

Dimanche 03/07/94
(14^h-12^h)

2/94

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT : HYDRAULIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

**MODELISATION ET SIMULATION NUMERIQUE
DES PROBLEMES DE DIFFRACTION
BIDIMENSIONNELLE D'UN MASCARET EN
REGIME INSTATIONNAIRE**

Etudié par :

Mr ABSI Rafik
Melle RETIEB Safia

Proposé et Dirigé par :

Mr O. BELHADJ
Mme S. BENMAMAR

PROMOTION JUIN 1994

E.N.P. 10, Avenue Hacén Badi EL-HARRACH - ALGER

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT HYDRAULIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

**MODELISATION ET SIMULATION NUMERIQUE
DES PROBLEMES DE DIFFRACTION
BIDIMENSIONNELLE D'UN MASCARET EN
REGIME INSTATIONNAIRE**

Étudié par :

**Mr ABSI Rafik
Melle RETIEB Safia**

Proposé et Dirigé par :

**Mr O. BELHADJ
Mme S. BENMAMAR :**

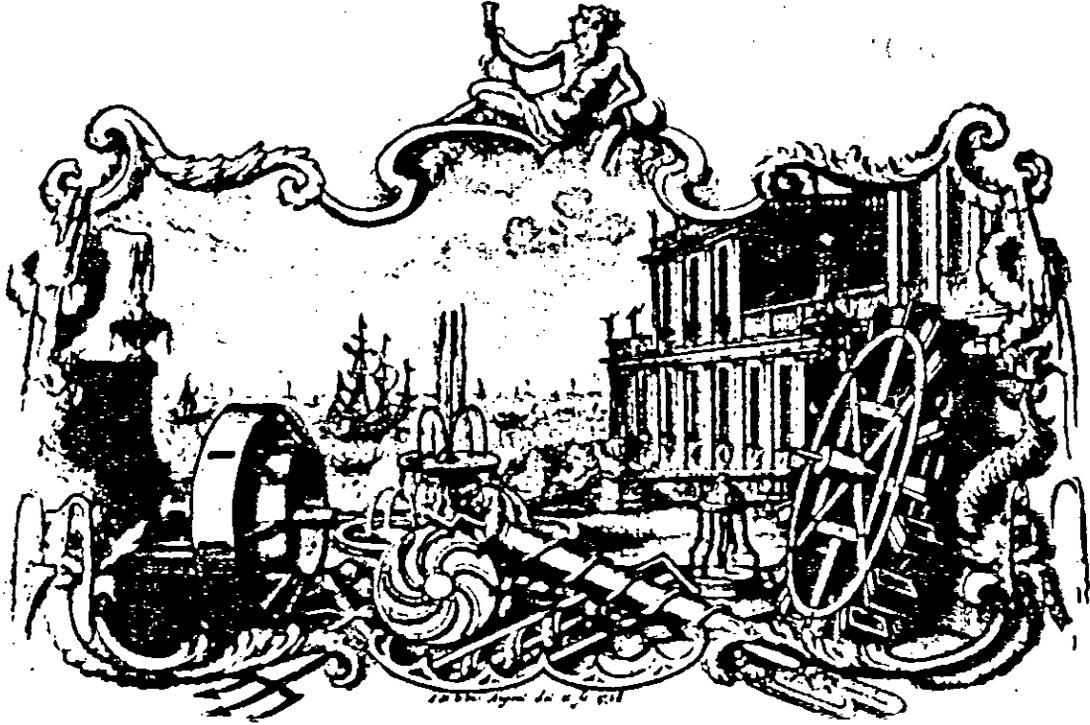
PROMOTION JUIN 1994

E.N.P. 10, Avenue Hacem Badi EL-HARRACH - ALGER

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

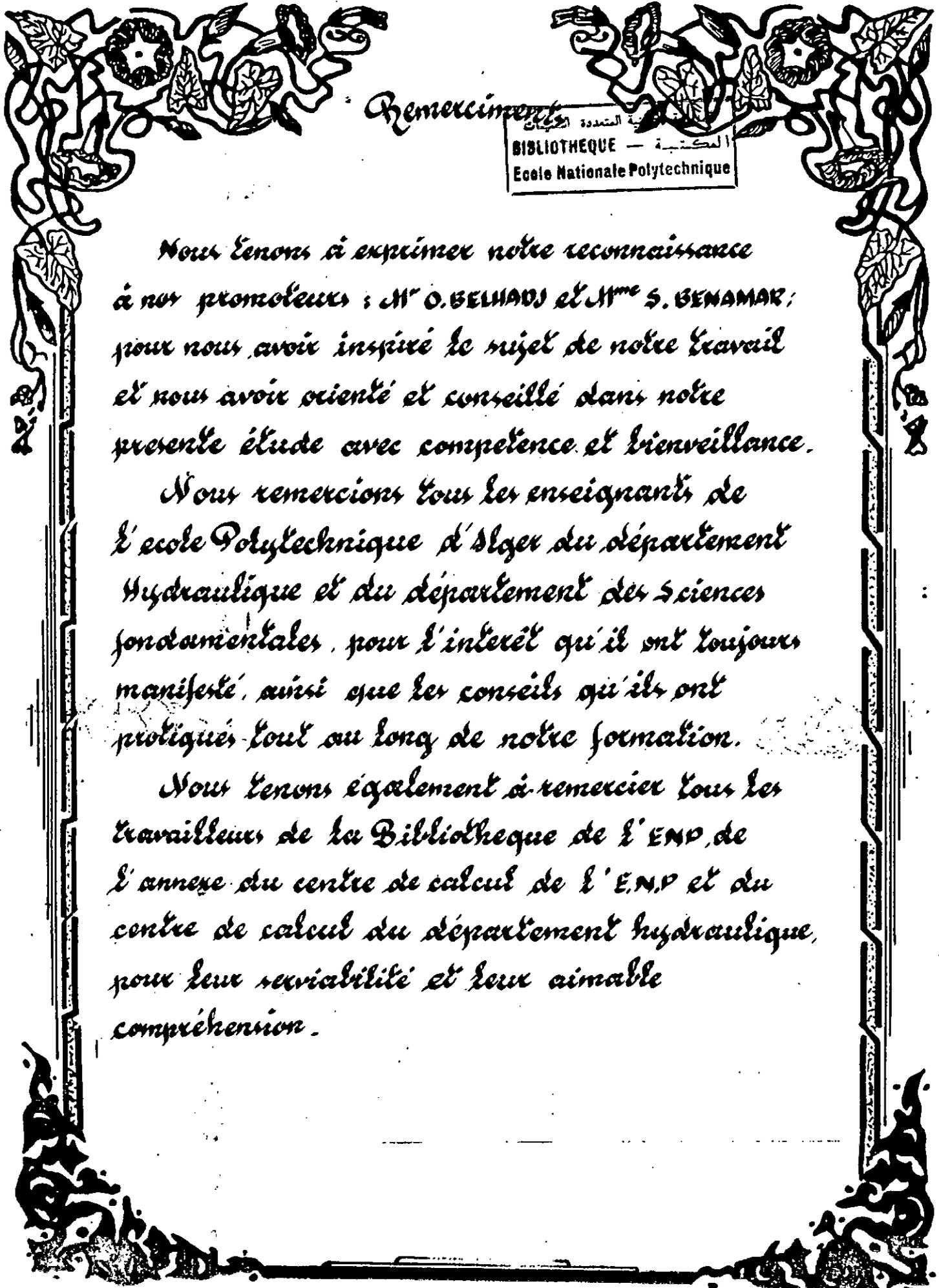
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

HYDRODYNAMICA,



"La mécanique des fluides numérique est en passe de devenir un outil de mise au point aussi important que les essais expérimentaux .

Les exemples d'application sont trop nombreux pour être énumérés; de l'aérodynamique à l'hydrodynamique, de la microbiologie à la formation des étoiles."



Remerciements

المكتبة المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Nous tenons à exprimer notre reconnaissance à nos promoteurs : M^r O. BELHADJ et M^{me} S. BENAMAR ; pour nous avoir inspiré le sujet de notre travail et nous avoir orienté et conseillé dans notre présente étude avec compétence et bienveillance.

Nous remercions tous les enseignants de l'école Polytechnique d'Alger du département Hydraulique et du département des sciences fondamentales, pour l'intérêt qu'ils ont toujours manifesté, ainsi que les conseils qu'ils ont prodigués tout au long de notre formation.

Nous tenons également à remercier tous les travailleurs de la Bibliothèque de l'ENP, de l'annexe du centre de calcul de l'ENP et du centre de calcul du département hydraulique, pour leur servabilité et leur aimable compréhension.



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Dedicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Ma Mère et mon Père

Mes deux Frères

Ma Soeur et son mari

*Ma Grande Mère,
à Mon Oncle Mohamed
et à Tous mes Oncles*

*Tous ceux qui me sont
chers (es)*

ABSI Rafik





المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Dedicace

Je dédie ce modeste travail à :

*Ma Mère
Mon Père
Ma grande-Mère
Ma Soeur aînée R. Houda
Mon Frère et mes Soeurs*

*Et à tous ceux qui me sont
chers (es)*

S. Zetiel



يمكننا التعبير عن ظاهرة إنعراج وارتفاع المياه - الناتجة عن مختلف أنماط الانعكاسات و الإضطرابات بين الأمواج والتداخلات الناتجة عنها - لدى وصولها بنيات متضايقة ومتسعة بمخططات غير مزدوجة ذي درجات عليا. بعد الحصول على معادلات «Saint-Venant» بواسطة التحليل الرياضي للظاهرة الفيزيائية، اخترنا مخطط تجرسي من نوع "Strang" لحلها. بعد إنجاز التجريب العددي لهذه الطريقة ظهر أنه بالإمكان قياس إنعراج وارتفاع الأمواج المائية لجريان سريع غير مستقر ثنائي الأبعاد بدقة.

• **SYNOPSIS :**

The diffraction phenomena of bore which cross singular channels (contraction, expansion) are simulated by high order nonoscillatory schemes.

After, elaboration of the bidimensional Saint-Venant equations, a splitting schema of Strang type has been chosen for their resolution.

The results obtained by numerical experimentation show that diffraction of unstationary hydraulic waves; may be calculated with precision using the present model, and taking into account various types of collisions and interactions that result.

• **RESUME :**

Les phénomènes de diffraction d'un mascaret traversant des structures singulières (convergentes, divergentes) sont simulés par des schémas d'ordre élevé non-oscillants.

Après avoir obtenu les équations de Saint Venant bidimensionnelles par modélisation mathématique du problème, un schéma splitting du type Strang a été choisi pour la résolution.

Les résultats obtenus par expérimentation numérique montrent que la diffraction d'ondes hydrauliques instationnaires peut-être calculée avec précision par la présente méthode, en prenant en compte divers types de réflexion, de collisions entre ondes et des interactions qui en résultent.

TABLE DES MATIERES

Chapitre I : Introduction	1
Chapitre II : Généralités	
II.0 Introduction	2
II.1 Avènement du calcul infinitésimal* :	3
II.2 Théories de la physique des milieux continus	3
II.3 Equations de la mécanique des fluides :	5
II.3.1 Equations d'Euler	5
Equations de la gozodynamique	6
II.3.2 Equations de Saint-Venant pour les écoulements à surface libre	7
II.3.3 Analogie Mathématique	8
II.4. Naissance de l'hydraulique expérimentale :	9
II.5 Méthodes de résolutions des équations de la mécanique des fluides :	10
II.5.1 Méthode des caractéristiques	10
II.5.2 Méthodes numériques (utilisant la transcription en "différence finies")	11
II.6 Présence du choc	12
II.6.1 Analogie physique	12
a/ Dans la dynamique des gaz	12
b/ Dans les écoulements à surface libre	13
II.6.2 Définition d'une onde de choc	15
II.6.3 Apparition des discontinuités	15
II.7 Conclusion	18

Chapitre III : Ecoulement à surface libre dans les transitions

III.0 Introduction	19
III.1 Ecoulement à surface libre	19
III.1.1 Notion du nombre de Froude	20
III.1.2 Intumescence	21
III.2 Canaux prismatiques et non prismatiques	21
1. Canaux prismatiques	21
2. Canaux non prismatiques	21
a/ Types de rétrécissement	22
b/ Types délargissement	23
III.3 Ecoulement dans les transitions	23
III.3.1 Notion de mascaret	24
III.3.1.1. Cas de déviation brusque d'un mur	24
III.3.1.2. Ondes positives et ondes négatives	26
III.3.1.3. Notion d'écoulement transcritique	28
III.3.2 Réduction des ondes transversales	30
III.3.3 Rétrécissement d'un canal dans des conditions d'écoulement torrentielles	31
III.3.4 Elargissement d'un canal dans des conditions d'écoulement torrentielles	34

Chapitre IV : Modélisation mathématique

IV.0 Introduction	36
IV.1 Hypothèses de base	37
IV.2 Mise en équation	37
a/ Equation de conservation de la masse	38
b/ Equation de conservation de la quantité de mouvement	39
IV.3 Transformation géométrique	42
IV.3.1 Application de la transformation Géométrique aux équations de Saint-Venant	45
IV.4 Conditions initiales, conditions aux limites	52
IV.4.1 Conditions initiales :	52
IV.4.2 Conditions aux limites :	52
A/ Conditions d'amont et conditions d'aval	52
B/ Conditions de symétrie	53
C/ Conditions sur les parois latérales	53

Chapitre V : Modélisation numérique

V.1. Introduction.....	55
V.2. Historique.....	56
V.3 Méthodes numériques utilisant la transcription en "différence finie".....	58
V.3.1 Réseau et fonction définie sur un réseau	58
V.3.2 Transcriptions en différences finies :	59
V.3.3 Analyse de l'approximation	61
A. Erreur de troncature	
B. Convergence	
C. Consistance	
D. Stabilité	
E. Schéma explicite, schéma implicite	
V.4 Choix du schéma	62
V.5 Définition d'une solution généralisée :	63
V.6 Suppression d'une discontinuité.....	64
V.7 Présentation du schéma	66
V.7.1 Schémas aux différences conservatifs	66
V.7.2 Schéma aux différences de Godounov	68
V.7.3 Schéma splitting du type Strang et solution approximante de Riemann* :	70
a/ La méthode splitting du vecteur flux	70
b/ La méthode splitting du type Strang	71
V.7.4 Schémas d'ordre élevés non oscillants :	72
V.8 Application du présent schéma aux équations de Saint-Venant.....	73
V.9 Stabilité du présent schéma	74
ORGANIGRAMME GENERAL	75

Chapitre VI : Expérimentation numérique

VI.1 Introduction	79
VI.2 Applications.....	80
VI.2.1 Première partie	
A/ Présentation de l'application	
B/ Résultats et analyses	81
VI.2.2 Deuxième partie :	96
A/ Présentation de l'application	
B/ Résultats et analyses	97
VI.2.3 Troisième partie.....	103
A/ Présentation de l'application	
B/ Résultats et analyses	104
VI.2.4 Quatrième partie.....	121
A/ Présentation de l'application	

CONCLUSION GENERALE

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

L'objet de ce projet est de présenter cette partie de la mécanique des fluides qui se rapporte aux écoulements de fluides à grandes vitesses dans les transitions. Ces écoulements engendrent des particularités du type ondes, ce sont les "ondes de chocs". En particulier dans les écoulements à surface libre c'est le phénomène de diffraction d'un mascaret en régime instationnaire.

Les résultats obtenus habituellement par les procédés classiques, ne peuvent avoir qu'un aspect qualitatif. Traiter le problème dans toute sa complexité, en prenant en compte divers types de réflexion, de collisions entre deux ondes et les interactions qui en résultent, ne peut se faire que de façon numérique.

La modélisation numérique est un outil d'aide efficace, complémentaire et très économique.

Ainsi ce projet est un sujet de modélisation et de simulation par le calcul numérique, des problèmes d'ondes de chocs dans les écoulements de fluide à grande vitesse.

Le but de cette étude est de définir complètement les caractéristiques hydrauliques de l'écoulement à surface libre dans les zones de transitions.

L'intérêt pratique de l'étude de ce type d'écoulements à surface libre est de permettre un dimensionnement rationnel et économique des bajoyers dans différentes structures hydrauliques convergentes et divergentes de grande étendue.

Donc dans ce qui suit, on va simuler numériquement par des schémas d'ordre élevés non oscillants, la diffraction bidimensionnelle d'un mascaret traversant des structures convergentes et divergentes, en régime instationnaire.

Pour cela, il importe de suivre un développement logique et cohérent; allant tout d'abord des sciences de l'ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles décrivant le phénomène physique; puis aux méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques; ensuite la programmation et l'informatique pour exécuter efficacement les calculs sur ordinateurs; enfin, l'analyse et la critique des résultats, pour vérifier la validité du modèle ainsi établi.

CHAPITRE 2

GENERALITES

II.0 INTRODUCTION

Le développement des théories de la physique mathématique résulte essentiellement de la découverte du calcul infinitésimal, grâce auquel Euler fonda définitivement la science de l'hydrodynamique.

Euler a établi ainsi les équations qui régissent l'écoulement d'un fluide, qui plus tard ont été appliquées par Saint-Venant pour les écoulements à surface libre.

Malgré l'élégance de ces équations, leur résolution resta longtemps impossible.

Puis avec la conjonction de deux éléments importants à savoir le développement des calculateurs électroniques et celui des techniques de résolution mathématiques, on pouvait enfin, grâce à une variété de schémas numériques, avoir des solutions approchées de ces équations. :

C'est l'avènement de la modélisation et de la simulation par le calcul numérique,

Pour des problèmes bien particuliers, les solutions ainsi obtenues restaient suffisamment régulières, mais, pour de nombreux problèmes physiques, l'expérience a montré que la répartition de divers paramètres dans les écoulements de fluides est décrite par des fonctions présentant des sauts (ondes de choc).

Dans cette partie, on va établir l'analogie mathématique et physique, entre ondes de choc en gazodynamique et ondes de choc, ou diffraction d'un mascaret, dans les écoulements à surface libre.

II.1 AVENEMENT DU CALCUL INFINITESIMAL* :

Il importe préalablement de préciser que les théories de physique mathématique si importantes de nos jours, ont pour base la théorie des équations différentielles.

C'est à Gottfried Leibniz (1646-1716) que revient le mérite de la découverte du calcul infinitésimal. C'est en lisant les écrits de Dettonville, que Leibniz a trouvé une lumière que l'auteur lui même n'avait point remarqué, il a ainsi découvert un algorithme nouveau qui devait permettre un développement rapide et intensif de l'analyse infinitésimale.

En même temps, mais indépendamment, l'étude particulière de la série du binôme devait amener Sir Isaac Newton (1642-1727) à inventer ses méthodes de calcul infinitésimal qui ne diffèrent de la méthode leibnizienne que par les notations qui, moins commodes ne sont pas demeurées.

De cette découverte du calcul infinitésimal, devait résulter un épanouissement de la physique mathématique qui n'a fait que s'accroître jusqu'à l'époque contemporaine.

II.2 THEORIES DE LA PHYSIQUE DES MILIEUX CONTINUS [9]

Une théorie en mécanique des milieux continus est construite à partir des équations générales, des lois contraintes - déformations, et à partir d'hypothèses supplémentaires permettant l'étude mathématique effective du problème considéré.

Les grandes lois de la physique classique sont d'un type général que l'on appelle loi de conservation.

Une loi de conservation est un bilan qui s'applique à tout domaine D, strictement intérieur au système S étudié, et que l'on suit dans son mouvement.

Sous forme symbolique une telle loi peut s'écrire :

$$\frac{d}{dt} \int_D A_i dv + \int_{\partial D} \alpha_i d\delta = \int_D A_i dv$$

* ANDRE DELACHET L'ANALYSE MATHEMATIQUE PUF

avec : $\bar{\alpha}$, $\bar{\alpha}$, \bar{A} : représentent trois grandeurs associées dans l'énoncé de la loi.

Ce symbole $\frac{d}{dt}$ désigne la dérivée particulière.

En général les problèmes de mécanique des milieux continus conduisent à la résolution de problèmes mathématiques extrêmement complexes. Afin d'être en mesure de parvenir à des résultats pratiquement intéressants, il sera souvent nécessaire de faire appel à diverses simplifications permettant de remplacer le problème initial par un problème plus abordable par les techniques mathématiques de calcul.

Diverses théories constituent précisément des méthodes générales pour opérer, dans certaines conditions, une telle simplification.

L'étude des équations générales a montré que celles-ci étaient, en général, insuffisantes pour permettre la résolution des problèmes de mécanique des milieux continus. Il convient, en effet, que certaines équations d'un problème bien posé permettent de traduire les différents comportements des milieux très variés que l'on peut être amené à considérer.

Ces équations appelées lois de comportement ou lois contraintes - déformations, sont donc des lois mathématiques schématisant le comportement mécanique du milieu.

Les différents milieux continus sont définis d'après le type de lois de comportement qui les caractérisent.

Par définition, l'état des déformations pour les milieux continus appelés fluides, sont caractérisés par le tenseur des taux des déformations (D); en chaque point et à chaque instant, le tenseur des contraintes (τ) est une fonction déterminée univoque de ce tenseur (D).

il est d'usage d'appeler "écoulement" le mouvement fluide.

II.3 EQUATIONS DE LA MECANIQUE DES FLUIDES :**II.3.1 EQUATIONS D'EULER : [3]**

Les études mathématiques d'Alembert (1717-1783) et Clairaut (1713-1765) furent parachevées par Léonard Euler (1707-1783) qui fonda définitivement la science de l'hydrodynamique.

C'est en raisonnant sur le parallélépipède élémentaire pris dans une masse liquide en mouvement et en ajoutant au second membre de l'équation d'équilibre de l'hydrostatique la force d'inertie par unité de masse que L. Euler a établi les équations qui régissent l'écoulement d'un fluide non visqueux.

Ces équations portent le nom "d'équations d'Euler" et peuvent se condenser en une expression vectorielle unique :

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \bar{F} - \bar{\gamma}$$

avec :

- ρ : masse volumique du fluide
- p : la pression
- \bar{F} : la force extérieure
- $\bar{\gamma}$: l'accélération absolue.

Euler généralisera également l'équation différentielle de continuité de d'Alembert sous la forme employée actuellement pour les fluides compressibles :

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \frac{\delta(\rho u)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho v)}{\delta y} + \frac{\delta(\rho w)}{\delta z} = 0$$

avec :

- ρ : masse volumique du fluide considéré.
- u, v, w : composantes de la vitesse suivant x, y et z .

C'est à partir de ces différentes équations et en considérant les coordonnées de deux points M et M' infiniment voisins situés sur la trajectoire de la molécule liquide qui passe en M au temps t et en M' au temps $t+dt$ qu'il déduisit la forme classique de l'équation de Bernoulli qui n'est applicable à une molécule liquide, que le long de sa trajectoire.

$$Z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = Cte$$

Par la suite Louis-Marie-Henri Navier (1785 - 1836) chercha à analyser le mouvement d'un fluide d'une manière assez semblable à celle d'Euler, mais en tenant compte d'une attraction ou d'une répulsion hypothétique entre les molécules voisines. Les conceptions de Navier furent reprises par Sir George-Gabriel Stokes (1819-1903) qui introduisit, dans les Equations de Navier, le coefficient de viscosité dynamique μ et qui aboutit aux équations classiques de Navier-Stokes concernant l'écoulement des fluides visqueux.

Equations de la gazodynamique : [11]

Les écoulements de gaz parfait non visqueux, unidimensionnels, instationnaires sont modélisés par les deux équations aux dérivées partielles, traduisant respectivement les bilans de masse et de quantité de mouvement :

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + u \frac{\delta \rho}{\delta x} + \rho \frac{\delta u}{\delta x} = 0$$

$$\text{et : } \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta t} + u \frac{\delta u}{\delta x} = 0$$

$$\text{avec } \frac{\delta p}{\delta x} = a^2 \frac{\delta \rho}{\delta x}$$

$$\left(\frac{a^2}{\rho} \right) \frac{\delta \rho}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta t} + u \frac{\delta u}{\delta x} = 0 \quad a \text{ est la célérité du son.}$$

II.3.2 EQUATIONS DE SAINT-VENANT POUR LES ECOULEMENTS A SURFACE LIBRE [3, 5].

Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797 - 1886) a établi les équations différentielles de base pour les écoulements à surface libre en faible profondeur.

Ce sont les équations de continuité et celle du mouvement :

- L'équation de continuité qui exprime la conservation du volume d'eau :

$$\frac{\delta S}{\delta t} + \frac{\delta Q}{\delta x} = 0$$

avec $S(x, h)$ = section mouillée, $Q(x, t)$ = débit de l'écoulement

- l'équation du mouvement exprimant l'équilibre entre les forces de pesanteur, de frottement et d'inertie appliquées à la masse d'eau en mouvement; dans le cas général d'un mouvement en régime variable cette équation s'écrit :

$$\frac{\delta Q}{\delta t} + \frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{Q^2}{S} \right) + gS \frac{\delta h}{\delta x} = gS(I - J)$$

avec $h(x, t)$ = profondeur

ou encore avec $V = \frac{Q}{S}$ et $I = J \approx 0$

$$\frac{\delta V}{\delta t} + V \frac{\delta V}{\delta x} + g \frac{\delta h}{\delta x} = 0$$

$V(x, t)$ = vitesse moyenne,

I = pente du fond,

J = perte de charge unitaire (pente de la ligne d'énergie).

Les équations de Saint-Venant ainsi obtenues, pour les régimes transitoires non permanent des écoulements à surface libre, constituent un système d'équations aux dérivées partielles du types hyperbolique.

II.3.3 ANALOGIE MATHÉMATIQUE

Ainsi on obtient les deux systèmes d'équations de la mécanique des fluides.

Le premier système d'équations d'Euler modélisant les écoulements de gaz [11]

$$\begin{cases} \frac{\delta \rho}{\delta t} + u \frac{\delta \rho}{\delta x} + \rho \frac{\delta u}{\delta x} = 0 & (2.1) \\ \frac{\delta u}{\delta t} + u \frac{\delta u}{\delta x} + \left(\frac{a^2}{\rho}\right) \frac{\delta \rho}{\delta x} = 0 & (2.2) \end{cases}$$

Le second système d'équations de Saint-Venant décrivant les écoulements à surface libre : [3]

$$\begin{cases} \frac{\delta h}{\delta t} + h \frac{\delta u}{\delta x} + u \frac{\delta h}{\delta x} = 0 & (2.3) \\ \frac{\delta u}{\delta t} + u \frac{\delta u}{\delta x} + g \frac{\delta h}{\delta x} = 0 & (2.4) \end{cases}$$

L'analogie mathématique étant évidente, les mathématiciens sans, pour autant spécifier le problème physique étudié, ont essayé de résoudre ces équations aux dérivées partielles. Ils ont ainsi établi un modèle général équivalent mais plus simplifié, c'est le problème de Cauchy [10].

$$\begin{cases} \frac{\delta u}{\delta t} + u \frac{\delta u}{\delta x} = 0, & 0 < t < T, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(x, 0) = \psi(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases} \quad (2.5)$$

Bien qu'on pouvait décrire un problème physique par des équations mathématiques, ces équations restèrent pendant longtemps sans résolution.

Pendant que les mathématiciens s'intéressaient à l'hydrodynamique en tant que discipline mathématique toujours plus élégante, les physiciens se sont tournés vers l'hydraulique expérimentale qui elle est une technique plus riche d'applications : d'où la naissance de l'hydraulique expérimentale.

2.4. NAISSANCE DE L'HYDRAULIQUE EXPERIMENTALE : [3]

L'hydraulique expérimentale fit de très grands progrès : on doit noter que cette période vit l'invention de plusieurs outils essentiels pour les recherches en laboratoire et dans la nature; on peut citer le piézomètre, le tube de pitot, le moulinet et le modèle réduit.

Mais rapidement, on a constaté l'insuffisance de l'hydraulique expérimentale seule dans plusieurs domaines, notamment les modèles réduits.

Les modèles réduits, appelés parfois "modèles physiques" s'avèrent insuffisants pour l'étude d'aménagements de grande étendue [3].

En effet, pour étudier certains problèmes, le modèle réduit, même à petite échelle, devrait avoir néanmoins des dimensions importantes (facteur économique); par ailleurs, l'utilisation d'une échelle trop petite présente des inconvénients notamment la faible précision des mesures et l'apparition de phénomènes parasites.

En plus de l'insuffisance sus citée, et devant l'impossibilité d'intégrer les équations d'Euler et de Saint Venant, la résolution analytique de tels problèmes qui se heurte à des difficultés inextricables est devenue un véritable mythe.

Les mathématiciens de tout bord ont essayé de trouver une solution exacte élégante pouvant régler définitivement ce problème, mais en vain ce n'était guère possible; tout de même il a fallu chercher une solution approximative, proche de la solution exacte.

De nouvelles techniques permettant la résolution approximative de ces équations ont été établies, on peut citer la théorie des caractéristiques et les méthodes numériques utilisant la transcription en différences finies.

II.5 METHODES DE RESOLUTIONS DES EQUATIONS DE LA MECANIQUE DES FLUIDES :

II.5.1 METHODE DES CARACTERISTIQUES

Elle consiste à chercher des directions particulières le long desquelles le système d'équations aux dérivées partielles définissant l'écoulement se réduit à un système différentiel.

En considérant le système de Saint-Venant (2.3), (2.4) et afin d'établir l'équation des caractéristiques :

multiplions (2.3) et (2.4) par λ_1 et λ_2 , paramètres indéterminés, et ajoutons les deux équations ainsi obtenues. Il vient :

$$\lambda_1 \frac{\delta h}{\delta t} + (\lambda_1 u + \lambda_2 g) \frac{\delta h}{\delta x} + \lambda_2 \frac{\delta u}{\delta t} + (\lambda_2 u + \lambda_1 h) \frac{\delta u}{\delta x} = 0$$

Les deux premiers termes représentent la dérivée de h par rapport au temps dans la direction

$$\frac{dx}{dt} = \alpha = \frac{\{\lambda_1 u + \lambda_2 g\}}{\lambda_1}$$

et les deux suivants la dérivée de u par rapport au temps dans la direction

$$\frac{dx}{dt} = \alpha = \frac{\{\lambda_2 u + \lambda_1 g\}}{\lambda_2}$$

Ces deux directions sont confondues si

$$\lambda_1(u - \alpha) + \lambda_2 g = 0$$

$$\text{et } \lambda_1 h + \lambda_2(u - \alpha) = 0$$

le déterminant

$$\begin{vmatrix} (u - \alpha) & g \\ h & (u - \alpha) \end{vmatrix}$$

doit être nul, de sorte que $(u - \alpha)^2 - c^2 = 0$

et
$$\frac{dx}{dt} = u \pm c \quad (2.6)$$

Au signe + correspond deux relations appelées condition de compatibilité :

$$u + 2\sqrt{gh} = cste \quad (2.7)$$

valable dans la direction $\frac{dx}{dt} = u + a$

et au signe - correspond :

$$u - 2\sqrt{gh} = cste \quad (2.8)$$

valable dans la direction $\frac{dx}{dt} = u - a$

Aux deux familles de courbes intégrales des équations différentielles (2.6) situées dans le plan (x, t) , correspondent deux familles de courbes intégrales des équations intégrales (2.7) et (2.8) situées dans le plan (u, c) .

Ces courbes sont appelées lignes caractéristiques et les équations (2.6) (2.7) (2.8) équations des caractéristiques.

Ces équations satisfont le système (2.3) et (2.4) de Saint-Venant. La solution peut donc être obtenue le long de certaines courbes particulières du plan (x, t) en résolvant simultanément les équations différentielles (2.6), (2.7), (2.8).

II.5.2 METHODES NUMERIQUES (UTILISANT LA TRANSCRIPTION EN "DIFFERENCE FINIES") [3, 10]

L'essor des méthodes numériques résulte essentiellement de la conjonction de trois éléments suivants :

La plupart des problèmes simples ayant déjà été résolus, on se trouve confronté à des problèmes de plus en plus compliqués insolubles par les méthodes traditionnelles.

On a développé des ordinateurs et calculateurs électroniques de puissance et de capacité sans cesse croissante à des prix de plus en plus bas.

Parallèlement, les mathématiciens ont développé des techniques de résolution de plus en plus efficaces et applicables à une variation croissante de problèmes mathématiques.

Ces méthodes numériques de résolution, utilisant la transcription en différence finie seront détaillées au chapitre 5.

II.6 PRESENCE DU CHOC [4, 7, 8, 10, 11, 15, 23]

En plus de l'analogie mathématique, déjà citée, existante entre équations d'Euler en dynamique des Gaz et équations de Saint-Venant pour les écoulements à surface libre, il existe une analogie du point de vue phénomène physique.

En effet, pour de nombreux problèmes physiques, l'expérience a montré que la répartition de divers paramètres dans l'écoulement supersonique en gazodynamique [10, 11], et supercritique en hydrodynamique [4, 7, 8, 15, 23], est décrite par des fonctions présentant des sauts (des ondes de choc).

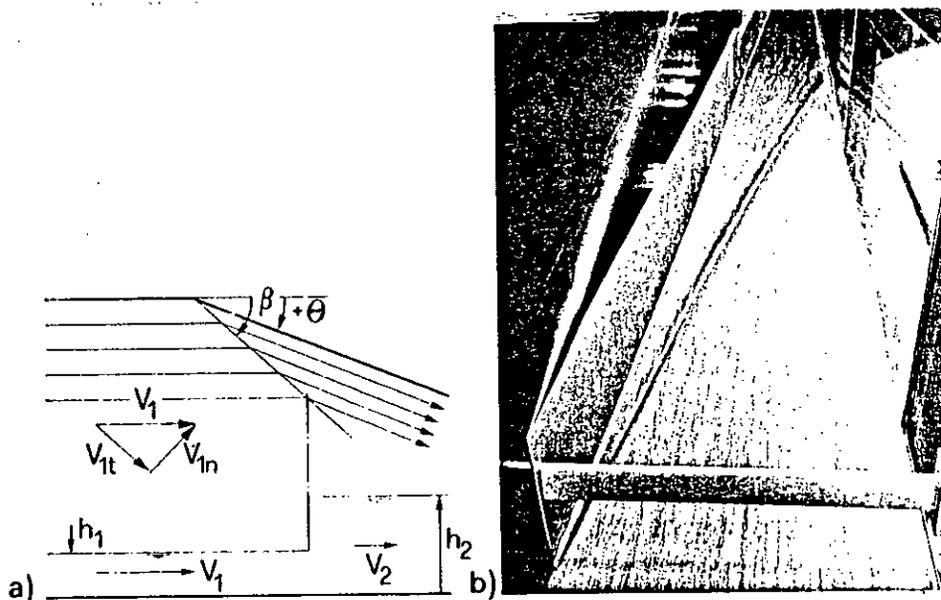
II.6.1 ANALOGIE PHYSIQUE

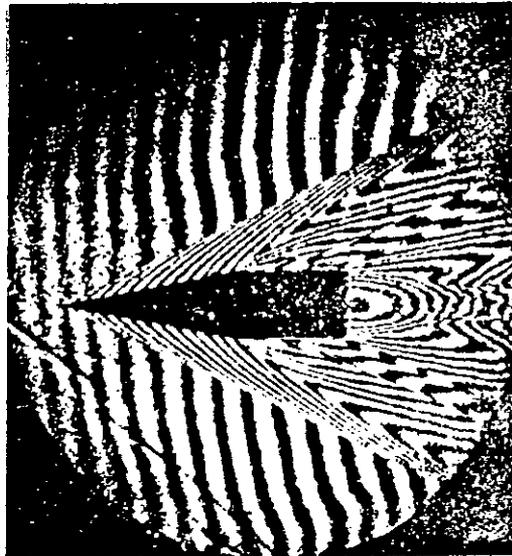
a/ Dans la dynamique des gaz :

En gazodynamique, ce sont des variations brusques de pression, de densité et de température dans l'écoulement supersonique d'un gaz non visqueux. Ainsi l'onde de choc peut se définir comme étant une sommation d'ondes de compression successives se déplaçant dans un milieu de plus en plus chaud. La résolution d'un tel problème nécessite de définir complètement un écoulement de fluide compressible c'est à dire donner ses caractéristiques thermodynamiques en n'importe quel point de l'écoulement. Ceci peut concerner les écoulements dans une simple canalisation cylindrique qui peut devenir complexe, de Pay play, les écoulements dans les diffuseurs des turboréacteurs, les écoulements entre les aubages d'une turbine à vapeur et d'un compresseur axial [11].

