

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

الدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT *HYDRAULIQUE*

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ANALYSE D'UN ECOULEMENT
EN CHARGE NON STATIONNAIRE
PAR LA METHODE DES
CARACTERISTIQUES : WATERHAMMER

Proposé par :

M.O.BELHADJ

Etudié par :

MM. S.ALILI

K.BESSACI

Dirigé par

M. O.BELHADJ

Melle.S.BENMAMAR

PROMOTION

1993

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT *HYDRAULIQUE*

المدسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ANALYSE D'UN ECOULEMENT
EN CHARGE NON STATIONNAIRE
PAR LA METHODE DES
CARACTERISTIQUES : WATERHAMMER

Proposé par :

M.O.BELHADJ

Etudié par :

**MM. S.ALILI
K.BESSACI**

Dirigé par

**M. O.BELHADJ
Melle.S.BENMAMAR**

PROMOTION

1993

DEDICACES

A

MA MERE

MON PERE

MES FRERES ET SOEURS

SALEM

MES COUSINS , MES ONCLES

TOUT MES AMIS

JE DEDIE CE TRAVAIL

Kamel

A

MA MERE , MON PERE

MES SOEURS ET FRERES

MES GRANDS PARENTS

MES NEVEUX, ANIS ET MOHAMED

MES ONCLES MATERNELS ET PATERNELS

KAMEL

TOUT LES AMIS

JE DEDIE CE MEMOIRE

SALEM

REMERCIEMENTS

Cette thèse a été effectuée sous la direction de M O.BELHADJ et de Mlle BENMAMAR qui voudrions bien y trouver l'hommage de notre profonde reconnaissance.

Elle est le fruit d'une formation assez complète en hydraulique.

Il nous est nécessaire pour mener à bien cette tâche de collaborer avec certains enseignants du département, c'est pour nous un agréable devoir de les remercier.

Nous remercions également le président et les membres du jury qui nous feront l'honneur de juger cette thèse.

Enfin nous remercions MM BOUDA et DJAOUI pour l'aide amicale et efficace qu'ils nous ont apportés.

S O M M A I R E

	PAGE
HISTORIQUE.	
INTRODUCTION.	
CHAPITRE I	GENERALITES
I-INTRODUCTION	
a-Ecoulement permanent.	1
b-Ecoulement uniforme.	1
c-Ecoulement transitoire	1
II-ONDES LINEAIRES ET ONDES NON LINEAIRES	
a-Ondes linéaires	2
b-Ondes non lineaires	2
III-EQUATIONS DES PERTES DE CHARGE	
1-Pertes de charge linéaires	3
2-Pertes de charge singulières	3
3-Equation d'état du fluide	4
CHAPITRE II	ANALYSE DU COUP DE BELIER
I-DEFINITION	5
II-DESCRIPTION PHYSIQUE DU COUP DE BELIER.	5
III-EFFETS DU COUP DE BELIER	8
a- Fermeture rapide	8
b- Fermeture lente	8
c- Ouverture rapide	12
IV-ENNUIS CAUSES PAR LE COUP DE BELIER.	15
V-EFFET BENEFIQUE DU COUP DE BELIER	16
CHAPITRE III	MODELE MATHEMATIQUE
I-INTRDUCTION	18
II-HYPOTHESES.	18
III-EQUATION DU MOUVEMENT REGISSANT LE COUP DE BELIER.	19

CHAPITRE VII ANALYSE DES RESULTATS

I-ANALYSE D'UNE FERMETURE BRUSQUE DE LA VANNE	64
a- Influence des pertes de charge sur le coup de belier	65
b-Influence du materiau sur le coup de belier	68
c-Influence de l'epaisseur sur le coup de balier	70
d-Influence du regime d'ecoulement	72
II-ANALYSE D'UNE FERMETURE LENTE DE LA VANNE	74
a-Influence de la loi de fermeture de la vanne	76
b-Influence du temps de manoeuvre	78
c-Loi de variation du coup de b6lier en fonction du temps de manoeuvre	80
III-ANALYSE DU COUP DE BELIER POUR L'ARRET BRUSQUE D'UNE POMPE	82

CHAPITRE VIII SYSTEMES DE PROTECTION

INTRODUCTION	84
I-ANTIBELIERS SPECIFIQUES	84
II-ANTIBELIERS NON SPECIFIQUES	84
1-Soupapes de decharge	85
2-Ventouses	85
3-Syst6me en ligne	86
4-R6servoir antib6lier	86
III-APPLICATION	
1-Application pour la conduite de distribution de MEDEA	87
2-Application pour la pompe 6tudi6e	89

CONCLUSION GENERALE

HISTORIQUE

"L'hydraulique est une science aussi ancienne que la civilisation humaine puisqu'elle commande toutes les utilisations de l'eau."

On possède de nombreux témoignages sur l'existence d'ouvrages hydrauliques, datants de la préhistoire, en effet:

- Les khanats (galeries souterraines de captage de nappes) datants de 4000 ans avant J-C.

- Les Norias: Ce sont des machines qui font monter l'eau. Celles-ci étant actionnées au début par l'homme puis par l'animal.

- Les roues apparurent en Egypte sous leurs formes primitives.

On notera que toutes ces créations n'ont aucun but scientifique mais seulement allégé le moyen de transport d'eau vers l'utilisateur et le consommateur. Ce désintérêt du côté scientifique de l'hydraulique retarda celle-ci dans son développement jusqu'à la venue de la méthode expérimentale.

L'une des figures les plus marquantes de cette époque est Leonard de Vinci, et ce n'est qu'à ce moment là que l'on commença à apprécier l'eau sous toutes ces formes. On est alors amené à chercher les équations régissant le mouvement de l'eau surtout après le développement des mathématiques au 18^{ème} et 19^{ème} siècle.

Parmi les équations établies on citera entre autre la loi de Chézy, l'équation de pertes de charge de Julius-Weisbach et la loi de Poiseuille.

Au début de ce siècle, la contribution principale ne tient pas compte tant de nouvelles découvertes que dans la vérification, c'est pour cela que l'on commença à agrandir les laboratoires on y introduisant des modèles réduits d'ouvrages hydrauliques (barrages, canaux, déversoirs).

Actuellement, l'hydraulique tend ses frontières au delà du cadre traditionnel, par la mise en œuvre de la méthode d'analyse basée sur l'hypothèse du mouvement irrotationnel, l'étude des champs bidimensionnels par les réseaux de lignes équipotentielles et l'utilisation de la méthode d'analogie électrique.

Il faut signaler enfin que la plupart des problèmes rencontrés aujourd'hui en hydraulique ne dépendent que de simples procédés de mesures.

INTRODUCTION

L'objet de notre thèse a pour but la contribution à l'analyse du phénomène transitoire en l'occurrence le coup de bélier dans une conduite quelconque dotée d'un réservoir à niveau constant dans le temps à son extrémité amont, et d'un organe de régulation de débit à son extrémité aval: c'est une installation typique soit de l'eau potable soit d'une centrale hydraulique.

L'analyse porte un grand intérêt étant donné qu'en pratique le régime d'écoulement provoqué par les manoeuvres de l'organe de régulation placé dans une conduite, occasionne des effets nocifs caractérisés par les phénomènes de surpression pour les canalisations telle que la fatigue et la fissuration.

Dans ces circonstances, nous sommes appelés à analyser le coup de bélier en variant des paramètres caractérisant les conduites et l'écoulement.

Ainsi pour aborder l'analyse du coup de bélier, il est nécessaire de définir quelques notions très importantes pour décrire ce phénomène. Des généralités sur ces notions seront traités au chapitre (I).

Le deuxième chapitre sera consacré à l'étude générale de la propagation des ondes du coup de bélier dans les fluides compressibles. Nous détaillerons en particulier l'évolution de celui ci dans le temps. Nous analyserons aussi le phénomène lors de l'ouverture et de la fermeture de la vanne.

Dans le troisième chapitre de notre thèse nous présenterons les équations différentielles régissant le coup de bélier. Aussi pour assurer la résolution en toute généralités, il est nécessaire de recourir à des méthodes numériques que nous présenterons brièvement.

Dans le quatrième chapitre nous exposerons la méthode des caractéristiques avec son application aux équations de SAINT VENANT pour en déterminer enfin un système d'équations discrétisés permettant la résolution de ces équations.

Celles-ci ne peuvent être résolues sans l'apport de conditions aux limites que nous traiterons au chapitre (V).

Une fois ces dernières connues, il ne reste que la programmation des équations. Le programme établi sera expliqué et détaillé au chapitre (VI).

Dans le chapitre (VII), nous analyserons les différents résultats obtenus après application du programme élaboré au chapitre (VI).

Enfin, nous exposerons dans le chapitre (VIII), les différents systèmes de protections avec leurs applications.

GENERALITES

I-INTRODUCTION:

Dans ce chapitre, nous allons définir quelques types d'écoulement que l'on rencontrera au cours de notre travail. Nous allons ensuite présenter et définir les différents types d'ondes, enfin nous donnerons les expressions des pertes de charge.

1-Ecoulement permanent:

un écoulement est dit permanent lorsque les propriétés du fluide et les caractéristiques du mouvement de celui-ci restent inchangées dans le temps, c'est à dire :

$$\frac{\delta v}{\delta t} = 0, \quad \frac{\delta p}{\delta t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\delta \rho}{\delta t} = 0$$

2-Ecoulement uniforme:

Un écoulement est dit uniforme lorsqu'à un instant donné, la vitesse du fluide a même direction sens et intensité en tout point de ce fluide.

3-Ecoulement transitoire:

L'écoulement est dit transitoire lorsque les paramètres hydrauliques à savoir la vitesse, la pression et les propriétés du fluide sont des fonctions du temps et de l'espace.

$$V = V(x,t) \quad \text{et} \quad P = P(x,t)$$

Ce phénomène transitoire peut se manifester soit dans un canal à ciel ouvert ou bien dans une conduite en charge.

On pourra citer quelques exemples d'écoulements transitoire dans le cas d'une conduite en charge:

- Ecoulement dans les machines hydrauliques.
- Phénomène du coup de bélier.

Dans le cadre de notre analyse, nous nous intéresserons uniquement au phénomène du coup de bélier. Celui-ci peut être visualiser à partir des écoulements variés constitués par des ondes de translation positives et négatives engendrées par une manoeuvre d'un organe de distribution, placé dans une conduite.

