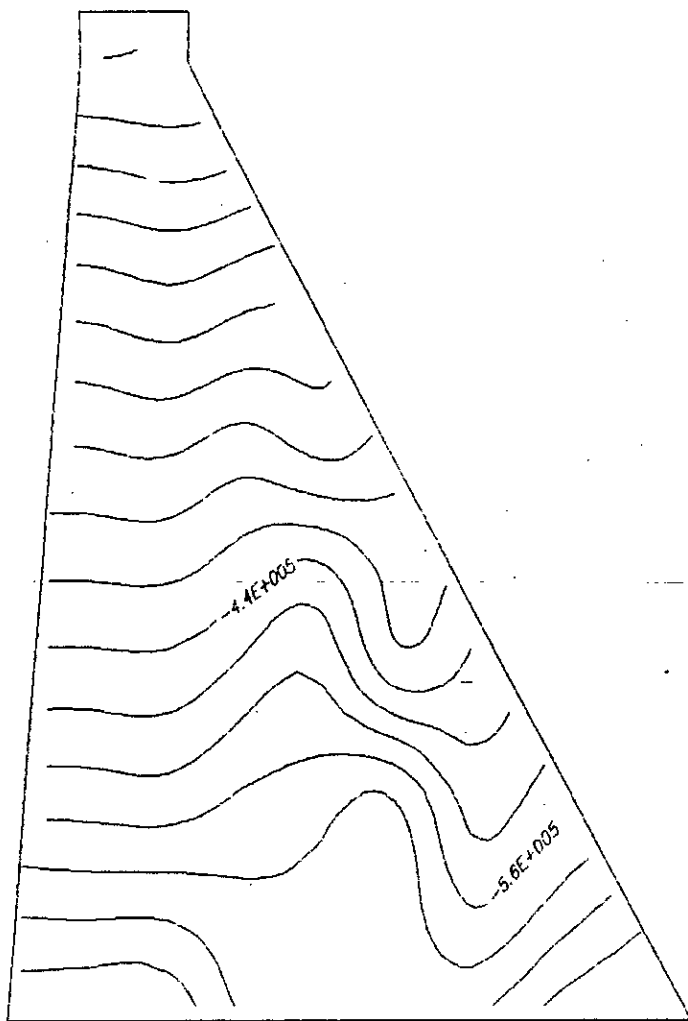
-fig 1.3.2- courbe d'isocentrantes sigma min(n/m+m)  
cas de retrue pleine sans seisme (cp)



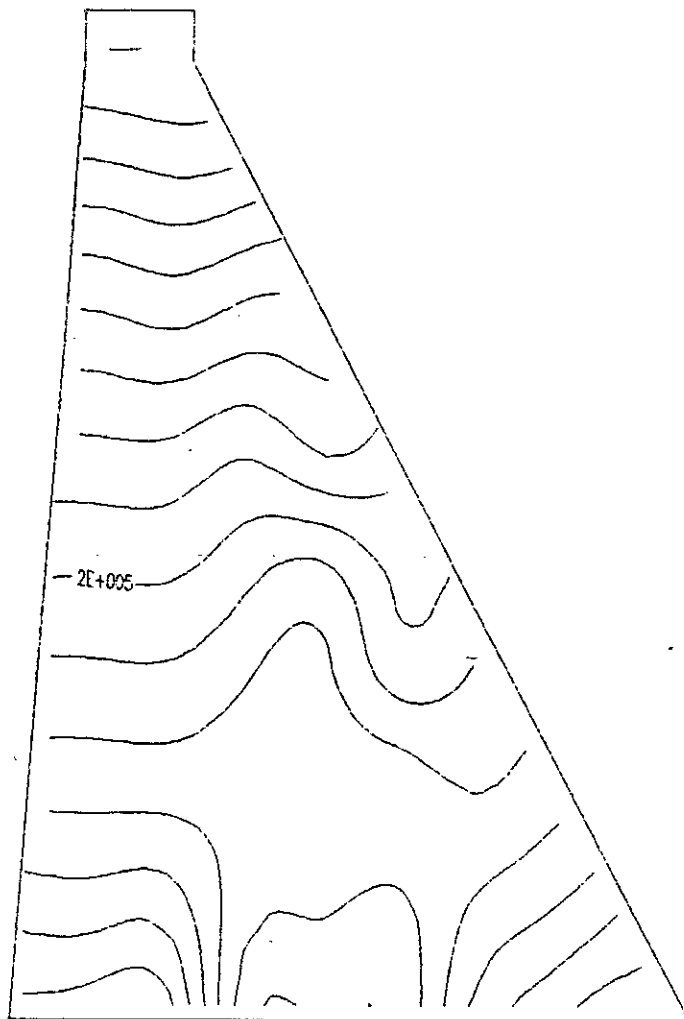
- Fig 1.3.3 - courbe d'isocisaillement taux  $\max(n/m+m)$   
cas de retenue pleine sans seisme (cp)



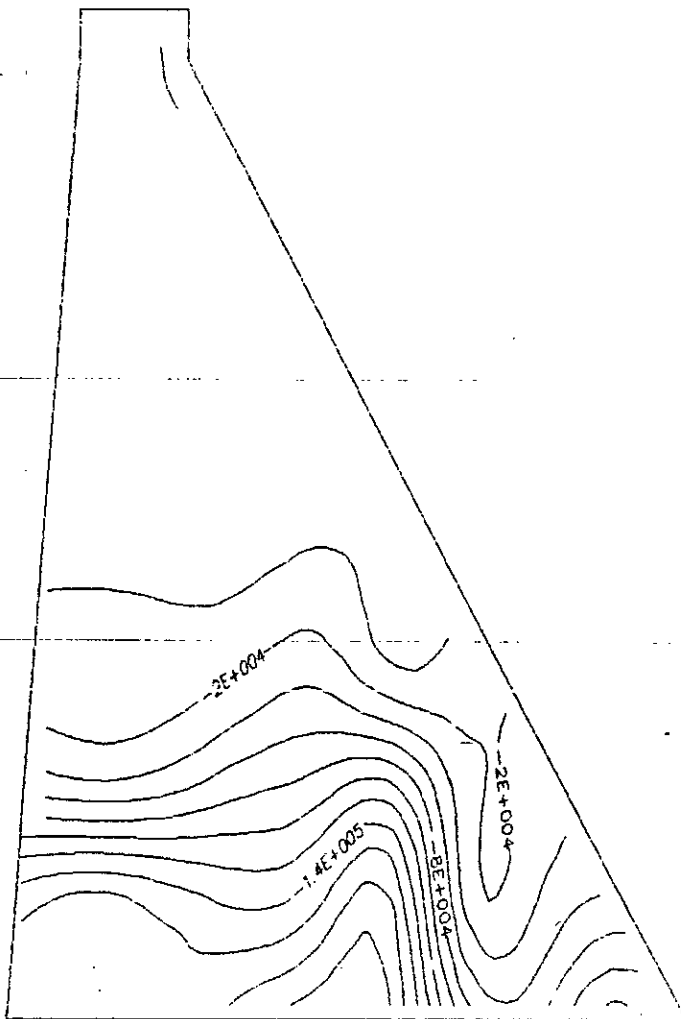
-fig1.4.1- courbe d'isocontraintes sigma max(n/m\*m)  
cas de barrage vide sans seisme (cp)