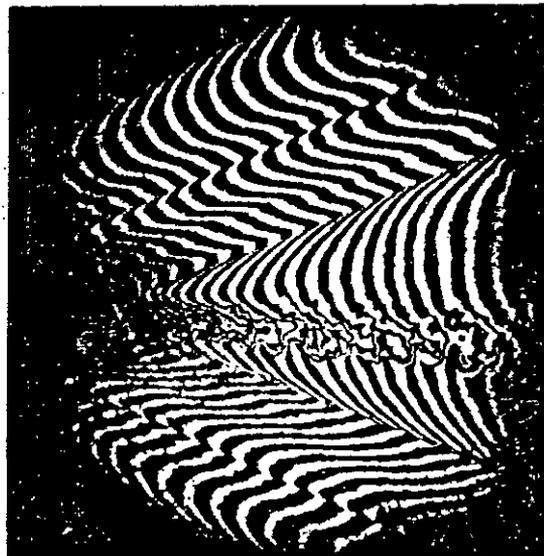
b/ Dans les écoulements à surface libre :

Les écoulements à surface libre à grande vitesse entraînent des particularités du type ondes, chaque obstacle dans le canal, par exemple, pile, déviation ou jonction de mur, crée une perturbation distincte le long de courbes caractéristiques bien définies. Les perturbations provoquent des ondes stationnaires à la surface de l'eau : creux ou, ce qui est plus dangereux, surélévations, c'est la notion de mascaret. De telles ondes sont appelées ondes transversales ou, par analogie avec la dynamique des gaz ondes de choc. Dans les écoulements permanents, ces ondes ne se déplacent pas sauf pour les variations turbulentes, et nécessitent une revanche supplémentaire [23].





Écoulement autour d'une balle de fusil.



Écoulement en aval du culot.

Écoulement supersonique, $\frac{V}{a} = 2,46$.
 Interférogrammes, d'après TESSON et TREMBLOT.

2.6.2 DEFINITION D'UNE ONDE DE CHOC

Pour justifier l'utilisation du terme onde de choc, on préfère donner la définition générale due à la physique des milieux continus. Il suffit de distinguer la différence entre surface de contact et onde de choc [9].

- a/ La surface de contact Σ est définie comme étant une surface où aucun débit ne la traverse de part et d'autre, la vitesse relative du milieu par rapport à Σ est tangentielle, on l'appelle aussi surface de glissement.

A titre d'exemple, la surface séparant deux liquides non miscibles en mouvement, la surface de séparation d'une masse d'eau en contact avec l'atmosphère, constituent en général des surfaces de contact.

- b/ Ondes de chocs : si à présent la vitesse n'est plus tangentielle, le milieu traverse effectivement la surface de discontinuité Σ . On dit que Σ est une onde de choc.

A titre d'exemple, considérons un gaz au repos dans un tube limité à une de ses extrémités par un piston. Si, à un instant donné, on enfonce le piston dans le tube, on observe dans le tube, à un instant ultérieur, une région toujours au repos, séparée par une onde de choc de la région où le gaz a été mis en mouvement.

Dans le cas de la surface de contact Σ eau - air, l'eau présente une surélévation ou un mascaret. Σ est une onde de choc.

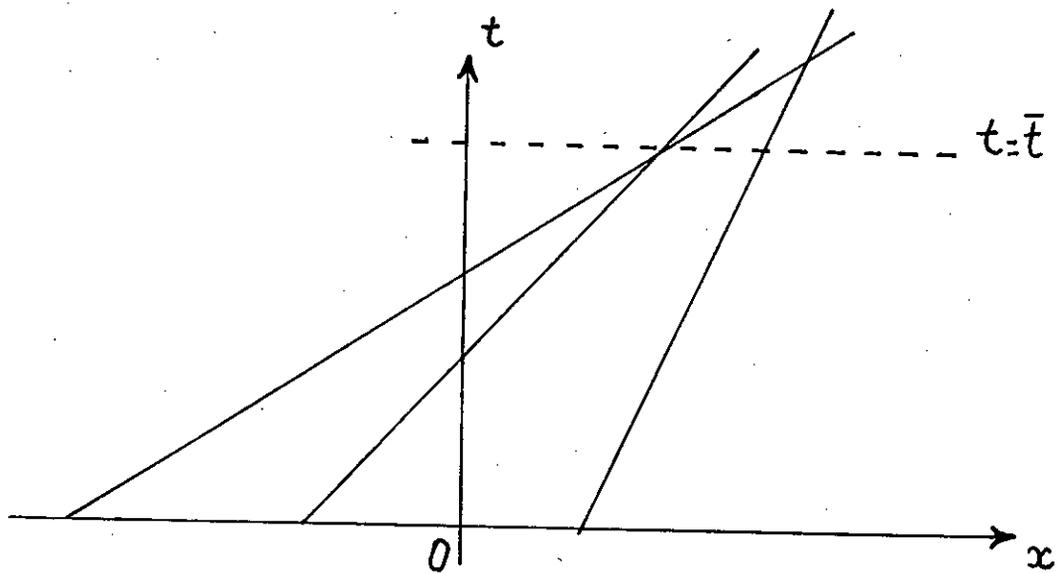
II.6.3 APPARITION DES DISCONTINUITES [10]

L'apparition des discontinuités peut être mise en évidence d'une façon simple par la méthode des caractéristiques.

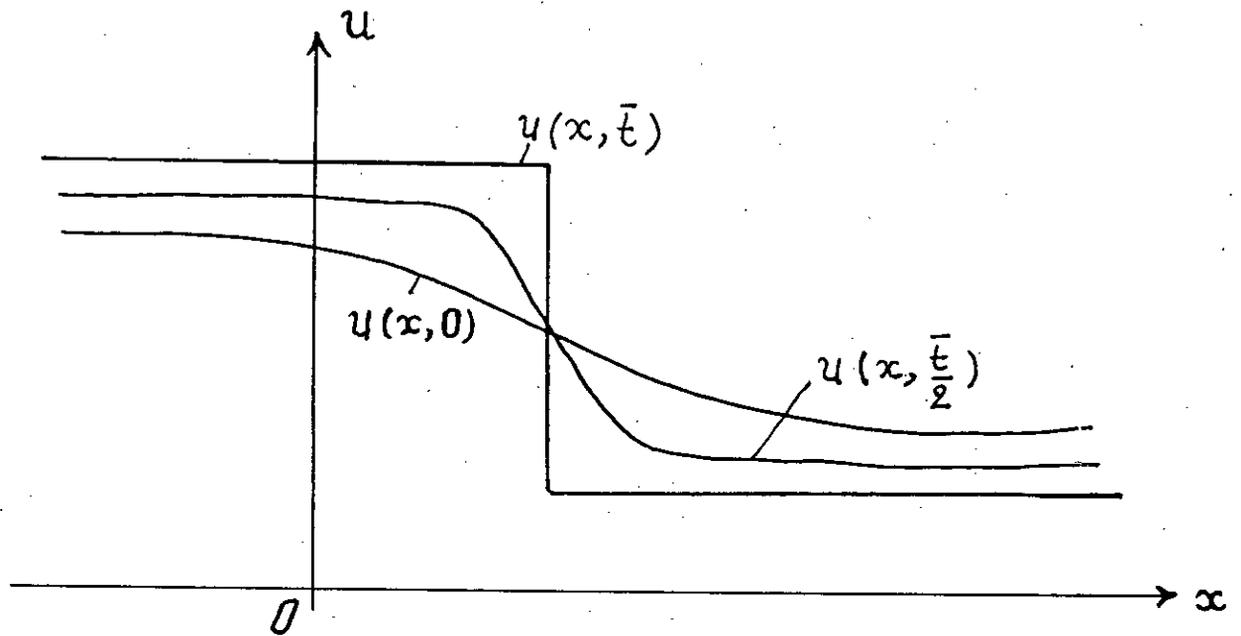
Le long de chaque caractéristique $x = x(t)$ la solution $u(x, t)$ peut être assimilée à une fonction dépendant de t seul

$$u(x, t) = u[x(t), t] = u(t)$$

Parfois pour des données régulières, les caractéristiques convergent et se coupent, le problème de Cauchy (2.5). n'admet pas de solution régulière dès l'instant $t = \bar{t}$ lorsque au moins deux caractéristiques se coupent (fig. II.1)



(fig. II.1)



(fig. II.2)

Les graphes de la fonction $u = u(x, t)$ pour $t = 0, \frac{1}{2}\bar{t}, \bar{t}$ sont représentés sur la figure (fig. II.2).

II.7 CONCLUSION

Ayant établi l'analogie mathématique et physique, entre ondes de choc en gazodynamique et ondes de choc, ou diffraction d'un mascaret, dans les écoulements à surface libre, les résultats obtenus après l'expérimentation numérique, pour tel ou tel problème, ne dépendront que du schéma numérique choisi. Ainsi, le modèle numérique, doit permettre le calcul des solutions discontinues, et doit donner des résultats approximant la solution exacte.

Dans les chapitres qui vont suivre, on va s'intéresser exclusivement aux écoulements à surface libre.

Physiquement, c'est le problème de diffraction d'un mascaret traversant des structures convergentes ou divergentes, en régime instationnaire.

Le but de cette étude est de définir complètement l'écoulement à surface libre dans les transitions, c'est à dire, donner les caractéristiques hydrauliques en n'importe quel point de l'écoulement.

L'intérêt pratique de cette étude est de permettre un dimensionnement rationnel et économique des bajoyers dans différents aménagements de grande étendue.

CHAPITRE 3

ECOULEMENT A SURFACE LIBRE

DANS LES TRANSITIONS

III.0 INTRODUCTION

L'hydraulique est l'une des sciences la plus ancienne, mais son évolution a été extrêmement lente dans l'histoire de l'humanité. On peut expliquer cette lenteur par le fait que l'épanouissement d'une discipline est toujours fonction des besoins et des problèmes que peut causer son ignorance.

Dès l'antiquité, les agglomérations se formaient généralement à proximité des cours d'eau, en vue d'accéder plus aisément aux lacs et aux rivières, lesquels facilitaient l'approvisionnement de la source d'eau. L'un des premiers soucis de l'homme a donc été le transport et la distribution de cette source.

Cependant, des projets ont été fournis dans ce contexte pour établir une théorie, permettant de construire des canaux de transport et de distribution d'eau, ainsi que d'étudier les écoulements ayant lieu, afin qu'ils remplissent le rôle auquel ils étaient destinés.

III.1 ECOULEMENT A SURFACE LIBRE [3, 5, 14, 19, 25]

L'écoulement à surface libre est défini comme étant l'écoulement présentant une surface en contact avec l'air.

A cet égard, il provoque un problème lors de son analyse, à cause des conditions aux limites connues qu'en partie.

De tels écoulements peuvent être classés sur la base temporelle ou spatiale, de là on distingue respectivement l'écoulement permanent ou non permanent et l'écoulement uniforme ou varié.

L'écoulement à surface libre est considéré permanent et uniforme, si tous les paramètres hydrauliques : vitesse, débit, profondeur, et tous les paramètres géométriques : largeur, pente, section, ne varient pas en toute section du canal, ainsi que dans le temps. De même l'écoulement non permanent uniforme correspond à des fluctuations de la surface libre dans le temps, néanmoins celle-ci reste parallèle au fond, une telle condition est pratiquement impossible, par conséquent ce type est très rare.

L'écoulement à surface libre est considéré varié, si la profondeur varie d'une section à une autre le long du canal. Cette variation est soit progressive : l'écoulement est dit graduellement varié, soit brusque : l'écoulement est dit brusquement varié.

Un tel écoulement est soit permanent ou non permanent, selon que les paramètres : profondeur, débit, vitesse évoluent dans le temps ou non.

Pour pallier tous les écoulements précédents, on adopte la classification suivante :

- Ecoulement permanent
 1. Ecoulement uniforme
 2. Ecoulement varié
 - a. Ecoulement graduellement varié
 - b. Ecoulement brusquement varié
- Ecoulement non permanent
 1. Ecoulement uniforme
 2. Ecoulement varié
 - a. Ecoulement graduellement varié
 - b. Ecoulement brusquement varié.

III.1.1 NOTION DU NOMBRE DE FROUDE [2, 3, 4]

L'hydraulique a établi des nombres adimensionnels représentant l'effet de certaines forces par rapport à d'autres. Considérant le nombre de Froude, c'est le rapport entre les forces d'inertie et celles de gravité. il caractérise l'effet de gravité

$$F = \frac{V}{(gh_M)^{1/2}} \quad (3.1)$$

où,

V : vitesse moyenne de l'écoulement $[m/s]$

g : accélération de gravité $[m/s^2]$

h_M : la profondeur hydraulique, donnée par le quotient de l'aire de la section mouillée par la largeur de la surface libre $[m]$.

III.1.2 INTUMESCENCE [3, 25]

Considérant, un canal où l'eau est animée d'un mouvement uniforme de vitesse V_0 , ou une onde se propage dont la célérité est :

$$a = V_0 \pm (gh)^{1/2}$$

- Si la célérité de l'onde est nulle ($V_0 = (gh)^{1/2}$), le régime d'écoulement est dit critique, la profondeur est au niveau critique ($h = h_c$) et le nombre de Froude est égale à l'unité ($F = 1$).
- Si la célérité de l'onde est supérieure à la vitesse de l'écoulement ($a > V_0$ où $(gh)^{1/2} > (gh_c)^{1/2}$), le régime d'écoulement est dit subcritique (fluvial) et le nombre de Froude est inférieur à l'unité ($F < 1$). Dans ce cas, l'onde peut remonter vers l'amont du canal.
- Si la célérité de l'onde est inférieure à la vitesse de l'écoulement ($a < V_0$ où $(gh)^{1/2} < (gh_c)^{1/2}$), le régime d'écoulement est dit supercritique (torrentiel) et le nombre de Froude est supérieur à l'unité ($F > 1$). Dans ce cas l'onde ne peut remonter vers l'amont du canal.

III.2 CANAUX PRISMATIQUES ET NON PRISMATIQUES [2, 3, 19, 25]

1. Canaux prismatiques : un canal prismatique est défini par :

- toutes les génératrices du canal sont des droites parallèles entre elles.
- la forme géométrique du canal ne varie pas le long de l'écoulement.

2. Canaux non prismatiques : un canal non prismatique est défini par :

- les génératrices du canal ne sont pas parallèles entre elles
- la forme du canal varie le long de l'écoulement, ce changement est soit une convergence, soit une divergence, qui peut être progressive ou brusque. Un tel changement influe sur le déroulement de l'écoulement à l'aval et engendre des instabilités à la surface libre.

Les types de variation de section les plus fréquents sont :

a/ types de rétrécissement [2, 19, 23]

Dans un rétrécissement la largeur du canal varie d'une valeur b_1 , à une valeur b_2 ($b_2 < b_1$) cette variation peut se présenter sous différentes formes, on distingue, la forme d'entonnoir, la forme d'éventail, et la forme de tuyère, comme l'illustre la fig. III.1 respectivement.

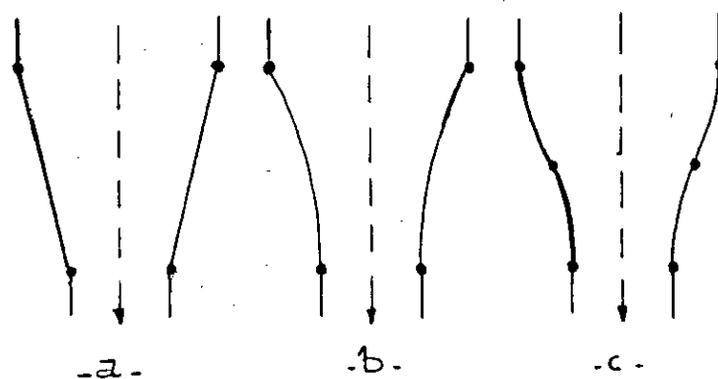


fig. (III.1) Formes de rétrécissements

Le type <a> a une forme polygonale entre la partie large et celle étroite du canal. Dans la forme en éventail, on utilise des arcs circulaires dont la courbure est orientée vers l'écoulement alors que dans la forme tuyère deux arcs circulaires sont disposés en S [23].

Le rétrécissement en forme d'éventail présente le minimum de déviations élémentaires et correspond ainsi à la forme optimale du point de vue géométrie, ce type d'ouvrage est suggéré pour les évacuateurs de crue dont le seuil est arqué [23].

En ce qui concerne le rétrécissement en forme de tuyère, l'arc amont aura un rayon plus petit que l'arc aval. Généralement, on travaille sur les rétrécissement en forme d'entonnoir [23].

b/ types d'élargissement [19]

Dans un élargissement la largeur du canal varie d'une valeur b_1 à une valeur b_2 ($b_2 > b_1$), cette variation peut se présenter sous les différentes formes illustrées par la figure (III.1).

Par opposition à un rétrécissement du canal, où le sens d'écoulement est de la grande largeur vers la petite largeur, dans un élargissement le sens d'écoulement est dans le sens contraire.

III.3 ECOULEMENT DANS LES TRANSITIONS [4, 19, 23]

Dans les canaux naturels et artificiels, la variation de section étant fréquente, généralement elle est due à des contraintes locales (rétrécissement, élargissement, présence de pile de pont) et soit à des conditions hydrauliques (adduction, extraction).

Ces changements engendrent des perturbations à la surface libre, elles sont souvent négligeables dans les écoulements fluviaux, mais d'une importance considérable dans les écoulements torrentiels. Ces perturbations entraînent des particularités de type ondes.

De point de vue terminologie ou nomenclature, on assiste à une diversité remarquable, le nom de ces ondes varie selon la référence bibliographique et d'une langue à une autre.

On les appelle parfois, ondes transversales [23].

On les appelle aussi, onde de choc par analogie avec la dynamique des gaz [4, 7, 8, 21, 23].

On les appelle finalement, mascaret (creux ou surélévations) ou "bore" en anglais [22].

III.3.1 NOTION DE MASCARET

En hydraulique des écoulements à surface libre, un mascaret caractérise généralement les écoulements supercritiques, il apparaît lors des variations de section. Il peut engendrer des débordements au niveau des parois, à cet égard son analyse est indispensable.

III.3.1.1 Cas de déviation brusque d'un mur

Soit un écoulement supercritique parallèle dans un canal rectangulaire. Ce dernier subit une déviation brusque en un point donné, faisant un angle θ par rapport à la direction initiale.

Cette déviation engendre des perturbations à la surface libre de l'écoulement, formant un angle β avec la direction initiale.

L'angle β est dit angle de la ligne de choc, celle-ci est le front d'onde transversale (fig. III.2).

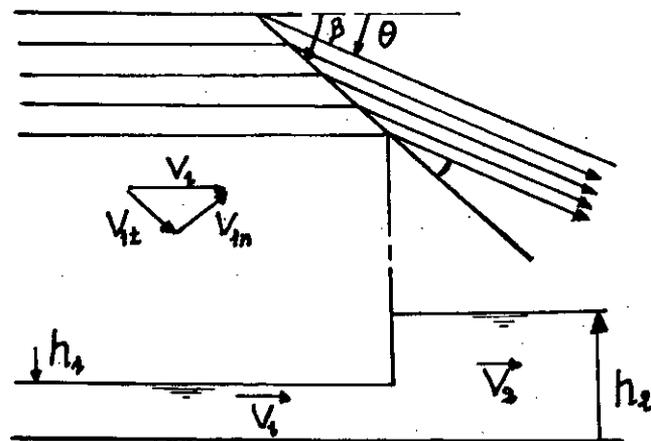


fig. (III.2) Ondes de choc dans une déviation d'un mur.

L'application du principe de la conservation de la masse, et de la quantité de mouvement donne :

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left[(1 + 8F_1^2 \sin^2 B)^{1/2} - 1 \right] \quad (3.2)$$

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\tan \beta}{\tan(\beta - \theta)} \quad (3.3)$$

$$F_2^2 = y^{-1} \left[F_1^2 - \frac{1}{2y} (y-1)(y+1)^2 \right] \quad (3.4)$$

où

$$F_1 = V_1 / (gh_1)^{1/2}$$

$$y = h_2 / h_1$$

Les indices "1" et "2" correspondent respectivement à la position amont et aval par rapport à la déviation du mur.

La connaissance des conditions amont, h_1, v_1, θ permet à partir des équations (3.2) (3.3) et (3.4) de déterminer les conditions aval, h_2, v_2, β .

III.3.1.2 Ondes positives et ondes négatives

La figure III.3 illustre un canal découvert, qui subit une variation brusque de section, d'un angle faible θ , à l'amont de ce changement $F_1 > 2$.

Au point A, le changement de la direction rentre dans l'écoulement, un tel changement est considéré positif, du fait qu'il engendre la formation d'une onde positive, qui se manifeste par l'augmentation de la profondeur d'eau.

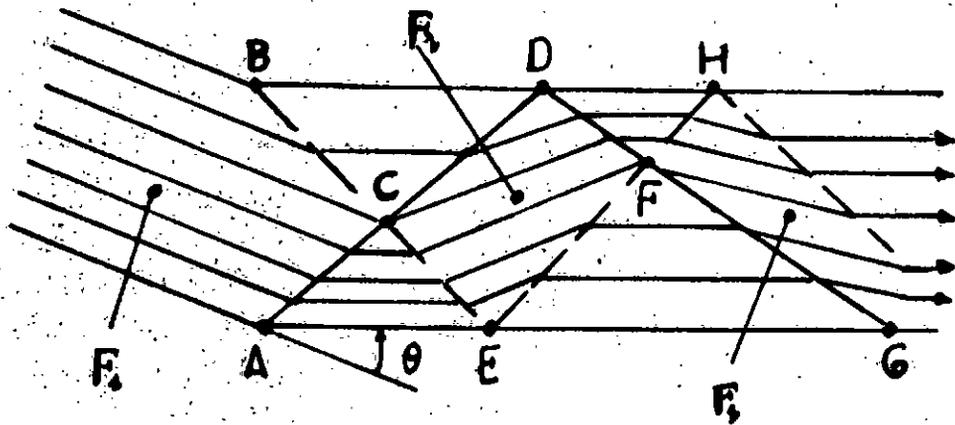


Fig. (III.3) Représentation des ondes positives et négatives.

Contrairement, au point B la déviation du canal est considérée négative, elle engendre la formation d'une onde négative qui se manifeste par la diminution de la profondeur d'eau.

Par opposition à une onde positive, où la profondeur d'eau augmente brusquement, une onde négative provoque une diminution progressive de la profondeur d'eau.

Dans, la zone ABC à l'amont des ondes transversales aucune influence n'apparaît, les filets liquides restent parallèles au canal d'entrée.

Dans la zone ACE, les lignes de courant deviennent parallèles aux parois du canal aval, avec augmentation de la profondeur d'eau, par contre dans la zone BGD, les filets liquides deviennent parallèles aux parois du canal aval, avec diminution de la profondeur d'eau.

Le point C représente l'intersection des deux ondes transversales. La superposition des deux états complémentaires implique l'atteinte de l'état initial.

Cependant, les caractéristiques de la zone CDFE sont ceux de la zone amont du canal (h_1, F_1). Dans, ce cas les lignes de courant ont dévié de 2θ par rapport la direction de l'écoulement initiale.

Au point D l'onde positive est réfléchiée, la perturbation de cette onde dans la zone à l'aval de DF engendre une augmentation de la profondeur, de même au point E l'onde négative est réfléchiée en provoquant une diminution de la profondeur dans la zone à l'aval EF.

Le long du mur AEG, la surface s'élève tout d'abord brusquement, puis diminue progressivement au dessous de la profondeur initiale h_1 . Cette alternance autour de h_1 peut mener à des débordements à travers les parois latérales du canal ce qui nécessite des parois plus hautes que celles du canal d'entrée, d'où l'importance de l'étude portant sur la réduction des sommets des ondes.

III.3.1.3 Notion d'écoulement transcritique

à la limite des régimes fluvial et torrentiel, l'écoulement est très instable (nombre de Froude critique à débit constant égal à 1 en théorie, au voisinage de 1 en pratique); lorsque l'écoulement passe d'un régime à un autre, nous parlerons de régime transcritique.

En régime stationnaire ($C=0$), il se crée un ressaut dans le cas du passage de l'écoulement torrentiel à l'écoulement fluvial (intumescence fixe).



Figure III.4 Ressaut

Lorsque l'écoulement est instationnaire, le ressaut se déplace, nous parlerons de mascaret (marée déferlante remontant une rivière) ou d'intumescence mobile (écoulement instationnaire dans une onde de crue).

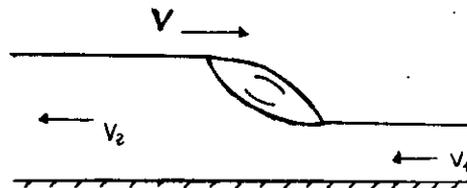


Figure III.5 - Mascaret

III.3.2 REDUCTION DES ONDES TRANSVERSALES [5, 19, 23]

L'établissement de procédure de réduction des ondes transversales est l'un des objectifs de leur étude.

La solution la plus rentable et la plus envisagée, est basée sur le principe de l'interférence et de diffraction d'ondes.

Selon ce principe, une onde négative est produite pour remplacer une onde positive identique. Par exemple, une déviation du mur positive dans un canal de largeur finie voir fig. (III.6), conduit à une augmentation de la profondeur d'eau $h_2 > h_1$.

Dans le cas d'une déviation de mur négative voir fig. (III.6), l'inverse se produit, conduisant à une diminution de la profondeur d'eau à l'aval.

Ce principe étant un moyen efficace pour ce type de problèmes.

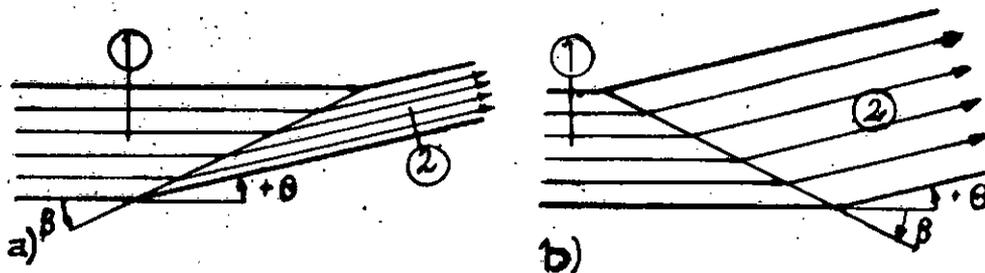


fig. (III.6)

a/ Augmentation de la profondeur de l'écoulement

b/ Diminution de la profondeur de l'écoulement

3.3.3 RETRECISSEMENT D'UN CANAL DANS DES CONDITIONS D'ÉCOULEMENT TORRENTIELLES [5, 19, 23]

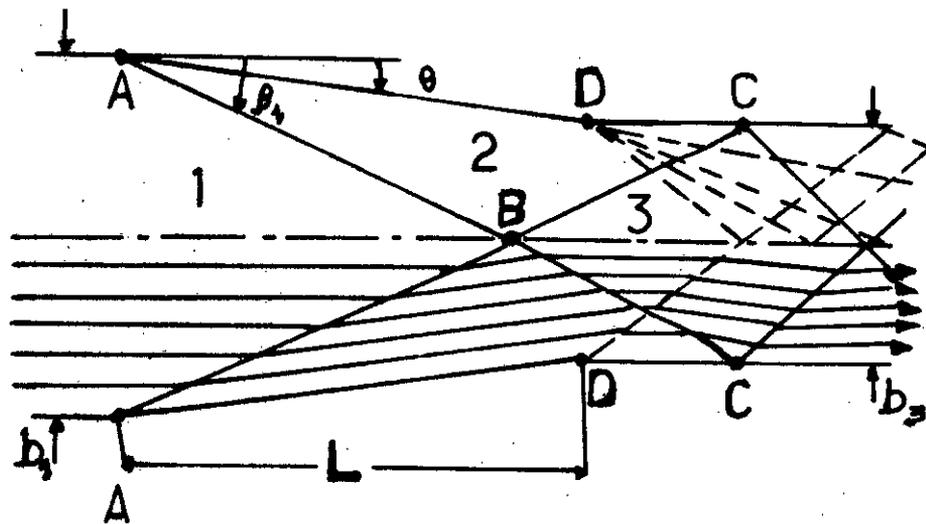


fig. (III.7): Représentation de l'écoulement d'un rétrécissement de canal d'après Ippen et Dawson (1951).

(—) onde positive.

(- - - - -) onde négative

La figure (III.7) représente un rétrécissement linéaire symétrique, faisant un angle θ par rapport à la direction initiale.

L'indice -1- correspond aux conditions d'écoulement à l'amont du rétrécissement; h_1, v_1, F_1 respectivement, la profondeur la vitesse et le nombre de Froude de l'écoulement à l'entrée.

Le changement de la largeur de b_1 jusqu'à b_3 conduit à l'édition d'un système d'ondes de choc, qui naissent aux points A.

D'après Ippen et Dawson [5], la variation de la section aux points A crée deux ondes de part et d'autre de la paroi, elles se rencontrent au point B situé sur l'axe du canal, puis sont réfléchies sur les murs opposés aux points C.

De même des ondes négatives naissent aux points D et se propagent dans le canal aval.

La présence des deux types d'ondes positives et négatives conduit à un écoulement non stable dans le canal aval. Par conséquent, dans un cadre de dimensionnement d'un tel rétrécissement, il faut déterminer le débit maximum au delà duquel les ondulations stationnaires ne sont plus tolérables dans le canal aval.

Il est évident que le choix de θ dépend du nombre de Froude amont F_1 et du rapport des largeurs $\psi = b_1/b_3$. Une fois, ψ et θ fixés, chaque changement de F_1 conduit à une situation représentée dans la fig. (III.7).

Pour un certain choix bien adéquat de θ , les ondes de choc à l'aval de B touchent exactement les points C sous un angle β_2 à l'entrée du canal prismatique de largeur b_3 . A l'aval d'un tel rétrécissement, aucune ondulation n'apparaît dans le canal aval figure (III.8).

D'après Hager et Bretz [5], l'angle du rétrécissement θ , pour le cas représenté par la fig. (III.6); peut être déterminé par la formule approchée suivante :

$$\arctg(\theta) = \frac{1}{2F_1} \left[\frac{b_1}{b_3} - 1 \right] \quad (3.5)$$

si $\theta < 10^\circ$

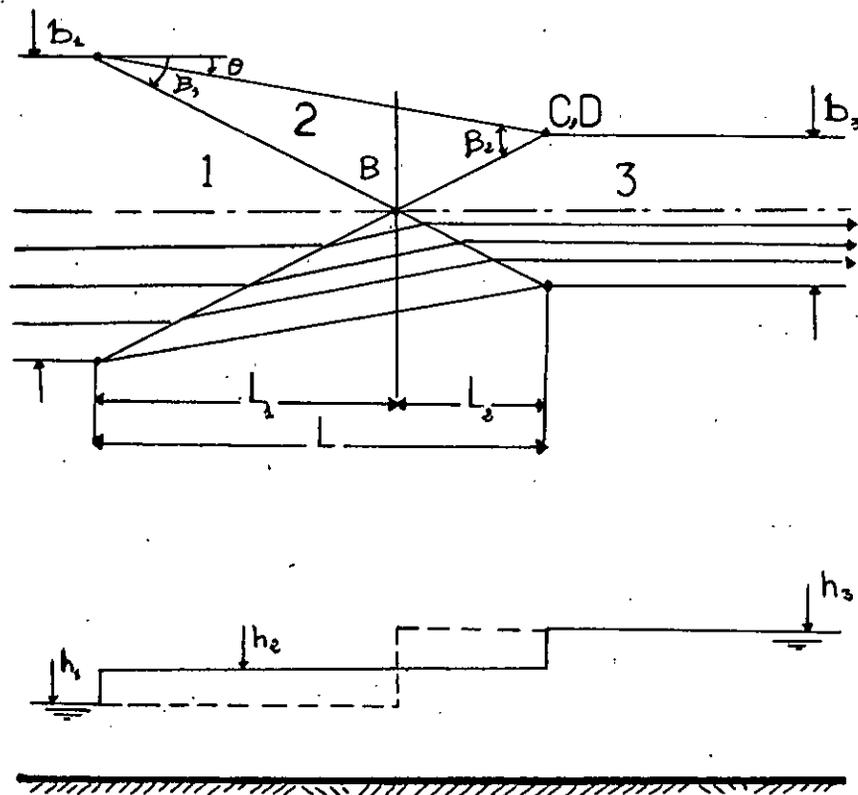


Fig. (III.8) : Conception d'un rétrécissement de canal en forme d'entonnoir d'après Ippen et Dawson (1951)

- a) Vue en plan
- b) coupe longitudinale avec :
 - (——) Profil de la surface libre le long de l'axe du canal
 - (- - - - -) Profil de la surface libre le long des parois.

3.3.4 ELARGISSEMENT D'UN CANAL DANS DES CONDITIONS D'ÉCOULEMENT TORRENTIELLES [5, 19, 23]

La présence des élargissements étant fréquente dans les ouvrages hydrauliques, tel que le canal qui débouche sur un coursier à pente raide.