D'après COURANT et FRIEDRICH, nous distinguons deux types d'ondes.

- Les ondes linéaires ou sonores.
- Les ondes non linéaires.

II-ONDES LINEAIRES ET ONDES NON LINEAIRES:

1-Ondes linéaires:

Du point de vue physique, les ondes linéaires sont celles qui se propagent dans le fluide sans modifier les propriétés physiques locales (compressibilité, masse spécifique, conductivité viscosité,....).

Ce sont donc des ondes qui se propagent avec une célérité définie par les conditions hydrauliques du régime permanent qui règne avant le passage de cette onde linéaire.

Parmi ces types d'ondes nous citerons:

- Les ondes de son.
- Les ondes de lumière.
- Les ondes électromagnétiques.

2-Ondes non linéaires:

Les ondes non linéaires sont celles qui après leurs passages dans un milieu donné, provoquent des changements dans les propriétés physiques de ce milieu.

La célérité de propagation de ces ondes ne serait indépendante de l'amplitude de celles-ci, et donc elle ne serait plus définie par la seule connaissance du régime permanent initial.

Les ondes de choc positives sont un exemple d'ondes non linéaires. Les discontinuités que constituent les manoeuvres rapides sont encore un exemple d'ondes non linéaires. Elles séparent l'écoulement en deux régions de pressions, de masses spécifiques et de vitesses d'écoulement différentes.

Ces discontinuités vont soit disparaître en se propageant continuellement, soit se maintenir et se propager sous forme d'ondes de choc positives, ceux-ci dépendent essentiellement des pertes de charges qu'on définira ci-dessous.

III- EQUATION DES PERTES DE CHARGE :

Les équations des pertes de charge en régime transitoire seront calculées de la même manière qu'en régime permanent. Cette hypothèse est due à la complexité du phénomène transitoire A.I.R.H [].

Parmi les multitudes de formules existantes, celle de DARCY-WEISBACH nous paraît la plus simple.

1-PERTES DE CHARGE LINEAIRES :

Les pertes de charge linéaires ont lieu au cours du mouvement du fluide dans la conduite, l'expression qui définit celles-ci s'écrit :

$$H_l = \frac{f.L.V^2}{2.g.D}$$

où

- H_l : pertes de charge dans la conduite (m).
- L : longueur de la conduite (m).
- f : coefficient de pertes de charge linéaires.
- D : diamètre de la conduite (m).
- V : vitesse moyenne dans la conduite (m/s).
- g : accélération de la pesanteur (m/s²).

2-PERTES DE CHARGE SINGULIERES :

Ces pertes se produisent lorsqu'on a un changement des caractéristiques de la conduite, elles s'expriment comme suit:

$$H_s = \frac{k.V^2}{2.g}$$

où H_s : pertes de charge singulières.

k : coefficient de pertes de charge singulières.

3-EQUATION D'ETAT DU FLUIDE :

L'équation d'état du fluide liant la masse spécifique (ρ) du fluide au temps (t) c'est à dire la compressibilité du fluide et celle de l'élasticité des parois de la conduite peuvent être exprimées respectivement d'après la lois de HOOK par :

$$\beta = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{1}{A} \frac{dA}{dt}$$

où ρ : masse volumique du fluide (Kg/m³).

A : section de la conduite (m²).

t : temps (s).

PHENOMENE DU COUP DE BELIER

I-DEFINITION :

On appelle coup de béliet toute variation subite de la pression qui se produit en cas de variation importante mais souvent rapide du débit.

II-DESCRIPTION PHYSIQUE DU COUP DE BELIER :

Soit une conduite de longueur (L) et de diamètre (D) dont laquelle circule un débit (Q), comme l'indique la figure ci dessous.

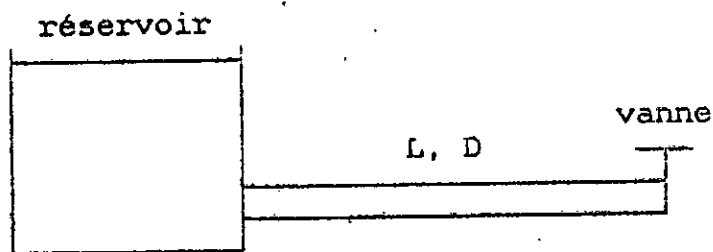


Fig a

Interrompons l'écoulement au moyen d'une vanne placée à l'extrémité aval de la conduite. La vitesse des particules liquides qui initialement était (V_0) s'annule du fait que ces particules viennent buter contre cette vanne.

Ceci a pour conséquence que toute l'énergie cinétique du liquide se transforme en travail de déformation de la conduite (dilatation des parois) et de compressibilité du liquide.

Au droit de la vanne la pression devient alors ($P+dP$) où (dP) est l'augmentation de la pression. Il est clair que les particules qui suivent immédiatement celles qui se sont immobilisées sont stoppées à leurs tours et ainsi de suite.

Au niveau de la vanne, genere donc une onde de surpression qui se propage avec une celerité "C" vers le reservoir (fig 1, page 7).

Une fois que toute les particules du liquide se sont immobilisées dans la conduite, et que cette dernière soit complètement dilatée, la pression sera donc $(P+dP)$ le long de la conduite, supérieur à celle régnant dans le reservoir.

Comme cet état n'est pas un état d'équilibre, on enregistre un écoulement du liquide de la conduite vers l'intérieur du reservoir, vidant ainsi cette conduite (fig 2, page 7).

La vitesse d'écoulement reste toujours égale à (V_0) , mais de signe contraire, la section de la conduite tend à reprendre son état initial, on constate alors un déplacement de la section (n-n) du reservoir vers la vanne. Des que celle-ci atteint la vanne la conduite retrouve son diamètre initial.

Comme le liquide continue toujours à s'écouler de la conduite vers le reservoir, celui-ci tend à se décoller de la vanne tout en produisant un abaissement de pression de $(-dP)$.

L'onde de dépression générée se propagera alors de la vanne vers le reservoir (fig 3, page 7).

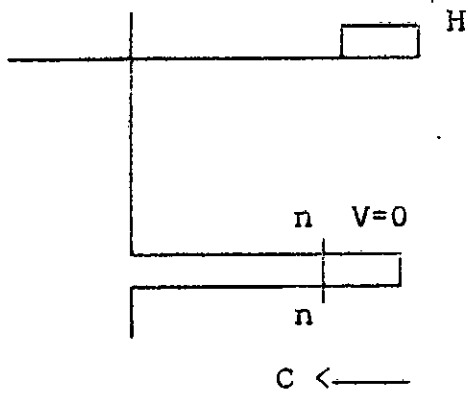
Une fois que cette onde atteint ce dernier, la conduite est complètement dilatée sous une pression de $(P-dP)$ inférieure à celle du reservoir qui est maintenue constante et égale à (P) .

Dès lors le liquide s'écoulera du reservoir vers la vanne, on assiste ainsi au remplissage de la conduite tout en augmentant la pression dans celle-ci de $(P - dP)$ à (P) (fig 4, page 7), à ce moment, la vitesse du liquide sera égale à (V_0) .

Une fois la dépression complètement supprimée, la conduite se retrouvera dans les mêmes conditions que celles qui existaient juste à la fermeture. Alors le phénomène se reproduira théoriquement à l'infini.

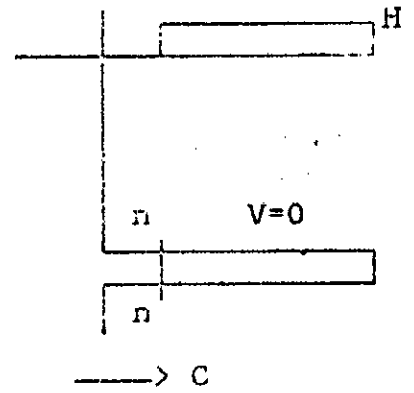
En réalité, l'amortissement du phénomène est causé par les frottements entre liquide-liquide, liquide-paroi et par dissipation d'une partie de l'énergie du liquide dans le reservoir.

On conçoit intuitivement que les perturbations occasionnées par une manoeuvre ou un incident sur une installation aient des résultats différents suivant que l'onde qui les transmet a ou non le temps de revenir au point où elle se produit, il est donc logique de considérer de ce point de vue deux sortes de perturbations.



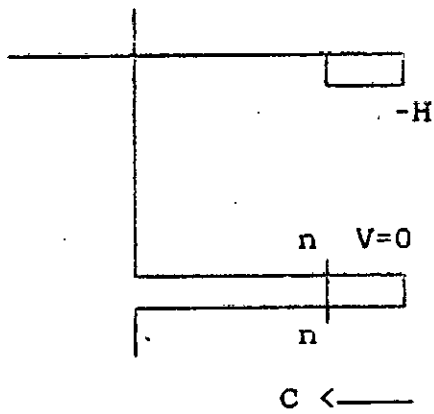
$$0 < t \leq L/C$$

FIG (1)



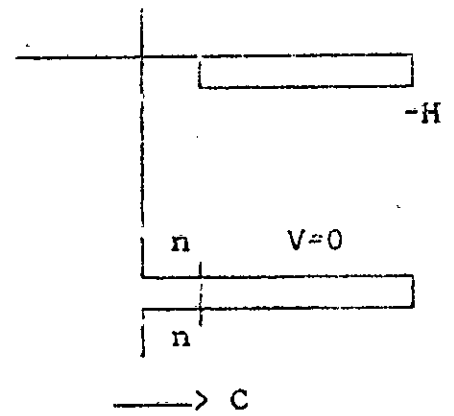
$$L/C < t \leq 2L/C$$

FIG (2)



$$2L/C < t \leq 3L/C$$

FIG (3)



$$3L/C < t \leq 4L/C$$

FIG (4)

III-EFFETS DU COUP DE BELIER :a- Ferméture rapide :

C'est une perturbation dont la durée d'évolution (T) est inférieure au temps d'aller retour de l'onde, le long de la conduite de longueur (L)

$$T \leq 2.L/C$$

On démontre que la surpression (Δp) produite par une fermeture rapide ne dépend pas de la longueur de la conduite. Si la fermeture est totale, en appelant (V_0) la vitesse initiale moyenne du liquide la surpression maximale par la formule de Michaud a pour valeur

$$H_{\max} = \frac{C.V_0}{g}$$

C : Célérité de l'onde (m/s)

b- Ferméture lente :

C'est une perturbation dont la durée d'évolution (T) est supérieure au temps d'aller retour de l'onde

$$T > 2.L/C$$

Dans ce qui suit, nous présenterons uniquement des conduites cylindriques, longues susceptible de réfléchir les ondes. Nous ne prendrons en compte que les manoeuvres de fermeture (fermeture de la vanne, arrêt d'une pompe) se produisant à l'extrémité de la conduite.