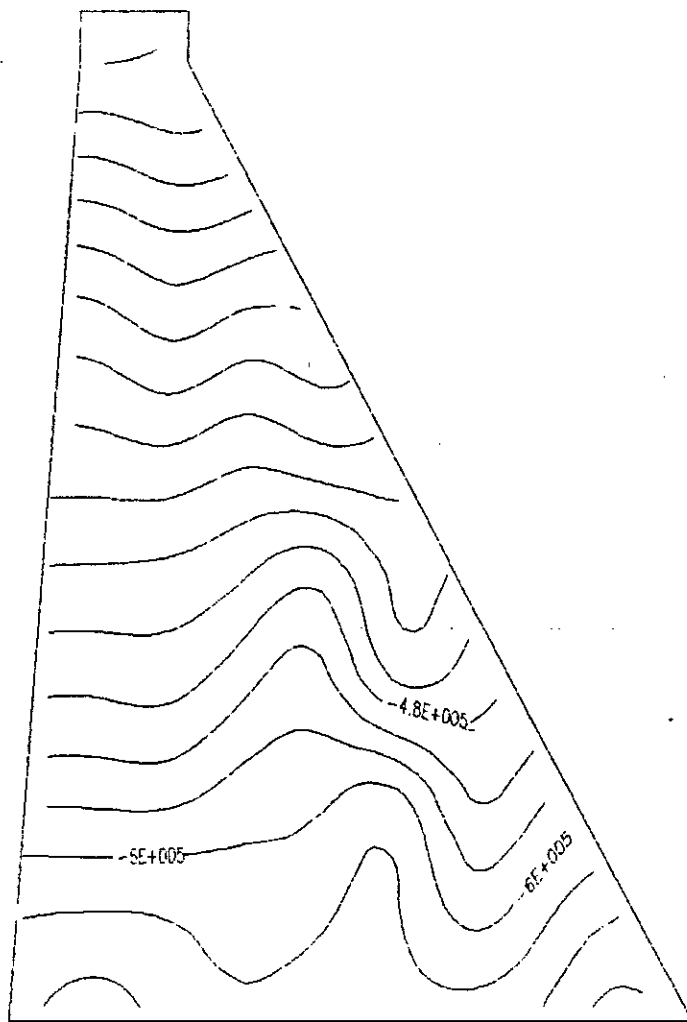
-fig 1.4.2- courbe d'isocontraintes sigma min(n/m\*m)  
cas de barrage vide sans seisme (cp)



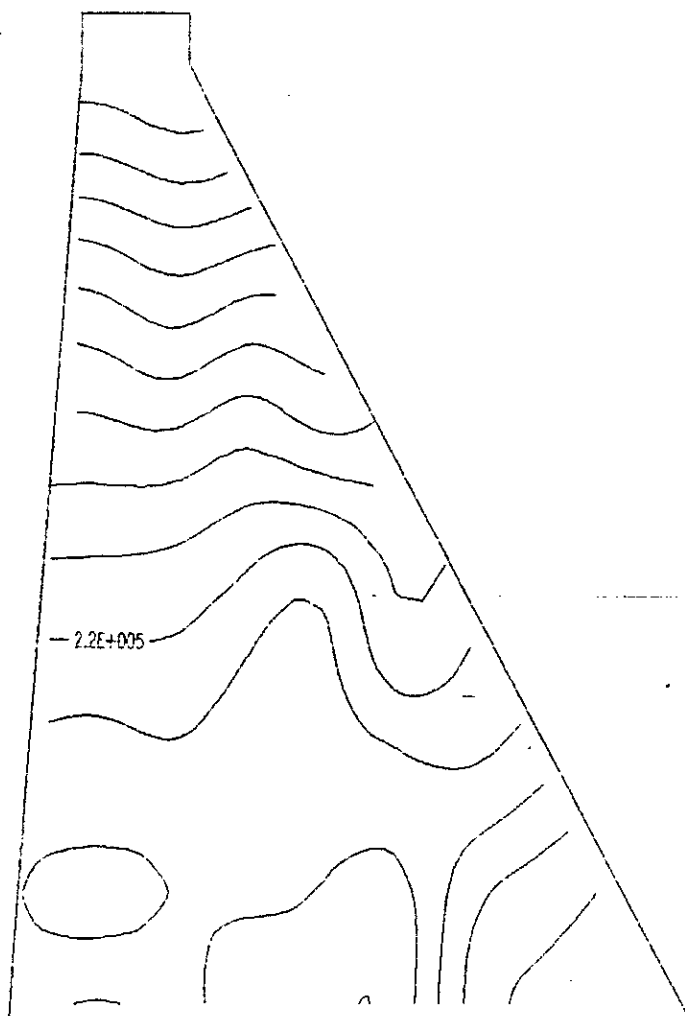
-fig1.4.3- courbe d'isocisaillement taux max(n/m\*m)  
cas de barrage vide sans seisme (cp)



-fig2.1.1.-courbe d'isocontraintes  $\sigma_{max}(n/m^2)$   
cas de retenue vide sans seisme avec vase (dp)



-fig 2.1.2- courbe d'isocontraintes sigma min(n/m\*m)  
cas de retenue vide sans seisme avec vase (dp)

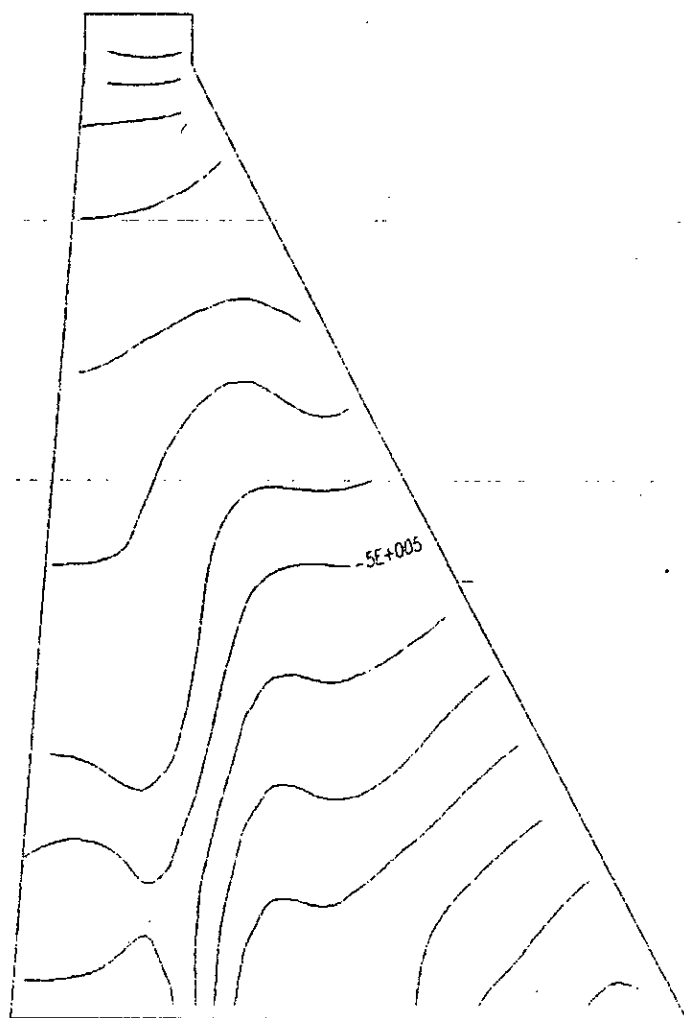


-Fig 2.1.3 -courbe d'isocisaillement taux max(n/m\*m)  
cas de retenue vide sans seisme avec vase .(dp)