Contrairement à une réduction de la largeur d'un canal, où la vitesse moyenne V diminue et la hauteur d'eau h augmente en direction d'écoulement, V dans les canaux à parois divergentes augmente et h décroît pour des conditions pseudo-uniformes (fig III. 9)

Rouse et al [23] ont étudié des élargissements de canal dans lesquels la pente de frottement est égale à la pente du radier. Pour un canal avec élargissement infini ($b_1/b_2 \rightarrow 0$); ils ont démontré que la surface libre dépendait seulement de la profondeur h_1 , de la largeur relative b_1/h_1 et du nombre de Froude F_1 et de l'écoulement entrant. Il faut noter, que pour des canaux d'entrée relativement large ($h_1/b_1 \ll 1$); la profondeur relative est donnée par :

$$\frac{h}{h_1} = F \left[\frac{X}{b_1}, \frac{y}{b_1}, F_1 \right] \quad (3.6)$$

et que pour l'écoulement provenant d'un canal amont prismatique de largeur b_1 sur un canal aval de largeur infini ($b_1/b_2 \rightarrow 0$), la fonction de la largeur $B = B(x)$ dans la transition est exprimée par :

$$\frac{B}{b_1} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{X}{b_1 F_1} \right)^{1/2} + 1 \right] \quad (3.7)$$

où F_1 est le nombre de Froude amont

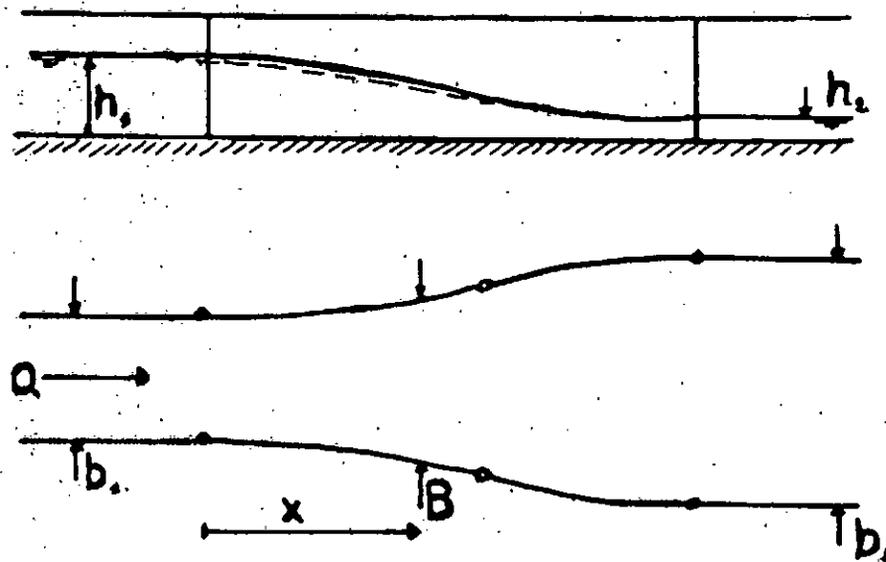


Fig. III.9 : Géométrie d'un élargissement dans des conditions d'écoulement torrentielles.

- (——) Profil de la surface libre le long de l'axe
- (.....) Profil de la surface libre le long des parois
- (.) Début et fin de la transition

CHAPITRE 4

MODELISATION MATHEMATIQUE

"L'origine des mathématiques ne revient pas à la sagesse humaine, sans passer par l'expérience concrète, c'est la nature qui a poussé l'être humain à compter et à schématiser; par la suite l'évolution des capacités morales, lui a permis de l'abstraire".

J.S. Mill.

IV.O INTRODUCTION

Les écoulements non permanents dans les canaux naturels ou artificiels, sont régis par des équations qui découlent directement de l'application des lois de conservation de la physique des milieux continus, à un domaine Δ ; strictement intérieur au système d'étude (Fig. IV-1).

Les équations sont un simple modèle de phénomènes extrêmement complexes. Elles incorporent seulement, les grandeurs importantes influençant rélement l'écoulement, en laissant de côté les grandeurs, qui sont d'une importance secondaire.

L'élaboration de ces équations, nous conduit à établir certaines hypothèses; spécifiant le problème considéré.

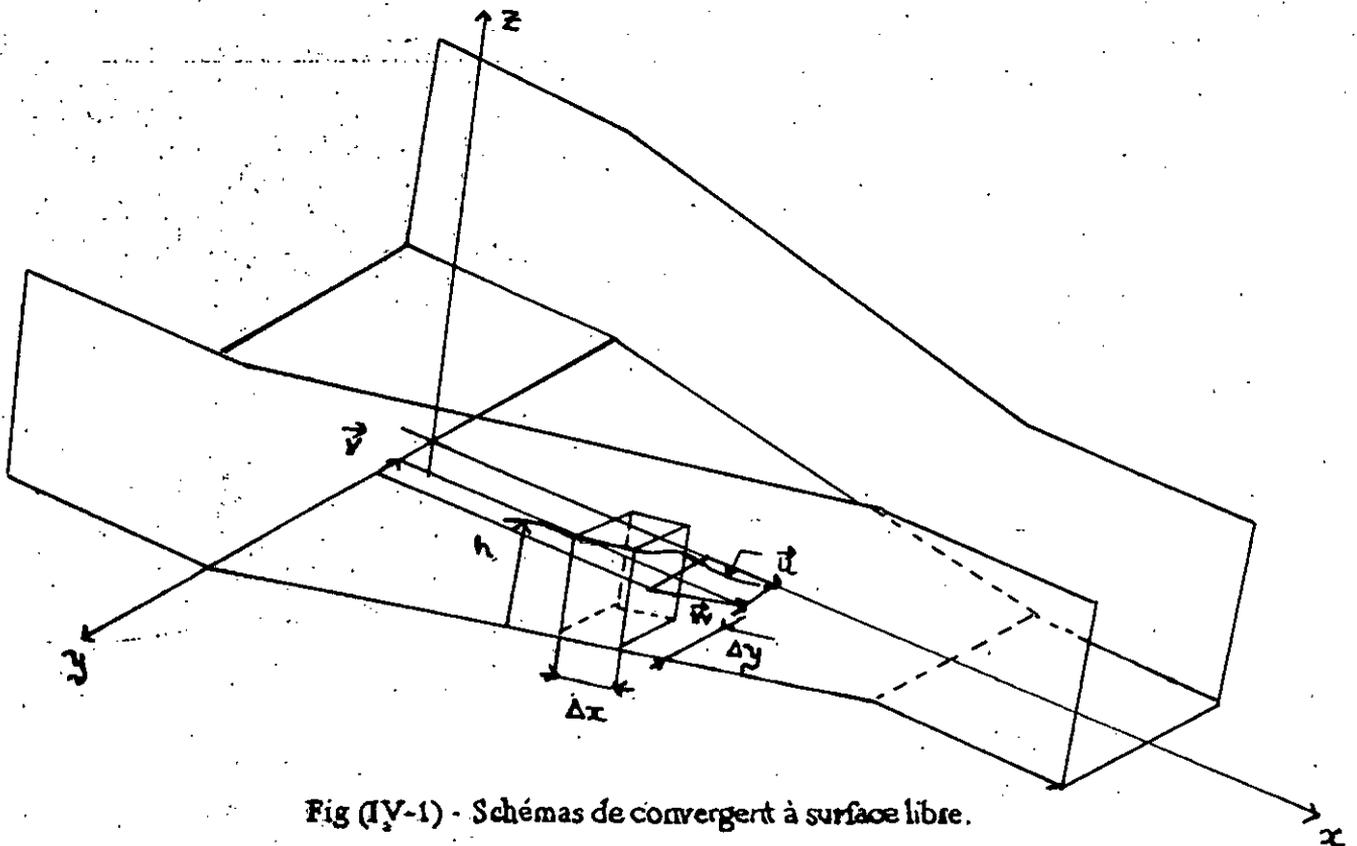


Fig (IV-1) - Schémas de convergent à surface libre.

IV.1 HYPOTHESES DE BASE [3, 5, 14, 19, 25]

- 1°) le fluide est incompressible.
- 2°) Ecoulement bidimensionnel.
- 3°) La courbure des lignes de courant est faible; donc la répartition des pressions est hydrostatique.
- 4°) La répartition des vitesses transversales est uniforme.
- 5°) Le canal est de faible pente.
- 6°) Les pertes de charge générales sont les mêmes que dans les cas d'un écoulement permanent est uniforme de même profondeur.

IV.2 MISE EN EQUATION [3, 9]

L'écoulement bidimensionnel non stationnaire dans un canal à surface libre, peut être décrit par deux variables, à savoir : la profondeur d'eau h et la vitesse \vec{W} dans une section donnée (Fig. VI-1).

Les variables d'écoulement définissant, l'état du mouvement dans le canal et dans le temps, sont fonctions de deux variables, à savoir l'espace x et y , et le temps t :

$$h = h(x, y, t).$$

$$\vec{W} = u(x, y, t) \vec{i} + v(x, y, t) \vec{j}.$$

Cependant, le nombre total d'inconnus est trois, pour décrire complètement le problème, on a besoin que de deux lois de conservation présentées sous les formes suivantes :

- Conservation de la masse et celle de la quantité de mouvement.
- Conservation de la masse et celle de l'énergie.

Puisqu'on traite des problèmes d'ondes de chocs, les variables du problème peuvent être discontinues, d'où le couple : conservation de masse-conservation de quantité de mouvements est plus adéquat pour établir les équations gouvernantes du problème considéré.

Il faut noter que dans ce cas, on est mené à deux voies possibles, qui reflètent deux écoles de pensée; la première Taylorienne, différentielle donnant une approche infinitésimale du problème, la seconde Gaussienne, intégrale donnant une approche globale du problème. Nous basons notre formulation Mathématique sur la première.

a) Equation de conservation de la masse : [3, 5, 14]

Elle exprime que le fluide est continu, ce qui signifie qu'aucun fluide ne peut être ni créé ni disparaître dans un volume donné.

Pendant, l'intervalle de temps Δt , la variation de la masse fluide dans l'élément de volume h , Δx , Δy (Fig.IV-1).

Suivant x est :

$$[\rho u h(x, y, t) - \rho u h(x + \Delta x, y, t)] \Delta y \Delta t \quad (4.1)$$

Suivant y est :

$$[\rho v h(x, y, t) - \rho v h(x, y + \Delta y, t)] \Delta x \Delta t \quad (4.2)$$

où

ρ : masse volumique du fluide.

u, v : composantes de la vitesse suivant (ox) , (oy) respectivement.

h : hauteur du tirait d'eau.

Le principe de la conservation s'exprime par l'égalité entre les variations de la masse fluide dans les deux directions et le stock dans l'élément de volume considéré, et est formulé par :

$$\rho \cdot \Delta h \cdot \Delta x \cdot \Delta y = [\rho u h(x, y, t) - \rho u h(x + \Delta x, y, t)] \Delta y \Delta t + [\rho v h(x, y, t) - \rho v h(x, y + \Delta y, t)] \Delta x \Delta t \quad (4.3)$$

D'après l'hypothèse (1) ρ est constante, en divisant (4.3) par $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta t$, et en faisant tendre ces grandeurs vers zéro on obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} + \frac{\partial (vh)}{\partial y} = 0 \quad (4.4)$$

b) Equation de la conservation de la quantité de mouvement : [3, 5, 14]

Le principe de la quantité de mouvement stipule que la variation de la quantité de mouvement dans l'élément de volume pendant l'intervalle de temps Δt , doit être égale à la somme de l'accroissement de la quantité de mouvement et la somme des forces extérieures appliquées sur l'élément du volume pendant le même intervalle de temps.

L'augmentation de la quantité de mouvement dans l'élément de volume considéré est définie par la différence entre celle entrant par la section x (respectivement ; y) et celle sortant par la section $x+\Delta x$ (respectivement ; $y+\Delta y$) ; suivant la direction x (respectivement y), elle est donnée par :

- Suivant x :

$$[(\rho u^2 \Delta y \Delta t)_x - (\rho u^2 \Delta y \Delta t)_{x+\Delta x}] + [(\rho u v \Delta x \Delta t)_y - (\rho u v \Delta x \Delta t)_{y+\Delta y}] \quad (4.5)$$

- Suivant y :

$$[(\rho v^2 \Delta x \Delta t)_x - (\rho v^2 \Delta x \Delta t)_{x+\Delta x}] + [(\rho u v \Delta x \Delta t)_y - (\rho u v \Delta x \Delta t)_{y+\Delta y}] \quad (4.6)$$

la variation de la quantité de mouvement dans l'élément de volume pendant l'intervalle de temps Δt est :

- Suivant x :

$$(\rho u \Delta x \Delta y)_t - (\rho u \Delta x \Delta y)_{t+\Delta t} \quad (4.7)$$

- Suivant y :

$$(\rho v \Delta x \Delta y)_t - (\rho v \Delta x \Delta y)_{t+\Delta t} \quad (4.8)$$

D'autre part, les principales forces extérieures agissant sur notre élément de volume pendant le même intervalle de temps Δt , sont :

- * Forces de pression
- * Force de gravité
- * Forces de frottement

*** Forces de pression :**

D'après l'hypothèse (3), la force de pression sur l'élément du volume considéré a pour résultante :

$$|F_p| = \rho gh \Delta x \cdot \Delta y \quad (4.9)$$

Sa projection sur x :

$$(F_p)_x = -\rho gh \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \cdot \Delta y \quad (4.10)$$

Sa projection sur y :

$$(F_p)_y = -\rho gh \frac{\partial h}{\partial y} \Delta x \cdot \Delta y \quad (4.11)$$

*** Force de gravité :**

Les composantes du poids de l'élément du volume considéré suivant les directions x et y respectivement, sont évaluées en supposant que les pentes du canal sont positives, on les note $(F_g)_x$, $(F_g)_y$.

$$(F_g)_x = \rho g h \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot S_{0x} \quad (4.12)$$

$$(F_g)_y = \rho g h \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot S_{0y} \quad (4.13)$$

où,

S_{0x} , S_{0y} sont respectivement les pentes du canal dans les directions x et y respectivement.

*** Forces de Frottement :**

Selon l'hypothèse (6) la force de frottement est proportionnelle à la surface de contact eau-fond, le fond de l'élément du volume considéré est supposé relativement plat et égale à $\Delta x \cdot \Delta y$.

Par ailleurs, cette force est proportionnelle au carré de la vitesse, opposée à l'écoulement, et est notée par F_f .

$$F_f = -\rho \cdot |W| \cdot \Delta x \Delta y \quad (4.14)$$

avec :

C_f : coefficient de Frottement.

D'après CHEZY C_f est donné :

$$C_f = \frac{9}{C^2}$$

où :

c : est le coefficient de CHEZY.

Si on opte pour le coefficient de MANNING donc :

$$C = \frac{1}{n} R_H^{2/3}$$

R_H est le rayon hydraulique, il est considéré égale à la hauteur du tirant d'eau, dans le cas d'un canal rectangulaire infiniment large.

n est le coefficient de MANNING.

Finalement, l'application du principe de la conservation de la quantité de mouvement est :

Suivant x :

$$((\rho u h \Delta x \Delta y)_t - (\rho u h \Delta x \Delta y)_{t+\Delta t}) =$$

$$\begin{aligned} & [(\rho h^2 \Delta y \Delta t)_x - (\rho h^2 \Delta y \Delta t)_{x+\Delta x}] + [(\rho h u v \Delta x \Delta t)_y - (\rho h u v \Delta x \Delta t)_{y+\Delta y}] \\ & + [\rho g h S_{0x} \Delta x \Delta y - \rho g h \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \Delta y - \frac{n^2}{R^{1/3}} \rho g u |W| \Delta x \Delta y] \Delta t \end{aligned} \quad (4.15)$$

Suivant y :

$$\begin{aligned} & [(\rho h v^2 \Delta x \Delta t)_y - (\rho h v^2 \Delta x \Delta t)_{y+\Delta y}] + [(\rho h u v \Delta y \Delta t)_x - (\rho h u v \Delta y \Delta t)_{x+\Delta x}] \\ & + [\rho g h S_{0y} \Delta x \Delta y - \rho g h \frac{\partial h}{\partial y} \Delta x \Delta y - \frac{n^2}{R^{1/3}} \rho g v |W| \Delta x \Delta y] \Delta t \end{aligned} \quad (4.16)$$

D'après l'hypothèse (1) ρ est constante, en divisant (4.16) par $\Delta x \Delta y \Delta t$, et faisant tendre ces grandeurs vers zéro, on obtient :

$$\frac{\partial (uh)}{\partial t} + \frac{\partial (u^2 h + gh^2/2)}{\partial x} + \frac{\partial (uvh)}{\partial y} = gh(S_{0x} - S_{fx}) \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial (vh)}{\partial t} + \frac{\partial (v^2 h + gh^2/2)}{\partial y} + \frac{\partial (uvh)}{\partial x} = gh(S_{0y} - S_{fy}) \quad (4.18)$$

$$S_{fx} = n^2 \frac{u(v^2 + v^2)^{1/2}}{h^{4/3}}$$

$$S_{fy} = n^2 \frac{v(v^2 + v^2)^{1/2}}{h^{4/3}} \quad (4.19)$$

Le système final décrivant le problème considéré, dont les inconnus h , u , v , dit système de saint-venant est le suivant :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} + \frac{\partial (vh)}{\partial y} = 0 \quad (4.20)$$

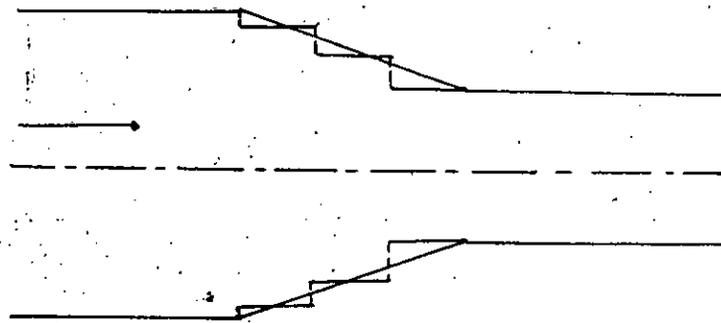
$$\frac{\partial (uh)}{\partial t} + \frac{\partial (u^2 h + gh^2/2)}{\partial x} + \frac{\partial (uvh)}{\partial y} = gh(S_{0x} - S_{fx}) \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial (vh)}{\partial t} + \frac{\partial (uvh)}{\partial x} + \frac{\partial (v^2 h + gh^2/2)}{\partial y} = gh(S_{0y} - S_{fy}) \quad (4.22)$$

IV.3 TRANSFORMATION GEOMETRIQUE [4]

En pratique, les canaux des écoulements à surface libre, sont souvent d'une géométrie irrégulière. Par ailleurs la résolution des équations de tels écoulements par la méthode des différences finies, pose un problème lors de la prise en compte des conditions aux limites au niveau des parois latérales, après discrétisation du domaine physique de forme géométrique complexe.

ROACHE [4] a montré que l'utilisation d'une procédure d'interprétation après discrétisation du domaine physique, comme l'illustre la figure (IV.2), a conduit à des solutions aberrantes.



Fig(IV-2) Schématisation à la limite pour un changement de section du canal.

A cet égard, il est commode dans de tels cas de transformer le domaine physique en un domaine de calcul rectangulaire plus simple à étudier.

Cette procédure est basée sur la transformation de coordonnées suivantes(Anderson et Al.[4]):

$$\xi = x \tag{4.23}$$

$$\eta = \frac{y}{b(x)} \tag{4.24}$$

$b(x)$, étant la distance entre l'axe de symétrie et la paroi latérale à une distance x ,

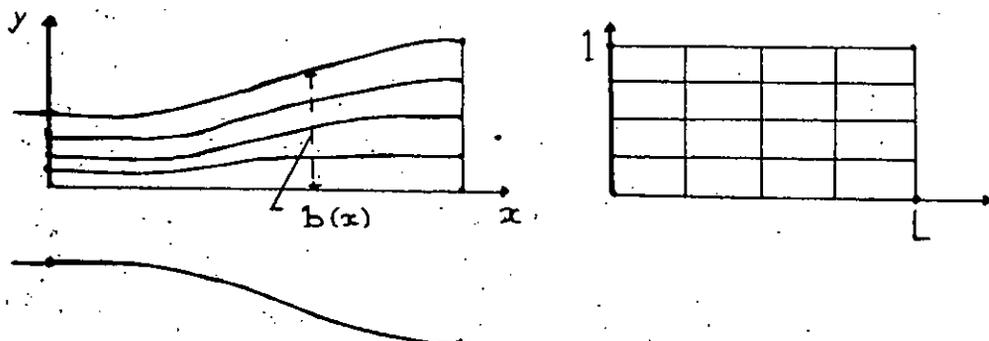


Fig.(IV.3) transformation de coordonnées pour une transition symétrique.

Une fois, la transformation est établie, l'application des différentes séries au domaine de calcul est plus adéquate. Par conséquent les frontières du domaine de calcul coïncident avec

$$\eta = 0 \text{ et } \eta = 1.$$

IV.3.1 Application de la transformation Géométrique aux équations de Saint-Venant [21, 22]

Les équations de l'écoulement, bidimensionnel non permanent à faible profondeurs peuvent s'écrire sous la forme conservative comme suit :

$$\partial_t \hat{Q} + \partial_x \hat{E} + \partial_y \hat{G} = \hat{S} \quad (4.25)$$

où :

$$\hat{Q} : \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}$$

$$\hat{E} : \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{pmatrix}$$

$$\hat{G} : \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S} : \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_{0x} - S_{fx}) \\ gh(S_{0y} - S_{fy}) \end{pmatrix}$$

En adoptant la transformation géométrique (4.23), (4.24) au système (4.25) on obtient :

$$\partial_t Q + \partial_\xi E + \partial_\eta G = S \quad (4.26)$$

où :

$$Q = \hat{Q} / J$$

$$E = (\xi_x \hat{E} + \xi_y \hat{G}) / J$$

$$G = (\eta_x \hat{E} + \eta_y \hat{G}) / J$$

$$S = \hat{S} / J$$

$$J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$$

Le système hyperbolique non linéaire (4.26) peut s'écrire sous la forme quasi-linéaire suivante :

$$\partial_t Q + A_\xi(Q) \partial_\xi Q + B_\eta(Q) \partial_\eta Q = S \quad (4.27)$$

où :

A_ξ et B_η sont des matrices Jacobiennes.

- **Etablissement des matrices Jacobiennes A_ξ et B_η [22]**

La forme quasi-linéaire (4.27) nécessite la détermination des deux matrices Jacobiennes A_ξ et B_η .

$$A_\xi = \partial E / \partial Q$$

$$B_\eta = \partial G / \partial Q$$

La forme explicite des deux matrices est la suivante :

$$A_\xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + c^2 & 2u & 0 \\ -vu + c^2 & v & u \end{bmatrix}$$

$$B_{\eta} \begin{bmatrix} 0 & \frac{-y}{b(x)} \cdot \frac{\partial b(x)}{\partial x} & \frac{1}{b(x)} \\ (c^2 - u^2) \left(\frac{-y}{b(x)} \cdot \frac{\partial b(x)}{\partial x} - \frac{uv}{b(x)} \right) & \frac{-2uy}{b(x)} \cdot \frac{\partial b(x)}{\partial x} + \frac{v}{b(x)} & \frac{u}{b(x)} \\ \frac{uv \cdot y}{b(x)} \cdot \frac{\partial b(x)}{\partial x} + \frac{(c^2 - v^2)}{b(x)} & -\frac{vy}{b(x)} \cdot \frac{\partial b(x)}{\partial x} & \frac{-uy}{\partial(x)} \cdot \frac{\partial b(x)}{\partial x} + \frac{2v}{b(x)} \end{bmatrix}$$

Diagonalisation de A_{ξ} et B_{η} [22] :

La diagonalisation de A_{ξ} et B_{η} consiste à la détermination des valeurs propres, en établissant des matrices de passages, T_{ξ} et T_{η} tel que :

$$A_{\xi} = T_{\xi} \cdot \text{diag}(A) \cdot T_{\xi}^{-1} \tag{4.28}$$

$$B_{\eta} = T_{\eta} \cdot \text{diag}(B) \cdot T_{\eta}^{-1} \tag{4.29}$$

où :

$$T_{\xi} \begin{bmatrix} \frac{-h}{2c} & 0 & \frac{h}{2c} \\ -\frac{h}{2c}(u-c) & 0 & \frac{h}{2c}(u+c) \\ -\frac{h}{2c}v & -h & \frac{hv}{2c} \end{bmatrix}$$

$$T_{\xi}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{-1}{h}(u+c) & \frac{1}{h} & 0 \\ \frac{v}{h} & 0 & -\frac{1}{h} \\ \frac{-1}{h}(u-c) & -\frac{1}{h} & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{\eta} \begin{bmatrix} \frac{-h}{2c} & 0 & \frac{h}{2c} \\ -\frac{h}{2c}(u-c\tilde{\eta}_x) & h\tilde{\eta}_y & \frac{h}{2c}(u+c\tilde{\eta}_x) \\ -\frac{h}{2c}(v-c\tilde{\eta}_y) & -h\tilde{\eta}_x & \frac{h}{2c}(v+c\tilde{\eta}_y) \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} \eta = \begin{bmatrix} \frac{-1}{h}(\tilde{V} + c) & \frac{\tilde{\eta}_x}{h} & \frac{\tilde{\eta}_y}{h} \\ \frac{1}{h}(-u\tilde{\eta}_y + v\tilde{\eta}_x) & \frac{\tilde{\eta}_y}{h} & -\frac{\tilde{\eta}_x}{h} \\ \frac{-1}{h}(\tilde{V} - c) & \frac{\tilde{\eta}_x}{h} & \frac{\tilde{\eta}_y}{h} \end{bmatrix}$$

avec.

$$\tilde{\eta}_x = \frac{-y}{b(x)} \cdot \frac{\partial b(x)}{\partial x} \bigg/ \left(\frac{1}{b(x)} \left[-y^2 \left(\frac{\partial b(x)}{\partial x} \right)^2 + 1 \right] \right)^{1/2}$$

$$\tilde{\eta}_y = \frac{1}{\left[-y^2 \left(\frac{\partial b(x)}{\partial x} \right)^2 + 1 \right]^{1/2}}$$

$$\tilde{V} = \left(-\frac{y}{b(x)} \cdot \frac{\partial b(x)}{\partial x} u + \frac{v}{b(x)} \right) \bigg/ \left[\left(\tilde{\eta}_x^2 + \tilde{\eta}_y^2 \right) \right]^{1/2}$$

Les valeurs propres de A_ξ et B_η sont déterminées à partir de (4.28) et (4.29).

Valeurs propres de A_ξ :

$$A_1 = u - c$$

$$A_2 = u$$

$$A_3 = u + c$$

Valeurs propres de B_η :

$$B_1 = -\frac{y}{b(x)} \cdot \frac{\partial b(x)}{\partial x} \cdot u + \frac{v}{b(x)} - c \left[\left(-\frac{y}{b(x)} \cdot \frac{\partial b(x)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{1}{b(x)} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$B_2 = -\frac{y}{b(x)} \cdot \frac{\partial b(x)}{\partial x} \cdot u + \frac{v}{b(x)}$$

$$B_3 = -\frac{y}{b(x)} \cdot \frac{\partial b(x)}{\partial x} \cdot u + \frac{v}{b(x)} + c \left[\left(-\frac{y}{b(x)} \cdot \frac{\partial b(x)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{1}{b(x)} \right)^2 \right]^{1/2}$$

• Normalisation des matrices Jacobiennes A_ξ et B_η [22]

Il est plus commode de travailler avec des matrices Jacobiennes normalisées, vue leur fréquente utilisation dans les schémas numériques. Les matrices Jacobiennes normalisées de A_ξ et B_η sont établies tel que :

$$\hat{A}^\pm = T_\xi \cdot \text{diag}(\hat{A}_i) \cdot T_\xi^{-1} \quad (4.30)$$

$$\hat{B}^\pm = T_\eta \cdot \text{diag}(\hat{B}_i) \cdot T_\eta^{-1} \quad (4.31)$$

avec

$$\hat{A}_i^\pm = \frac{1}{2} (1 \pm \text{Sgn } A_i)$$

$$\hat{B}_i^\pm = \frac{1}{2} (1 \pm \text{Sgn } B_i)$$

où :

A_i et B_i sont respectivement la composante i ème des matrices A_ξ et B_η

Les formes explicites de \hat{A}^\pm et \hat{B}^\pm sont les suivantes :

$$\hat{A}_{11}^\pm = \left(\frac{\hat{A}_1^\pm + \hat{A}_3^\pm}{2} \right) + \frac{u}{c} \left(\frac{\hat{A}_1^\pm - \hat{A}_3^\pm}{2} \right)$$

$$\hat{A}_{12}^\pm = -\frac{1}{c} \left(\frac{\hat{A}_1^\pm - \hat{A}_3^\pm}{2} \right)$$

$$\hat{A}_{13}^{\pm} = 0$$

$$\hat{A}_{21}^{\pm} = \frac{(u^2 - c^2)}{c} \left(\frac{\hat{A}_1^{\pm} - \hat{A}_3^{\pm}}{2} \right) + u \left[\left(\frac{\hat{A}_1^{\pm} + \hat{A}_3^{\pm}}{2} \right) - \hat{A}_2^{\pm} \right] - u \left[\left(\frac{\hat{A}_1^{\pm} + \hat{A}_3^{\pm}}{2} \right) - \hat{A}_2^{\pm} \right]$$

$$\hat{A}_{22}^{\pm} = \hat{A}_2^{\pm} - \frac{u}{c} \left(\frac{\hat{A}_1^{\pm} - \hat{A}_3^{\pm}}{2} \right) + \left[\left(\frac{\hat{A}_1^{\pm} + \hat{A}_3^{\pm}}{2} \right) - \hat{A}_2^{\pm} \right]$$

$$\hat{A}_{23}^{\pm} = 0$$

$$\hat{A}_{31}^{\pm} = \frac{vu}{c} \left(\frac{\hat{A}_1^{\pm} - \hat{A}_3^{\pm}}{2} \right) + \left[\left(\frac{\hat{A}_1^{\pm} + \hat{A}_3^{\pm}}{2} \right) - \hat{A}_2^{\pm} \right]$$

$$\hat{A}_{32}^{\pm} = -\frac{v}{c} \left(\frac{\hat{A}_1^{\pm} - \hat{A}_3^{\pm}}{2} \right)$$

$$\hat{A}_{33}^{\pm} = \hat{A}_2^{\pm}$$

$$\hat{B}_{11}^{\pm} = \left(\frac{\hat{B}_1^{\pm} + \hat{B}_3^{\pm}}{2} \right) + \frac{\tilde{V}}{c} \left(\frac{\hat{B}_1^{\pm} - \hat{B}_3^{\pm}}{2} \right)$$

$$\hat{B}_{12}^{\pm} = -\frac{\tilde{\eta}_x}{c} \left(\frac{\hat{B}_1^{\pm} - \hat{B}_3^{\pm}}{2} \right)$$

$$\hat{B}_{13}^{\pm} = -\frac{\tilde{\eta}_y}{c} \left(\frac{\hat{B}_1^{\pm} - \hat{B}_3^{\pm}}{2} \right)$$

$$\hat{B}_{21}^{\pm} = \frac{u\tilde{V} - c^2\tilde{\eta}_x}{c} \left(\frac{\hat{A}_1^{\pm} - \hat{A}_3^{\pm}}{2} \right) + u \left[\left(\frac{\hat{A}_1^{\pm} + \hat{A}_2^{\pm}}{2} \right) - \hat{A}_2^{\pm} \right] - \tilde{\eta}_x \tilde{V} \left[\left(\frac{\hat{B}_1^{\pm} + \hat{B}_3^{\pm}}{2} \right) - \hat{B}_2^{\pm} \right]$$

$$\hat{B}_{22}^{\pm} = \hat{B}_2^{\pm} - u \frac{\tilde{\eta}_x}{c} \left(\frac{\hat{B}_1^{\pm} - \hat{B}_3^{\pm}}{2} \right) + \tilde{\eta}_x^2 \left[\left(\frac{\hat{B}_1^{\pm} + \hat{B}_3^{\pm}}{2} \right) - \hat{B}_2^{\pm} \right]$$

$$\hat{B}_{23}^{\pm} = -\frac{u}{c} \tilde{\eta}_y \left(\frac{\hat{B}_1^{\pm} - \hat{B}_3^{\pm}}{2} \right) + \tilde{\eta}_x^2 \cdot \tilde{\eta}_y \left[\left(\frac{\hat{B}_1^{\pm} + \hat{B}_3^{\pm}}{2} \right) - \hat{B}_1^{\pm} \right]$$

$$\hat{B}_{31}^{\pm} = \frac{v\tilde{V} - c^2\tilde{\eta}_x}{c} \left(\frac{\hat{B}_1^{\pm} - \hat{B}_3^{\pm}}{2} \right) + v \left[\left(\frac{\hat{B}_1^{\pm} + \hat{B}_3^{\pm}}{2} \right) - \hat{B}_2^{\pm} \right] + \tilde{\eta}_y \tilde{V} \left[\left(\frac{\hat{B}_1^{\pm} + \hat{B}_3^{\pm}}{2} \right) - \hat{B}_2^{\pm} \right]$$

$$\hat{B}_{32}^{\pm} = -\frac{v}{c} \tilde{\eta}_x \left(\frac{\hat{B}_1^{\pm} - \hat{B}_3^{\pm}}{2} \right) + \tilde{\eta}_x \tilde{\eta}_y \left[\left(\frac{\hat{B}_1^{\pm} + \hat{B}_3^{\pm}}{2} \right) - \hat{B}_2^{\pm} \right]$$

$$\hat{B}_{33}^{\pm} = \hat{B}_2^{\pm} - v \frac{\tilde{\eta}_y}{c} \left(\frac{\hat{B}_1^{\pm} - \hat{B}_3^{\pm}}{2} \right) + \tilde{\eta}_y^2 \left[\left(\frac{\hat{B}_1^{\pm} + \hat{B}_3^{\pm}}{2} \right) - \hat{B}_2^{\pm} \right]$$

La forme quasi linéaire (4.27) est explicitement décrite par :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial(h/J)}{\partial t} \\ \frac{\partial(hu/J)}{\partial t} \\ \frac{\partial(hv/J)}{\partial t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial(h/J)}{\partial x} \\ \frac{\partial(hu/J)}{\partial x} \\ \frac{\partial(hv/J)}{\partial x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial(h/J)}{\partial y} \\ \frac{\partial(hu/J)}{\partial y} \\ \frac{\partial(hv/J)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ gh(Sox - Sfx) / J \\ gh(Soy - Sfy) / J \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

où

A_{ij} , B_{ij} sont les composantes des matrices Jacobiennes A_x et B_y respectivement.

IV. 4 CONDITIONS INITIALES, CONDITIONS AUX LIMITES.

IV.4.1 Conditions initiales :

Pour le déroulement des calculs, il est nécessaire de déterminer les conditions initiales correspondantes au temps initial $t = 0$, où toutes les valeurs h , u et v sont judicieusement spécifiées en tous les points du maillage.

IV.4.2 Conditions aux limites :

Comme pour tout problème physique, les conditions aux limites spécifient le problème étudié. Dans notre analyse de l'écoulement, nous optons pour les conditions aux limites suivantes :

- Conditions d'amont et d'aval.
- La condition de symétrie.
- Les conditions sur les parois latérales.

A- Conditions d'Amont, conditions d'Aval [2,8]

Pour les écoulements bidimensionnels en régime supercritique, trois conditions aux limites aux limites doivent être spécifiées à l'amont et aucune à l'aval.

Par contre, pour les écoulements bidimensionnels en régime subcritique, deux conditions aux limites doivent être spécifiées à l'amont et une condition à l'aval.

B- Conditions de symétrie[2,4,7,15]

Pour les calculs des variables u , v et h au niveau de l'axe d'écoulement, il est nécessaire d'utiliser la procédure évidente de réflexion.[4]

Dans cette procédure, les valeurs des variables u , v et h aux points du maillage fictif (Fig.IV.4 ci-dessous) sont remplacées par les valeurs aux points intérieurs correspondant.