Considérons une conduite rigide de longueur (L) dans laquelle s'écoule un fluide incompressible, à l'aval de cette conduite se trouve une vanne.

Supposons lors de la fermeture de la vanne, que la section de cette dernière varie suivant la loi :

$$A_e = A_0.f(t)$$

où A_0 : section de la vanne quand elle est ouverte.

$f(t)$: une fonction du temps.

Le débit traversant la vanne à tout instant t est :

$$Q_t = A_e \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_n}$$

avec

Q_t : débit à travers la vanne.
 H_n : charge juste avant la vanne.

divisons l'expression précédente par A (section de la conduite), il vient :

$$V_t = \frac{A_e}{A} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_n}$$

La dérivation de V_t par rapport au temps donne :

$$\frac{dV_t}{dt} = \frac{dA_e}{dt} \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot H_n}}{A} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot g}}{\sqrt{H_n}} \cdot \frac{A_e}{A} \cdot \frac{dH_n}{dt}$$

or

$$H_o - H_n - \frac{f \cdot L \cdot V^2}{2 \cdot g \cdot D} = \frac{L}{g} \cdot \frac{dV_t}{dt}$$

Voir ouverture rapide.

H_o : étant la charge au réservoir

donc :

$$\frac{dH_n}{dt} = \frac{r \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_n}}{L \cdot f(t)} \cdot \left[H_o - H_n - \frac{f \cdot L \cdot V^2}{2 \cdot g \cdot D} \right] - \frac{2 \cdot H_n}{f(t)} \cdot \frac{d}{dt} \cdot f(t)$$

où

$$r = A/A_o$$

Multiplions cette dernière équation par $f(t)$

$$f(t) \cdot \frac{dH_n}{dt} = \frac{r \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_n}}{L} \cdot \left[H_0 - H_n - \frac{f \cdot L \cdot V^2}{2 \cdot g \cdot D} \right] - 2 \cdot H_n \cdot \frac{d}{dt} \cdot f(t)$$

.....(II.5)

Si la charge maximale survient lorsque la vanne est totalement fermée alors ($V_t = 0$), le terme des frottements n'existera plus .

Si la charge maximale intervient au moment où la vanne n'est pas complètement fermée alors la vitesse ($V_t < 0$) quand ($dH_n/dt = 0$)

Si la pression monte et atteint sa valeur maximale a l'instant de fermeture de la vanne, alors ($f(t) \cdot dH_n/dt = 0$) quand la vanne est fermée.

L'expression ($f(t) \cdot dH_n/dt = 0$) nous définit la plus grande valeur, ainsi l'équation (II.5) établie devient

$$\frac{r \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_n}}{L \cdot f(t)} \cdot \left[H_0 - H_n - \frac{f \cdot L \cdot V^2}{2 \cdot g \cdot D} \right] - \frac{2 \cdot H_n}{f(t)} \cdot \frac{d}{dt} \cdot f(t) = 0$$

.....(II.6)

avec

$$H_n = H_{max}$$

en négligeant les pertes de charge on a : $f = 0$

Elevons au carré équation (II.6) on a :

$$(r^2/L^2) \cdot 2 \cdot g \cdot H_{max} \cdot (H_0 - H_{max})^2 = 4 \cdot H_{max}^2 \cdot \left[\frac{d}{dt} \cdot f(t) \right]^2$$

après développement, on a :

$$\left[\frac{H_{max}}{H_0} \right]^2 - \left[2 + \frac{2 \cdot (L \cdot df(t)/dt)^2}{g \cdot r^2 \cdot H_0} \right] \cdot \frac{H_{max}}{H_0} + 1 = 0 \quad (II.7)$$

Cette équation (II.7) est du second degré en H_{max}/H_0

Posons

$$\frac{2.(L.df(t)/dt)^2}{g.r^2.Ho} = k^2$$

La solution de l'équation (II.7) est :

$$\frac{H_{max}}{Ho} = 1 + k^2/2 + k^2.\sqrt{1/4 + 1/k^2} \quad (II.8)$$

Preons comme exemple une fermeture linéaire de la vanne

$$f(t) = 1 - t/T_m$$

T_m : temps de fermeture de la vanne

en dérivant par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt}.f(t) = - 1/T_m$$

il vient :

$$k^2 = \frac{2.L^2}{T_m^2.r^2.g.Ho} = \frac{2.g.Ho}{r^2} \cdot \frac{L^2}{T_m^2.g^2.Ho^2}$$

comme $V^2_o = \frac{2.g.Ho}{r^2}$ V_o : vitesse d'écoulement en état permanent, avant la fermeture

$$d'où \quad k = \frac{V_o.L}{g.Ho.T_m}$$

Il est donc simple actuellement d'évaluer H_{max}/Ho

D'après STREETER [] et FOX [], la loi de fermeture la plus utilisée en pratique (à défaut d'une loi expérimentale) a la forme suivante :

$$\tau = (1 - t/T_m)^b$$

où b : est une constante propre à la vanne considérée.

avec

$\tau = 1$ pour une ouverture complète de la vanne

$\tau = 0$ pour une fermeture complète de la vanne

et

Les valeurs de b les plus usuelles sont : $b = 1,4$ à $1,6$

c- Ouverture rapide d'une vanne

Considérons une conduite rigide de longueur (L) dans laquelle s'écoule un fluide incompressible, à l'aval de cette conduite se trouve une vanne, tandis qu'à l'amont se trouve un réservoir.

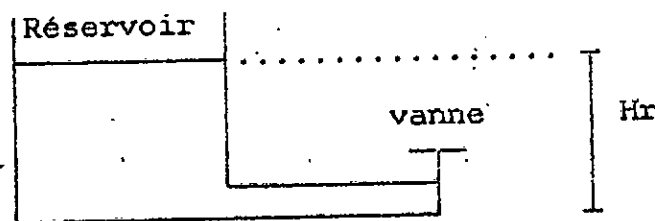


Fig 5

Soit (dH_i) la surpression à la vanne. Quand la vanne est totalement ouverte, la pression absolue au niveau de celle-ci est nulle tandis qu'à l'amont (réservoir) elle est de H_r .

Par conséquent,

$$dH_i = 0 - H_r$$

(II.1)

si les frottements ne sont pas présents.

Comme les frottements existent toujours, la pression H_r doit être réduite de H_f .

$$dH_i = H_f - H_r$$

(II.2)

où

H_f : est la perte de charge par frottement dont l'expression est :

Pour les pertes linéaires :

$$H_l = \frac{f.L.V^2}{2.g.D}$$

Pour les pertes locales (singulières):

$$H_s = k. \frac{V^2}{2.g}$$

L'équation (II.2) devient :

$$dH_i = - \left[H_r - \frac{f.L.V^2}{2.g.D} - k. \frac{V^2}{2.g} \right] \quad (II.3)$$

Comme $dp = -\rho.L. \frac{dV}{dt} = \rho.g.dH_i$

Alors $dH_i = - \frac{L}{g} \cdot \frac{dV}{dt}$

En remplaçant dH_i par sa valeur dans l'équation (II.3) :

$$H_r = \left[\frac{f.L.V^2}{2.g.D} + k. \frac{V^2}{2.g} \right] + \frac{L}{g} \cdot \frac{dV}{dt}$$

Posons

$$K = \frac{f.L.}{D} + k$$

d'où :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2.g.Hr - K.V^2}{2.L}$$

soit :

$$dt = 2.L. \frac{dV}{2.g.Hr - K.V^2}$$

en integrant cette expression on a :

$$t = \frac{L}{\sqrt{2.g.Hr}} \left[\int \frac{dV}{\sqrt{2.g.Hr + \sqrt{K}.V}} + \int \frac{dV}{\sqrt{2.g.Hr - \sqrt{K}.V}} \right]$$

$$t = \frac{L}{\sqrt{2.g.Hr}} \cdot \text{Ln} \left[\frac{\sqrt{2.g.Hr + \sqrt{K}.V}}{\sqrt{2.g.Hr - \sqrt{K}.V}} \right] \quad (\text{II.4})$$

V : vitesse d'écoulement au temps (t)

En divisant l'équation (II.4) par \sqrt{K} on a :

$$t = \frac{L}{\sqrt{2.g.Hr}} \cdot \text{Ln} \left[\frac{\sqrt{2.g.Hr/K + V}}{\sqrt{2.g.Hr/K - V}} \right]$$

Quand le temps tend vers l'infini : $\sqrt{2.g.Hr} = \sqrt{K}.V^\infty$

où

V^∞ est la vitesse asymptotique quand le temps t tend vers l'infini donnée par l'expression

$$V^\infty = \sqrt{2.g.Hr/K}$$

d'où :

$$t = \frac{L}{\sqrt{2.g.Hr}} \cdot \text{Ln} \left[\frac{V^\infty + V}{V^\infty - V} \right]$$

Finalement l'expression de V_{∞}/V devient :

$$\frac{V_{\infty}}{V} = \frac{\text{EXP}(2.g.Hr.K)^{0.5t/L} - 1}{\text{EXP}(2.g.Hr.K)^{0.5t/L} - 1}$$

Cette fonction peut être représenté sur un graphique. (fig 6 , p 17) Les lignes en pointillets montrent l'influence de la compressibilité du fluide et de l'élasticité de la conduite sur la vitesse d'écoulement.

L'expérience pour l'ouverture subite de la vanne montre que l'écoulement est très rapide pour un instant donné (début) celui ci va se stabiliser pour devenir permanent.

La vitesse au début de l'écoulement est approximativement égale à la vitesse des gouttes.

La rapidité de la diminution est due à l'incapacité du fluide et du matériau (conduite) de maintenir cette valeur pour très longtemps.

A la limite la dépression occasionnée ne peut dépasser la charge statique en valeur absolue , car pour cette valeur la pression à la vanne devenant égale à la pression atmosphérique, l'écoulement s'arrêterait et tout se passerait comme si la conduite n'était pas ouverte

IV-ENNUIS CAUSES PAR LE COUP DE BELIER :

Les risques dus au coup de bélier sont de plusieurs ordres, on citera entre autre:

- Risques dus aux fortes pressions :

Lorsque la pression engendrée par le coup de bélier est supérieure à la pression maximale admissible dans la conduite il y'a risque de rupture de la conduite et de déboitement des joints.