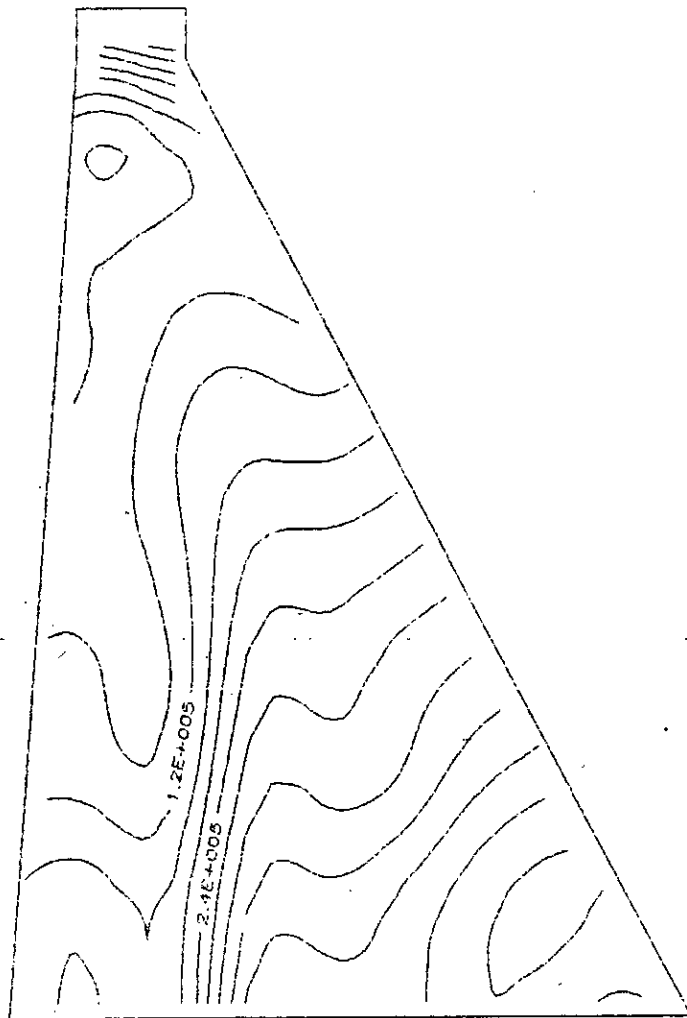




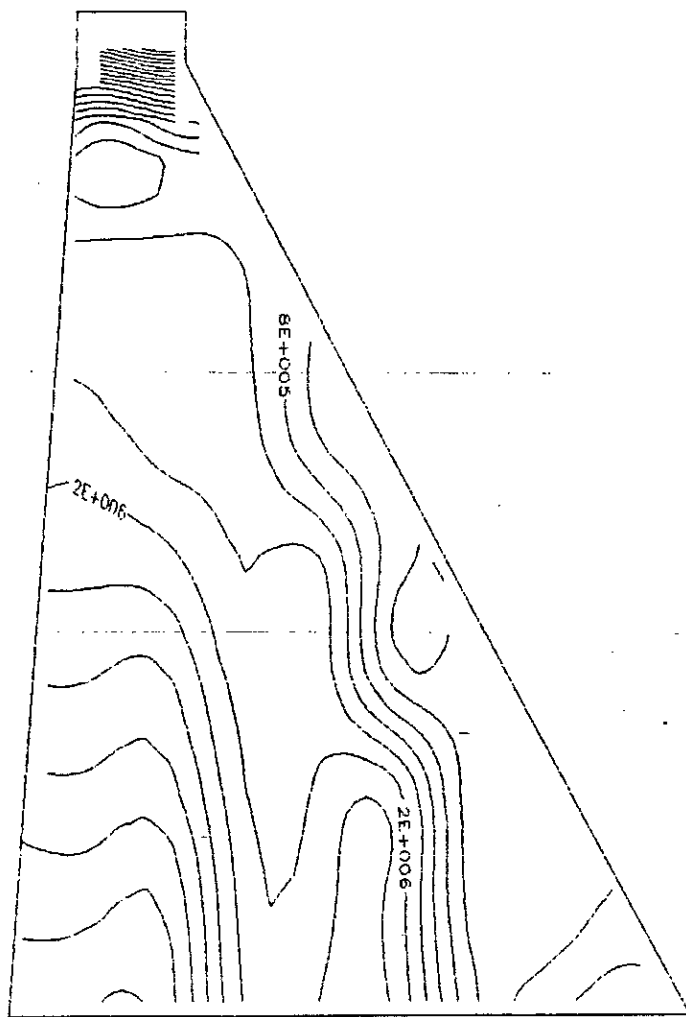
-fig2.1.4- courbe d'isocontraintes  $\sigma_{max}(n/m^2)$   
cas de retenue pleine avec la vase (df)



-fig2.1.5- courbe d'isocontraintes  $\sigma_{\min}(n/m+m)$   
cas de retenue pleine avec la vase ( $d^p$ )



-fig 2.1.6 - courbe d'isocisaillement taux max(n/m\*m)  
cas de retenue pleine avec la vase (df)



-fig 2.2.1- courbe d'isocontraintes  $\sigma_{\max}(n/m+m)$   
cas de retenue pleine avec seisme horizontal (dp)



-fig 2.2.2- courbe d'isocontraintes sigma min(n/m\*m)  
cas de retenue pleine avec seisme horizontal (dp)