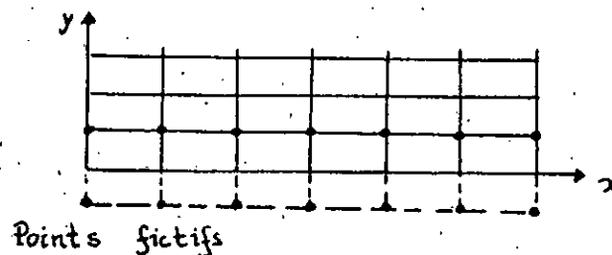


Fig.(IV.4)

Remarquons que cette procédure est exacte pour une ligne symétrique [4]

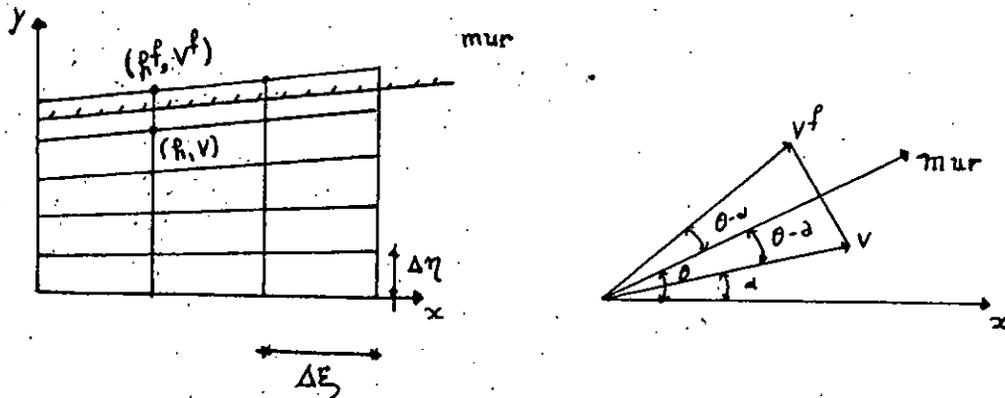
C- Conditions sur les parois Latérales[4, 7]

Pour permettre le calcul des valeurs h , u et v au niveau des parois latérales, une multitude de procédures est utilisée.[15]

Notre choix s'est porté encore une fois sur la procédure de réflexion qui nous a paru être la plus appropriée.

Cette procédure est l'une des plus utilisée et la plus recommandée pour analyser un écoulement dans des canaux à section rectangulaire.

En se référant à la figure IV 5 ci-dessous, la profondeur d'écoulement h et la valeur de la vitesse résultante v au point de réflexion fictif du maillage et au point intérieur correspondant, sont les mêmes.



Fig(IV.5) Procédure de réflexion pour la paroi latérale.

La direction de la vitesse résultante v est déterminée telle que sa composante normale au mur soit nulle.

Si θ est l'angle que fait la paroi avec l'axe des x , et α l'angle que fait la vitesse résultante au point intérieur du maillage et l'axe des x , alors les composantes u^f et v^f au point du maillage fictif sont, dans le cas d'un canal divergent :

$$u^f = V \cdot \cos(2\theta - \alpha)$$

$$v^f = V \cdot \sin(2\theta - \alpha)$$

et dans le canal convergent :

$$u^f = V \cdot \cos(2\theta - \alpha)$$

$$v^f = -V \cdot \sin(2\theta - \alpha)$$

V est la vitesse résultante au point intérieur du maillage.

CHAPITRE 5

MODELISATION NUMERIQUE

V.1. INTRODUCTION

La formulation mathématique, des problèmes de diffraction bidimensionnelle des écoulements à surface libre, en faible profondeur, en régie instationnaire, a résulté un système d'équations aux dérivées partielles du type hyperbolique, non linéaire.

Comme la résolution analytique de ces équations se heurtait à des difficultés inextricables, et devant l'impossibilité de les intégrer, on a utilisé de plus en plus volontiers diverses méthodes de résolution numérique d'équations différentielles. Leur implantation à une vaste échelle a suivi l'apparition des machines à calculer rapides capables d'emmagasiner de grandes tables de nombres et d'effectuer sur ces derniers les opérations arithmétiques selon un programme donné. Etant donné la performances des machines, toute méthode numérique consiste à passer de la solution cherchée à une table inconnue de nombres et à indiquer la succession des opérations arithmétiques à effectuer.

La méthode numérique la plus universelle, en particulier dans le domaine de la mécanique des fluides et celle utilisant la transcription en "différences finies". L'idée de cette méthode [10] est de prendre pour l'ensemble cherché de nombres la table des valeurs de la solution aux points d'un ensemble appelé réseau. Le calcul de la table cherchée se fait à l'aide d'équations algébriques qui remplacent approximativement l'équation différentielle.

Tout de même, il existe différents schémas aux différences, tous bien-sûr, basés sur le même principe de la méthode, mais différent du point de vue construction des schémas.

Chaque schéma constitue en soit un modèle numérique de résolution.

Le choix du modèle est assez délicat, vu que la solution, du modèle choisi, doit être la plus proche possible de la solution exacte. On peut même dire que choisir un modèle numérique relève du domaine de l'art.

Avant de choisir le modèle, il est plus commode de donner un aperçu historique sur la méthode des différences finies et ses développements.

Il importe, tout de même, de préciser, qu'il faut être lucide et vigilant avant de choisir un modèle numérique quelconque.

V.2. HISTORIQUE

Parmi les grands analystes dont les oeuvres ont laissé des traces dans les théories modernes nous retiendrons le nom du mathématicien anglais Brook Taylor (1685-1731), que les études de physique conduisirent à la formule bien connue qui porte son nom :

$$f(x) = f(x_0) + xf'(x_0) + \frac{x^2}{2} f''(x_0) + \dots$$

grâce à laquelle, moyennant certaines conditions, une fonction d'une seule variable peut-être développée suivant les puissances de cette variable.

Le développement en série de Taylor est le fondement même des méthodes numériques de Résolution des équations différentielles ou aux dérivées partielles.

En 1924 L. Lusternick [10] a été le premier à recourir à la méthode des différences finies pour prouver l'existence de solutions d'équations aux dérivées partielles.

En 1928 R. Courant, K. Friedrichs et H. Lewy [10] ont établi des inégalités qui aujourd'hui s'interprètent comme la définition de la stabilité.

L'idée de considérer les solutions des problèmes stationnaires comme limite de celles des problèmes instationnaires avec l'augmentation du temps a été utilisée pour la première fois dans les années 1930 par A. Tikhonov [10].

L. Lusternick a indiqué une des premières méthodes efficaces d'accélération de la convergence en 1947 [10].

En 1950 J. Von. Neumann et R. D. Richtmyer [10] ont décrit le concept de stabilité des schémas aux différences par rapport aux erreurs d'arrondi commises sur les données initiales.

En 1956 D. Lax [10] a établi un système de définitions fondamentales dans lequel l'approximation et la stabilité garantissent la convergence.

En 1958 J. Douglas et en 1961 Brian [10] ont avancé des procédés de construction de schémas aux différences.

En 1959 S. Godounov [10] a proposé quelques méthodes aux différences de résolution des équations de la mécanique des fluides (schémas conservatifs).

En 1960 D. Lax et B. Wendroff [7, 10] ont introduit la version bidimensionnelle du schéma prédicteur - correcteur pour les problèmes de mécanique des fluides.

En 1968 G. Strang [22] a établi et comparé de nouveaux schémas aux différences.

En 1969 Mac Cormack [7, 8] a été intéressé par le schéma de la Lax-Wendroff, il a apporté de simples modifications et l'a appliqué en gazodynamique.

En 1979 Moretti a introduit le schéma lambda [7].

En 1981 L. Roe [21, 22] a étudié la solution approximante de Riemann.

En 1982 Van Leer [22] a introduit le vecteur flux numérique pour les équations d'Euler.

En 1983 A. Harten [21, 22] a généralisé les schémas de Godounov puis en 1987 A. Harten et O. Osher [21, 22] ont introduit une classe de schémas non oscillants d'ordre élevé et précis ENO, TVD.

En 1983 Gabutti a introduit un nouveau schéma [7].

L'application du schéma prédicteur - correcteur aux écoulements à surface libre en présence de chocs en monodimensionnelle a été faite en 1986 [7] et [8].

En 1989 A. Harten a introduit la classe "ENO with subcell resolution" et l'a appliqué en gazodynamique [12].

En 1990 P. Glaister a appliqué la solution approximante de Riemann aux équations de Saint-Venant en bidimensionnelle [21, 22].

En 1992 S. M. Bhallamudi et M. H. Chaudhry [4] ont appliqué le schéma de Mac Cormack en bidimensionnelle pour le calcul des écoulements à surface libre avec des changements de géométrie.

A l'E.N.P. d'Alger, le schéma de Mac Cormack a été appliqué successivement, au problème de Deam break en 1992, aux écoulements à surface libre en présence de chocs en 1993 en monodimensionnel [16] et en bidimensionnel en 1993 pour le calcul des écoulements à surface libre dans les transitions [2].

En 1993 J.Y. Yang, C. A. Hsu et S. H. Chang ont appliqué les schémas ENO, TVD aux différences finies et Petrov-Galerkin en éléments finis pour le problème de rupture de barrage en mono dimensionnel [21].

En 1993 J. Y. Yang et C.A Hsu ont appliqué les schémas d'ordres élevé non oscillants ENO, TVD pour les phénomènes de diffraction bidimensionnelle d'un mascaret en régie instationnaire [22].

V.3 METHODES NUMERIQUES UTILISANT LA TRANSCRIPTION EN "DIFFERENCE FINIE"

V.3.1 RESEAU ET FONCTION DEFINIE SUR UN RESEAU [10]

Soit posé, sur un segment D , un problème aux limites différentiel. Cela veut dire qu'on se donne une équation différentielle ou aux dérivées partielles que vérifie une solution u sur D et des conditions supplémentaires pour u à l'une ou aux deux extrémités de D .

Le problème aux limites différentiel s'écrira sous forme d'égalité symbolique :

$$Lu = f, \quad (*)$$

avec L un opérateur différentiel donné et f un second membre donné.

Supposons que le problème (*) admet sur $0 \leq x \leq l$ une solution $u(x)$. Le calcul de cette solution par la méthode des différences finies ou méthode des réseaux exige qu'on choisisse sur D un nombre fini de points dont l'ensemble s'appelle réseau et se note D_h , et qu'on cherche ensuite non pas la solution $u(x)$ du problème (*), mais la table $[u]_h$ de valeurs de $u(x)$ aux points de D_h , telle que h est le pas du réseau. Quand h tend vers zéro, le réseau devient toujours plus fin.

La fonction discrète cherchée $[u]_h$ prend alors au point $x_n = nh$ de D_h la valeur $u(nh)$ que nous noterons pour abrégé u_n .

La table de valeurs de $[u]_h$ se calcule de façon approchée en recourant, à un schéma aux différences, obtenu en remplaçant la dérivée, de l'opérateur différentiel aux points du réseau, par un rapport aux différences.

La solution $u_n^{(h)}$ du système d'équations aux différences est définie sur le même réseau D_h que la fonction cherchée $[u]_h$.

V.3.2 TRANSCRIPTIONS EN DIFFERENCES FINIES :

Si f est une fonction continue et continument différentiable, on écrit :

$$\left[\left[\frac{\delta f}{\delta x} \right] \right]_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$$

où $f_i = f(x_i)$
 $x_i = (i-1)\Delta x$

L'ordre d'approximation dans une méthode aux différences finies se détermine à l'aide du développement en série de Taylor de la fonction f :

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1!} \left[\frac{\delta f}{\delta x} \right]_x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left[\frac{\delta^2 f(x)}{\delta x^2} \right]_x + \dots + \frac{(\Delta x)^{n-1}}{n-1!} \left[\frac{\delta^{n-1} f(x)}{\delta x^{n-1}} \right]_x + R_n$$

où le reste R_n est l'ordre de $\|\Delta x\|^n$, ce que l'on note habituellement :

$$R_n = o(\|\Delta x\|^n)$$

Cas d'une approximation à plusieurs dimensions

La méthode peut être aisément étendue au cas où la fonction f considérée dépend de deux ou plusieurs variables.

Ainsi, si f dépend de deux variables (x, t) , et si dans le plan oxt on trace une série de droites parallèles aux axes déterminant de la sorte un réseau de points (i, j) auxquels correspond les coordonnées de la fonction inconnue f_{ij} , on peut écrire pour les différences centrales :

$$\begin{aligned} \left[\frac{\delta f}{\delta x} \right]_{ij} &= \frac{f_{i+ij} - f_{i-ij}}{2\Delta x} \\ \left[\frac{\delta f}{\delta t} \right]_{ij} &= \frac{f_{ij+1} - f_{ij-1}}{2\Delta t} \end{aligned}$$

De même pour les dérivées de second ordre :

$$\begin{aligned} \left[\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \right]_{ij} &= \frac{f_{i+ij} - 2f_{ij} + f_{i-ij}}{\Delta x^2} \\ \left[\frac{\delta^2 f}{\delta t^2} \right]_{ij} &= \frac{f_{ij+1} - 2f_{ij} + f_{ij-1}}{\Delta t^2} \\ \left[\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta t} \right]_{ij} &= \frac{(f_{i+1j+1} - f_{i-1j+1}) - (f_{i+1j-1} - f_{i-1j-1})}{4\Delta x \Delta t} \end{aligned}$$

V.3.3 ANALYSE DE L'APPROXIMATION [6, 10, 18, 20].**A. Erreur de troncature**

L'erreur de troncature vient du fait qu'on a tronqué le développement en série de Taylor de la fonction f .

L'erreur de troncature par pas est la différence entre la valeur calculée et la valeur exacte, en supposant qu'au pas précédent la valeur calculée et la valeur exacte étaient identiques.

B. Convergence

Le Schéma numérique est convergent si la solution du problème discrétisé tend, en un certain sens, vers la solution du problème aux dérivées partielles, lorsque Δx et Δt tendent simultanément vers zéro.

C. Consistance

Nous n'aurons de chance d'obtenir la convergence du schéma que si nous approchons correctement le problème continu c'est à dire si nous remplaçons les dérivées partielles par des différences finies effectivement voisines. La "qualité" de cette consistance s'appelle la précision du schéma.

D. Stabilité

Dans la résolution d'algorithmes, on n'attaque pas le pas $j \rightarrow j+1$ dans les mêmes conditions que le pas $0 \rightarrow 1$ car on l'aborde avec un lourd handicap : la lourde charge constituée par la somme des erreurs de discrétion précédentes (et d'arrondis à l'occasion), ainsi un coureur qui a déjà fait trois cent mètres dans sa journée n'aborde pas le quatrième dans la même forme que le premier.

On dira alors qu'un schéma numérique est stable s'il est peu sensible à l'accumulation des erreurs de discrétisation et d'arrondis.

E. Schéma explicite, schéma implicite

Un schéma est explicite, si chaque valeur approchée de la solution, au temps $t + \Delta t$ et au point x , est décrite à partir des valeurs de la solution précédente au temps t . Cette valeur est donc explicitement fonction des valeurs connues, déjà calculées, et s'obtient directement pour chaque x .

Un schéma est implicite, si la valeur approchée, en un point au temps $t + \Delta t$, est écrite en fonction de la solution précédente au temps t , et les valeurs voisines au temps $t + \Delta t$. Il s'agit donc d'une liaison implicite, entre toutes les valeurs au temps $t + \Delta t$, qui se résoud globalement.

V.4 CHOIX DU SCHEMA [7, 8, 10, 15].

On a vu précédemment que la répartition des divers paramètres, des problèmes de la mécanique des fluides; est décrite par des fonctions présentant des sauts (des ondes de choc).

Les sauts peuvent se produire avec le temps pour des données initiales régulières.

Les solutions classiques n'acceptant pas de discontinuités, il a fallu donc élargir la notion de solution et introduire des solutions généralisées qui peuvent être discontinues.

Deux procédés principaux sont utilisés :

Le premier consiste à écrire les lois physiques de conservation sous forme intégrale au lieu de la forme différentielle, les lois ont alors un sens pour les fonctions discontinues. Ce sont les schémas conservatifs.

Dans le second procédé on introduit artificiellement dans les équations différentielles des termes telles que celles-ci aient des solutions régulières. S'agissant des problèmes relatifs à la mécanique des fluides, ces termes ont le sens d'une petite viscosité lissant les discontinuités de l'écoulement, ce sont les schémas avec viscosité artificielle.

Le schéma que nous adoptons est un schéma conservatif.

Plusieurs facteurs ont conditionné le choix du schéma :

D'abord, la nature même du schéma, étant conservatif le schéma n'utilise ni viscosité artificielle ni les conditions sur la ligne de discontinuité, mais il s'appuie sur des lois intégrales de conservation [10].

Ensuite, l'inconvénient du schéma utilisant la viscosité artificielle, qui présente l'étalement des discontinuités [10].

Enfin, les résultats assez impressionnants obtenus d'abord par A. Harten lors de l'application du schéma "Eno with subcell resolution" aux problèmes de gazodynamique [12], puis par Yang pour les problèmes de diffraction bidimensionnelle d'un mascaret en régime instationnaire [22].

V.5 DEFINITION D'UNE SOLUTION GENERALISEE : [10].

La définition de la solution généralisée est basée sur la formule de Green :

Ecrivons l'équation différentielle du problème de Cauchy (2.5) sous la forme d'une divergence :

$$\frac{\delta u}{\delta t} + \frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0$$

et intégrons la sur un domaine D quelconque du demi plan $t \geq 0$, il vient :

$$\iint_D \left[\frac{\delta u}{\delta t} + \frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right] dx dt = \oint_{\Gamma} u dx - \frac{u^2}{2} dt = 0$$

Ainsi, chaque solution dérivable de (2.5) vérifie la relation intégrale.

$$\oint_{\Gamma} u dx - \frac{u^2}{2} dt = 0 \quad (5.1)$$

L'égalité (5.1) exprime une loi de conservation : le flux du vecteur $\begin{pmatrix} u \\ u^2/2 \end{pmatrix}$ à travers tout contour fermé est nul.

Si $u(x,t)$ est discontinu, l'équation différentielle (2.5) n'a plus de sens sur la ligne de discontinuité mais la condition intégrale a toujours un sens.

V.6 SUPPRESSION D'UNE DISCONTINUITÉ

Etant donné les données initiales discontinues.

$$u = \begin{cases} 2 & \text{pour } x < 0 \\ 1 & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

La solution correspondante est visualisée sur la figure 5.1

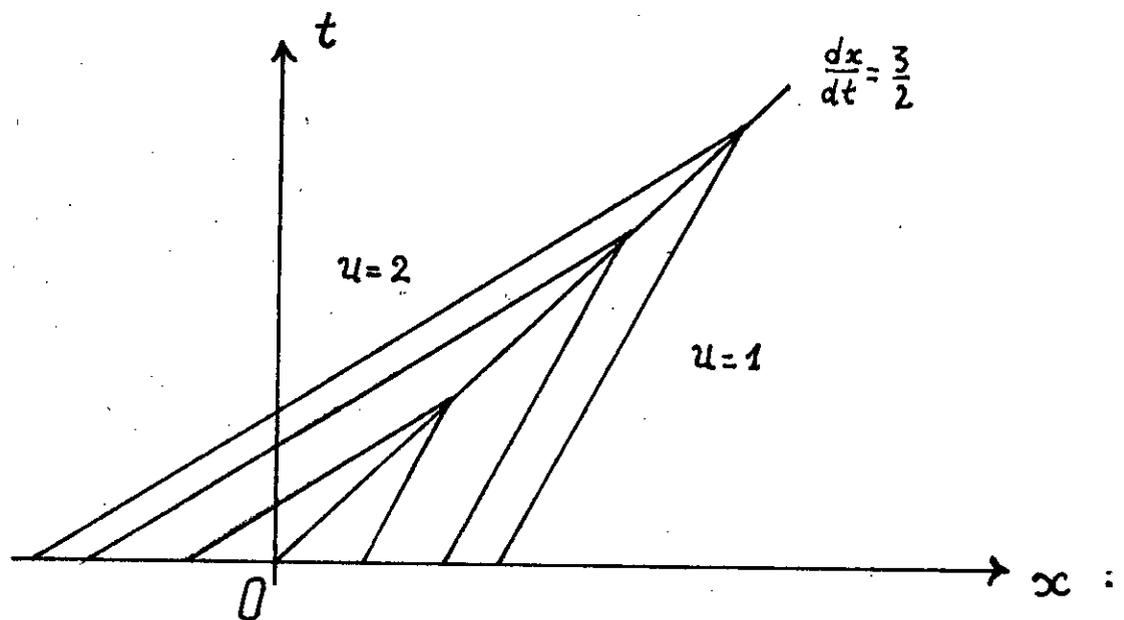


fig. (V.1)

La pente de la ligne de discontinuité $\frac{dx}{dt} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$ est la moyenne arithmétique des pentes des caractéristiques de part et d'autre de la ligne.

Donnons nous maintenant une autre discontinuité avec les conditions suivantes :

$$u = \begin{cases} 1 & \text{pour } x < 0 \\ 2 & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

La figure 5.2 montre une solution continue pour $t > 0$.

En modifiant quelque peu les données initiales et en les définissant par la formule.

$$u = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \leq 0 \\ 2 & \text{pour } x \geq \varepsilon \\ 1 + x/\varepsilon & \text{pour } 0 \leq x \leq \varepsilon \end{cases}$$

On obtiendra une solution u définie de façon unique.

Cette solution représentée sur la figure 5.3 devient, pour ε tendant vers 0, la solution continue.

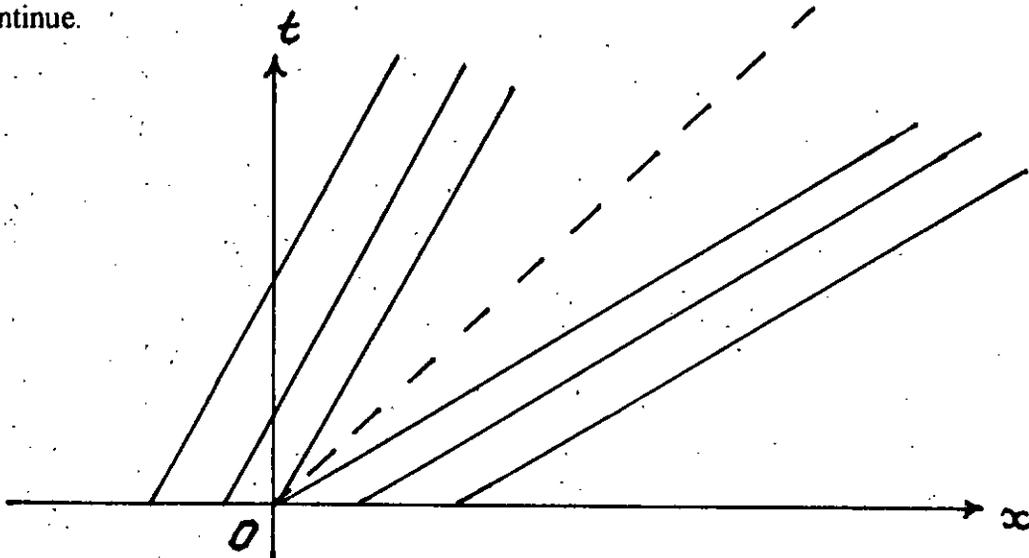


fig. (V.2)

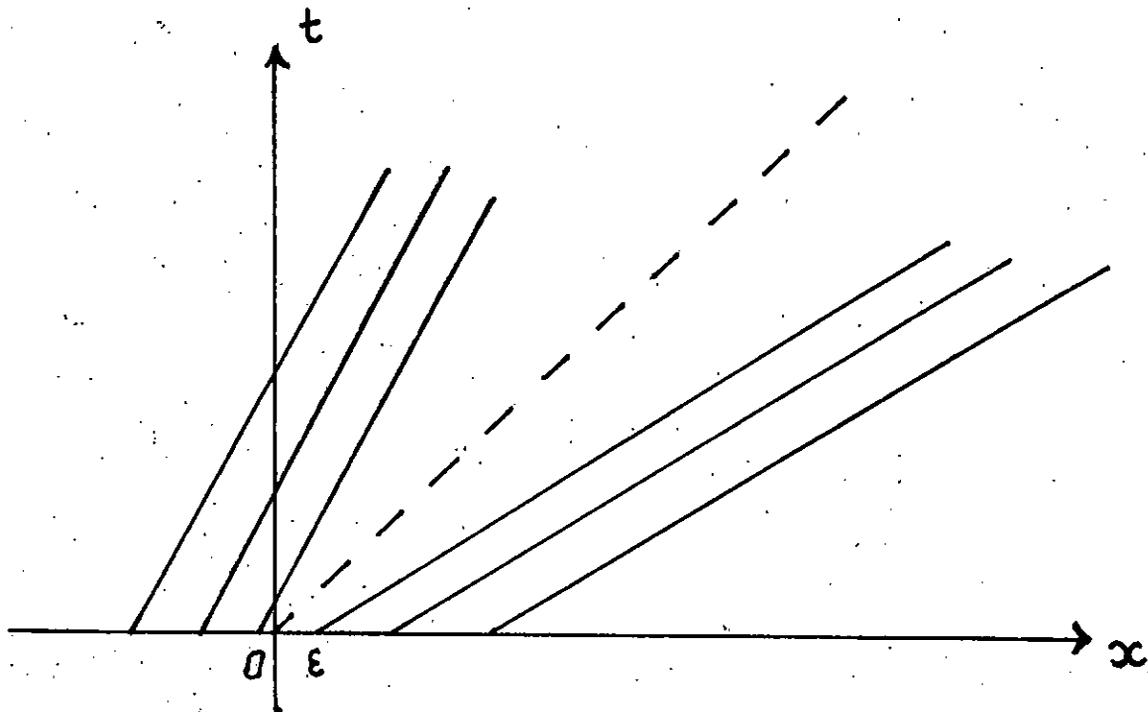


fig. (V.3)

V.7 PRESENTATION DU SCHEMA [10, 12, 21, 22]

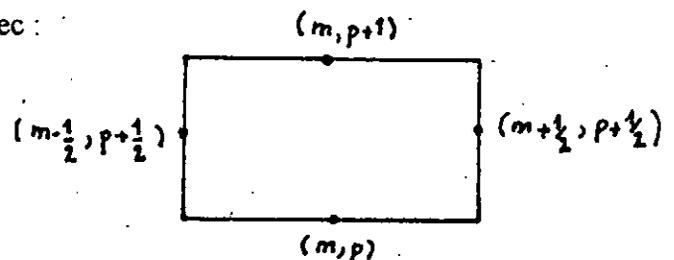
V.7.1 SCHEMAS AUX DIFFERENCES CONSERVATIFS [10]

Les schémas aux différences conservatifs s'appuient, comme nous l'avons constaté, sur des lois intégrales de conservation.

En considérant toujours le problème de Cauchy et en construisant dans le plan ox/t le réseau des droites : $t = p\Gamma$ et $x = (m + 1/2)h$ avec :

$p=0, 1, \dots$; et $m=\pm 1, \dots$

Γ étant le "pas de temps" et h le "pas linéaire".



La fonction cherchée $[u]_h$, définie en un point sera assimilée à la moyenne de la solution $u(x,t)$ sur le côté du rectangle élémentaire contenant ce point :

$$[u]_h \Big|_{\substack{x=x_m \\ t=t_p}} \equiv \bar{u}_m^p = \frac{1}{h} \int_{x_{m-1/2}}^{x_{m+1/2}} u(x, t_p) dx,$$

$$[u]_h \Big|_{\substack{x=x_{m+1/2} \\ t=t_{p+1/2}}} \equiv \bar{U}_{m+1/2}^{p+1/2} = \frac{1}{\Gamma} \int_{t_p}^{t_{p+1}} u(x_{m+1/2}, t) dt,$$

La solution approchée $u^{(h)}$ du problème est définie sur le même réseau D_h . Désignons par u_m^p les valeurs de $u^{(h)}$ au points (x_m, t_p) sur les côtés horizontaux des rectangles et par $u_{m+1/2}^{p+1/2}$ celles aux points $(x_{m+1/2}, t_{p+1/2})$ des côtés verticaux.

$u^{(h)}$ est donc défini sur les droites $x=nh$, $t=p\Gamma$.

La relation entre u_m^p et $u_{m+1/2}^{p+1/2}$ s'établit à partir de la loi intégrale de conservation

$$\oint_{\Gamma} \bar{u} dx - \frac{u^2}{2} dt = 0$$

Soit Γ un rectangle élémentaire du réseau. Posons

$$-\oint_{\Gamma} u^{(h)} dx - \frac{(u^{(h)})^2}{2} dt = 0$$

ou en détaillant :

$$h[u_m^{p+1} - u_m^p] + \frac{\Gamma}{2} [(u_{m+1/2}^{p+1/2})^2 - (u_{m-1/2}^{p+1/2})^2] = 0 \quad (5.2)$$

Connaissant la règle de calcul des quantités $u_{m+1/2}^{p+1/2}$, d'après les quantités connues u_m^p , la formule (5.2) permet de trouver u_m^{p+1} .

Quel que soit le procédé choisi en vue d'obtenir $u_{m+1/2}^{p+1/2}$, un schéma aux différences de la forme (5.2) traduit cependant des lois de conservation.

V.7.2 SCHEMA AUX DIFFERENCES DE GODOUNOV : [10]

Le schéma de Godounov appartient à la classe des schémas aux différences conservatifs.

Pour que le schéma (5.2) ait un sens, il faut indiquer le procédé de calcul de $u_m^{p+1/2}$ en fonction de $u_{m+1/2}^p$.

Le schéma de Godounov qui nous aide à illustrer la notion de schéma conservatif utilise à cet effet la "suppression de la discontinuité".

Supposons qu'à l'instant initial la solution $u(x,0)$ est donnée par les conditions.

$$u(x,0) = \begin{cases} u_{gauche} & \text{pour } x < 0, \\ u_{droite} & \text{pour } x > 0, \end{cases}$$

Il nous faut connaître la valeur $u=u(0,t)$ de la solution $u(x,t)$ pour $x=0$.

Sur la droite $x=0$ la solution prend les valeurs u_{gauche} , u_{droite} ou 0 selon les données initiales.

Par la suite lorsque $u_{gauche} > 0$, $u_{droite} > 0$, on aura par exemple $u(0,t)=u_{gauche}$, et inversement $u(0,t)=u_{droite}$ pour $u_{gauche} < 0$, $u_{droite} < 0$.

(voir : suppression de la discontinuité).

La quantité $u_{m+1/2}^{p+1/2}$ du schéma (5.2) sera définie moyennant le problème de la suppression de la discontinuité apparaissant sur la frontière $x=x_{m+1/2}$ de n'importe quels deux secteurs où sont données les valeurs constantes $u_m^p (= u_{gauche})$ et $u_{m+1}^p (= u_{droite})$.

Si par exemple $u_m^p > 0$, $m = 0, \pm 1, \dots$, alors

$$u_{m+1/2}^{p+1/2} = u_{gauche} = u_m^p,$$

et le schéma (5.2) prend la forme :

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\Gamma} + \frac{1}{h} \left[\frac{(u_m^p)^2}{2} - \frac{(u_{m-1}^p)^2}{2} \right] = 0, \quad (5.3)$$

avec comme données initiales $\Psi(x)$, d'où :

$$u_m^0 = \frac{1}{h} \int_{x_{m-1/2}}^{x_{m+1/2}} \Psi(x) dx$$

Les calculs expérimentaux [10] confirment que le réseau se resserrant, la solution $x^{(h)}$ du problème (5.3) avec les données initiales $\Psi(x)$ régulières par morceaux et monotones par morceaux converge vers une fonction $u(x,t)$ présentant des discontinuités en nombre fini et que la convergence est uniforme à l'extérieur de tout voisinage des discontinuités.

Le schéma (5.3) où $u_{m+1/2}^{p+1/2}$ se calcule moyennant la suppression de la discontinuité n'est pas l'unique schéma conservatif pour le problème (2.5). En voici un autre, très simple, dont le principe est la prédiction - correction où, on cherche d'abord les quantités auxiliaires \bar{u} par le schéma implicite non conservatif.

$$\frac{\bar{u}_m^{p+1/2} - u_m^p}{\Gamma/2} + u_m^p \frac{\bar{u}_m^{p+1/2} - \bar{u}_{m-1}^{p+1/2}}{h} = 0$$

puis posons ensuite

$$u_{m+1/2}^{p+1/2} = \frac{1}{2} (\bar{u}_m^{p+1/2} + \bar{u}_{m+1/2}^{p+1/2}), \quad (5.4)$$

et utilisons le schéma (5.2), (5.4)

Le schéma obtenu est d'ordre d'approximation deux pour la solution régulière.

Par linéarisation et fixation des coefficients, nous aboutissons à un schéma de la forme.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{u}_m^{p+1/2} - u_m^p}{\frac{\Gamma}{2}} + \alpha \frac{\bar{u}_m^{p+1/2} - \bar{u}_{m-1}^{p+1/2}}{h} &= 0 \\ \frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\Gamma} + \alpha \left[\frac{\bar{u}_{m+1}^{p+1/2} + \bar{u}_m^{p+1/2}}{2} - \frac{\bar{u}_m^{p+1/2} + \bar{u}_{m-1}^{p+1/2}}{2} \right] &= 0 \end{aligned} \right\}$$

V.7.3 SCHEMA SPLITTING DU TYPE STRANG ET SOLUTION APPROXIMANTE DE RIEMANN² : [21, 22]

Un schéma conservatif pour la résolution de l'équation :

$$\partial_t Q + \partial_\xi E + \partial_\eta G = 0$$

a pour expression en terme de flux numériques :

$$Q_{j,k}^{n+1} = Q_{j,k}^n + \Delta t \left[E_{j+1/2,k}^N - E_{j-1/2,k}^N \right] - \Delta t \left[G_{j+1/2,k}^N - G_{j-1/2,k}^N \right] \quad (5.5)$$

telle que : ξ et η sont les coordonnées dans le domaine rectangulaire de calcul.

avec $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$.

et : $Q_{j,k}^n$ est la valeur du vecteur Q au temps $n\Delta t$ et au point du réseau défini par $(j\Delta\xi, k\Delta\eta)$.

Dans l'équation (5.5) $E_{j+1/2,k}^N$ et $G_{j,k+1/2}^N$ sont les flux numériques.

Les méthodes qui vont suivre donnent des procédés de calcul des flux numériques.

a /La méthode splitting du vecteur flux¹ [22]

Cette méthode a été développée par Vanleer et appliquée aux Equations d'Euler en gazodynamique.

Par la suite, elle a été appliquée aux Equations de Saint-Venant pour les écoulements à surface libre en faible profondeur.

² The Strang type dimensional splitting and approximate Riemann solvers.

¹ flux vector splitting method

Elle introduit de nouveaux vecteurs notés E^\pm et G^\pm , d'où le vecteur flux numérique est donné par la formule :

$$E_{j+1/2,k}^N = E_{j+1,k}^n - (E_{j+1,k}^+ - E_{j,k}^-)$$

b/ Schéma splitting du type strang [22]²

Le schéma splitting du type strang est un schéma explicite employé souvent pour les problèmes bidimensionnels.