- Risques dus aux pressions négatives

Lorsque la pression dans la conduite devient inférieure à la pression de vapeur , il se produit une poche de cavitation.

Si cette dépression est très grande la conduite peut être aplatie (étranglée en certains points) par implosion .Une autre conséquence est l'usure de l'enduit intérieur rendant ainsi la conduite rugueuse.

- Fatigue de la conduite

L'alternance rapide de fortes et de faibles pressions entraîne la fatigue du matériau à long terme.

V- EFFET BENEFIQUE DU COUP DE BELIER :

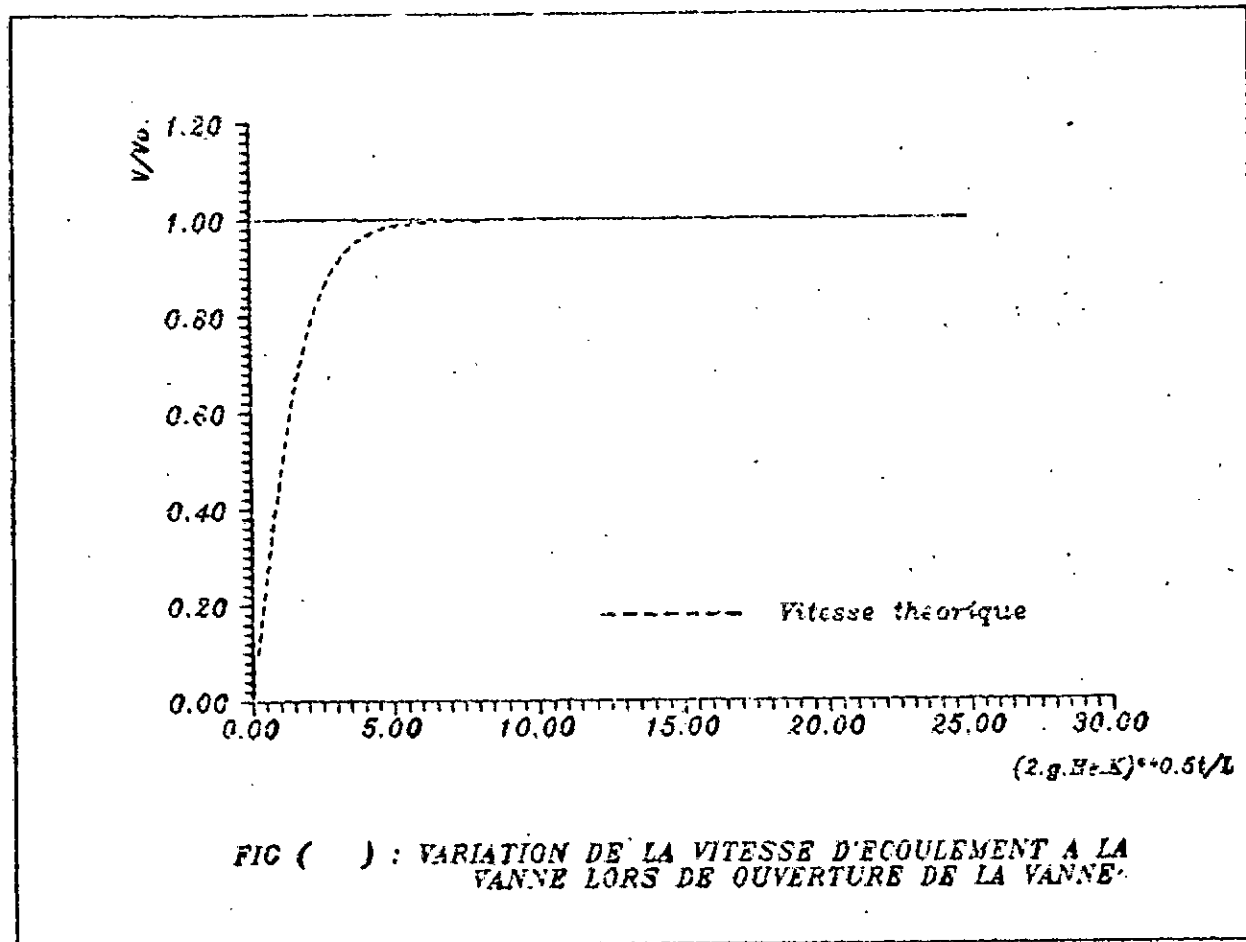
Conçu par JOSEPH DE MONTGOLFIER [2], le béliet hydraulique est un appareil de relevage fonctionnant par communication de force vive. Il utilise les effets résultant d'un arrêt brusque de la vanne.

Le béliet est l'appareil le plus économique qui existe puisque n'absorbant aucune autre énergie que celle qui lui est fournie par l'eau, qu'il est chargé de relever.

On a reproché au béliet hydraulique l'importante perte de débit qu'entraîne son utilisation et cette objection conserve toute sa valeur dans les contrées pauvres en ressources hydrauliques. Par contre, toutes les fois que l'on disposera d'une source motrice abondante et bon marché, l'emploi de cet appareil s'avérera d'extrême intérêt.

Après de multiples tâtonnements, les constructeurs spécialisés sont parvenus à mettre au point des appareils parfaitement adaptés qui utilisent la force motrice développée par la chute d'eau non potable, pour actionner un dispositif permettant d'élever l'eau potable, avec la certitude absolue d'une totale absence de contact entre les deux eaux.

Pour étudier plus en détail le phénomène du coup de béliet, il y'a lieu d'établir les équations régissant le mouvement de celui-ci.



MODELE MATHEMATIQUE

I-INTRODUCTION:

Dans cette partie de notre travail, nous allons présenter, succinctement les différentes méthodes numériques d'analyse des régimes transitoires puis le choix qu'on s'est donné. Nous démontrerons en premier lieu les équations générales des écoulements en charge de fluides supposés homogènes.

Ces équations dérivent des conditions d'équilibres dynamique et de continuité qui traduisent les loi de conservation de la quantité de mouvement et de masse.

II-HYPOTHESES:

Les équations définissant le mouvement des écoulements transitoires, sont obtenues en appliquant à une tranche de canalisation:

- Le théorème de la quantité de mouvement.
- le théorème de continuité.

Pour cela des hypothèses ont été émises.

- a- On supposera que la conduite est élastique et que l'eau est compressible.
- b- La pression dans la conduite est supposée supérieure à la pression de vapeur.
- c- Les vitesses et les pressions sont supposées uniformes dans une section donnée.
- d- Le niveau du réservoir est supposé constant.

Par souci de simplicité et vue les hypothèses simplificatrices présentées ci-dessus, nous présenterons le modèle mathématique, dans le cas d'un fluide homogène.

Les grandeurs définissant les conditions d'écoulement en un point de la conduite sont:

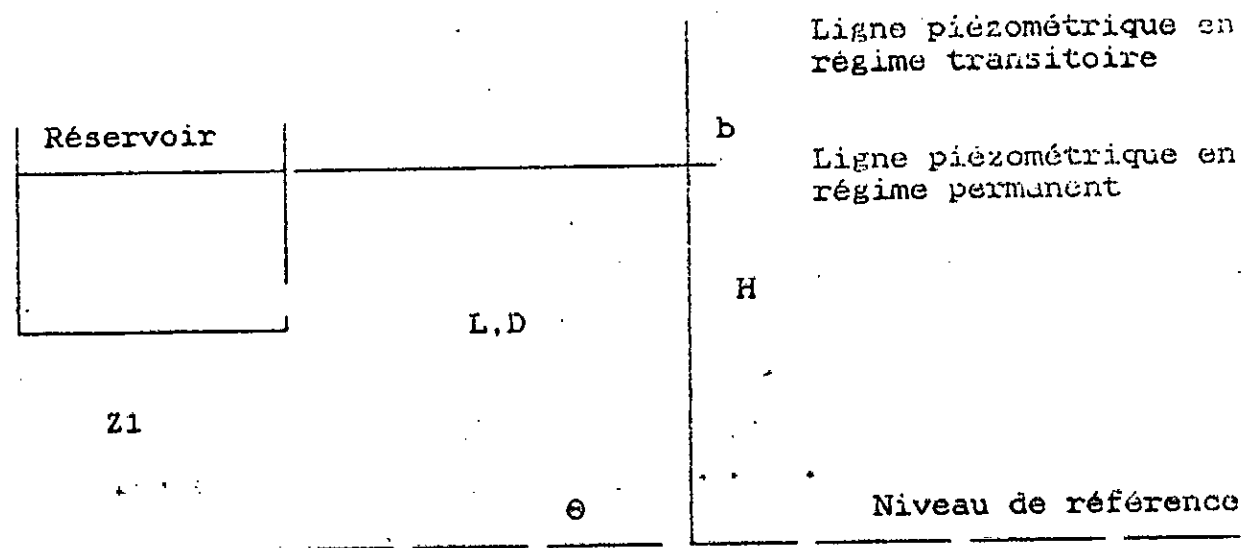
- La pression (charge) : $P(x,t)$; $H(x,t)$.
- La vitesse moyenne : $V(x,t)$.

Ces deux fonctions, de la distance (x) le long de l'axe de la conduite et du temps (t), seront déterminés par la résolution d'un système de deux équations qui sont évidemment :

- L'équation de continuité.
- L'équation dynamique.

III-EQUATIONS DU MOUVEMENT :

Pour établir les équations du mouvement du fluide, considérons une conduite de longueur (L) et de diamètre (D) reliant un réservoir à l'amont et une vanne à l'aval (voir figure ci-dessous).



- Force de Fig (III.a) -

H : Charge avant l'ajutage.

b : Charge supplémentaire due à la fermeture de la vanne

L : Longueur de la conduite

D : Diamètre de la conduite

θ : L'angle que fait l'axe de la conduite avec l'horizontal

Z1: cote de l'orifice du réservoir

1-EQUATION DYNAMIQUE :

Considérons une tranche de la canalisation comprise entre deux abscisses (x) et (x+dx).