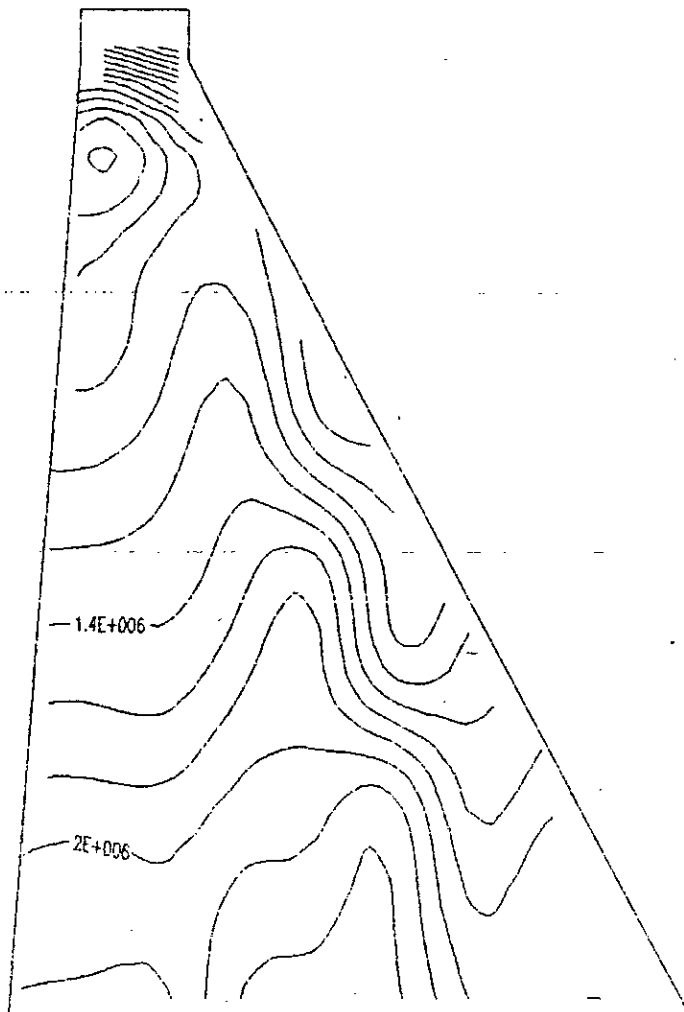
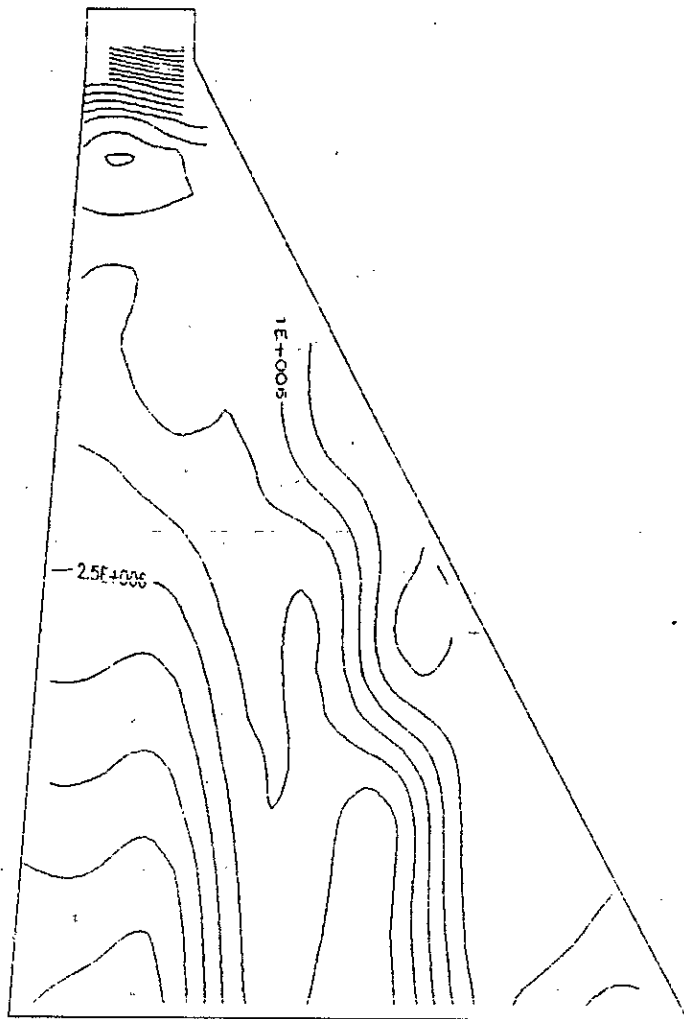
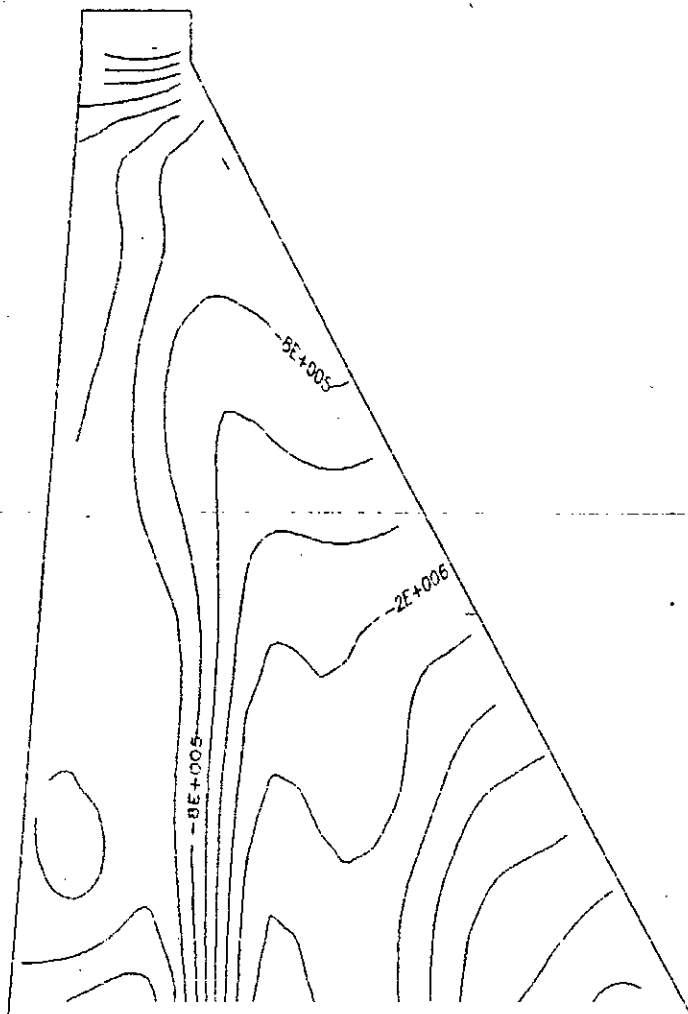


Fig 2.2.3 - courbe d'isocisaillement taux max(n/m+m)  
cas de retenue pleine avec seisme horizontal (dp)

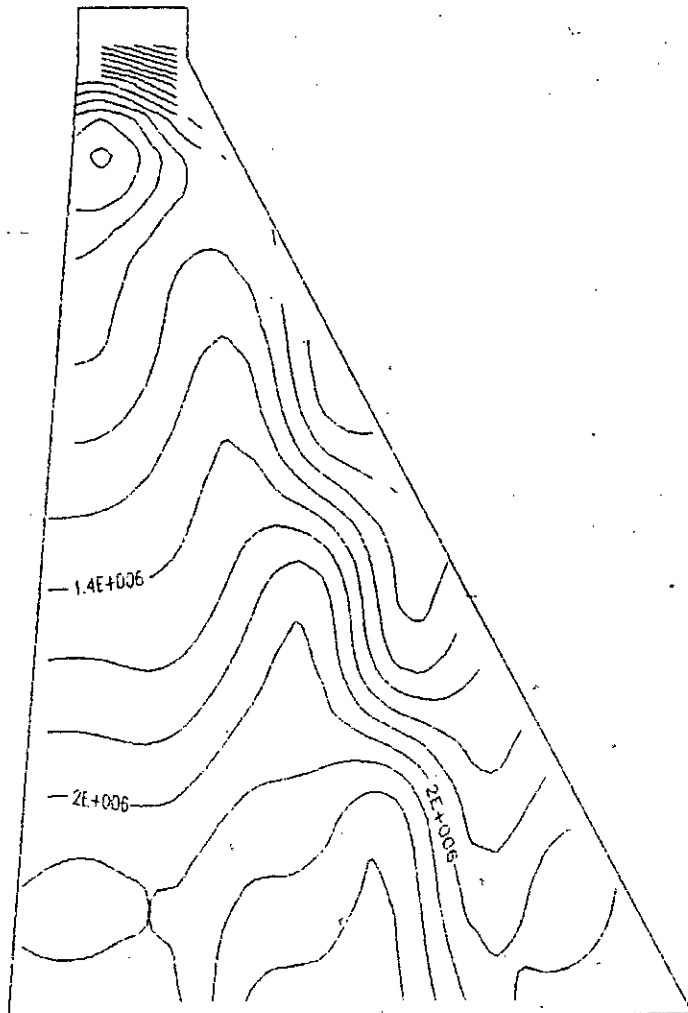


-fig 2.2.4 \_courbe d'isocontraintes sigma max( $n/m^2$ )  
cas de retenue vide avec seisme horizontal (dp)



-fig 2.2.5- courbe d'isocontraintes  $\sigma_{min}(n/m^2)$   
cas de retenue vide avec seisme horizontal (dp)





-fig 2.2.6 - courbe d'isocisaillement taux max(n/m\*m)  
cas de retenue vide avec seisme horizontal (dp)