Il est donné par :

$$Q_{j,k}^{n+2} = L_\zeta(\Delta t)L_\eta(\Delta t)L_\eta(\Delta t)L_\zeta(\Delta t)Q_{j,k}^n \quad (5.6)$$

ou L_ζ et L_η sont des opérateurs donnés par

$$L_\zeta(\Delta t)Q_{j,k}^n = Q_{j,k}^n - \Delta t(E_{j+1/2,k}^N - E_{j-1/2,k}^N) \quad (5.7)$$

de même l'opérateur L_η est écrit en remplaçant $E_{j+1/2,k}^N$ par $G_{j,k+1/2}^N$

où le flux numérique $E_{j+1/2,k}^N$ est donné pour le schéma du premier ordre par :

$$E_{j+1/2}^N = E_{j+1,k}^n - \hat{A}_{j+1/2,k}^+ \Delta_{j+1/2,k} E^n \quad (5.8)$$

avec

$$\Delta_{j+1/2,k} E^n = E_{j+1,k}^n - E_{j,k}^n$$

$\hat{A}_{j+1/2,k}^+$ étant la matrice, jacobienne normalisée définie au chapitre IV

Les schémas conservatifs ainsi obtenus sont du premier ordre, et présentent des problèmes d'oscillation numérique.

² the Strang-type dimensional splitting.

A. Harten [21, 22] en se basant principalement sur le schéma de Godounov a développé des schémas d'ordre élevés non oscillants.

V.7.4 SCHEMAS D'ORDRE ELEVES NON OSCILLANTS : [12, 22]

L'idée principale est de supprimer E^n de l'équation (5.8) qui engendrait des schémas du premier ordre, et de le remplacer par un vecteur flux modifié noté E^M . Ce vecteur est composé du vecteur flux d'origine E et d'un terme additionnel donnant une précision plus grande, qui d'habitude a des termes de contrôle non linéaire, qui évite l'oscillation de la solution

donc :

$$E_{j+1/2}^N = E_{j+1/2}^M - \hat{A}_{j+1/2,k}^+ \Delta_{j+1/2,k} E^M \quad (5.9)$$

et :

$$E^M = E + \bar{E} \quad (5.10)$$

les composantes du vecteur additionnel \bar{E} sont définies par

$$\bar{e}_{j,k} = m \left[\bar{e}_{j-1/2,k} + \beta \bar{m}(\Delta_- \bar{e}_{j-1/2,k}, \Delta_+ \bar{e}_{j-1/2,k}), \bar{e}_{j+1/2,k} - \beta \bar{m}(\Delta_- \bar{e}_{j+1/2,k}, \Delta_+ \bar{e}_{j+1/2,k}) \right] \quad (5.11)$$

où Δ_+ et Δ_- sont respectivement les différences finies avant et arrière.

Les fonctions m et \bar{m} sont définies par :

$$m(a,b) = \begin{cases} s \min(|a|, |b|) & , \quad \text{si sgn}a = \text{sgn}b \\ 0 & , \quad \text{si non} \end{cases}$$

et :

$$\bar{m}(a,b) = \begin{cases} a & , \quad \text{si } |a| \leq |b| \\ b & , \quad \text{si } |a| \geq |b| \end{cases}$$

et $\tilde{e}_{j+1/2}$ sont les composantes du vecteur :

$$\tilde{E}_{j+1/2,K} = \text{sign } A_{j+1/2,K} \left(I - \Delta t |A_{j+1/2,K}| \right) \Delta_{j+1/2,K} E/2$$

pour $\beta = 0$, le schéma est dit TVD "total variation diminishing", il est du second ordre donc il est noté TVD2.

pour $\beta = 0.5$, le schéma est dit ENO "Essentially non oscillatory", il est du second ordre donc il est noté ENO2.

V.8 APPLICATION DU PRESENT SCHEMA AUX EQUATIONS DE SAINT-VENANT.

Le système d'équations régissant notre problème (4.32), et que nous reprenons :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial(h/J)}{\partial t} \\ \frac{\partial(hu/J)}{\partial t} \\ \frac{\partial(hv/J)}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial(h/J)}{\partial x} \\ \frac{\partial(hu/J)}{\partial x} \\ \frac{\partial(hv/J)}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial(h/J)}{\partial y} \\ \frac{\partial(hu/J)}{\partial y} \\ \frac{\partial(hv/J)}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_{\alpha x} - S_{\beta x})/J \\ gh(S_{\alpha y} - S_{\beta y})/J \end{bmatrix}$$

L'application du schéma non oscillant de second ordre au système précédent, s'écrit sous la forme suivante :

$$Q_{J,K}^{n+1} = Q_{J,K}^n - (\Delta t / \Delta \xi) [E_{J+\frac{1}{2},K}^N - E_{J-\frac{1}{2},K}^N] - (\Delta t / \Delta \eta) [G_{J,K+\frac{1}{2}}^N - G_{J,K-\frac{1}{2}}^N] + \Delta t (S_{J,K}^n) \quad (5.12)$$

La forme explicite de (5.12) est décrite par :

$$\begin{bmatrix} (h/J)_{J,K}^{n+1} \\ (hu/J)_{J,K}^{n+1} \\ (hv/J)_{J,K}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (h/J)_{J,K}^n \\ (hu/J)_{J,K}^n \\ (hv/J)_{J,K}^n \end{bmatrix} - (\tau_{\xi}) \begin{bmatrix} (E_{J+\frac{1}{2},K}^N - E_{J-\frac{1}{2},K}^N)_1 \\ (E_{J+\frac{1}{2},K}^N - E_{J-\frac{1}{2},K}^N)_2 \\ (E_{J+\frac{1}{2},K}^N - E_{J-\frac{1}{2},K}^N)_3 \end{bmatrix} - (\tau_{\eta}) \begin{bmatrix} (G_{J,K+\frac{1}{2}}^N - G_{J,K-\frac{1}{2}}^N)_1 \\ (G_{J,K+\frac{1}{2}}^N - G_{J,K-\frac{1}{2}}^N)_2 \\ (G_{J,K+\frac{1}{2}}^N - G_{J,K-\frac{1}{2}}^N)_3 \end{bmatrix} - (\Delta t) \begin{bmatrix} 0 \\ (gh(S_{\alpha x} - S_{\beta x})/J)_{J,K}^n \\ (gh(S_{\alpha y} - S_{\beta y})/J)_{J,K}^n \end{bmatrix}$$

avec :

$(E_{J+\frac{1}{2},K}^N - E_{J-\frac{1}{2},K}^N)_i$, $(G_{J,K+\frac{1}{2}}^N - G_{J,K-\frac{1}{2}}^N)_i$ sont la composante ième des vecteurs $(E_{J+\frac{1}{2},K}^N - E_{J-\frac{1}{2},K}^N)_i$ et $(G_{J,K+\frac{1}{2}}^N - G_{J,K-\frac{1}{2}}^N)_i$ respectivement.

$$\tau_\xi = \Delta t / \Delta \xi$$

$$\tau_\eta = \Delta t / \Delta \eta$$

V.9 STABILITE DU PRESENT SCHEMA [22]

Le schéma non oscillant de second ordre n'est stable que si la condition C.F.L. (Courant Friedrichs Levy) est satisfaite.

Pour les écoulements bidimensionnels, cette condition est exprimée par :

$$C_n = \frac{(V + \sqrt{gh}) \Delta t}{b(x) \cdot \Delta \xi \Delta \eta} \left[(\Delta \xi)^2 + (b(x) \cdot \Delta \eta)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.13)$$

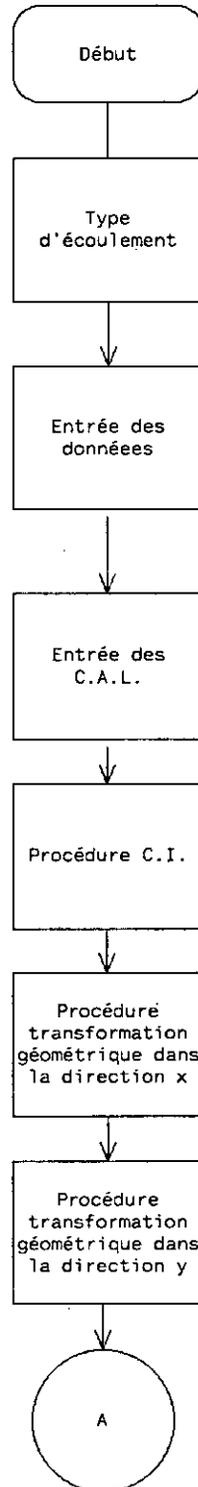
où V est la vitesse résultante au point du maillage.

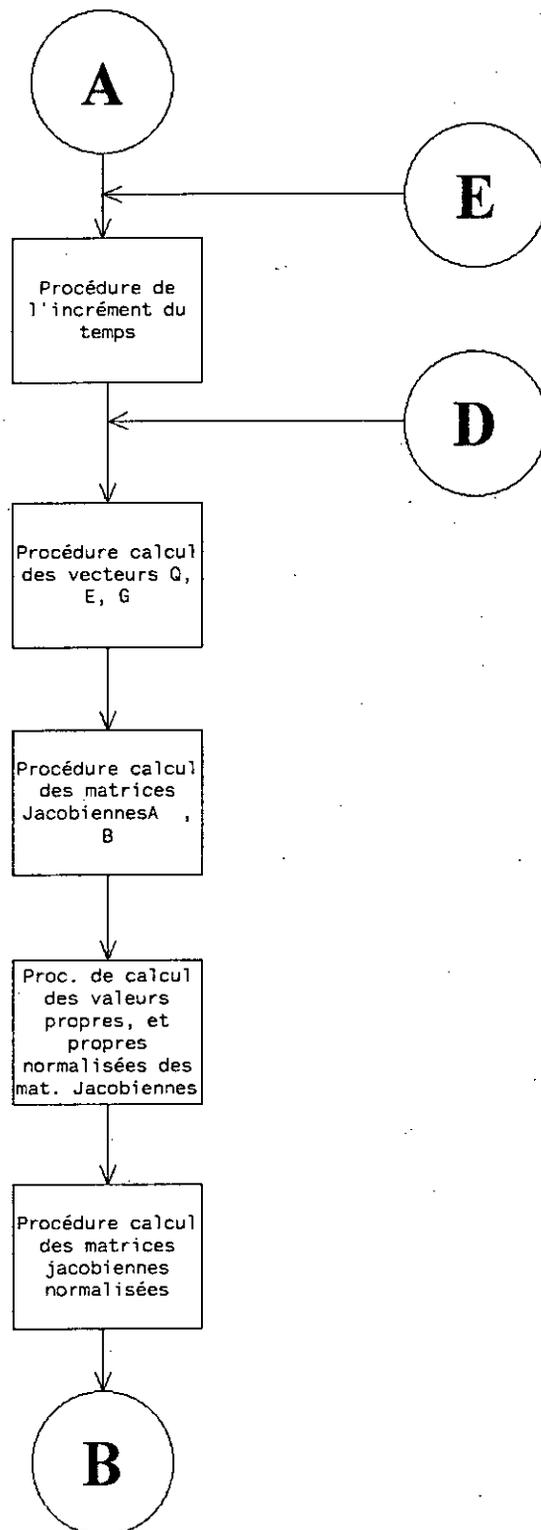
Elle doit être vérifiée en tout les points du maillage, il est plus commode de prendre l'incrément de temps suivant tel que :

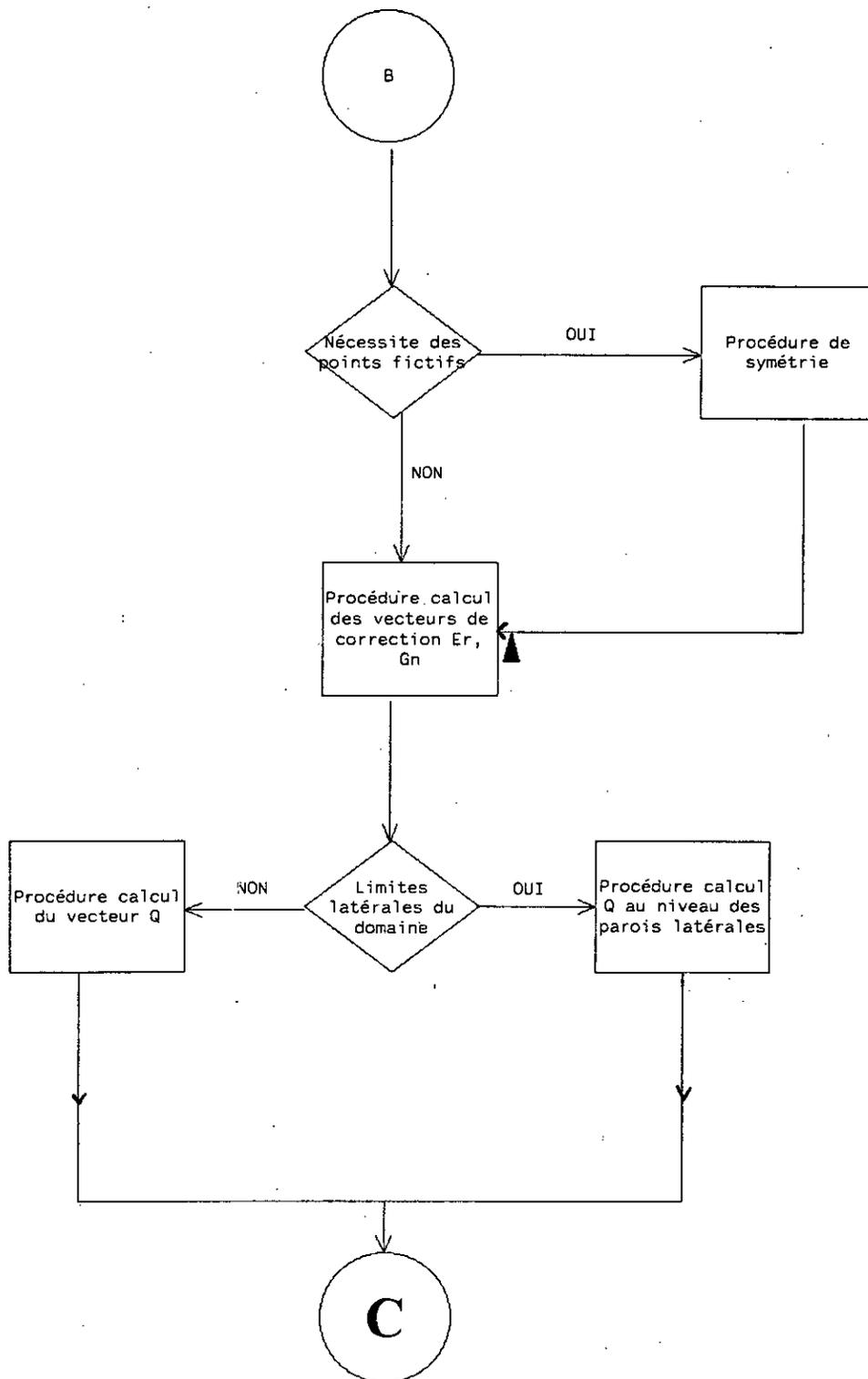
$$\Delta t = C_n \frac{b_{\min}(x) \cdot \Delta \xi \cdot \Delta \eta}{\text{Max}(V + \sqrt{gh}) \left[(\Delta \xi)^2 + (b(x) \cdot \Delta \eta)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (5.14)$$

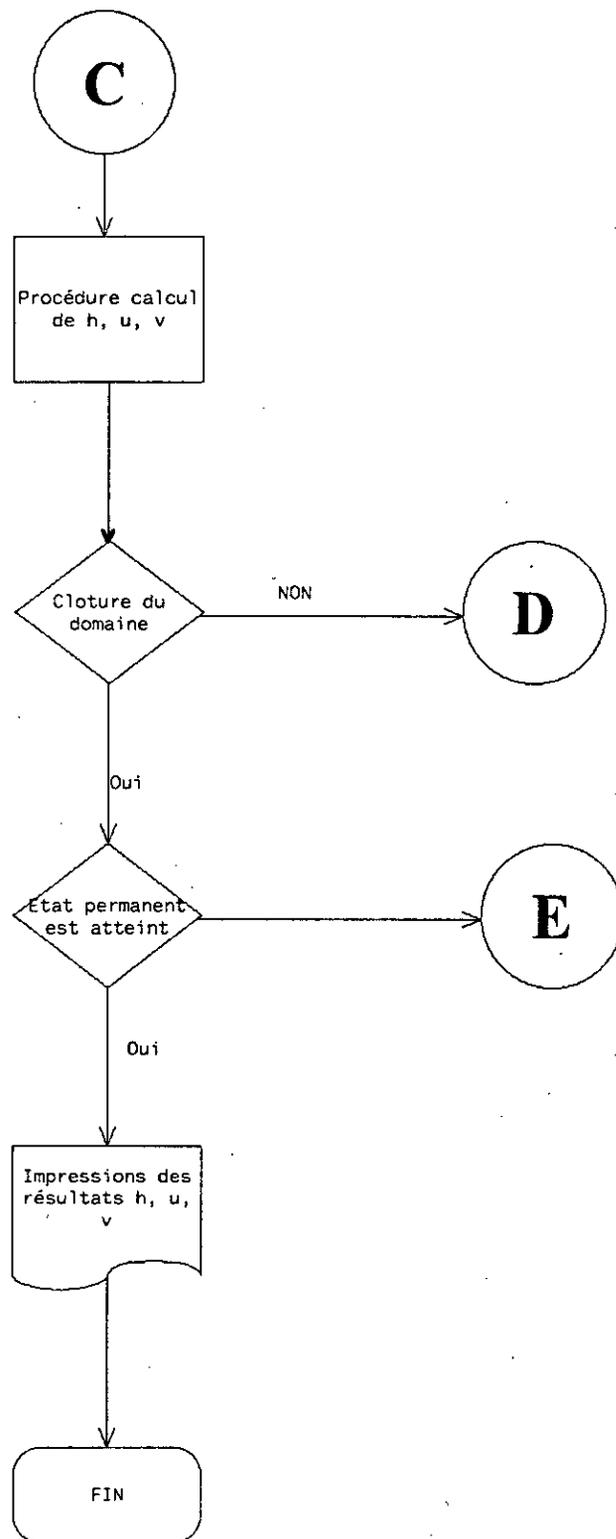
La condition précédente (5.14) fixe le pas de temps Δt à chaque temps t en considérant les pas d'espace $\Delta \xi$ et $\Delta \eta$ constants.

ORGANIGRAMME GENERAL









CHAPITRE 6

EXPERIMENTATION NUMERIQUE

VI.1 INTRODUCTION

Les puissants outils de calcul que constituent les ordinateurs permettent de résoudre par voie numérique tous problèmes susceptibles d'être exprimés par des équations mathématiques [3].

Les techniques numériques sont un outil d'aide efficace, complémentaire et très économique, par conséquent il faut chercher en détail des solutions numériques.

Ceux qui ont utilisé des calculateurs électroniques ont appris rapidement combien il faut se méfier des solutions proposées, fussent elles les plus élégantes. Jusqu'à ce que la solution numérique complète ait été essayée et vérifiée on ne peut jamais savoir si des considérations de précisions, de stabilité, de capacité de mémoire ou de temps de calcul n'empêcheront pas de résoudre complètement le problème.

Rapidement, on a constaté qu'aucun problème n'a de solution "classique". Il est toujours possible de se servir du caractère particulier de chaque problème pour diminuer le temps de calcul, accroître la précision des résultats ou s'approcher davantage de la réalité.

Il a été montré qu'on pouvait effectivement résoudre par différentes techniques, de nombreux problèmes difficiles de variations et d'optimisation.

Certains pouvaient être résolus laborieusement grâce aux anciennes méthodes; pour d'autres on ne pouvait qu'essayer ou deviner la solution: d'autres enfin semblaient totalement insolubles*

Il importe, tout de même, de préciser, qu'un ordinateur ne peut que résoudre les équations qu'on lui a fournies. C'est donc à l'ingénieur et au physicien qu'il appartient de définir les équations qui représentent convenablement le problème posé; il est évident que, si certains paramètres ou certaines grandeurs ne figurent pas dans les équations initiales, le modèle ne pourra pas les fournir. [3]

* BELLMAN La programmation dynamique et ses applications imprimerie Jouve, 1965.

VI.2 APPLICATIONS**VI.2.1 PREMIERE PARTIE**

"Analyse de l'écoulement supercritique dans un rétrécissement rectiligne symétrique"

A/ Présentation de l'application

Cette application consiste à analyser un écoulement supercritique dans un rétrécissement rectiligne symétrique, à section transversale rectangulaire illustré par la figure (VI.1).

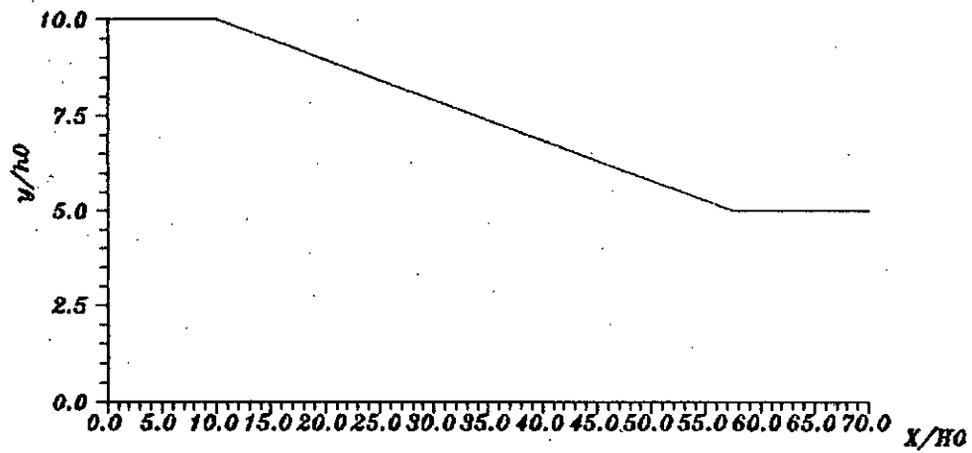


fig. (VI.1) rétrécissement rectiligne symétrique

Les conditions de l'écoulement étudié dans le canal de la figure (IV.1), sont les suivantes :

- le tirant d'eau à l'amont est $h_0 = 0,0305m$
- le nombre de Froude à l'amont est $F = 4$
- la vitesse transversale à l'amont est $V_0 = 0m/s$
- les pentes de fond et de frottement sont supposées nulles
- C.F.L = 0.8

Afin de bien visualiser les résultats, on opte pour un maillage, dont les pas d'espace sont les suivants :

$$D\xi = 0.04833m$$

$$D\eta = 0.0476m$$

Pour le déroulement des calculs, la profondeur $h_0 = 0,0305m$, la vitesse transversale $V_0 = 0m/s$, et le nombre de Froude $F = 4$, sont considérés comme conditions initiales à l'amont de la transition.

B/ Résultats et analyses

La figure (A.1), (A.2) représentent les hauteurs d'eau le long de l'axe médian et la paroi obtenue par le présent modèle.

Les figures (A.3) et (A.4) permettent une comparaison entre les résultats obtenus par notre modèle et les résultats expérimentaux Jimenez (1987) [15] et numériques (Chaudhry) [15] de la ligne d'eau respectivement le long de l'axe médian et de la paroi

- Le long de l'axe de l'écoulement:

La ligne d'eau obtenue par le présent modèle suit approximativement mais fidèlement, la ligne d'eau des résultats expérimentaux.

Par contre les résultats du modèle numérique de Chaudhry présentent des décalages considérables en zone de choc.

Il importe de préciser que notre modèle présente les deux surélévations expérimentales, tout en conservant l'ordre de grandeur des hauteurs d'eau. Donc notre modèle a pu détecter la deuxième surélévation de la courbe expérimentale, ce qui n'est pas le cas pour le modèle de Chaudhry [15]

- Le long de la paroi:

La ligne d'eau obtenue par le présent modèle présente comme la ligne d'eau du modèle numérique de Chaudhry [15] une surélévation, qui n'apparaît pas dans la ligne d'eau expérimentale de Jimenez [15]

Notre modèle présente une autre surélévation immédiate après la première, tandis que le modèle de Chaudhry [15] présente un creux beaucoup plus important entre les deux piques.

En ce qui concerne l'obtention de l'état stationnaire (permanent), nous prétendons que notre modèle l'atteint plus rapidement que celui de Chaudhry [15] (0.95 sec contre 3 sec) figure (A.10) (A.11)

Etant donné que le but d'un sujet de simulation est de s'approcher le plus des résultats expérimentaux, et non pas d'arriver aux mêmes résultats expérimentaux immédiatement, les résultats obtenus par le présent modèle sont pratiquement satisfaisants et relativement bons.

Nous avons établis certaines figures afin de bien visualiser l'écoulement.

Les figures (A.5) et (A.6) illustrent une représentation tridimensionnelle et plane de la surface libre, afin de mieux visualiser la forme et la direction du choc.

La différence entre les résultats numériques (présent modèle et Chaudhry [15]) et expérimentaux (Jimenez [15]) suivant la paroi peut être expliquée par le fait que ces modèles numériques ne prennent pas en compte d'autres phénomènes qui interviennent au niveau de la paroi notamment la couche limite et la turbulence.

Il importe de préciser finalement que la hauteur finale étant approximativement trois fois plus grande que la hauteur initiale. L'hypothèse des écoulements en faible profondeur reste valable.

En conclusion de cette première partie, on peut dire qu'on est parvenu à vérifier la validité du modèle ainsi établi

RESULTATS & ANALYSES

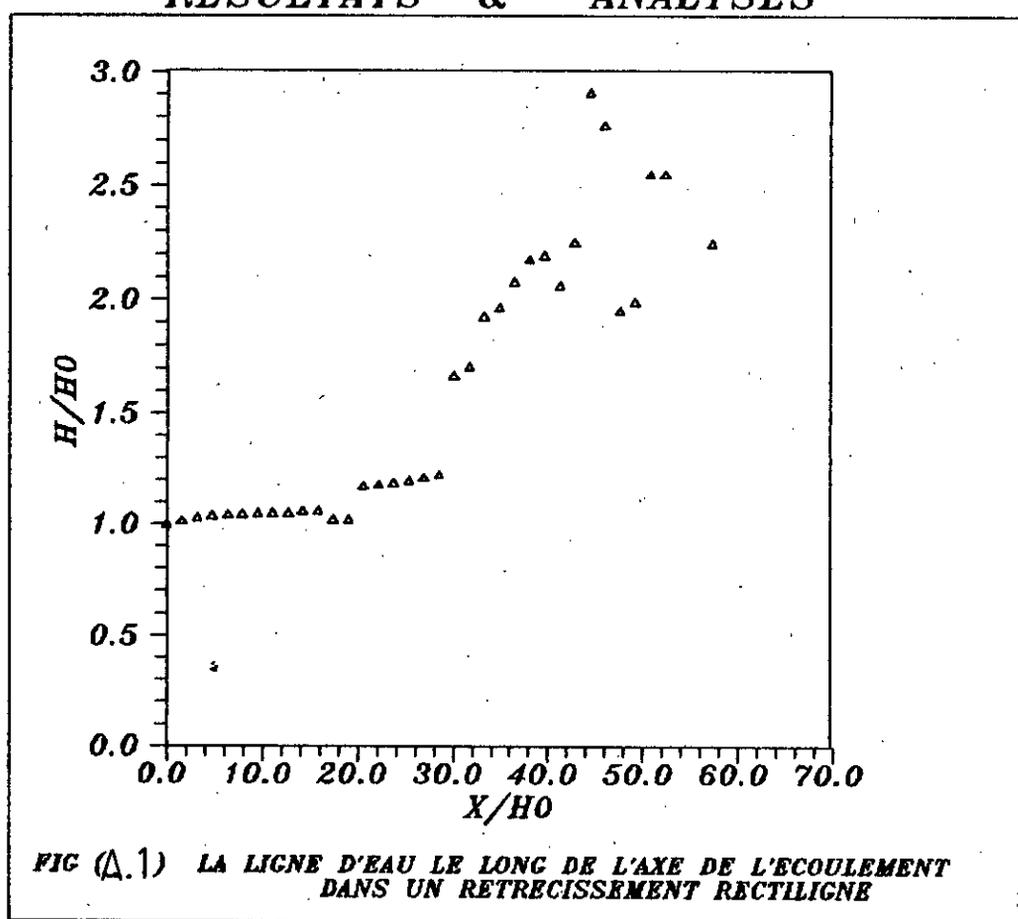
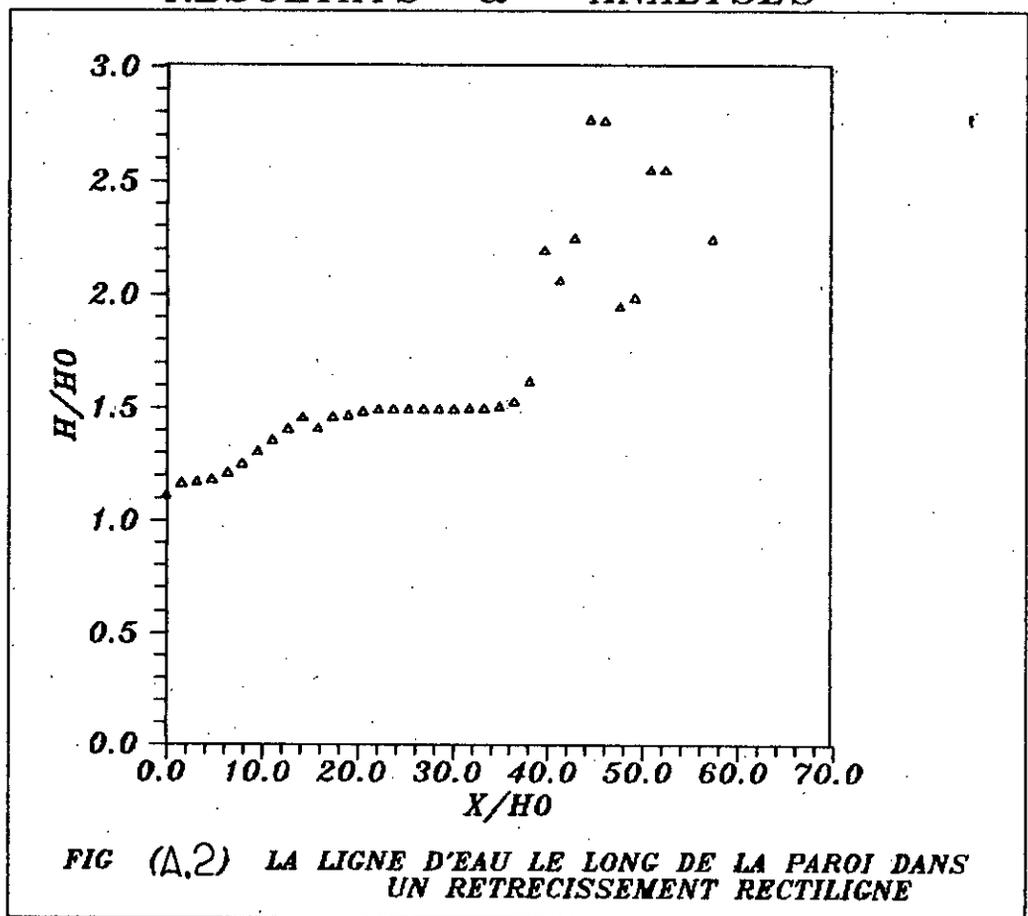
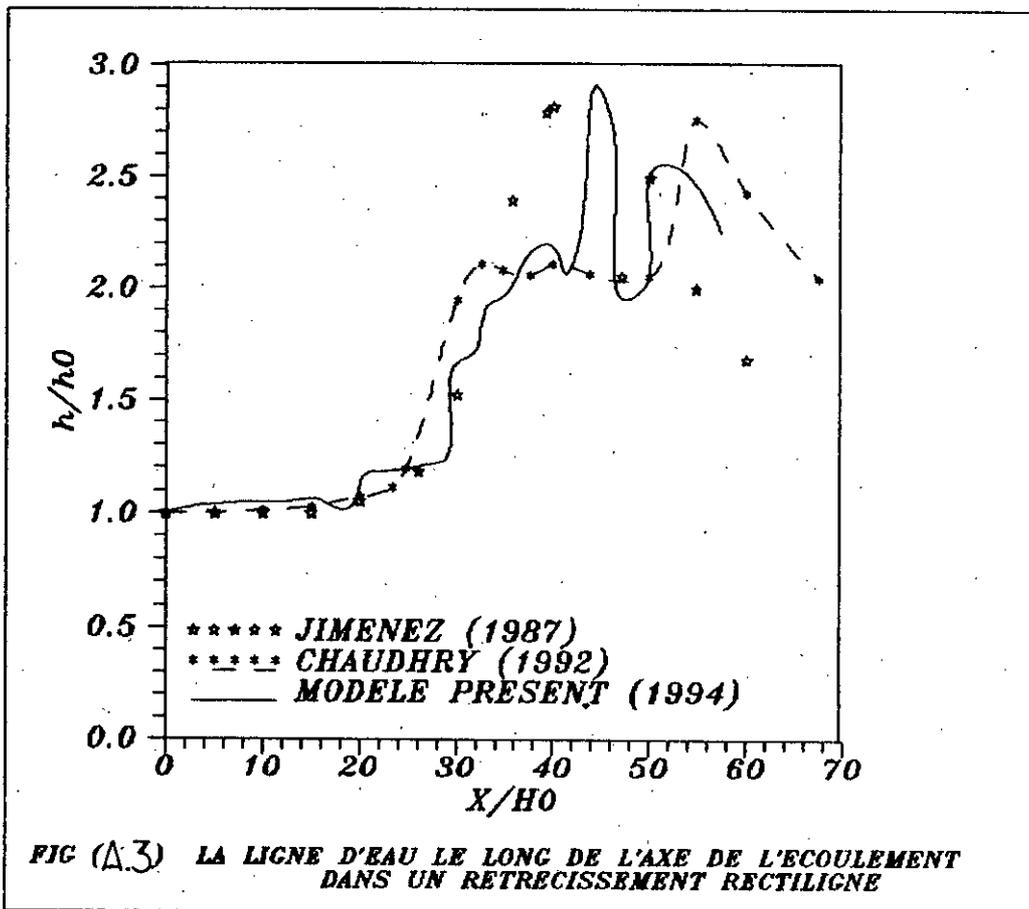