Fig (III.b)

Les forces qui s'exercent sur cette tranche sont:

- Force de pression en (1) = p.A

- Force de pression en (2) = - $\left[p.A + \frac{\delta}{\delta x} \cdot (p.A) \right] \cdot dx$

- Poids : composante suivant l'axe : - $\rho \cdot g \cdot A \cdot dx \cdot \sin(\theta)$

- Supplément de pression dû au fait que les sections sont différentes :

$$\left[p + \frac{\delta p}{2 \cdot \delta x} dx \right] \cdot \frac{\delta A}{\delta x} \cdot dx$$

en négligeant le terme du second ordre on aura : $p \cdot \frac{\delta A}{\delta x} \cdot dx$

- Résistance de la paroi = $-\tau \cdot \pi \cdot D \cdot dx$

L'équation fondamentale de la dynamique appliquée à cette portion de la conduite s'écrit:

$$p \cdot A - \left[p \cdot A + \frac{\delta}{\delta x} (p \cdot A) \cdot dx \right] + p \cdot \frac{\delta A}{\delta x} \cdot dx - \rho \cdot g \cdot A \cdot dx \cdot \sin(\theta) - \tau \cdot \pi \cdot D \cdot dx = \rho \cdot A \cdot \frac{dv}{dt} \cdot dx \quad \text{(III.a)}$$

où:

τ : la contrainte tangentielle dont nous déterminerons l'expression.

soit (F_r) la force exercée par la paroi sur le liquide

$$F_r = \tau \cdot \pi \cdot D \cdot L, \text{ ou encore } F_r = (p) \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

où : p (donné par la formule de Darcy) = $\rho \cdot g \cdot f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$

d'où l'on déduit facilement :

$$\tau \cdot \pi \cdot D = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{f}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

$$\tau \cdot \pi \cdot D = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \rho \cdot g \cdot j$$

avec, $j = \frac{f}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$ (le gradient hydraulique)

ainsi $\tau = j.o.g. \left[\frac{\pi.D^2}{4.\pi.D} \right]$

soit $\tau = j.o.g.Rh$ où: Rh représente le rayon hydraulique

finalement

$$\tau = j.g.o.Rh$$

On peut cependant trouver une autre expression de "τ" pour les conduites circulaires

$$Rh = \frac{\pi.D^2}{4} \cdot \frac{1}{\pi.D} = \frac{D}{4}$$

soit

$$\tau = o.g. \frac{D}{4} \cdot \frac{f}{D} \cdot \frac{V^2}{2.g}$$

$$\tau = o. \frac{V^2}{8} . f(e/D, Re)$$

enfin :

$$\tau = o. \frac{V^2}{8} . f$$

Simplifions et divisons l'équation (III.a) par (o.A.ox)

$$\frac{1}{o} \cdot \frac{\delta p}{\delta x} - g.\sin(\theta) - \frac{4.\tau}{o.D} = \frac{dV}{dt}$$

En remplaçant τ par sa valeur on a :

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{o} \cdot \frac{\delta p}{\delta x} + g.\sin(\theta) - \frac{f.V^2}{2.D} = 0 \quad (III.b)$$

Comme le sens de l'écoulement n'est pas connu en général, il est plus commode d'écrire :

$$V^2 = V \cdot |V|$$

et

$$\frac{dv}{dt} = V \cdot \frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta t}$$

A l'application du coup de bélier le terme $(v \cdot \frac{\delta v}{\delta x})$ est généralement plus petit que $\frac{\delta v}{\delta t}$

d'où l'équation (III.b) devient :

$$L1 = \frac{\delta v}{\delta t} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta p}{\delta x} + g \cdot \sin(\theta) + \frac{f \cdot V \cdot |V|}{2 \cdot D} = 0 \quad (III.1)$$

Cette équation est notée par L1 pour la distinguer de l'équation de continuité qui sera notée par L2.

2-EQUATION DE CONTINUITÉ :

Soit un volume de contrôle (pourtour de la tranche précédente) de longueur dx :

- La masse entrante du liquide = $\rho \cdot A \cdot V$
- La masse sortante du liquide = $\rho \cdot A \cdot V + \frac{\delta}{\delta x} (\rho \cdot A \cdot V) \cdot dx$

L'équation de continuité appliquée au volume de contrôle dit que la variation de la quantité de fluide entre les sections x et x+dx s'exprime par :

$$\rho \cdot A \cdot V - \left[\rho \cdot A \cdot V + \frac{\delta}{\delta x} (\rho \cdot A \cdot V) \cdot dx \right] = \frac{\delta}{\delta t} (\rho \cdot A \cdot V) \quad (III.c)$$

Divisons les deux membres de l'équation (III.c) par $(\sigma.A.\delta x)$ on a :

$$\frac{V}{A} \frac{\delta A}{\delta x} + \frac{1}{A} \frac{\delta A}{\delta t} + \frac{V}{\sigma} \frac{\delta \sigma}{\delta x} + \frac{1}{\sigma} \frac{\delta \sigma}{\delta t} + \frac{\delta V}{\delta x} = 0 \quad (\text{III.d})$$

Les deux premiers termes forment la dérivée totale $\frac{1}{A} \frac{dA}{dt}$

et les deux termes qui suivent forment la dérivée totale de

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dt}$$

l'équation (III.d) devient :

$$\frac{1}{\sigma} \frac{dA}{dt} + \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\delta V}{\delta x} = 0 \quad (\text{III.e})$$

Avec

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} : \quad (\text{Représente l'élasticité de la conduite}).$$

et

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dt} : \quad (\text{Représente la compressibilité de l'eau}).$$

Pour simplifier l'équation (III.e), on introduira les équations définissant l'élasticité de la conduite et la compressibilité de l'eau.

a- Elasticité de la conduite :

Soit " σ " la contrainte radiale et " ϵ " la déformation correspondante, on a :

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

avec,

E : module d'élasticité longitudinale du matériau :

Pour les matériaux les plus usuels, le module d'élasticité "E" a les valeurs suivantes :

matériau	acier	cuivre	laiton	aluminium & alliages
10 .E(kg/cm ²)	2 à 2.1	1.2	1 à 1.2	0.7 à 0.8

l'équilibre de la moitié de la section de la conduite, donne :

$$\sigma \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p \cos(\theta) \cdot dA - 2 \cdot \sigma \cdot L \cdot e = 0$$

comme $dA = L \cdot R \cdot d\theta$

l'intégrale précédente donne enfin :

Fig (III.c)

$$\sigma = \frac{p \cdot D}{2 \cdot e}$$

Comme le terme de l'élasticité de la conduite est :

$$\frac{1}{A} dA = \frac{4}{\pi \cdot D^2} \cdot d\left(\frac{\pi \cdot D^2}{4}\right) = \frac{4}{\pi \cdot D^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot D \cdot dD = 2 \cdot \frac{dD}{D}$$

Toute variation de (p) engendre une variation de σ

$$d\sigma = \frac{p}{2 \cdot e} \cdot dp$$

or

$$\frac{dD}{D} = \frac{d\sigma}{E}$$

donc

$$\frac{dD}{D} = \frac{D \cdot dp}{2 \cdot e \cdot E}$$

finalement :

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{D}{e \cdot E} \frac{dp}{dt} \quad (\text{III.f})$$

b- Compressibilité de l'eau :

L'expression de la variation de la masse volumique s'écrit :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{dp}{\epsilon}$$

avec,

ϵ : coefficient de compressibilité de l'eau

en divisant par dt l'expression précédente, on voit apparaître le terme de compressibilité de l'eau :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\epsilon} \frac{dp}{dt} \quad (\text{III.g})$$

En remplaçant les termes de (III.f) et (III.g), de compressibilité de l'eau et d'élasticité de la conduite dans l'équation (III.c) on a :

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{dp}{dt} + \frac{D}{e \cdot E} \frac{dp}{dt} + \frac{\delta V}{\delta x} = 0$$

Ainsi on a :

$$\left[\frac{1}{\epsilon} + \frac{D}{e \cdot E} \right] \frac{dp}{dt} + \frac{\delta V}{\delta x} = 0$$

Divisons les deux membres de cette dernière equation par

$$o. \left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{e.E} \right]$$

Il en résulte.:

$$\frac{1}{o} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{o} \left[\frac{1}{1/\varepsilon + D/E.e} \right] \frac{\delta V}{\delta x} = 0 \quad (\text{III.h})$$

En posant

$$C^2 = \left[\frac{1/o}{1/\varepsilon + D/E.e} \right]$$

l'équation (III.h) devient :

$$\frac{1}{o} \frac{dp}{dt} + C^2 \frac{\delta V}{\delta x} = 0$$

Comme

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\delta p}{\delta t} + V \frac{\delta p}{\delta x}$$

En négligeant le terme $V \frac{\delta p}{\delta x}$ devant $\delta p / \delta t$

L'équation (III.h) qui est l'équation de continuité devient :

$$L2 = \frac{\delta p}{\delta t} + o. C^2 \frac{\delta V}{\delta x} = 0 \quad (\text{III.2})$$

Finalement :

L'équation dynamique est :

$$L1 = \frac{1}{o} \frac{\delta p}{\delta x} + \frac{\delta V}{\delta t} + g \cdot \sin(\theta) + f \cdot \frac{V \cdot |V|}{2.D} = 0$$

L'équation de continuité est :

$$L2 = \frac{\delta p}{\delta t} + o, C^2 \cdot \frac{\delta V}{\delta x} = 0$$

3- CELERITE DES ONDES :

L'expression de la célérité des ondes qui apparaît au cours de l'élaboration de l'équation de continuité (III.2) s'écrit :

$$C = \sqrt{\epsilon / \left[\sqrt{o} \cdot \sqrt{1 + \frac{\epsilon \cdot D}{E \cdot e}} \right]}$$

avec

ϵ : coefficient de compressibilité de l'eau

E : module d'élasticité de la conduite

e : épaisseur de la conduite

D : diamètre de la conduite

o : la masse volumique de l'eau

En l'absence de tuyau en milieu infini la célérité a pour valeur :

$$C_{\infty} = \sqrt{\epsilon / o}$$

C'est aussi la valeur vers laquelle tend la vitesse, par valeur inférieure, pour les tuyau très épais et très rigides (ϵ et E sont très élevés)

Le coefficient (ϵ) de compressibilité du liquide qui a les dimensions d'une pression est définie par :

$$\epsilon \cdot \frac{d o}{o} = d p$$

Pour l'eau dans les conditions usuelles de température et de pression, le coefficient de compressibilité a pour valeur :

$$e = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ Pa} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Bar}$$

c'est à dire 100 fois moins qu'un acier ordinaire. Dans ces conditions la célérité des ondes de pression et de débit (qui est aussi celle des ondes acoustique) est en milieu infini voisine de 1400m/s.