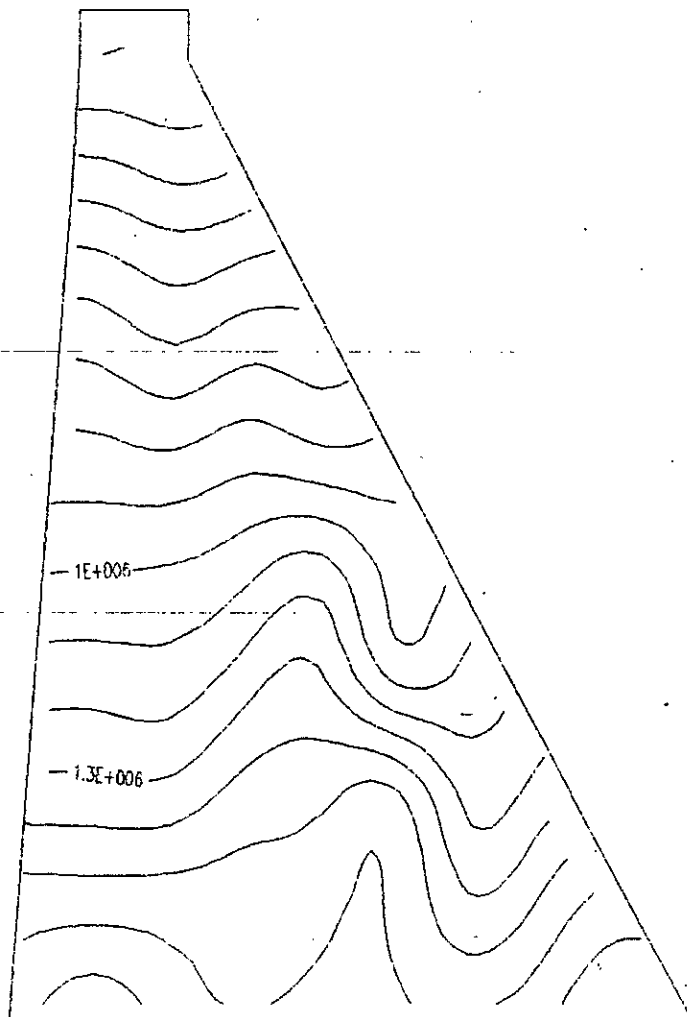
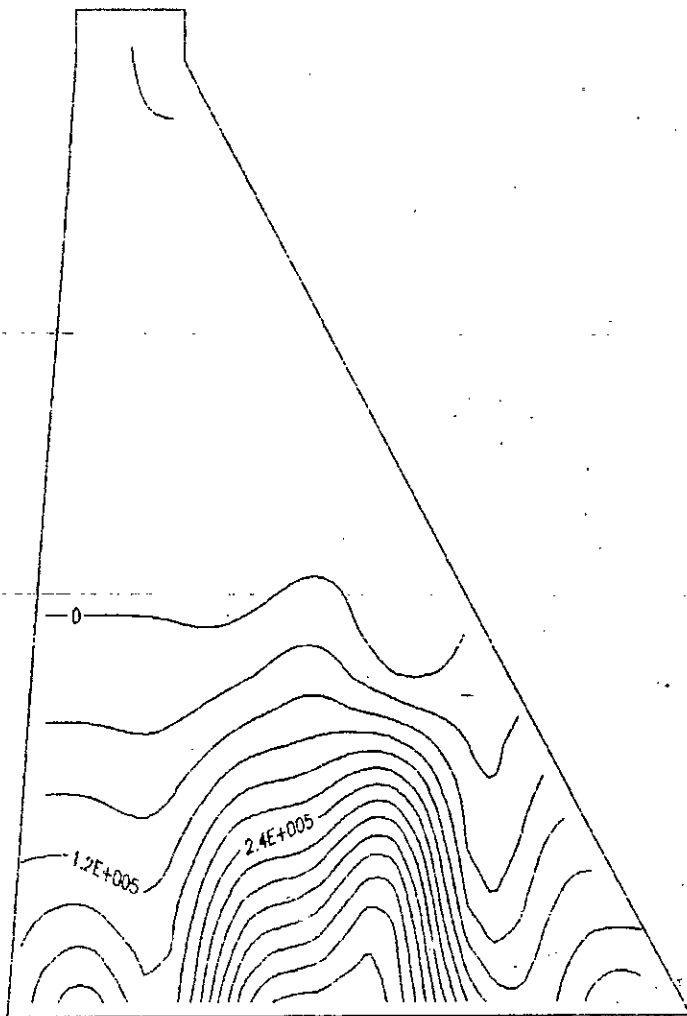


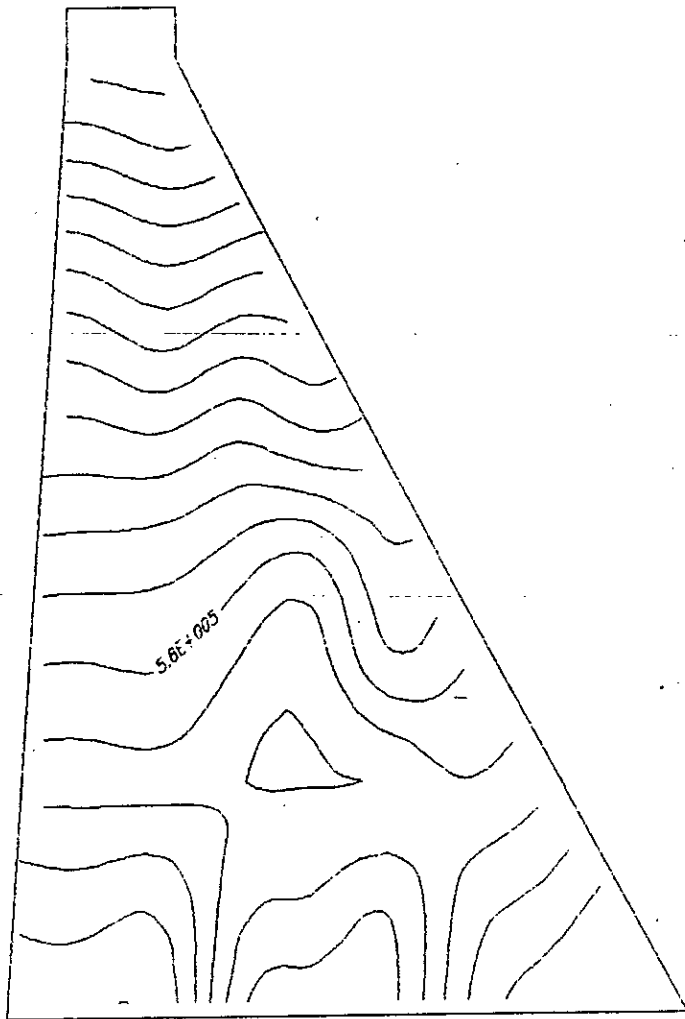
Fig 2.2.7. courbe d'isocontraintes  $\sigma_{\max}(n/m^2)$   
cas de retenue pleine avec seisme verticale

(ap)



-fig2.2.8\_ courbe d'isocontraintes sigma min(n/m²m)  
cas de retenue pleine avec seisme verticale.

(d)



cas de retenue pleine avec seisme v

-fig 2.2.9 \_courbe d'isocisaillement taux max(n/m\*m) (d<sub>p</sub>)  
cas de retenue pleine avec seisme verticale

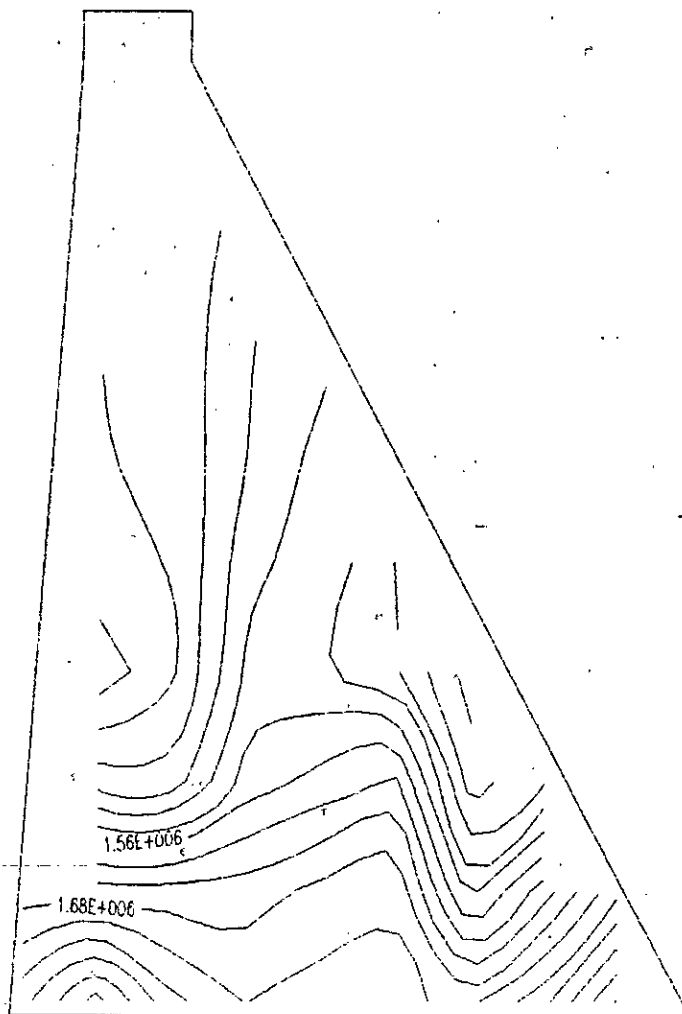


fig 2.2.10 - courbe d'isocontraintes  $\sigma_{max}$  (n/mm<sup>2</sup>)  
cas de retenue vide avec seisme verticale (dp)