FIG (Δ.1) LA LIGNE D'EAU LE LONG DE L'AXE DE L'ECOULEMENT
DANS UN RETRECISSEMENT RECTILIGNE

RESULTATS & ANALYSES



RESULTATS & ANALYSES



RESULTATS & ANALYSES

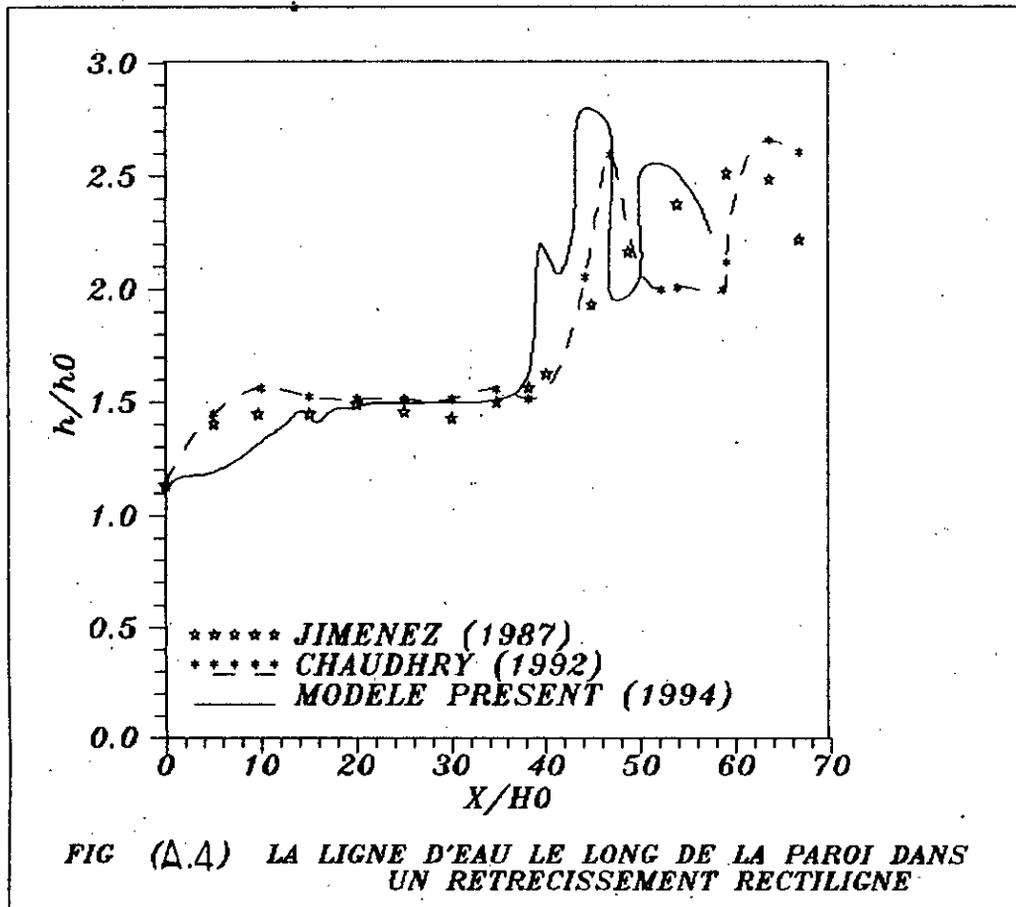


FIG.(A.5)

REPRESENTATION TRIDIMENSIONNELLE
DE LA SURFACE LIBRE DANS
UN RETRECISSEMENT RECTILIGNE

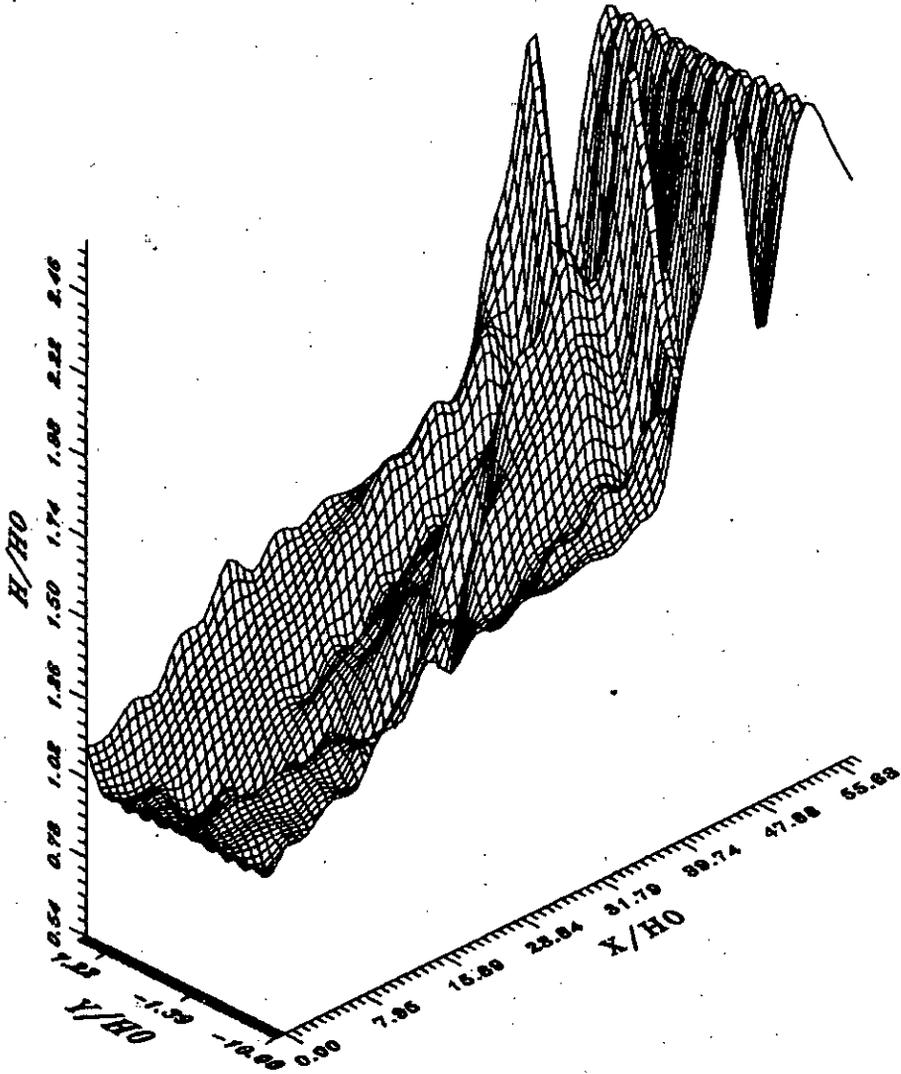


FIG.(A.6)

LIGNES DE NIVEAU CALCULEES DANS LE CAS
DU RETRECISSEMENT RECTILIGNE

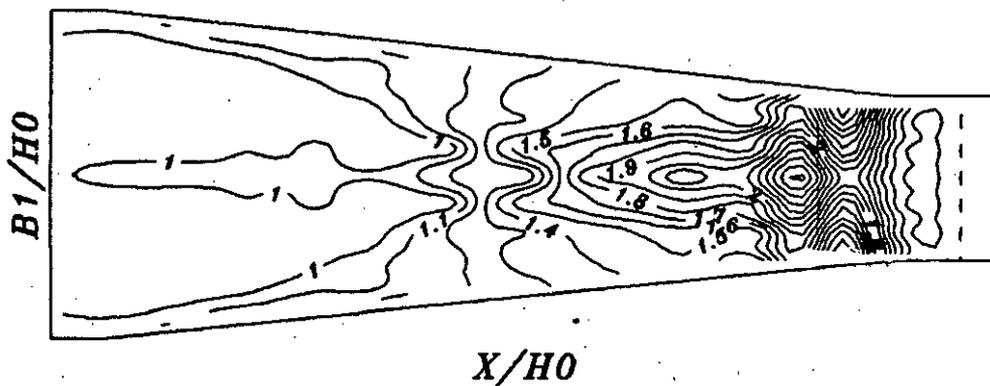
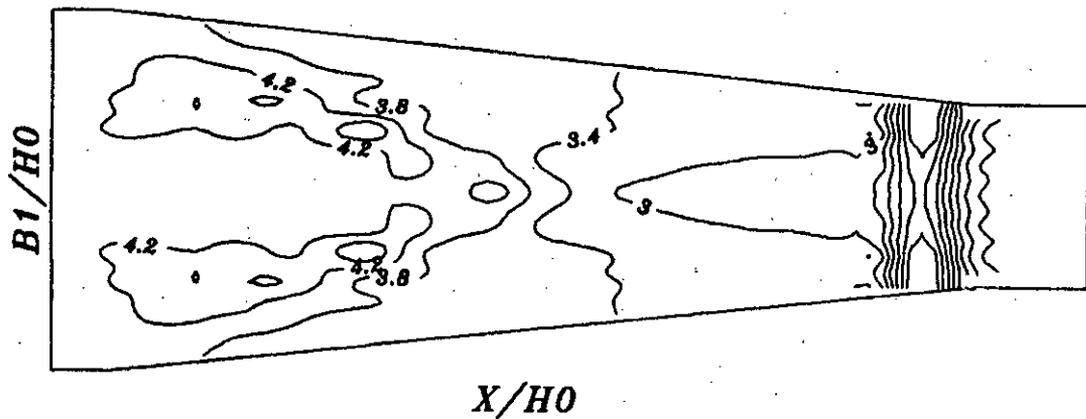
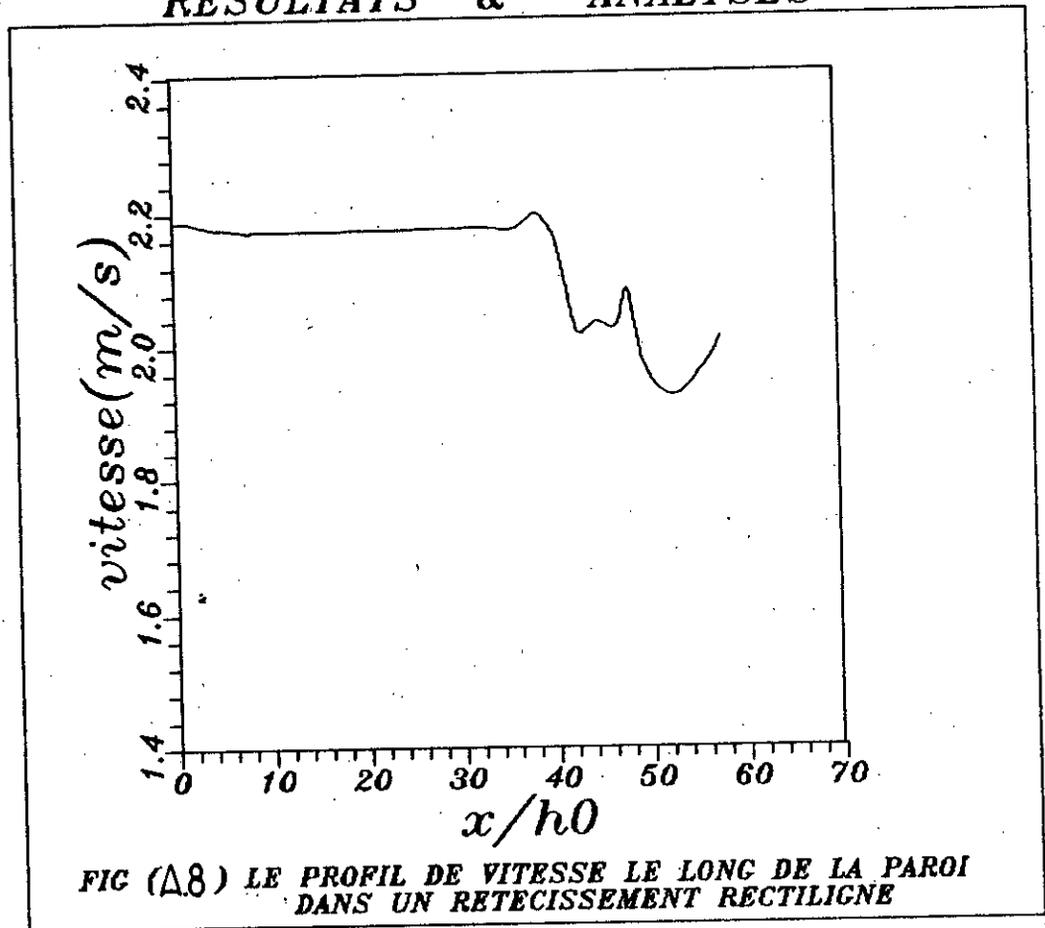


FIG.(A.7)

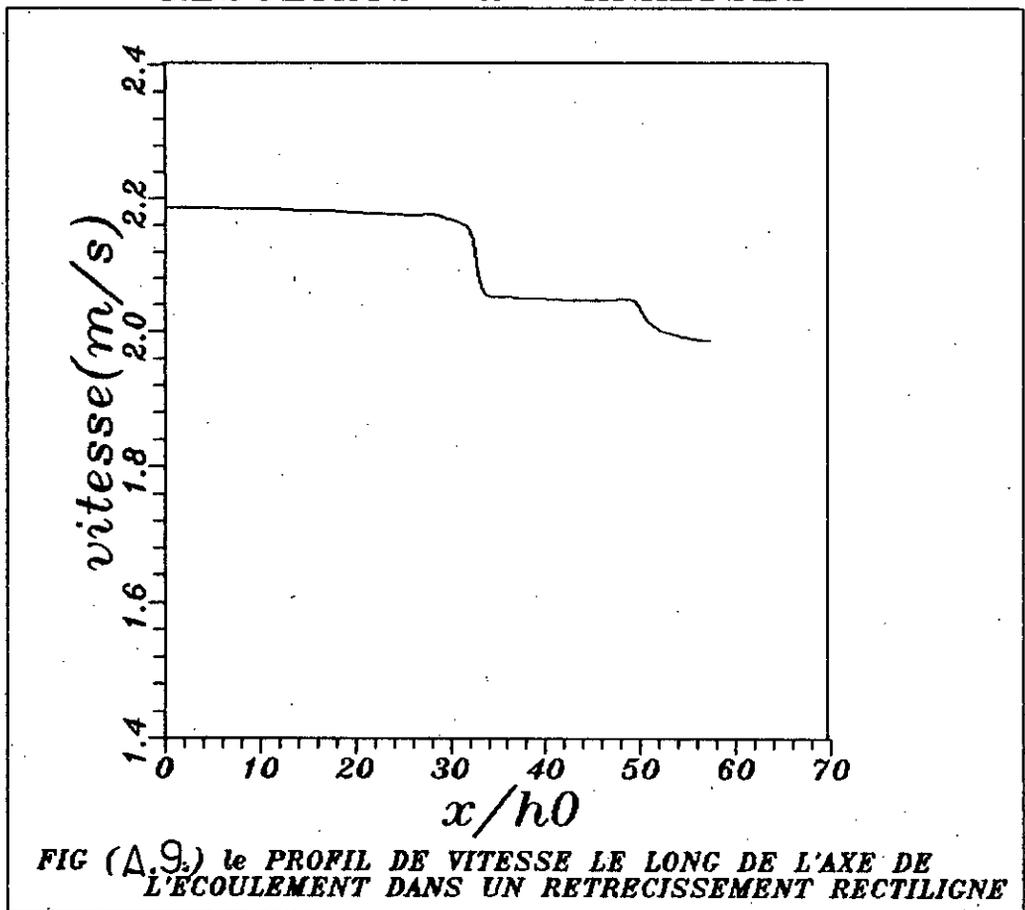
LIGNES D'EGAL NOMBRE DE FROUDE DANS LE
CAS DU RETRECISSEMENT RECTILIGNE



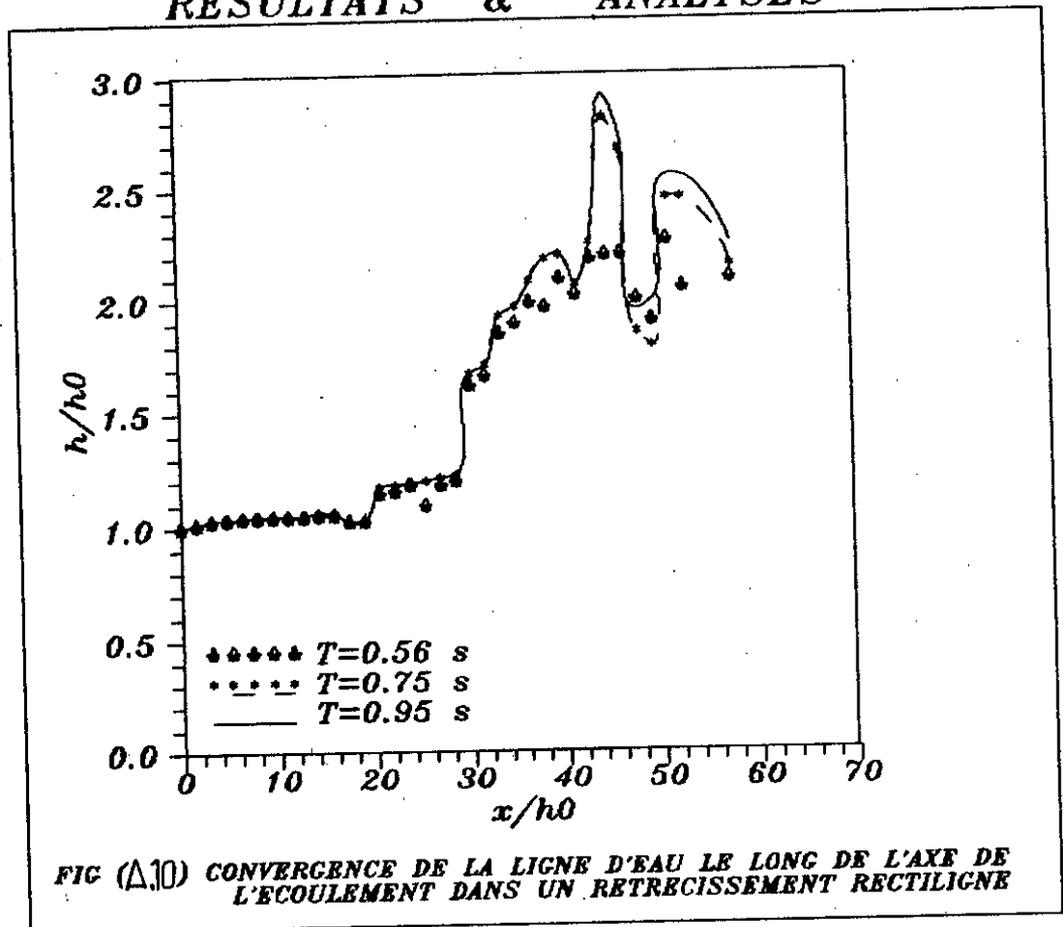
RESULTATS & ANALYSES



RESULTATS & ANALYSES



RESULTATS & ANALYSES



RESULTATS & ANALYSES

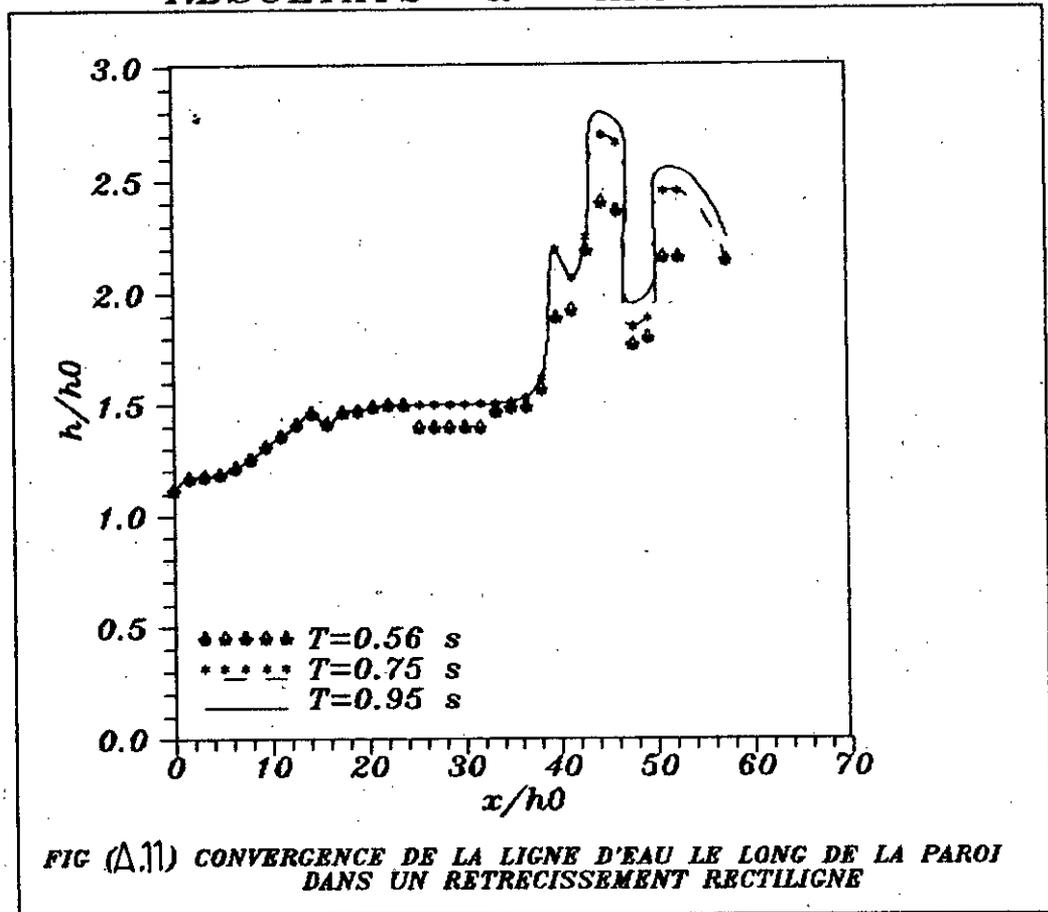
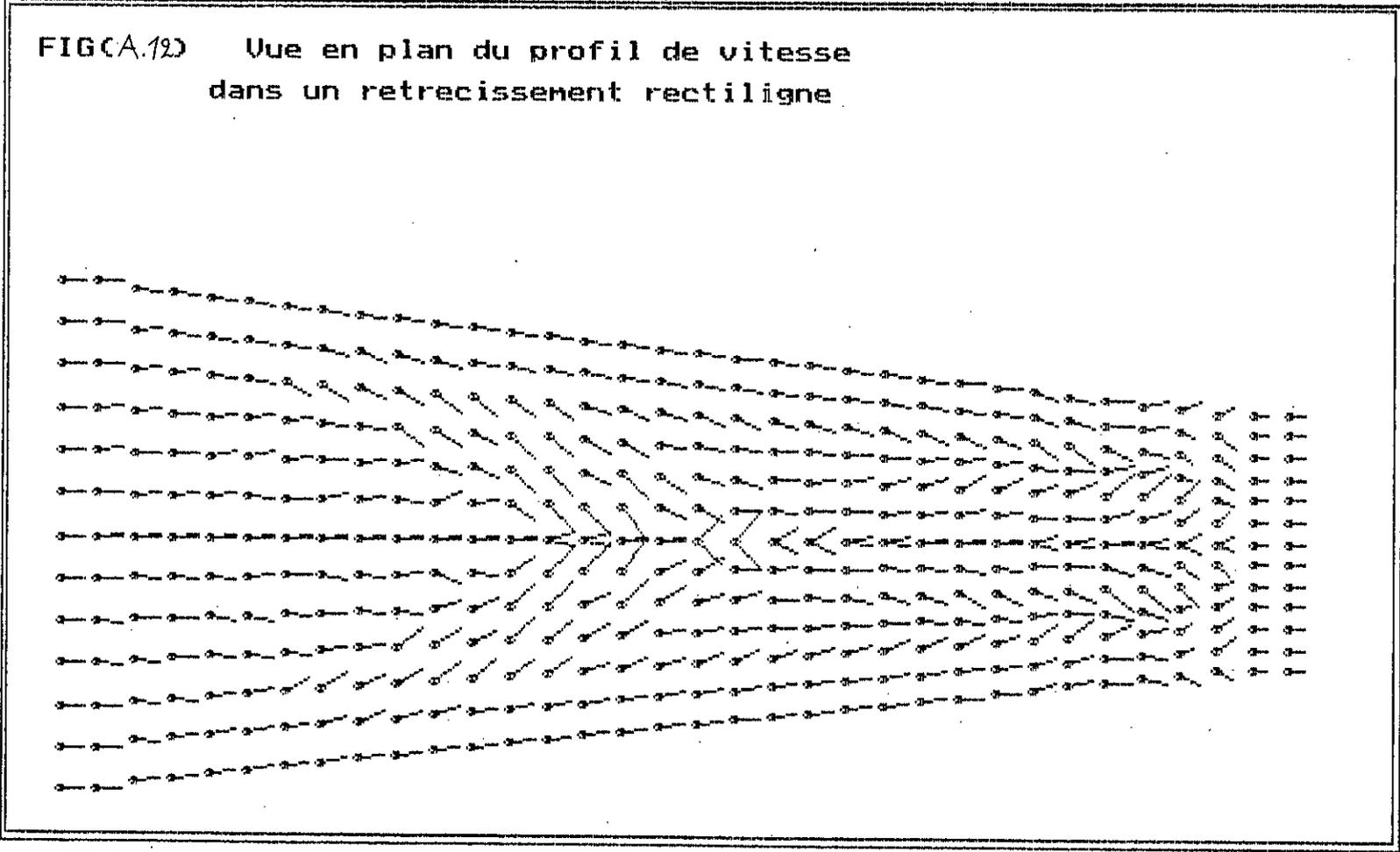


FIG (A.11) CONVERGENCE DE LA LIGNE D'EAU LE LONG DE LA PAROI
DANS UN RETRECISSEMENT RECTILIGNE

FIG(A.12) Vue en plan du profil de vitesse
dans un retrecissement rectiligne.



VI.2.2 DEUXIEME PARTIE :

"Analyse de l'écoulement supercritique dans un canal convergent divergent de forme sinusoidale symétrique"

A/ Présentation de l'application

Dans cette application, nous analysons un écoulement supercritique dans un canal convergent divergent de forme sinusoidale symétrique à section transversale rectangulaire, dont les dimensions sont données dans la figure (VI.2).

La forme du contour est donnée par la formule :

$$b(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x < 0 \\ 0.375 \sin \pi(x + 0.5) + 0.625; & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 0.625 \sin \frac{\pi}{2}(x - 2) + 0.875; & \text{pour } 1 < x < 3 \\ 1.5 & \text{pour } x > 3 \end{cases}$$

avec : $b(x)$; est la moitié de la largeur du canal convergent divergent de forme sinusoidale.

Les conditions de l'écoulement étudié dans le canal de la figure (IV.2), sont les suivantes :

- le tirant d'eau à l'amont est $h_0 = 0.0305 \text{ m}$
- le nombre de Froude à l'amont est $F = 3$
- la vitesse transversale à l'amont est $V_0 = 0 \text{ m/s}$
- les pentes de fond et de frottement sont supposées nulles

Dans cette application nous optons pour les pas d'espace suivants :

$$D\xi = 0.1016 \text{ m}$$

$$D\eta = 0.061 \text{ m}$$

Afin de commencer les calculs, la profondeur $h_0 = 0.0305$ la vitesse transversale $V_0 = 0 \text{ m/s}$, et le nombre de Froude $F = 3$, sont considérés comme conditions initiales à l'amont de la transition.

Pour faire face au problème de stabilité causé pas la technique numérique considérée; nous optons pour la vérification de la condition "C.F.L." avec un nombre de courant égale à 0,95.

B/ Résultats et analyses

L'étude du convergent - divergent permet de bien visualiser la variation de la hauteur d'eau due à la diffraction du mascaret qui se crée à l'entrée du convergent

Le convergent - divergent de cette application est un convergent - divergent sinusoïdal qui ne possède aucun point de discontinuité.

Il est à noter que cette application a été traitée par J.Y.YANG [22] avec le même schéma numérique que le présent modèle (schéma de Harten [12] essentiellement non oscillant; ENO, TVD) mais sans prendre en compte le terme S dans le second membre des équations de Saint venant.

Par contre notre modèle tient en compte ce terme.

Les résultats que nous avons obtenu dans cette deuxième partie sont représentés par les figures (B.2), (B.3) et (B.4).

Les figures (B.2) et (B.3) illustrent une représentation tridimensionnelle et plane de la surface libre, afin de mieux visualiser la forme et la direction du choc et la figure (B.4) représente les lignes d'égal nombre de froude

On constate pour cette application une augmentation de la hauteur d'eau au niveau du col (jonction convergent - divergent). Suivie d'une diminution de celle - ci au niveau du divergent ce qui concorde avec la réalité.

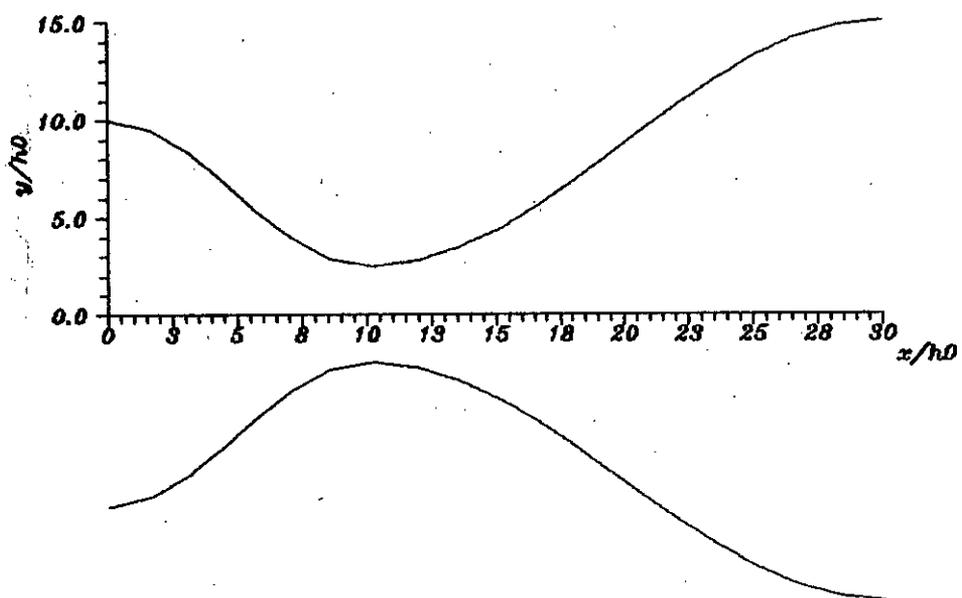


FIG (VI.2) CONVERGENT-DIVERGENT SINUSOIDAL

FIG.(B.2)
REPRESENTATION TRIDIMENSIONNELLE
DE LA SURFACE LIBRE DANS
UN CONVERGENT-DIVERGENT SINUSOIDAL

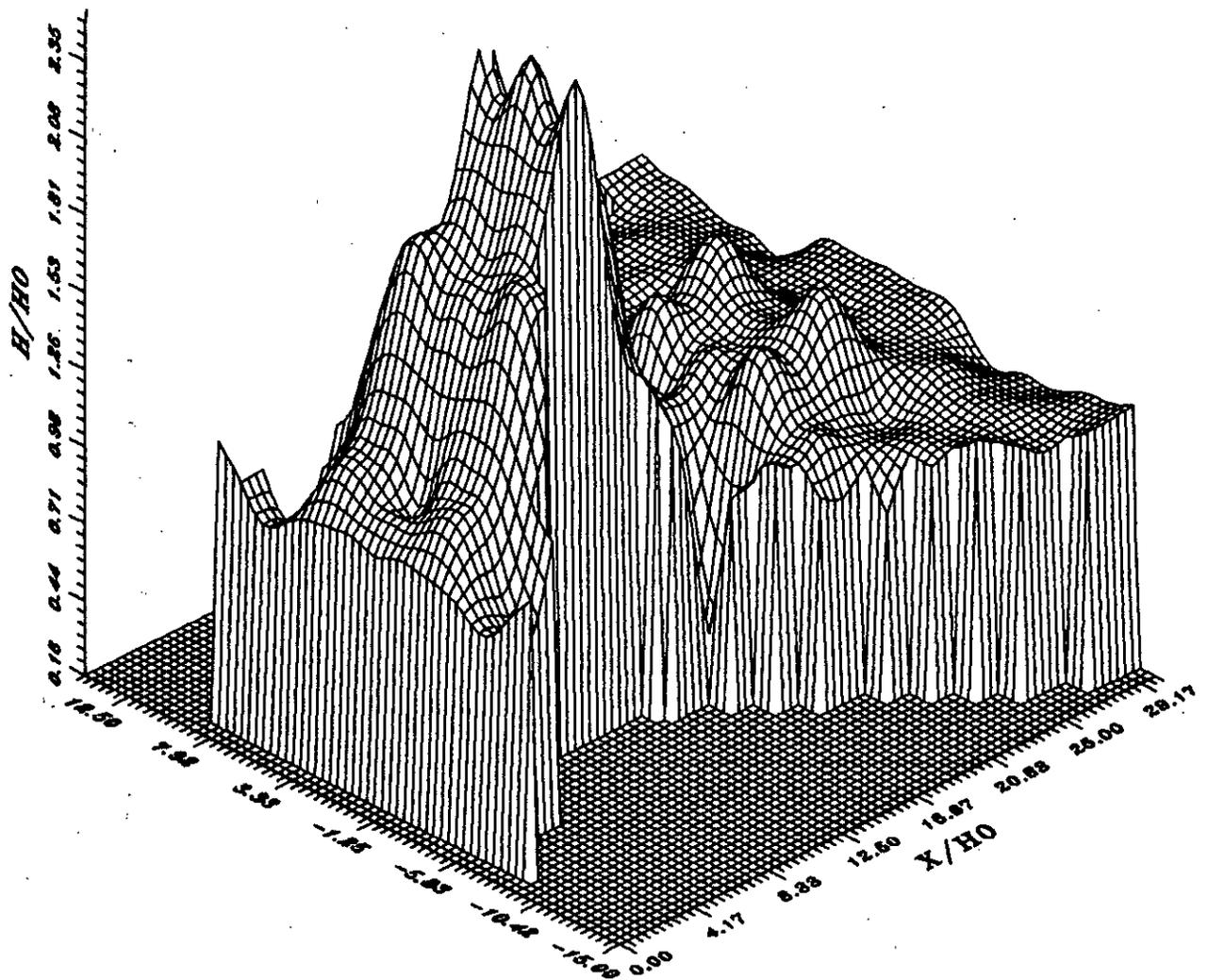


FIG.(B.3)