Le terme réducteur $\left[1 / \sqrt{1 + \frac{e \cdot D}{E \cdot e}} \right]$ de l'équation combiné ,

l'élasticité de la conduite avec celle du liquide , connaissant les propriétés du matériau (E) et les dimensions (D et e) du tuyau il est facile de calculer la célérité.

Dans la pratique, pour les tuyaux en matériaux peu élastiques (métal , béton , grès ...) la célérité des ondes est comprise entre 700 et 1300 m/s , elle est d'autant plus forte que la pression de service est élevée, car l'épaisseur relative (e/D) est alors plus importante. Au contraire pour les tuyaux constitués d'un matériau peu rigide (caoutchouc , divers plastiques) les valeurs de la célérité sont beaucoup plus faibles et se situent souvent entre quelques mètres et quelques dizaines de mètres.

Remarque

Si l'on multiplie les deux membres de l'équation (III.1) par (o.C) et nous ajoutons membre à membre les équations (III.1) et (III.2) on aura une equation de la forme:

$$\left(\frac{\delta p}{\delta t} + c \cdot \frac{\delta p}{\delta x} \right) + o.C. \left(\frac{\delta V}{\delta t} + c \cdot \frac{\delta V}{\delta x} \right) = - o.C. g \cdot \sin(\theta) - o.C. \frac{f \cdot V \cdot |V|}{2 \cdot D}$$

soit:

$$\frac{dp}{dt} + o.C. \frac{dV}{dt} = - o.C. \left[g \cdot \sin(\theta) + \frac{f \cdot V |V|}{2 \cdot D} \right] \quad (III.1)$$

Comme, $p = o.g.(H-Z)$ alors $\frac{dp}{dt} = o.g.\frac{dh}{dt}$

$$\text{et } C = \frac{dx}{dt}$$

En remplaçant $\frac{dp}{dx}$ et $\frac{dv}{dx}$ par leur expression l'équation

(III.i) devient :

$$\frac{dH}{dt} + \frac{1}{g} \frac{dx}{dt} \frac{dv}{dt} = -C \left[\sin(\theta) + \frac{f.V.|V|}{2.D} \right] \quad (III.3)$$

Cette dernière équation sert, comme outil de résolution des problèmes transitoires.

IV-METHODES NUMERIQUES

Parmi les méthodes possibles de résolution citons :

- Les méthodes aux différences finies.
- La méthode graphique de BERGERON.
- La méthode des caractéristiques.

Le choix entre ces méthodes est dicté par un critère d'efficacité (précision, stabilité) et de rentabilité économique (coût de calcul sur ordinateur).

Souvent, on est conduit à utiliser une méthode, peut être moins précise que d'autres, cependant plus pratique et suffisante si l'on tient compte du défaut de justesse du modèle mathématique de base, dû aux hypothèses simplificatrices.

1-METHODES ARITHMETIQUE

La méthode arithmétique est basée sur deux hypothèses:

- Pertes de charges négligeables.
- La conduite est supposée horizontale.

L'équation (III.3) appliquée à une portion de conduite de longueur (L) et d'extrémités A et B, tenant compte des hypothèses ci-dessus devient:

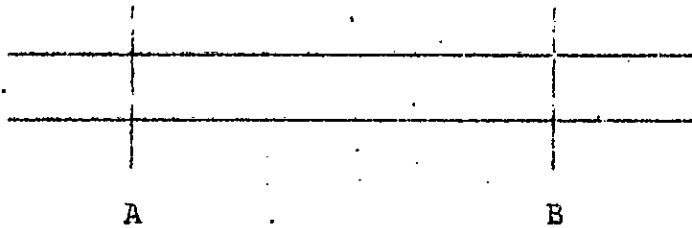


Fig (III.d)

$$\frac{dh}{dt} + \frac{1}{g} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dV = 0 \quad (\text{III.4})$$

Connaissant la charge en (A) on pourra déterminer la charge en (B).

Remarque:

dx/dt représente la vitesse de l'onde dans la conduite celle-ci étant positive si l'écoulement à lieu de A vers B, et négative si l'écoulement à lieu de B vers A.

Conclusion :

Cette méthode a été utilisée dans le temps, vu le manque de moyens informatiques.

Actuellement la méthode n'est plus applicable car elle ne représente pas la réalité des écoulements (conduites généralement inclinées, pertes de charges souvent importantes).

2- METHODE GRAPHIQUE

La méthode a été créée indépendamment l'un de l'autre par SCHNEIDER et BERGERON et connue en France sous le nom de la méthode de BERGERON.

Pour l'élaboration de la méthode, les auteurs sont partis de l'équation (III.4), l'intégration de cette dernière, sur une conduite de longueur L et d'extrémités A et B donne :

$$h_a + (1/g).C.V_a = h_b + (1/g).C.V_b \quad \text{écoulement de A vers B}$$

$$h_a - (1/g).C.V_a = h_b - (1/g).C.V_b \quad \text{écoulement de B vers A}$$

Cette méthode utilise les droites $H = F(V)$, définies ci-dessus dans un repère (H,V) pour tout les points de discrétisation.

Pour trois points consécutifs du réseau on trace les droites correspondantes connues au temps (t), l'intersection de deux droites donne la charge et le débit au temps (t+dt) en un troisième point situé au milieu.

Conclusion :

Actuellement la méthode est peu utilisée, ceci est dû à plusieurs raisons:

- Apparition des méthodes numériques plus performantes.
- L'application de la méthode devient très délicate lorsque le nombre de conduite dans le réseau devient important.
- La méthode néglige les frottements dans son développement théorique, même si ces frottements son pris en compte par la suite, leur valeurs n'est qu'approximative.

3-METHODE IMPLICITE

La méthode implicite est basée sur la résolution par différences finies des équations du mouvement étudiées. Cette méthode est généralement utilisée pour la résolution des problèmes d'écoulements transitoires à surface libre ; Cependant elle est appliquée pour d'autres types d'écoulements.

Dans le cas de son application aux problèmes transitoires en charge, il est nécessaire de garder une relation constante entre le pas de temps (dt) et le pas d'espace (dx), or ce dernier n'est pas toujours proportionnel à la longueur de la conduite par conséquent la méthode devient imprécise. Il est donc recommandé d'utiliser une autre méthode.

4-METHODE DES CARACTERISTIQUES

La méthode des caractéristiques transforme les deux équations aux dérivées partielles de mouvement et de continuité en quatre équations différentielles ordonnées. Ces équations sont exprimées en formes de différences finies.

En utilisant un intervalle de temps et bien spécifié, les solutions sont obtenues à l'aide d'un calculateur. La méthode présente certains avantages dont :

- Les conditions aux limites sont facilement programmables
- La stabilité de la solution est assurée.
- Les systèmes les plus complexes peuvent être manipulés facilement.
- La programmation des équations est très aisée.

Conclusion

Vu les avantages cités ci dessus que présente la méthode des caractéristiques par rapport aux autres, dont les inconvénients, empêchent soit la stabilité du système, soit la précision, nous opterons pour cette dernière méthode.

METHODE DES CARACTERISTIQUES

INTRODUCTION

La présentation de la méthode des caractéristiques que nous allons effectuer se rapporte aux équations aux dérivées partielles du premier ordre et à des systèmes de (n) équations.

Dans cette présentation on se limitera :

- 1- Aux problèmes n'ayant que deux variables indépendantes..
- 2- Aux équations aux dérivées partielles linéaires, mais peuvent dépendre des inconnues à des variables indépendantes.

I- PRESENTATION MATRICIELLE

Considérons les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\left[\begin{array}{l} A1. \frac{\delta V}{\delta x} + B1. \frac{\delta V}{\delta t} + C1. \frac{\delta p}{\delta x} + D1. \frac{\delta p}{\delta t} = F \\ A2. \frac{\delta V}{\delta x} + B2. \frac{\delta V}{\delta t} + C2. \frac{\delta p}{\delta x} + D2. \frac{\delta p}{\delta t} = G \end{array} \right. \quad (IV.1)$$

où

les paramètres A1, A2, B1, B2, C1, C2, D1, D2 sont dans le cas général des fonctions des variables (x,t), ainsi que des fonctions V(x,t) et p(x,t).

F et G peuvent elles aussi être des fonctions de (x,t), de V et de p.

Supposons que le système précédent (IV.1) possède une solution dans un domaine (S).

Le problème revient donc à trouver une solution du système proche d'une courbe (Ω) (solution théorique). Ce problème est dit problème de CAUCHY.

Au système précédent (IV.1) on peut ajouter les deux équations suivantes :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\delta V}{\delta x} \cdot dx + \frac{\delta V}{\delta t} \cdot dt + 0 + 0 = dV \\ 0 + 0 + \frac{\delta p}{\delta x} \cdot dx + \frac{\delta p}{\delta t} \cdot dt = dp \end{array} \right. \quad (IV.2)$$

Les deux systèmes (IV.1) et (IV.2) peuvent être regroupés pour former un seul système qui est :

$$\left[\begin{array}{l} A1 \cdot \frac{\delta V}{\delta x} + B1 \cdot \frac{\delta V}{\delta t} + C1 \cdot \frac{\delta p}{\delta x} + D1 \cdot \frac{\delta p}{\delta t} = F \\ A2 \cdot \frac{\delta V}{\delta x} + B1 \cdot \frac{\delta V}{\delta t} + C2 \cdot \frac{\delta p}{\delta x} + D2 \cdot \frac{\delta p}{\delta t} = G \\ \frac{\delta V}{\delta x} \cdot dx + \frac{\delta V}{\delta t} \cdot dt + 0 + 0 = dV \\ 0 + 0 + \frac{\delta p}{\delta x} \cdot dx + \frac{\delta p}{\delta t} \cdot dt = dp \end{array} \right. \quad (IV.3)$$

Le système précédent peut être mis sous la forme matricielle comme suit :

$$\left| \begin{array}{cccc|ccc} A1 & B1 & C1 & D1 & \delta V/\delta x & & F \\ A2 & B2 & C2 & D2 & \delta V/\delta t & & G \\ dx & dt & 0 & 0 & \delta p/\delta x & = & dV \\ 0 & 0 & dx & dt & \delta p/\delta t & & dp \end{array} \right. \quad (IV.3 \text{ bis})$$

Sous la forme condensée on pourra écrire

$$T \cdot X = R$$

Calculons la dérivée partielle $\delta V/\delta x$ en utilisant la méthode de CRAMER.

$$\frac{\delta V}{\delta x} = \frac{\begin{vmatrix} F & B1 & C1 & D1 \\ G & B2 & C2 & D2 \\ \frac{dV}{dt} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{dp}{dx} & 0 & dx & dt \end{vmatrix}}{DT} = \frac{Dx(V)}{DT}$$

De la même manière on pourra calculer

$$\delta V / \delta t = Dt(V) / DT, \quad \delta p / \delta x = Dx(p) / DT, \quad \delta p / \delta t = Dt(p) / DT$$

$Dt(V)$, $Dx(V)$, $Dx(p)$, $Dt(p)$ sont les déterminants propres aux dérivées partielles correspondantes.