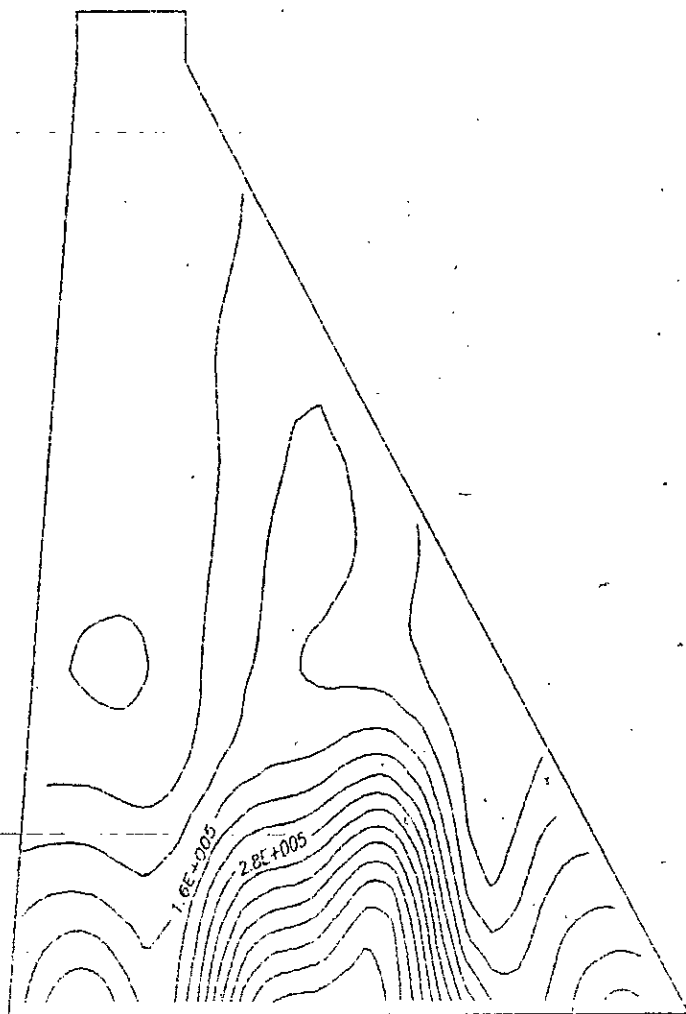
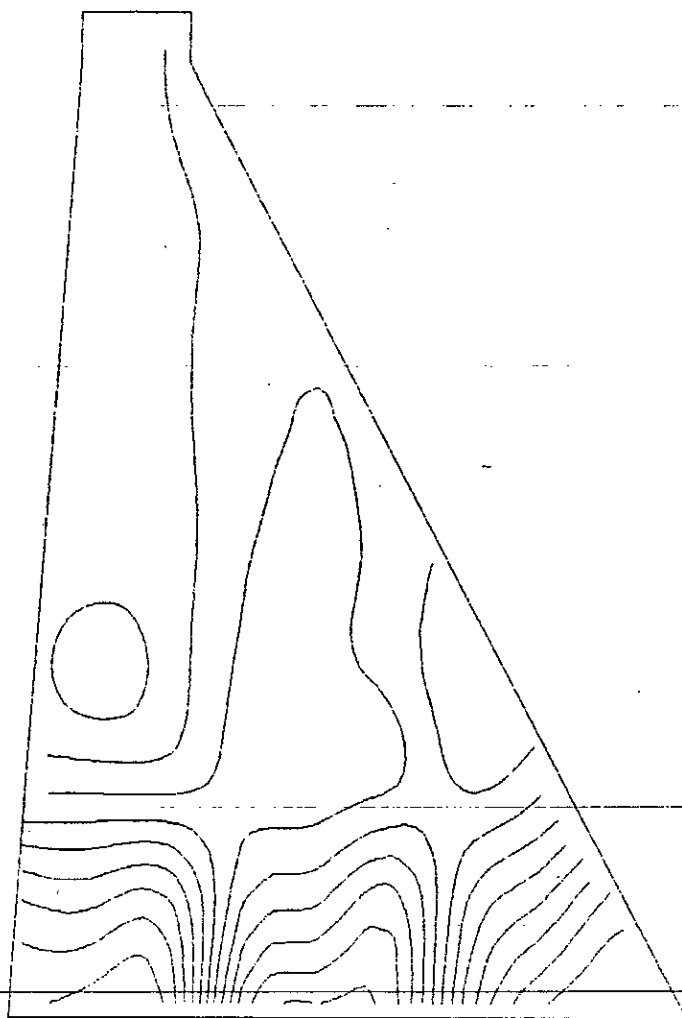


Fig 2.2.1. courbe d'isocontraintes  $\sigma_{\min}(\text{n/m}^2)$   
cos de retenue vide avec seisme verticale (dp)



-fig 2.2.12- courbe d'isocisaillement taux max(n/m.m)  
cas de retenue vide avec seisme verticale (dp)