LIGNES DE NIVEAU DANS LE
CONVERGENT-DIVERGENT SINUSOIDAL

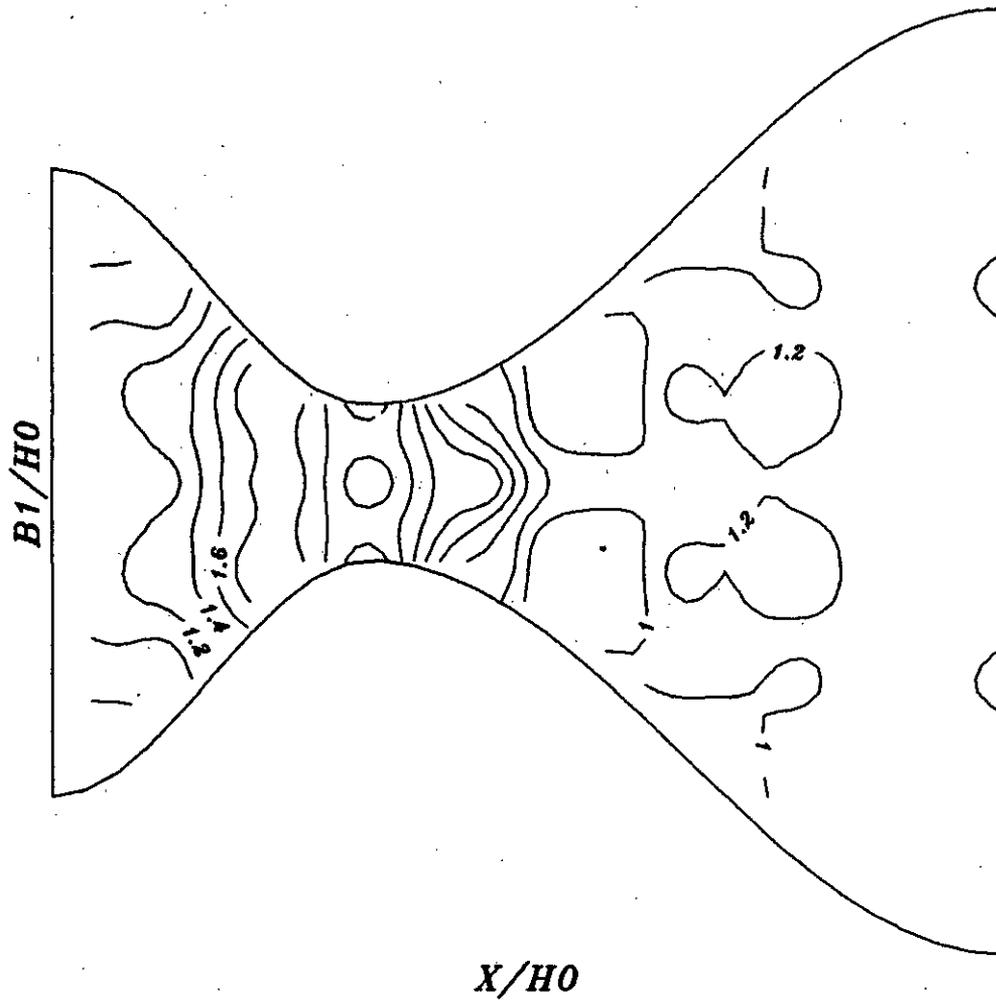
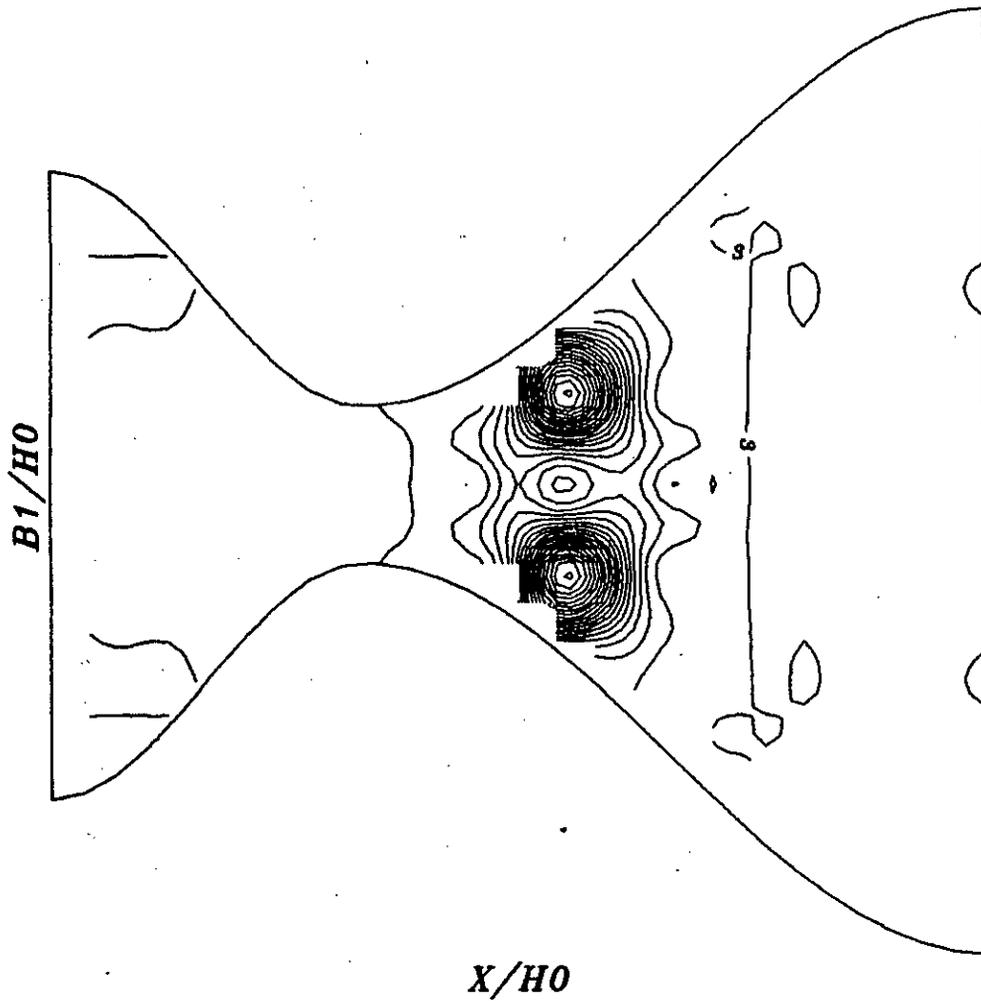
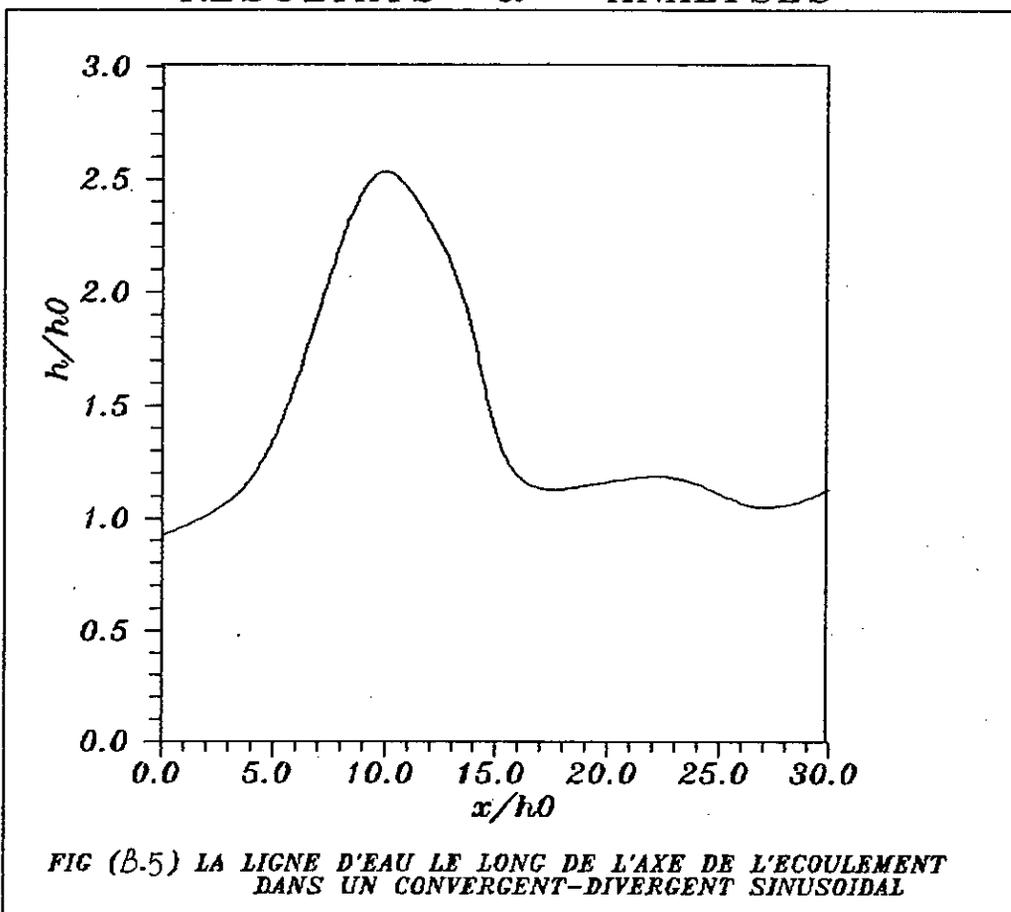


FIG. (B.4)

LIGNES D'EGAL NOMBRE DE FROUDE DANS
LE CONVERGENT-DIVERGENT SINUSOIDAL



RESULTATS & ANALYSES



VI.2.3 TROISIEME PARTIE

"Etude comparative de l'écoulement supercritique dans des rétrécissements en forme d'entonnoir, d'éventail et de tuyère"

A/ Présentation de l'application

Dans cette application, nous étudions un écoulement supercritique dans trois rétrécissements de forme différentes symétrique, à section transversale rectangulaire; dont les dimensions sont données dans les figures (R.1), (E.1) et (T.1).

L'équation du contour du rétrécissement en forme de tuyère est donnée par :

$$b(x) = 0.07625 \cos x \frac{\pi}{1.45} + 0.22875$$

L'équation du contour du rétrécissement en forme d'éventail est donnée par :

$$b(x) = 0.1525 \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{x}{1.45} + 1 \right) + 0.305$$

avec $b(x)$: moitié de la largeur du canal,

Les conditions de l'écoulement dans les trois rétrécissements précédents, sont les suivantes :

- le tirant d'eau à l'amont est $h_0 = 0,0305m$
- le nombre de Froude à l'amont est $F = 4$
- la vitesse transversale à l'amont est $V_0 = 0 m/s$
- les pentes de fond et de frottement sont supposées nulles

Le maillage adopté pour les trois rétrécissements, a pour pas d'espace.

$$D\xi = 0.1611$$

$$D\eta = 0.061$$

Pour le déroulement des calculs dans les trois rétrécissements, la profondeur $h_0 = 0,0305m$, la vitesse transversale $V_0 = 0 m/s$, et le nombre de Froude $F = 4$, sont considérés comme conditions initiales à l'amont de la transition.

Vu le problème de stabilité de la technique numérique choisie, on opte pour la vérification de la condition "C.F.L.", avec un nombre de courant égale à 0,8.

B/ Résultats et analyses

Pour effectuer la jonction entre deux canaux à surface libre le premier de largeur b_1 et le second de largeur b_2 , tel que $b_1 > b_2$.

On a trois types de convergent ou rétrécissement.

D'un rétrécissement à un autre on diminue les points de discontinuité.

D'abord, le rétrécissement rectiligne ou en forme d'entonnoir présente 2 points de discontinuité symétrique à l'entrée de la transition et 2 points de discontinuité symétrique à la sortie de la transition.

Puis, le rétrécissement en forme d'éventail ne présente que deux points de discontinuité symétrique à l'entrée uniquement.

Enfin, le rétrécissement en forme de tuyère qui ne présente aucun point de discontinuité.

Les résultats que nous avons obtenu dans cette troisième partie sont représentés par les figures (R.*) pour le rétrécissement rectiligne ou en forme d'entonnoir, (T.*) pour le rétrécissement en forme de tuyère, (E.*) pour le rétrécissement en forme d'éventail et (C.*) pour la comparaison entre ces trois types de rétrécissement.

Les figures (R.3), (T.3) et (E.3) montrent respectivement la ligne d'eau le long de l'axe de l'écoulement dans les rétrécissements en forme d'entonnoir, de tuyère et d'éventail. La superposition de ces trois lignes est représentée sur la figure (c.1)

On remarque que :

- l'influence du choc se manifeste bien avant dans le rétrécissement en forme d'éventail par rapport aux deux autres rétrécissements.

Cet effet est dû à la composante de la force centrifuge sur les particules se déplaçant le long des lignes de courant courbes.

- On constate aussi, que le long de l'axe de l'écoulement, les surélévations de la ligne d'eau du rétrécissement en forme de tuyère sont légèrement plus importantes que les surélévations de la ligne d'eau du rétrécissement en forme d'entonnoir.
- Finalement, il est à noter qu'il existe des points communs à toutes les lignes d'eau et que la surélévation maximale est atteinte au même endroit, néanmoins elle diffère d'un rétrécissement à un autre.

Les figures (R.4), (T.4) et (E.4) illustrent respectivement la ligne d'eau le long de la paroi, dans les trois rétrécissements précédents, leur superposition est donnée par la figure (C.2).

On constate une diminution de la hauteur d'eau au niveau de la paroi, suivie par une augmentation, dans le rétrécissement en forme d'éventail (E.4) et (C.4). Ceci s'explique par

le fait que l'écoulement sous l'effet de la force centrifuge tend à se concentrer au niveau de son axe. Ce qui engendre qu'une portion du mur latéral est privé d'écoulement

Cette constatation pour les rétrécissements en forme d'éventail a été déjà signalée [23].

Pour les rétrécissements en forme d'entonnoir (R.4) et en forme de tuyère (T.4), la ligne d'eau le long de la paroi diffère peu (C.2). On constate cependant que la ligne d'eau du rétrécissement en forme de tuyère juste au début de la transition. Ceci explique par la discontinuité de la paroi dans le rétrécissement en forme d'entonnoir.

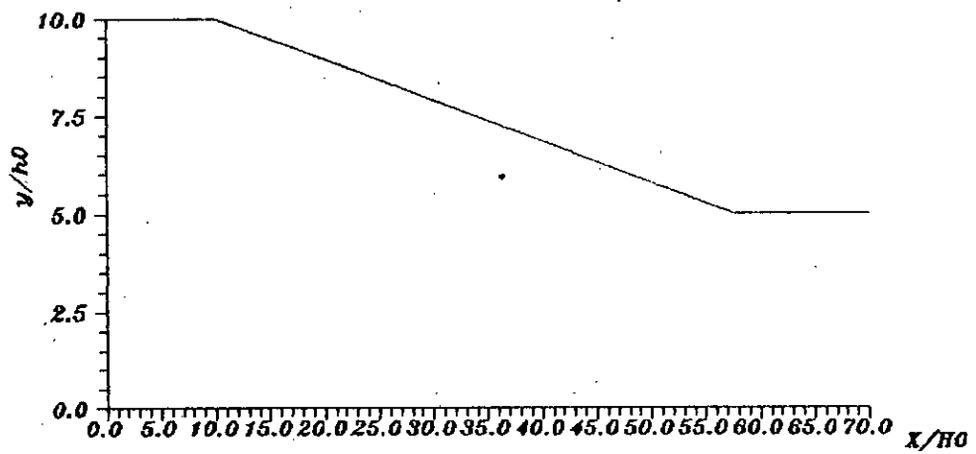
Par contre, la surélévation en zone de transition le long de la paroi pour le rétrécissement en forme de tuyère est légèrement plus importante que la surélévation pour le rétrécissement en forme d'entonnoir.

La figure (R.2), (T.2), (E.2) illustrent des représentations tridimensionnelles de la surface libre dans les trois types de rétrécissement, afin de mieux visualiser la forme et l'orientation du choc.

Finalement, on constate, qu'en diminuant les points de discontinuité, certes on supprime cet inconvénient, mais on crée un autre phénomène encore plus dangereux qui est l'apparition de la force centrifuge agissant sur les particules se déplaçant le long des lignes de courant courbes ce qui engendre des diminutions et des augmentations considérables de la ligne d'eau.

En conclusion, pour recommander tel ou tel type de rétrécissement, il est évident que le rétrécissement en forme d'entonnoir est le plus courant notamment pour les structures hydrauliques convergentes d'une étendue moyenne.

Facteur pratique essentiellement du domaine du génie civil néanmoins, il est à préciser que malgré la difficulté de réaliser les deux autres types de rétrécissement du point de vue génie civil, ils sont fréquemment utilisés en tant qu'ouvrages d'art de grande étendue.



FG (R.1) RETRECISSEMENT RECTILIGNE OU EN FORME D'ENTONNOIR

FIG.(R2)

REPRÉSENTATION TRIDIMENSIONNELLE
DE LA SURFACE LIBRE DANS UN RETRECISSEMENT
RECTILIGNE OU EN FORME D'ENTONNOIR

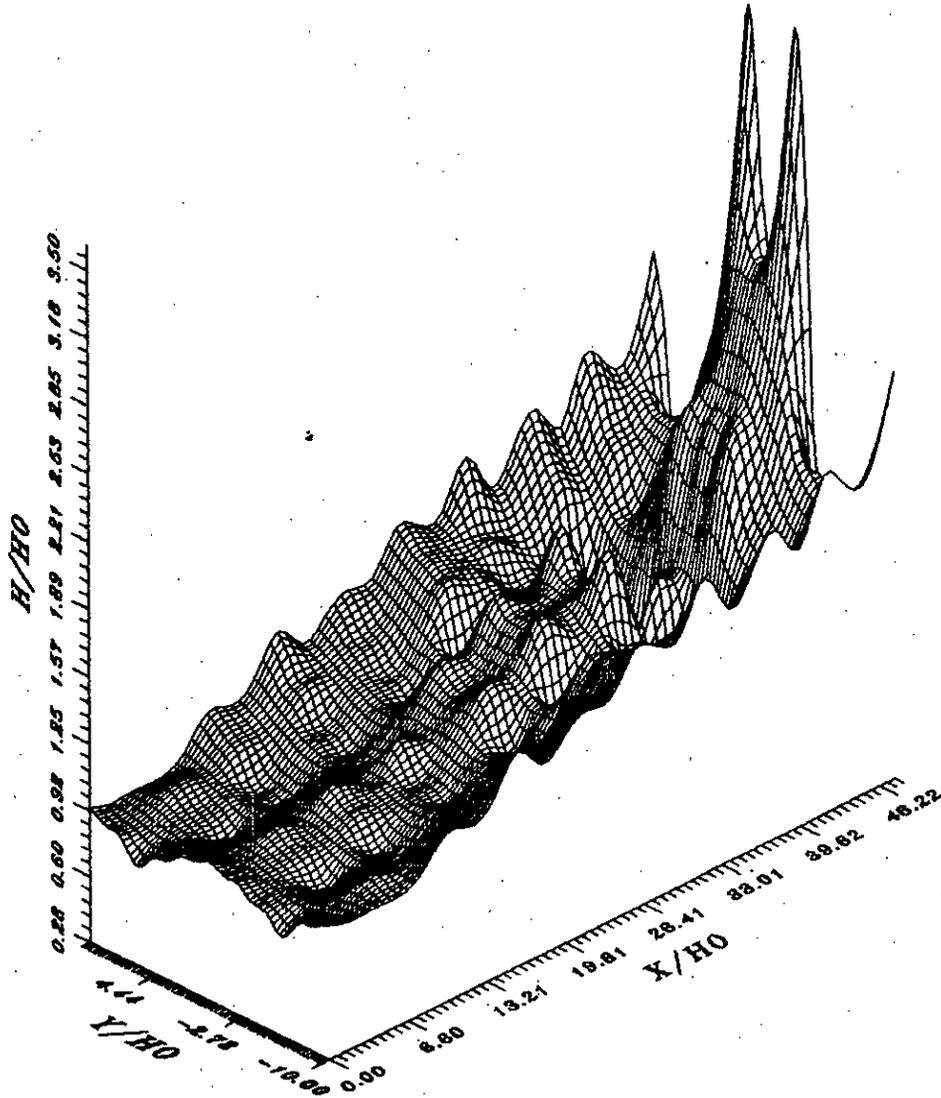


FIG.(R.3)

LA LIGNE D'EAU LE LONG DE L'AXE DE L'ECOULEMENT
DANS UN RETRECISSEMENT EN FORME D'ENTONNOIR
OU RETRECISSEMENT RECTILIGNE

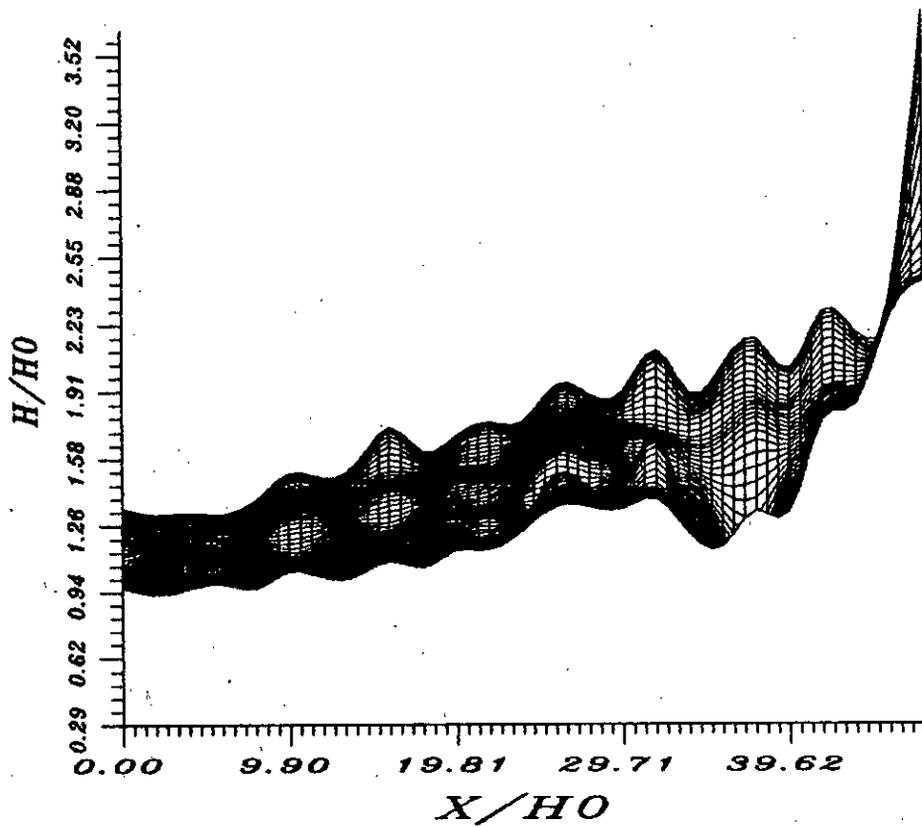
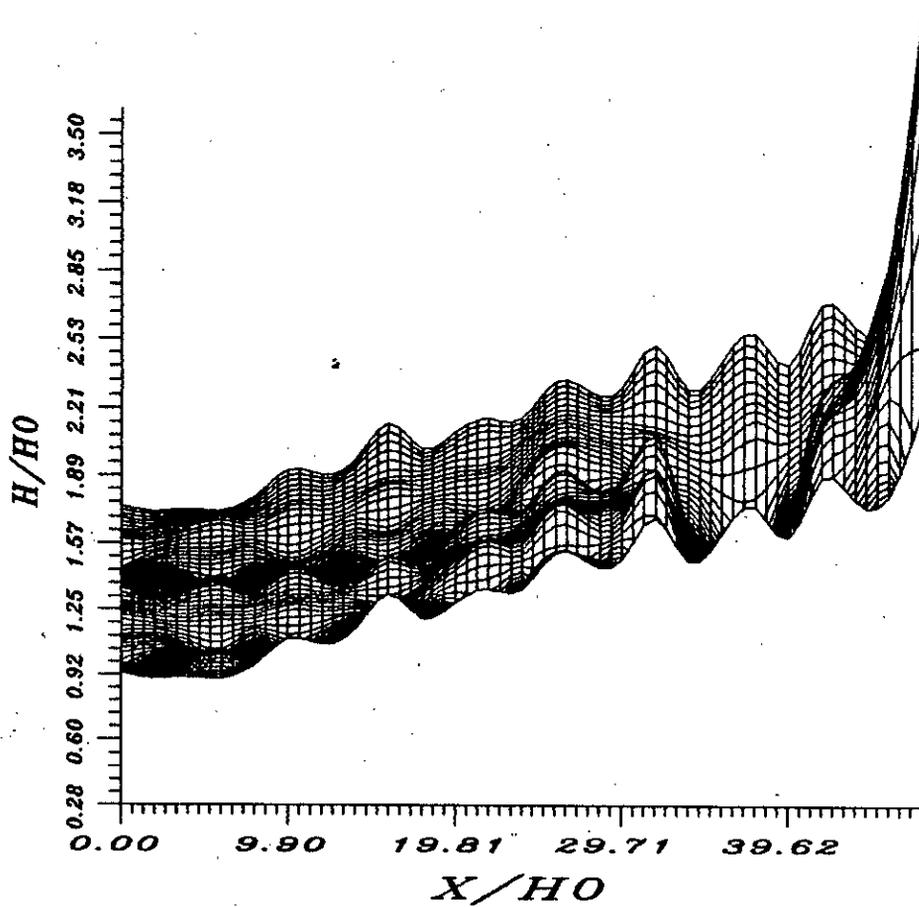


FIG.(R4)

LA LIGNE D'EAU LE LONG DE LA PAROI DANS UN
RETRECISSEMENT RECTILIGNE OU EN FORME
D'ENTONNOIR



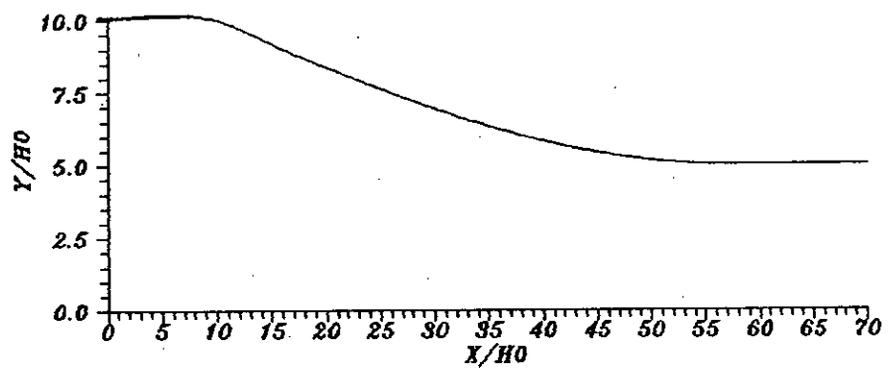


FIG (1.1) RETECISSEMENT EN FORME DE TUYERE

FIG.(1.2)

REPRESENTATION TRIDIMENSIONNELLE
DE LA SURFACE LIBRE DANS UN RETRECISSEMENT
EN FORME DE TUYERE

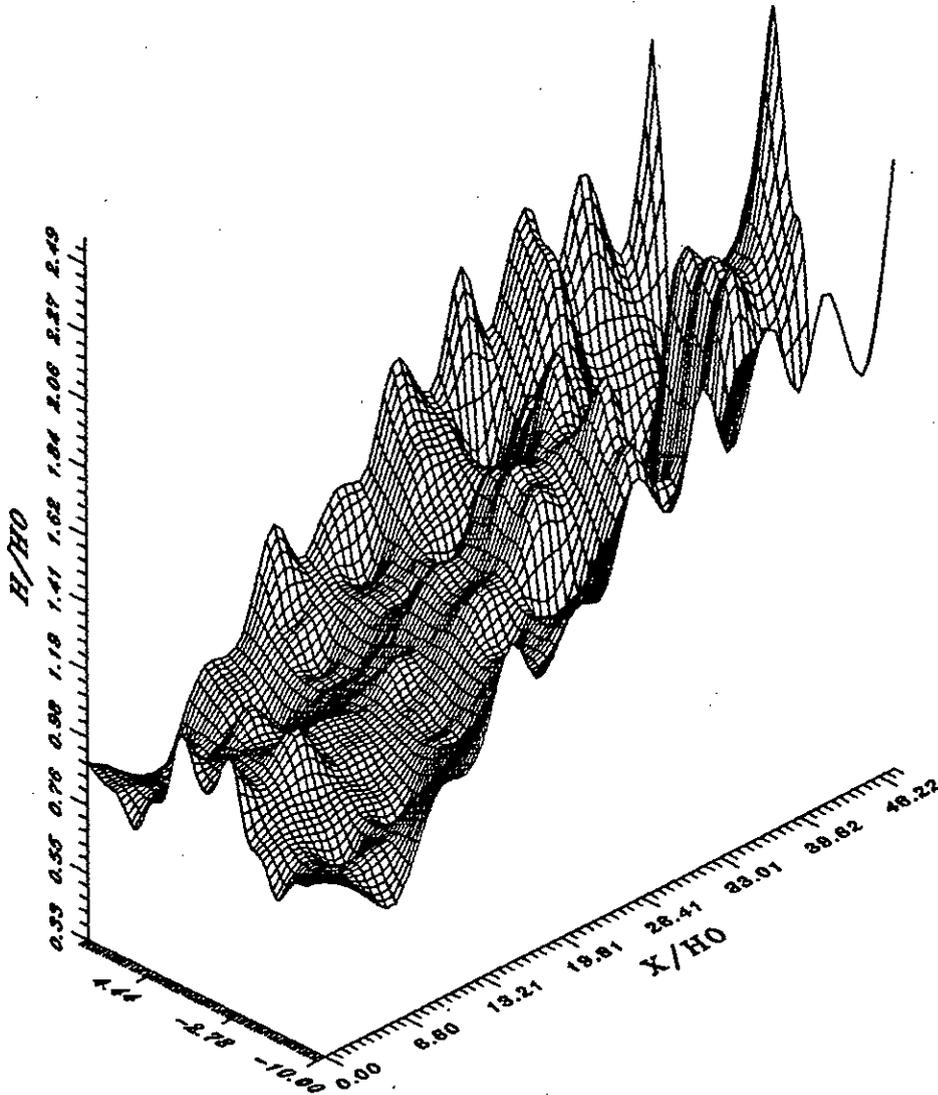


FIG.(T.3)

LA LIGNE D'EAU LE LONG DE L'AXE DE L'ECOULEMENT
DANS UN RETRECISSEMENT EN FORME DE TUYERE

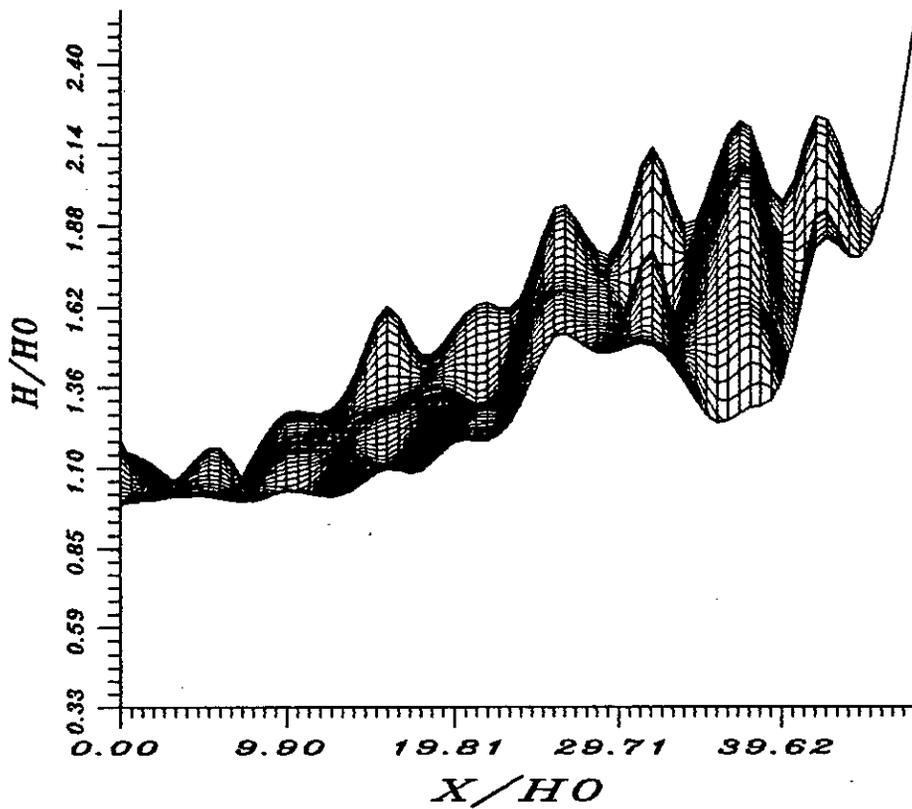
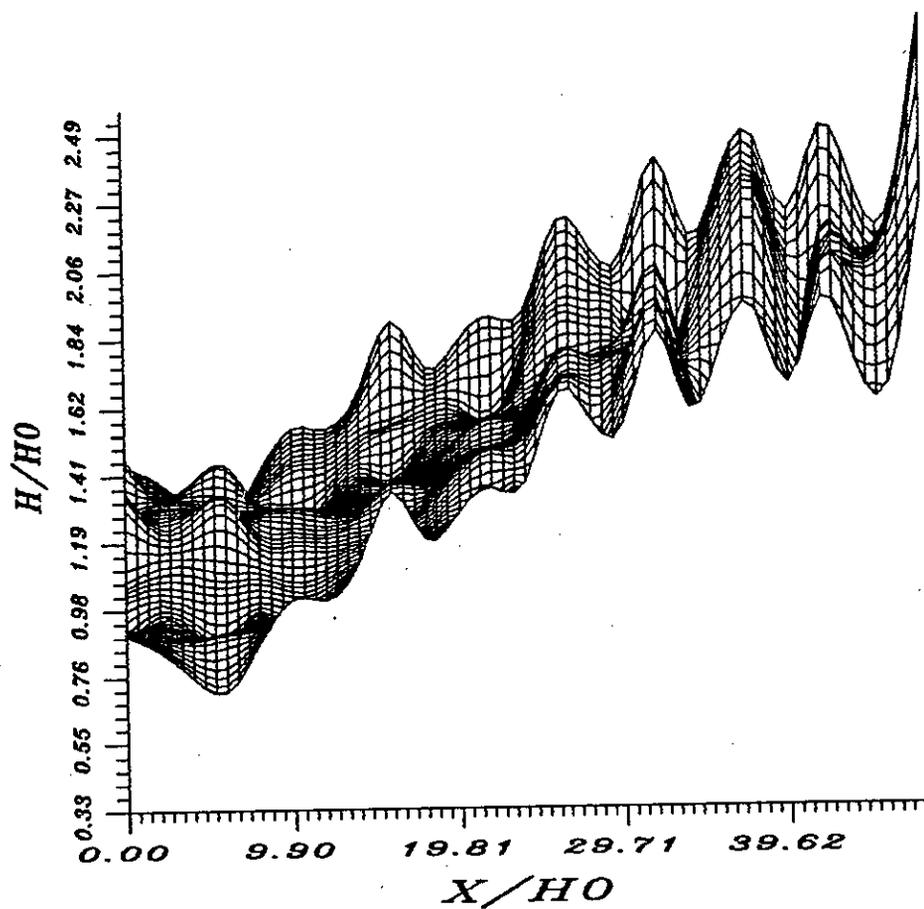


FIG.(T4)