On remarquera que selon la valeur de DT trois cas peuvent être distingués

- 1- $DT \neq 0$ Dans ce cas la solution sera déterminée d'une manière unique, en appliquant une méthode de résolution bien définie (GAUSS, CRAMER...).
- 2- $DT = 0$ et $Dx(V), Dx(p), Dt(V), Dt(p)$ sont différents de zéro dans ce cas la solution du problème devient infinie
- 3- $DT = 0$ et $Dx(V), Dx(p), Dt(V), Dt(p)$ sont tous nuls, dans ce cas, la solution est théoriquement indéterminée mais elle existe dans le domaine (S). Les lignes (données par les différentielles dx et dt) le long desquelles $DT = 0$ sont appelées équations de direction "caractéristiques du système".
Les relations $dx = dx(dt)$ obtenues après résolution de $DT = 0$ sont appelées équations des caractéristiques.

$$DT = 0 = \begin{vmatrix} A1 & B1 & C1 & D1 \\ A2 & B2 & C2 & D2 \\ dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt \end{vmatrix}$$

Après développement du déterminant précédent, on trouvera l'équation suivante

$$(D1.B2 - D2.B1) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + (B1.C2 - C1.B2 + A1.D2 - D1.A2) \frac{dx}{dt} + (C1.A2 - A1.C2) = 0. \quad (IV.4)$$

Cette dernière équation (IV.4) est celle de degrés (2) en (dx/dt), sa solution dépend du discriminant (delta)

$$\Delta = (B1.C2 - C1.B2 + A1.D2 - A2.D1)^2 - 4.(D1.B2 - D2.B1)(C1.A2 - C2.A1)$$

- Si $\Delta < 0$ Le système (IV.1) est dit elliptique.
- Si $\Delta = 0$ Le système (IV.1) est dit parabolique.
- Si $\Delta > 0$ Le système (IV.1) est dit hyperbolique.

Pour $\Delta > 0$, il est clair que l'équation (IV.4) nous fournira deux racines distinctes en (dx/dt).

$$\frac{dx}{dt} \Big|_1 = F(x,t,V,p)$$

$$\frac{dx}{dt} \Big|_2 = F(x,t,V,p)$$

A partir de ces deux équations on tire les équations des caractéristiques:

$$X1 = X1(t).$$

$$X2 = X2(t).$$

La condition de compatibilité est :

$$dV = \begin{vmatrix} F & B1 & C1 & D1 \\ G & B2 & C2 & D2 \\ dV & dt & 0 & 0 \\ dp & 0 & dx & dt \end{vmatrix}$$

II-APPLICATION DE LA METHODE DES CARACTERISTIQUES AUX EQUATIONS DE SAINT VENANT

Les équations dynamiques et de continuité de l'écoulement transitoire sont :

$$\left[\begin{array}{l} 0 \cdot \frac{\delta V}{\delta x} + \frac{1}{C^2} \left[\frac{\delta p}{\delta t} + V \cdot \frac{\delta p}{\delta x} \right] = 0 \\ \frac{\delta V}{\delta t} + V \cdot \frac{\delta V}{\delta x} + \frac{1}{0} \cdot \frac{\delta p}{\delta x} = -g \cdot (\sin\theta + j) \end{array} \right.$$

Multiplions la première équation par C/0, puis ajoutons et retranchons membre à membre les deux équations précédentes, on aura le système suivant :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\delta V}{\delta t} + (V+C) \cdot \frac{\delta V}{\delta x} + \frac{1}{0 \cdot C} \cdot \frac{\delta p}{\delta t} + \frac{V+C}{0 \cdot C} \cdot \frac{\delta p}{\delta x} = -g \cdot (\sin\theta + j) \\ \frac{\delta V}{\delta t} + (V-C) \cdot \frac{\delta V}{\delta x} - \frac{1}{0 \cdot C} \cdot \frac{\delta p}{\delta t} + \frac{V-C}{0 \cdot C} \cdot \frac{\delta p}{\delta x} = -g \cdot (\sin\theta + j) \\ \frac{\delta V}{\delta t} \cdot dt + \frac{\delta V}{\delta x} \cdot dx = dV \\ \frac{\delta p}{\delta t} \cdot dt + \frac{\delta p}{\delta x} \cdot dx = dp \end{array} \right.$$

Sous la forme matricielle le système s'écrit :

$$\left| \begin{array}{cccc|cc|c} V+C & 1 & (V+C)/0 \cdot C & 1/0 \cdot C & \delta V/\delta x & & -g \cdot (\sin\theta + j) \\ V-C & 1 & -(V-C)/0 \cdot C & -1/0 \cdot C & \delta V/\delta t & & -g \cdot (\sin\theta + j) \\ dx & dt & 0 & 0 & \delta p/\delta x & = & dV \\ 0 & 0 & dx & dt & \delta p/\delta t & & dp \end{array} \right|$$

Par analogie avec le système (IV.3 bis) développé précédemment on a :

$$\begin{array}{lll} A1=V+C & B1=1 & C1=(V+C)/0 \cdot C \\ A2=V-C & B2=1 & C2=-(V-C)/0 \cdot C \end{array}$$

$$D1=1/(o.C)$$

$$D2=-1/(o.C)$$

$$F=g.(sin\theta+j)$$

$$G=-g.(sin\theta+j)$$

On reportant ces valeurs dans l'équation (IV.4) au second degré on trouve l'équation sous la forme :

$$\left[\frac{dx}{dt} \right]^2 - 2.V. \frac{dx}{dt} + (V^2 - C^2) = 0$$

$$\Delta = 4.V^2 - 4.(V^2 - C^2) = 4.C^2$$

Delta est donc positif, le système est de type hyperbolique l'équation a deux racines distinctes

$$\frac{dx}{dt} \Big|_1 = \frac{2.V+2.C}{2} = V + C$$

$$\frac{dx}{dt} \Big|_2 = \frac{2.V-2.C}{2} = V - C$$

La condition de compatibilité est par exemple $D(V) = 0$

$$D(V) = 0 = \begin{vmatrix} -g(\sin\theta+j) & 1 & (V+C)/(o.C) & 1/(o.C) \\ -g(\sin\theta+j) & 1 & -(V-C)/(o.C) & -1/(o.C) \\ dv & dt & 0 & 0 \\ dp & 0 & dx & dt \end{vmatrix}$$

Après développement de ce déterminant on trouvera l'équation suivante :

$$\frac{1}{o} \cdot \frac{dp}{dt} + \left(\frac{dx}{dt} - V \right) \cdot \frac{dv}{dt} + \left(\frac{dx}{dt} - V \right) \cdot g(\sin\theta+j) = C. \tag{IV.5}$$

On a trouvé précédemment que $dx/dt = V \pm C$

1- Pour $dx/dt = V+C$ l'équation de compatibilité devient

$$\frac{1}{\rho \cdot C} \cdot \frac{dp}{dt} + \frac{dV}{dt} + g(\sin\theta + j) = 0. \quad (IV.6)$$

2- Pour $dx/dt = V-C$ l'équation de compatibilité devient

$$-\frac{1}{\rho \cdot C} \cdot \frac{dp}{dt} + \frac{dV}{dt} + g(\sin\theta + j) = 0. \quad (IV.7)$$

Ecrivons les équations (IV.6) et (IV.7) sous une autre forme.

On pourra négliger la vitesse d'écoulement (V) par rapport à la vitesse d'onde (C).

$$V \ll C \implies V \pm C \approx \pm C$$

La pression (p) en un point s'exprime :

$$p = \rho \cdot g \cdot (H-z) \implies \frac{dp}{dt} = \rho \cdot g \cdot \left(\frac{dH}{dt} - \frac{dz}{dt} \right)$$

or $z = x \cdot \sin\theta$ le référentiel étant horizontal passant par la vanne.

d'où $dz/dt = dx/dt \cdot \sin\theta$ $\theta = \text{constant}$.

donne
$$\frac{dp}{dt} = \rho \cdot g \cdot \left(\frac{dH}{dt} - \frac{dx}{dt} \cdot \sin\theta \right)$$

en remplaçant dp/dt dans les équations (IV.6) et (IV.7) on aboutira aux équations suivantes :

$$\frac{dV}{dt} + \frac{g}{C} \cdot \frac{dH}{dt} = -g \cdot j \quad \text{pour} \quad \frac{dx}{dt} = V + C \approx C$$

$$\frac{dV}{dt} - \frac{g}{C} \cdot \frac{dH}{dt} = -g \cdot j \quad \text{pour } \frac{dx}{dt} = V - C \approx -C$$

les deux équations rassemblées en une seule s'écrivent :

$$\frac{dV}{dt} \pm \frac{g}{C} \cdot \frac{dH}{dt} = -g \cdot j \quad (\text{IV.8})$$

en faisant intervenir le débit dans l'équation (IV.8) on aura :

$$\frac{g}{C} \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{C}{g} V \pm H \right] - g \cdot j = 0$$

$$\frac{g}{C} \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{C}{g \cdot A} \cdot Q \pm H \right] - g \cdot j = 0. \quad (\text{IV.9})$$

le signe (+) intervient lorsque $dx/dt \approx C$

le signe (-) intervient lorsque $dx/dt \approx -C$

La perte de charge linéaire (j) s'exprime par :

$$j = \frac{f}{2 \cdot g \cdot D \cdot A^2} \cdot Q^2$$

comme le sens de l'écoulement n'est pas connu en général, il est plus commode d'exprimer (j) comme suit :

$$j = \frac{f}{2 \cdot g \cdot D \cdot A^2} \cdot Q \cdot |Q|$$

On a aussi $dx = \pm C \cdot dt$, par conséquent l'équation (IV.9) devient

$$d. \left[\frac{C}{g.A} . Q \pm H \right] - j . dx = 0.$$

On pourra écrire :