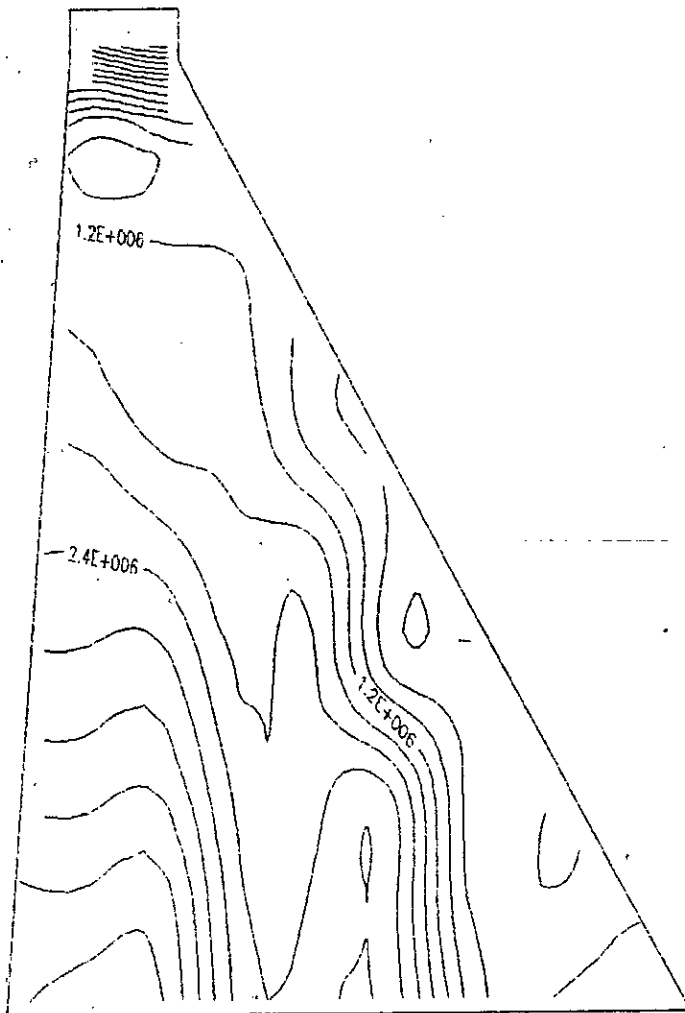
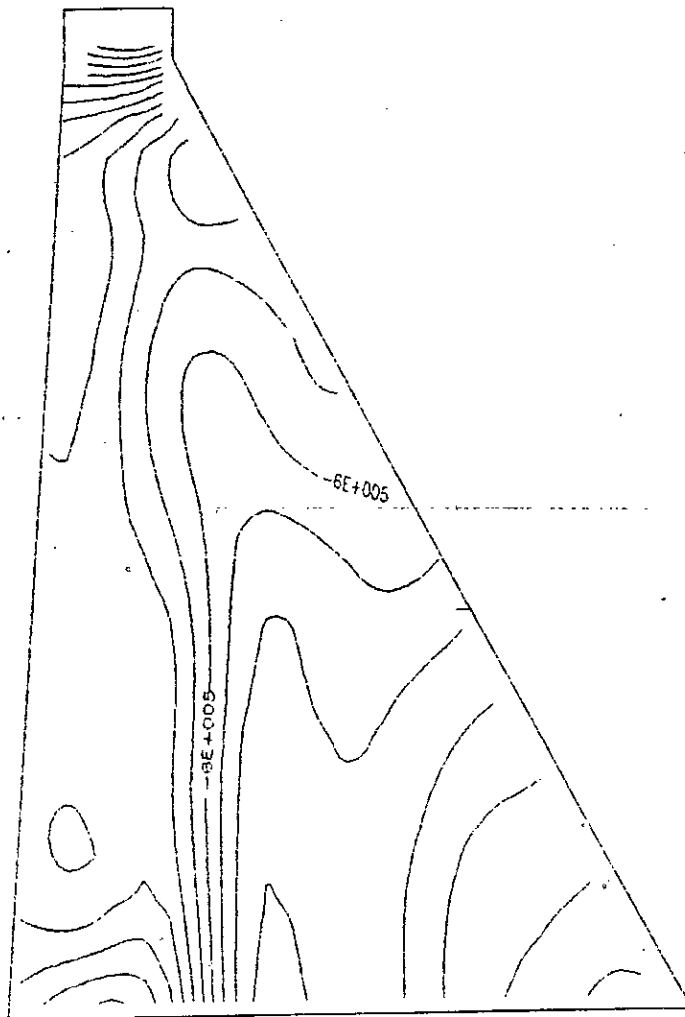


Fig 2.2.13 \_courbe d'isocontraintes sigma max( $n/m^2$ )  
cas de retenue pleine avec seisme a 45 degres (dp)





-Fig 2.2.14\_ courbe d'isocontraintes  $\sigma_{\min}$  (n/m<sup>2</sup>)  
cas de retenue pleine avec seisme a 45 degrés (dp)

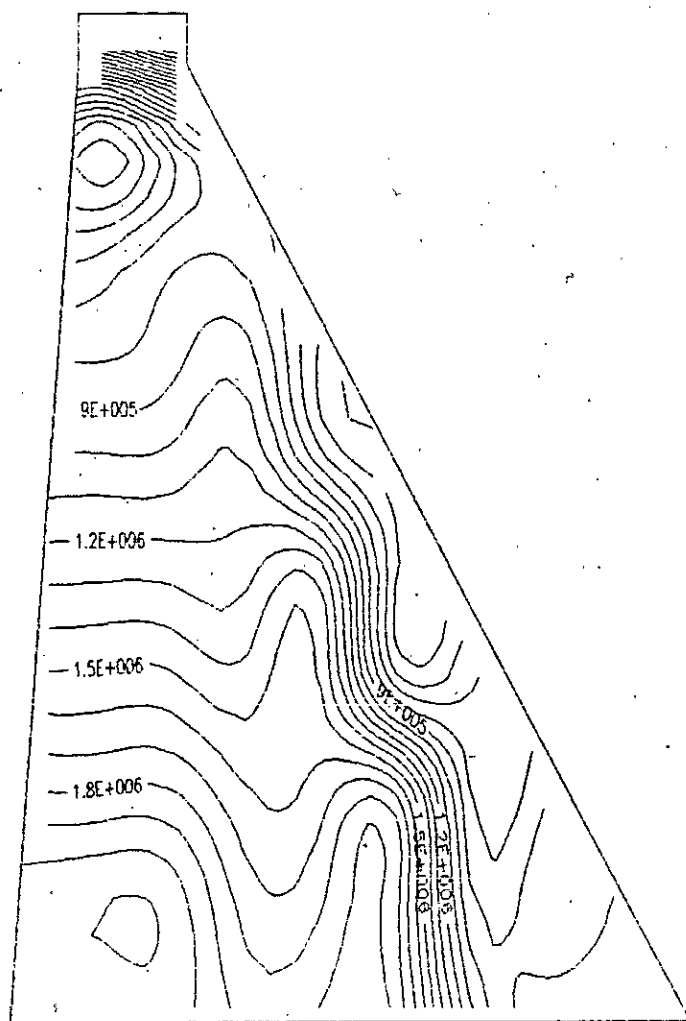
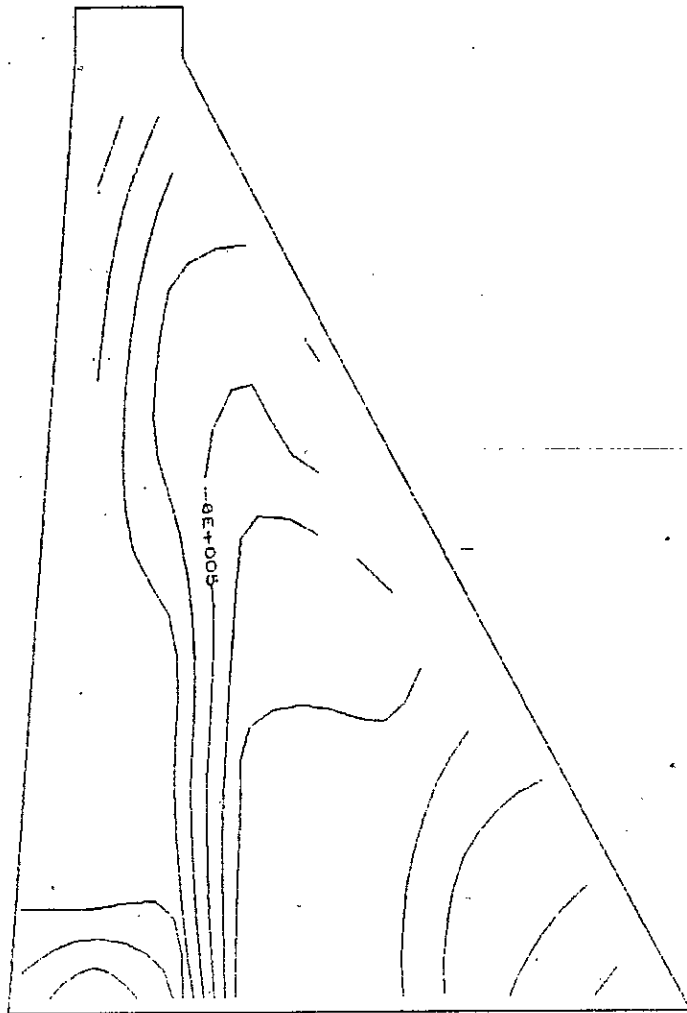
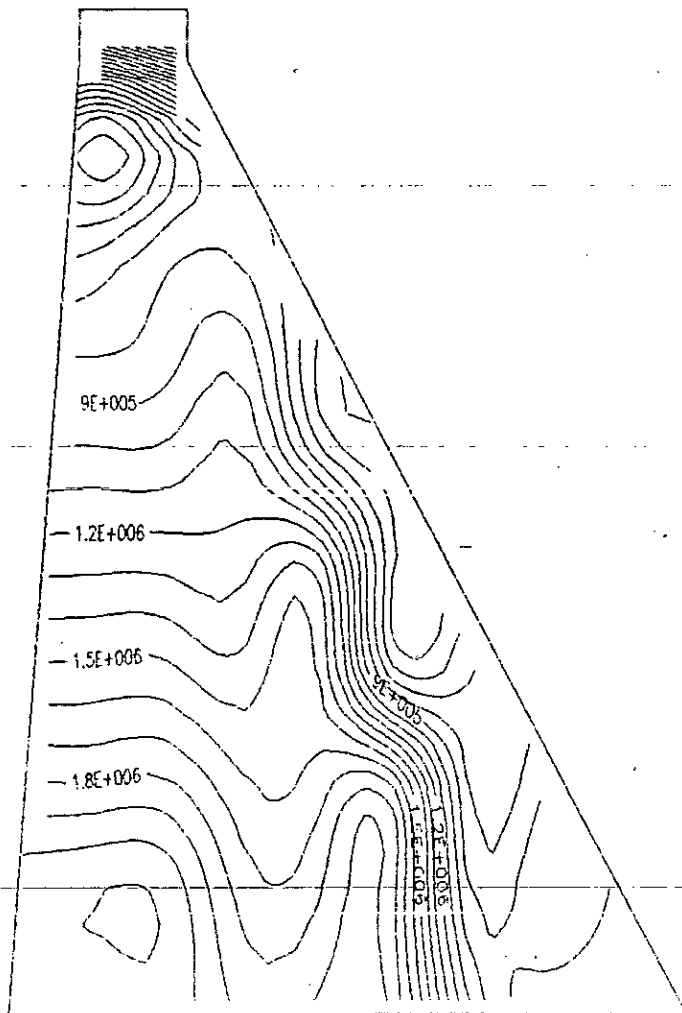