LA LIGNE D'EAU LE LONG DE LA PROI DANS UN RETRECISSEMENT EN FORME DE TUYERE



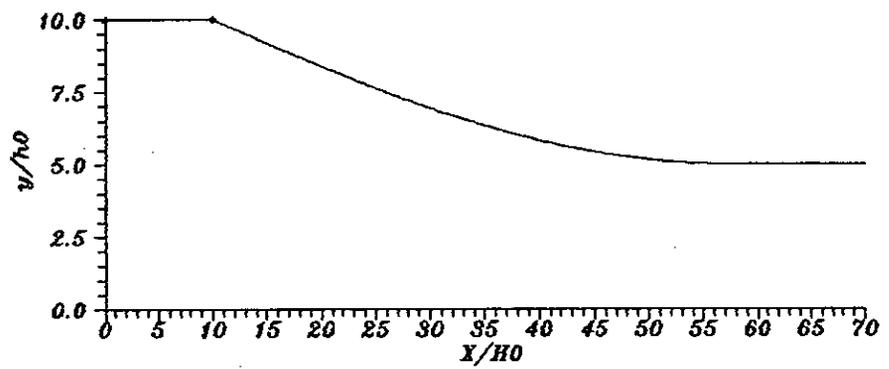


FIG (E.1) RETRECISSEMENT EN FORME D'EVENTAIL

FIG.(E.2)
REPRESENTATION TRIDIMENSIONNELLE
DE LA SURFACE LIBRE DANS UN RETRECISSEMENT EN
FORME D'EVENTAIL

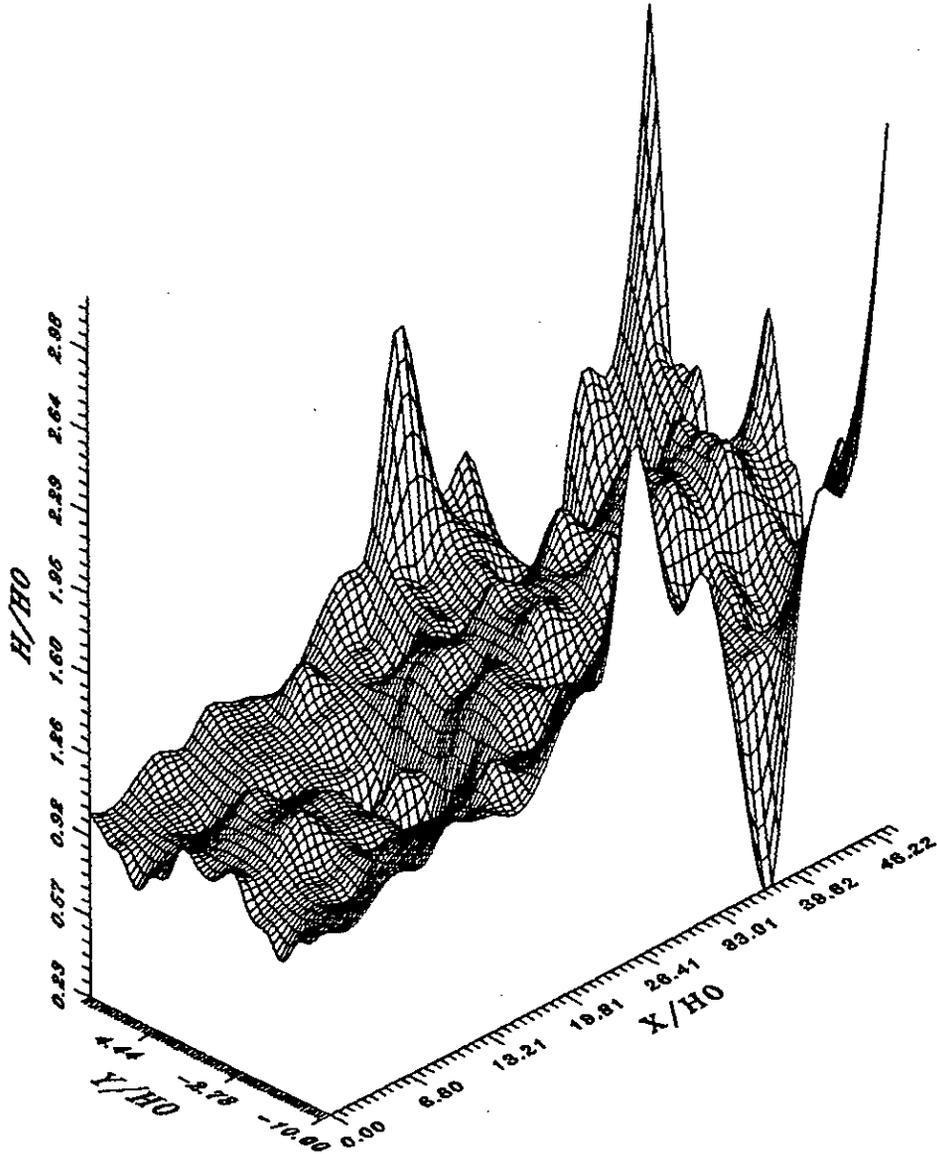


FIG.(E3)

LA LIGNE D'EAU LE LONG DE L'AXE DE L'ECOULEMENT
DANS UN RETRECISSEMENT EN FORME D'EVENTAIL

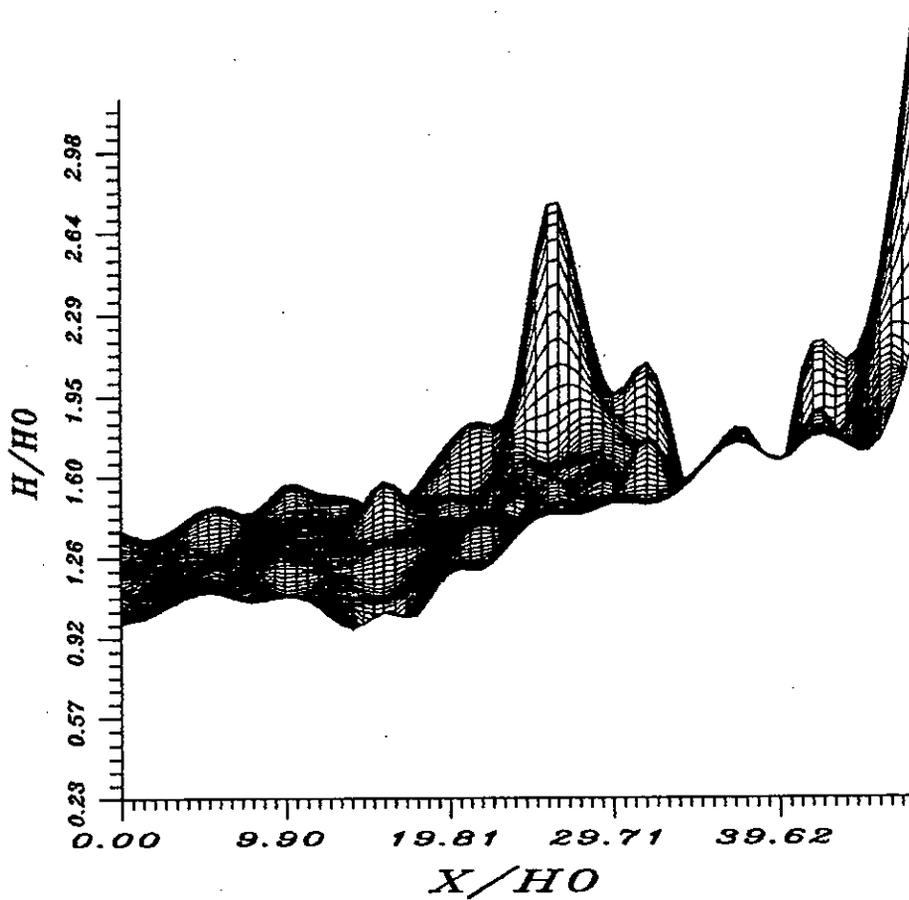
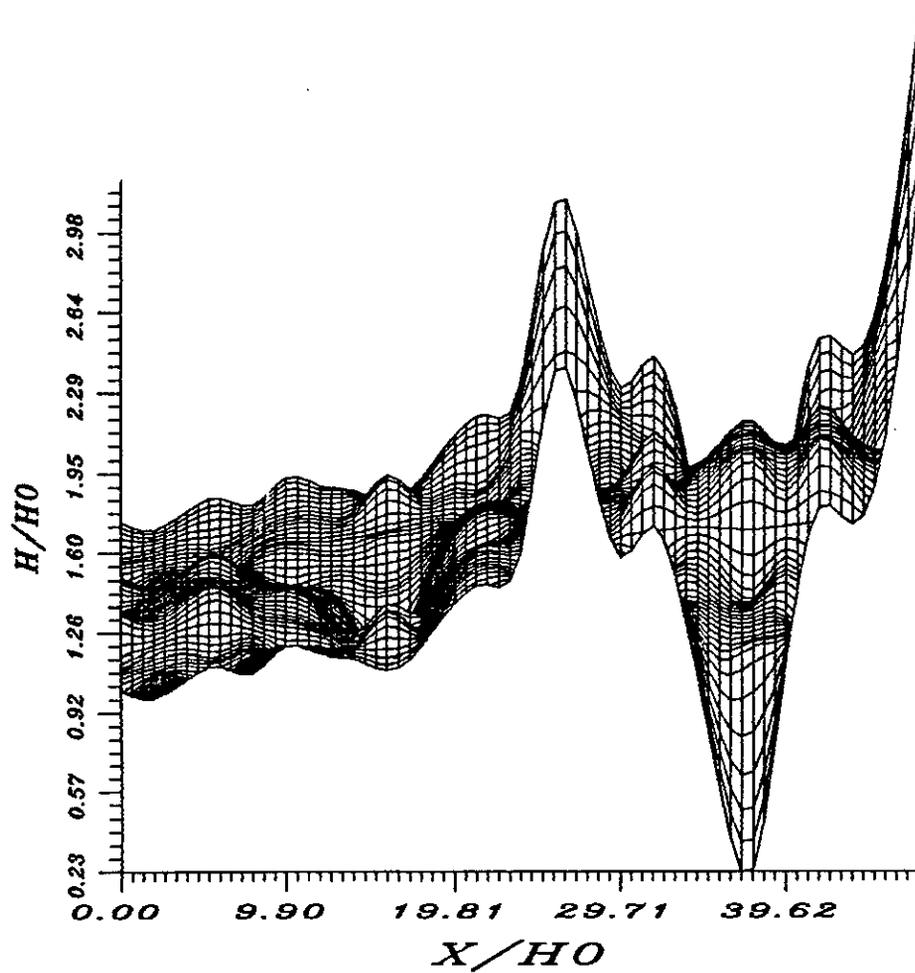
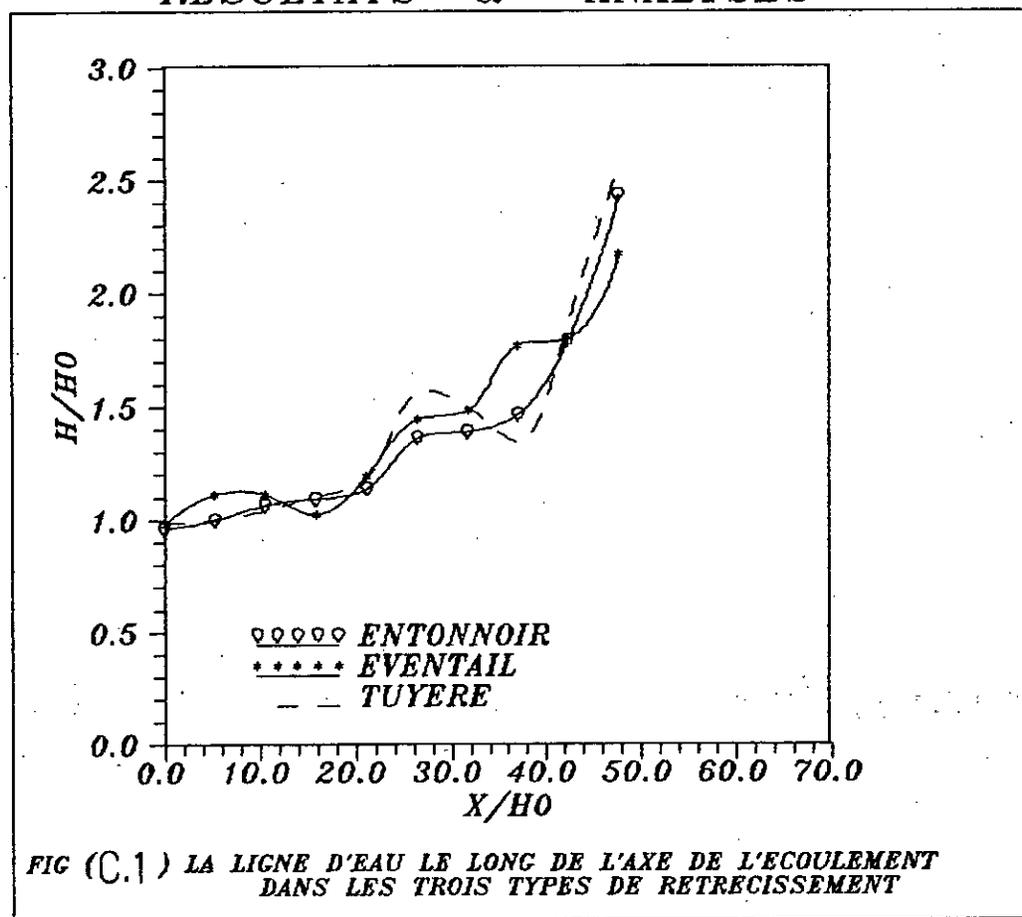


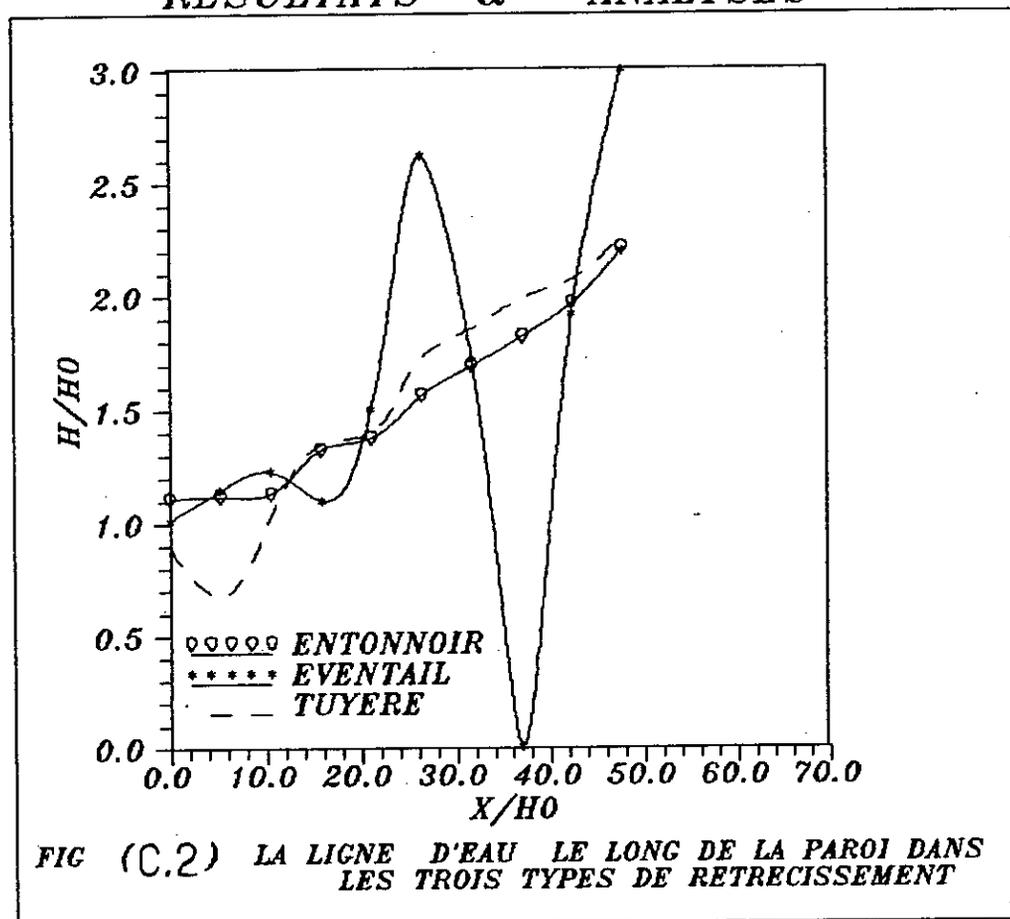
FIG.(E4)
LA LIGNE D'EAU LE LONG DE LA PAROI DANS UN
RETRECISSEMENT EN FORME D'EVANTAIL



RESULTATS & ANALYSES



RESULTATS & ANALYSES



VI.2.4 QUATRIEME PARTIE

"Analyse de l'écoulement supercritique dans un élargissement progressif symétrique"

A/ Présentation de l'application

Dans cette application, nous analysons un écoulement supercritique dans un élargissement progressif, à section transversale rectangulaire, dont les dimensions sont données dans la figure (VI.4)

La forme de l'élargissement est donnée par la formule suivante :

$$b(x) = \frac{b_0}{2} \left[\left(\frac{x}{b_0 F_0} \right)^{1.5} + 1 \right]$$

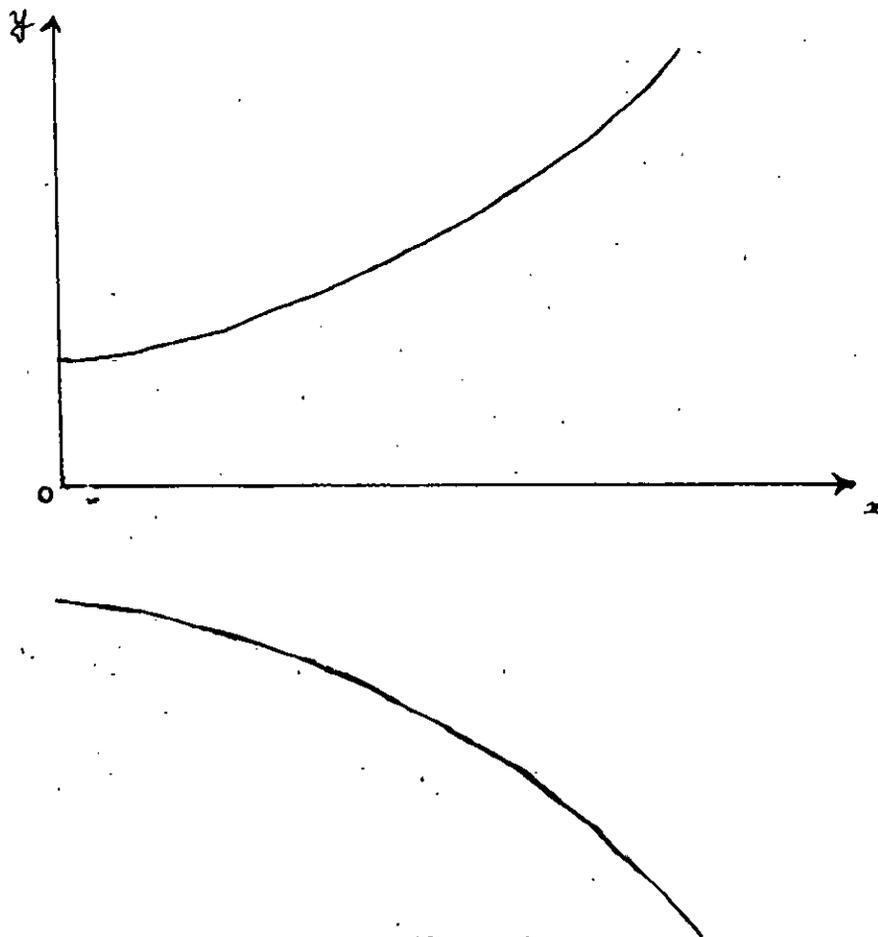


Fig. (VI.4) Elargissement progressif symétrique

Les conditions de l'écoulement étudié dans le canal de la figure (VI.4) sont les suivantes :

- le tirant d'eau à l'amont est $h_0 = 0,0305m$
- le nombre de Froude à l'amont est $F = 2$
- la vitesse transversale à l'amont est $V_0 = 0 m/s$
- le coefficient de Manning est $n = 0,012$
- les pentes de fond sont supposées nulles
- Le rapport profondeur - largeur est $h_0/b_0 = 0,25$
- C.F.L = 0.9

Afin de bien visualiser les résultats, on a opté pour un maillage dont les pas d'espace sont les suivants :

$$D\xi = 0,0305m$$

$$D\eta = 0,0476m$$

Pour le déroulement des calculs, la profondeur $h_0 = 0,0305m$, la vitesse transversale $V_0 = 0 m/s$, et le nombre de Froude, sont considérés comme conditions initiales à l'amont de la transition auxquelles on adopte une allure décroissante de la surface libre aux autres points du maillage.

B/ Résultats et analyses

Les résultats que nous avons obtenus dans cette quatrième application sont illustrés par les figures (D.1) et (D.2), ces dernières représentent respectivement, la ligne d'eau le long de l'axe médian et de la paroi.

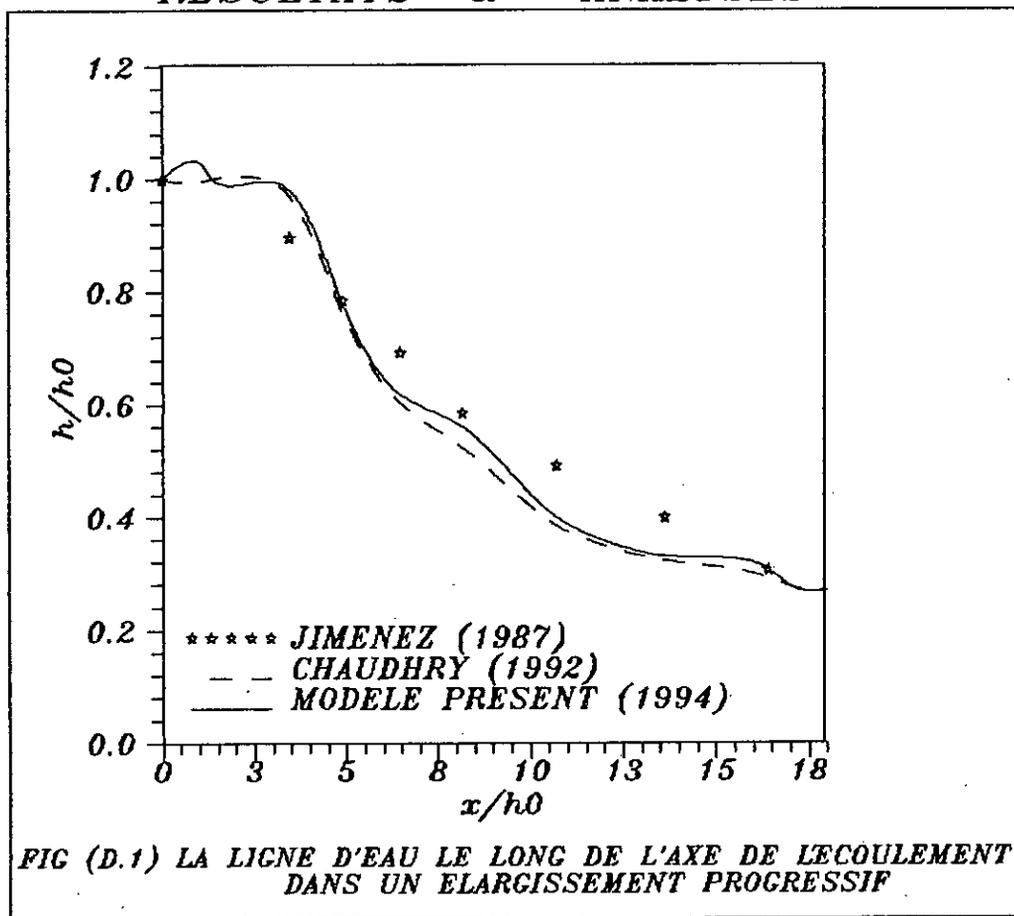
Dans cette dernière partie on remarque que :

Nos résultats sont très proches des résultats expérimentaux, aussi bien au niveau de l'axe médian qu'au niveau de la paroi.

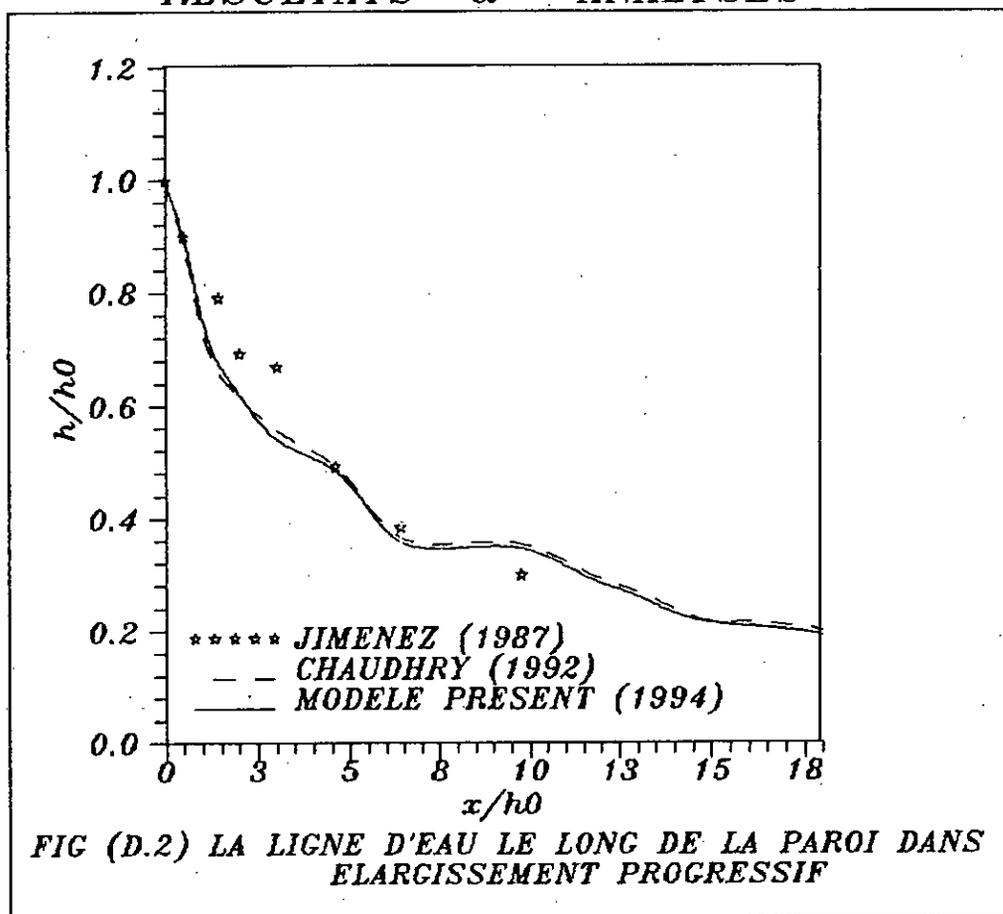
Le choc n'apparaît pas dans le divergent étudié, ce qui justifie l'envergure de notre modèle dans tels cas.

On peut conclure que dans ce cas l'hypothèse de répartition hydrostatique des pressions est satisfaite.

RESULTATS & ANALYSES



RESULTATS & ANALYSES



CONCLUSION

GENERALE

CONCLUSION GENERALE:

Dans le présent travail, nous avons établi un modèle pour modéliser et simuler les phénomènes de diffraction d'un mascaret en régime instationnaire dans les écoulements bidimensionnels à surface libre en zone de transitions.

L'adaptation du schéma non oscillant de second ordre pour la résolution des équations de l'écoulement en régime non stationnaire, nous a permis d'obtenir des résultats à l'état stationnaire.

Les résultats obtenus dans nos applications, justifient l'efficacité de notre modèle pour simuler ce type d'écoulement.

L'envergure de ce modèle revient à la localisation, à la prévision de l'orientation du choc et à l'estimation de sa forme.

Les résultats obtenus le long de l'axe de l'écoulement, et de la paroi "1ere partie" sont pratiquement satisfaisants, bien que l'hypothèse de la distribution hydrostatique des pressions n'est plus valable dans les zones de choc. Dans la "2eme partie" le modèle s'avère satisfaisant en particulier en prenant compte les effets de frottements. De même, son utilisation pour la comparaison des trois types de rétrécissement "3eme partie" a donné des résultats conformes aux cs pratiques.

A ce stade, nous sommes en mesure de prétendre la capacité de notre modèle, pour simuler les écoulements supercritiques dans les zones de transition.

Néanmoins nous comptons toujours la poursuite de cette étude en prenant en compte la réparation non hydrostatique de la pression au voisinage du choc, ou adopter d'autres méthodes numériques de résolutions plus puissantes et plus précises. On peut citer le schéma de Harten, ENO, aec "Subcell résolution"[12], qui a donné des résultats pratiquement concordants avec la solution exacte en gazodynamique On peut citer aussi la méthode des éléments finis:

La méthode des éléments finis a connu depuis quelques dizaines d'années un essor remarquable grâce à l'accroissement de la capacité des ordinateurs.

Tout d'abord confinée à la mécanique des structures, la méthode des éléments finis a été appliquée avec succès à la mécanique des fluides et plus particulièrement à l'hydrodynamique [24]

Il à préciser finalement que ces dernières années voient le développement d'accélérateurs d'algorithmes pour les méthodes numériques en vue de traiter les écoulements 3D: Méthode multi - grilles, méthode par sous - domaine, utilisation des parallélismes, des méthodes sont développées pour certains objectifs comme les méthodes spectrales et le traitement de problèmes de plus en plus complexes comme les équations de Navier - Stécks compressibles avec interaction choc / couche limite.

Malgré ces grands succès, certains problèmes de l'écoulement ne sont toujours pas solubles sur ordinateurs: par exemple le problème de la simulation de la turbulence.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. C. ARMICI
"Le turbo Pascal version IV"
ed. lisa 1986
- [2] A. BERREKSI - A. BOUHADJI - O. BELHADJ
"Simulation et analyse des écoulements bidimensionnels à surface libre en zones de transition."
Thèse d'ingénieur d'état E.N.P. 1993
- [3] M. CARLIER
"Hydraulique générale et appliquée."
Ed. Eyrolles 1972
- [4] M. H. CHAUDHRY - S. M. BHALLAMUDI
"Computation of flows in open channel transitions."
Jour. of hydraulic Research, vol. 30, N° 1, 1992
- [5] V. T. CHOW
"Open channel hydraulics"
Mc Graw Hill Book Co. New York 1959.
- [6] D. EUVRARD
"Résolution numérique des équations aux dérivées partielles, différences finies, éléments finis, méthodes de singularités."
Ed. Masson 1990
- [7] R. J. FENNEMA M. H. CHAUDHRY
"Explicit numerical schemes for unsteady free surface flow with shocks."
Water resources research, vol. 22, N° 13 1986.
- [8] R. GARCIA - R. KAHAWITA
"Numerical solution of the Saint-Venant equations with a Mac Cormack finite difference scheme."
International jour. num. methodes in fluides, vol. 6, 1986

- [9] P. GERMAIN - P. MULLER
"Introduction à la mécanique des milieux continus."
Ed. Masson 1980
- [10] S. GOUDOUNOV - V. RIABENKI
"Schémas aux différences."
Ed. mir 1977, OPU 1987
- [11] H. GUENECHÉ C. SEDES
"Ecoulements unidimensionnels instationnaires."
Ed. Mason 1990
- [12] A. HARTEN
"ENO schemes with subcell resolution"
School of mathematical sciences, Tel-Aviv University.
Department of mathematics university of California
Jour. of computational physics. 1989
- [13] R. H. DEY J.C. BATHURSI R.C. THORNE
"Gravel, bed rivers, fluvial processes, en engineering and management."
- [14] M. HUG
"Mécanique des fluides appliquée aux problèmes d'aménagement et d'énergétique."
Ed. Eyrolles 1975
- [15] O. F. JIMENEZ M. H. CHAUDRY
"Computation of supercritical free surface flow."
Jour. of hydraulic engineering vol. 114, N° 4, April 1988
- [16] M. LECHAA - O. BELHADJ
"Simulation numérique et analyse des problèmes non stationnaire avec discontinuités."
Thèse d'ingénieur d'état E.N.P. 1993
- [17] J. NOUGARO
"Ecoulement à surface libre, étude des régimes non permanents, tome 3."
Ed. Dunod 1970

- [18] J. P. NOUGIER
"Méthodes de calcul numérique."
Ed. mason 1987
- [19] O. SINNIGER W. H. HAGER
"Constructions hydrauliques."
traité de génie civil de l'école polytechnique fédérale de Lausanne 1988
- [20] J. HIEL C. LEGER G. JACQUET
"Turbo initiation à la programmation en Pascal pour Turbo Pascal 4, 5, 6."
Ed. Mason 1992
- [21] J. Y. YANG C. A. HSU S. H. CHANG
"Computation of free surface flows."
Part. 1 : One dimensional dam break flow."
Jour. of hydraulic research, vol. 31, N° 1. 1993
- [22] J. Y. YANG C. A. HSU
"Computation of free surface flows."
Part 2 : Two dimensional unsteady bore diffraction."
Jour. of hydraulic research, vol. 31, N° 3. 1993
- [23] "Shock waves in chutes."
Spillways and recommandations schock waves and Air entrainment."
Review and recommandation C.I.G.B., Bulletin N°81 1992.
- [24] B. ZHANG
"Modélisation d'écoulements à surface libre avec fronts mobiles par éléments finis"
thèse présentée pour l'obtention du grade de docteur de l'université de technologie de Compiegne 1992
- [25] Y. ZECH
"Polycopie cours AR CO 23 SO". 1992

ERRATUM

PAGE	PARAGRAPHE	AU LIEU DE	LIRE
5	1	mathématiques d'Alembert	mathématiques de d'Alembert
6	2	furent reprisent	furent reprises
9	3	sus cité	sus-citée
39	(4.6)	$[(\rho v^2 \Delta x \Delta t)_x - (\rho v^2 \Delta x \Delta t)_{x+\Delta x}]$ $+[(\rho u v \Delta x \Delta t)_y - (\rho u v \Delta x \Delta t)_{y+\Delta y}]$	$[(\rho v^2 \Delta x \Delta t)_y - (\rho v^2 \Delta x \Delta t)_{y+\Delta y}]$ $+[(\rho u v \Delta y \Delta t)_x - (\rho u v \Delta y \Delta t)_{x+\Delta x}]$
42	1	aberantes	aberrantes
57	1	monodimensionnelle	monodimensionnel
		bidimensionnelle	bidimensionnel
58	1	régie	régime
61	4	erreurs de discretion	erreurs de
12	5	Pay play	discrétisation Pipe Line
41		suivant y :	suivant y : $((\rho v h \Delta x \Delta y)_t - (\rho v h \Delta x \Delta y)_{t+\Delta t}) =$
106	7	Facteur ... néanmoins,	(facteur... civil).
126	5	cs	Néanmoins,...
	7	dec	cas
			avec
127	2	Il a'	Il est à'

① Domaine d'application

← gas chromatography → exp.
merg.

intromiscence

bidimensionnel

Dimensionnement ↔ caract.

Amatiscat de ce intromiscence

HYDRODYNAMICA,



RESUME

Les problèmes de diffraction d'un mascaret traversant des structures singulières (convergents, divergents) sont simulés par des schémas d'ordre élevé non oscillants.

Après, avoir obtenu les équations de Saint-Venant bidimensionnelles par modélisation mathématique du problème, un schéma Splitting de type Strang a été choisi pour la résolution.

Les résultats obtenus par expérimentation numérique montrent que la diffraction d'ondes hydrauliques instationnaires peut être calculée avec précision par la présente méthode en prenant en compte divers types de réflexion, de collision entre ondes et interactions qui en résultent.

MOTS CLES

*Écoulement 2D *Instationnaire *ondes *Saint-Venant
*Modélisation *Différences finies