Fig 2.2.15. courbe d'isocisaillement taux max(n/m²)  
cas de retenue pleine avec seisme a 45 degres (dp)



-fig 2.2.17 - courbe d'isocontraintes  $\sigma_{\min}$  (n/m<sup>2</sup>)  
cas de retenue vide avec seisme  $\alpha$  45 degrés (dp)



-fig2.2.18 -courbe d'isocisaillement taux max(n/m+m)  
cas de retenue vide avec seisme a 45 degres (dp)

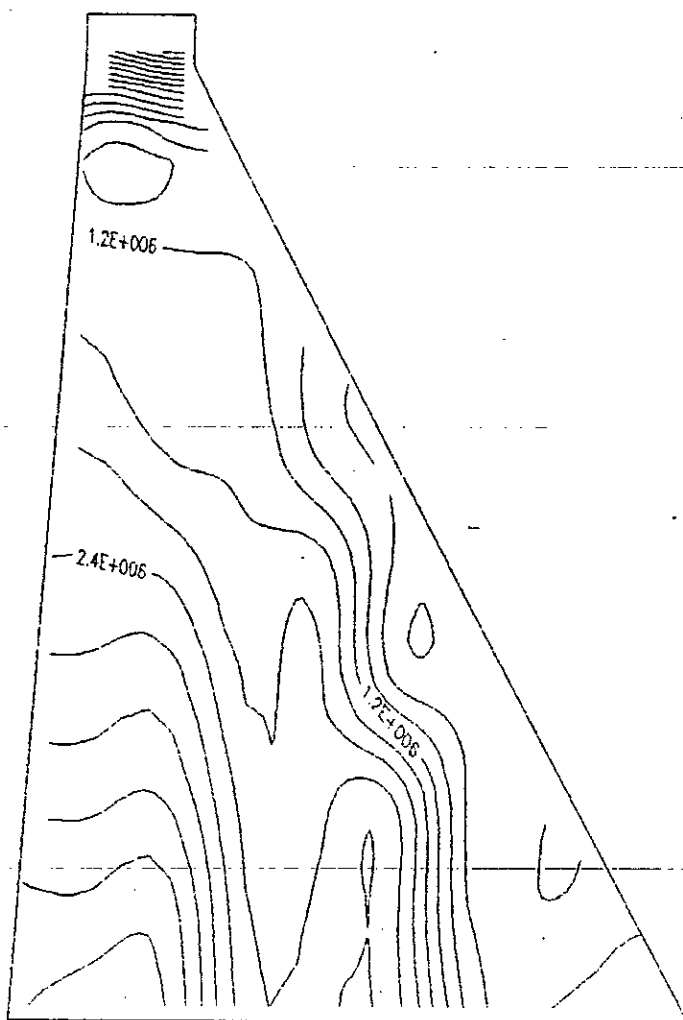


fig 2.2.16 - courbe d'isocontraintes sigma max(n/m<sup>2</sup>m)  
cas de retenue vide avec seisme a 45 degres (dp)

### **Interprétation des résultats:**

Il apparait de la (figure 1) une courbe de convergence en fonction du nombre d'elements total, le pique est dû aux mauvais choix de discrétisation. En effet, pour une direction donnée des forces, un choix judicieux du sens de discrétisation conduit vers la solution exacte, avec un nombre d'elements petit (voir figure 2 ).

### **Conclusion:**

L'etude statique du barrage de Hammam Grouz (sud de constantine), nous a permis de visualiser l'allure des contraintes , pour differents cas de chargement.

Elle nous a permis aussi d'affirmer que le fait de considérer un mode de déformation influe visiblement sur les contraintes, et que le faite de remplacer l'effet de l'eau, plus la vase en depot, par l'effet de l'eau chargée (materiaux en suspension) n'est pas vérifiè (en tout point).

**conclusion**

C'est le besoin sans cesse croissant de l'homme d'économiser l'effort ,le temps et l'argent que celui ci créa des outils simples mais puissant lui permettant de simuler numériquement le comportement de

structures dont l'essai sur place et à échelle réelle est impossible,c'est ainsi qu'il s'arma de la M.E.F,un atout maitre dans le domaine de la modélisation numérique des structures et s'en alla ausculter tout ce qui lui paraissait obscure.

La M.E.F est un outil puissant facilement exploitable une fois mise en oeuvre et c'est à cette mise en oeuvre que doit etre accordée les plus gros moyens (calculateurs puissants).

Combinée aux techniques de calcul dynamique elle fournit une représentation assez fiable des caractéristiques de la structure donc donne un apport riche en informations et d'outils d' aide à la conception.

Ce travail bien qu'entrepris de façon modeste à permis de combler des lacunes à deux niveaux essentiellement:

\*Du points de vue numérique,ou il nous a permis d'acquérir la maitrise de certaines méthodes( de traitement ou de programmation).

\*Du point de vue compréhension des phénomènes puisqu'on a été confonté directement aux réalités.



## BIBLIOGRAPHIE

- 1 / 'Introduction à la methode des éléments finis'  
Rockey
- 2 / ' Calcul , Modélisation et Conception des stuctures complexes'  
P.Guellec.
- 3 / ' Une Presentation de la Méthode des Eléments finis'.  
G.Touzot G.dhatt  
Maloine S-A
- 4 / ' The finite Element Method ',VI  
Zienkiewicz  
Mc Graw Hill 1972
- 5 / ' Numerical Methods in finite Element Analysis '  
K.J.Bathe - E.Wilson  
Prentice hall.
- 6 / ' Investigation Analytique des effets de troncature Modale  
sur la réponse dynamique des structures '  
Proposé par M.Tiliouine  
G.civil 1990
- 7 / ' Modélisation des Structures Par Element Finis '  
J.L.Batoz  
Hermes 1990.
- 8 / ' Génie Parasismique '  
V.Davidovici  
Presse de l'Ecole N ationale des Ponts et Chaussées.
- 9 / ' Dynamique Des Structures ', T1  
R.Clough J.Penzien.  
Pluralis.
- 10 / ' Calcul des Barrages en Beton Par la M.E.F '  
Thèse D'Ingéniorat encadrée par Mlle Zerfa