- Le long de la caractéristique de pente (+C) dite caractéristique positive (Cp) on a

$$d \left[\frac{C}{g.A} . Q + H \right] + j . dx = 0. \tag{IV.10}$$

Le long de la caractéristique de pente (-C) dite caractéristique négative (Cm) on a

$$d \left[\frac{C}{g.A} . Q - H \right] - j . dx = 0. \tag{IV.11}$$

intégration des équations (IV.10) et (IV.11) :

Pour effectuer l'intégration du système différentiel, on doit discrétiser la conduite en un certain nombre de point N (Fig ci dessous) :

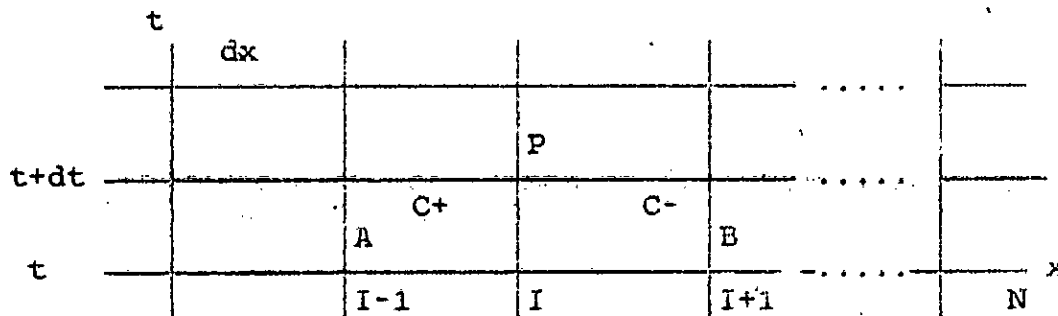


Fig ()

On supposera que la charge (h) et le débit (Q) sont connus le long de la conduite au temps (t).

Intégrons l'équation caractéristique (Cp) passant par "A" de coordonnée ($I-1, t$), entre deux instants (t) et ($t+dt$), c'est à dire au point ($I, t+dt$)

$$j = \frac{f}{2 \cdot g \cdot D \cdot A^2} \cdot Q \cdot |Q|.$$

$$\text{Posons } B = \frac{f}{2 \cdot g \cdot D \cdot A^2} \quad \text{et} \quad R = \frac{C}{g \cdot A}$$

et introduisant les, dans les équations (IV.10), (IV.11) :

après intégration l'équation (IV.10) devient :

$$H(I) - H(I-1) + R \cdot [Q(I) - Q(I-1)] + B \int Q \cdot |Q| \cdot dx = 0$$

.....(IV.12)

La fonction $Q(x)$ n'étant pas connue, alors l'intégrale de $Q \cdot |Q| \cdot dx$ sera calculée en supposant le débit constant entre les instant (t) et ($t+dt$).

L'équation (IV.12) devient :

$$H(I) - H(I-1) + R \cdot [Q(I) - Q(I-1)] + T \cdot Q \cdot |Q| \cdot dx = 0$$

ou

$$T = B \cdot [X(I) - X(I-1)]$$

En regroupant les termes en "I" d'une part et les termes en "I+1" d'autre part on aura :

$$H(I) + R \cdot Q(I) = H(I-1) + Q(I-1) \cdot [R - T \cdot |Q(I-1)|].$$

or

$$H(I) + R.Q(I) = C_p \text{ (caractéristique positive).}$$

$$C_p = H(I-1) + Q(I-1) \cdot \left[R - T \cdot |Q(I-1)| \right].$$

De la même manière l'intégration de l'équation (IV.11) donne

$$H(I) - R.Q(I) = C_m \text{ (caractéristique négative).}$$

$$C_m = H(I+1) - Q(I+1) \cdot \left[R - T \cdot |Q(I+1)| \right].$$

Finalement On a un système d'équation à résoudre :

$$\begin{cases} C_p = H(I-1) + Q(I-1) \cdot \left[R - T \cdot |Q(I-1)| \right] \\ C_m = H(I+1) - Q(I+1) \cdot \left[R - T \cdot |Q(I+1)| \right] \end{cases} \quad (\text{IV.13})$$

Remarque :

Les termes Hauteur, Débit entrant dans les expressions de C_p et C_m sont ceux des points $(I-1)$ et $(I+1)$ connus au temps (t) .
Alors, que

$H(I)$ et $Q(I)$ sont des termes qui auront lieu au temps $(t+dt)$.

Leurs valeurs au temps $(t+dt)$ sont :

$$\begin{aligned} H(I) &= (C_p + C_m) / 2 \\ Q(I) &= (C_p - H(I)) / R \end{aligned}$$

Le processus se répétera de la même façon que précédemment pour les temps suivant $(t+2.dt)$, $(t+3.dt)$

Le système d'équation (IV.13) ne peut être résolu sans l'apport des conditions aux limites et initiales qui seront traitées dans le chapitre suivant.

CONDITIONS AUX LIMITES

INTRODUCTION

Les conditions aux limites sont des équations complémentaires nécessaires chaque fois que les caractéristiques de l'écoulement se voient brusquement changées en un point donné de la conduite. Ce phénomène se produit au niveau d'un réservoir, d'une valve, d'un clapet, d'un point de connection de deux ou plusieurs conduites et encore au niveau des pompes et des turbines hydrauliques.

Avantages

Un des avantages des conditions aux limites est de simplifier les équations du mouvement généralement difficiles à résoudre afin de les rendre plus maniables.

Dans ce qui suit nous présenterons quelques cas simples de conditions aux limites généralement rencontrées en hydraulique et qui permettront de résoudre des problèmes les contenant ensemble, on citera entre autres :

Les conditions aux limites au niveau:

- d'un réservoir.
- d'une vanne.
- d'une jonction de deux ou plusieurs conduites.
- d'une pompe.

I-CONDITIONS AU LIMITES AU NIVEAU D'UN RESERVOIR

On supposera tout d'abord que le réservoir est de grande dimensions afin de négliger la variation du niveau du plan d'eau dans celui-ci:.

$$H[1] = H_r$$

avec

H_r : Niveau du plan d'eau dans le réservoir
 $H[1]$: Charge relative au niveau de l'orifice du réservoir

Lorsqu'une vanne placée à l'extrémité aval de la conduite est subitement fermée, une onde de surpression est générée, pour se propager vers le réservoir où elle sera réfléchiée en une onde de dépression dont l'équation dans le plan (Q,H) est :

$$CM = H[1] + R.Q[1]$$

où

$$CM = H[2] + Q[2]. \left[R - T. |Q[2]| \right] \quad (V.1)$$

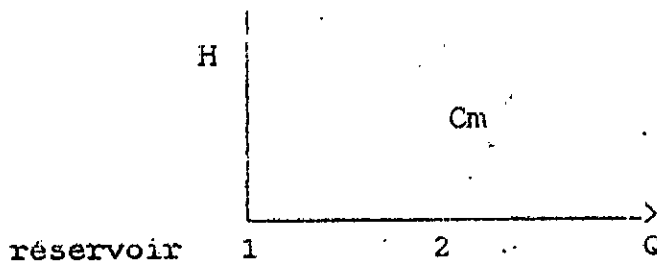
Remarque

H[2] , Q[2] sont des quantités connues au temps t
 H[1] , Q[1] sont des quantités calculées au temps t+dt

De l'équation (V.1) on tire :

$$Q[1] = (H[1] - Cm) / R$$

Conclusion



$$H[1] = H_r$$

$$Q[1] = (H[1] - CM) / R$$

II- CONDITIONS AUX LIMITES AU NIVEAU D'UNE VANNE

Les conditions aux limites au niveau d'une vanne dépendent essentiellement de la loi de fermeture de celle-ci.

Pour cela on distinguera deux cas de fermeture :

1- Fermeture brusque

La fermeture est dite brusque lorsqu'au temps $(t = 2.L/C)$ la vanne est complètement fermée. Cela signifie qu'aucun débit ne passe à travers celle-ci :

$$Q[N] = 0.$$

L'onde de surpression positive émise lors de cette fermeture a pour équation dans un plan (Q,H) :

$$CP = H[N] + R.Q[N]$$

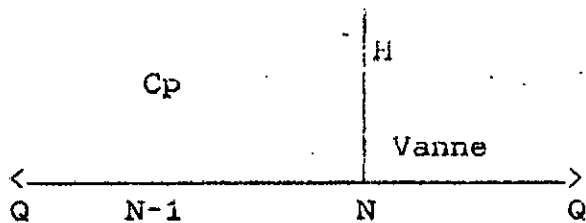
où

$$CP = H[N-1] + Q[N-1]. \left[R - T. |Q[N-1]| \right] \quad (V.2)$$

dès lors de l'équation (V.2) on tire

$$H[N] = CP$$

conclusion



$$Q[N] = 0$$

$$H[N] = CP$$

2-Fermeture lente

Une fermeture est dite lente si la fermeture totale de la vanne a lieu au delà du temps caractéristique $(2.L/C)$.

Le débit ne serait pas brusquement interrompu, mais varierait suivant une loi de fermeture bien précise que l'on pourra exprimer par :

$$Q(N) = F(t).Q_0.$$

où Q_0 : débit traversant la vanne en régime permanent.
 $F(t)$: Loi de fermeture de la vanne.

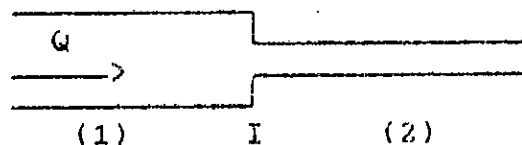
Dès lors la surpression est directement déduite de l'équation (V.2) :

$$H(N) = CP - R.F(t).Q_0$$

III-POINT DE JONCTION DE DEUX CONDUITES EN SERIE

Solent deux conduites raccordées en un point (I), dont les caractéristiques (A_1, R_1, T_1) , pour la première et (A_2, R_2, T_2) , pour la seconde. Le calcul de la charge et du débit au niveau du point (I) s'effectue à l'aide des équations (1) et (2).

L'équation (V.2) est valable pour la conduite (1) tandis que l'équation (V.1) est valable pour la conduite (2)



$$CP = H[I] + R_1.Q[I]$$

$$CM = H[I] - R_2.Q[I]$$

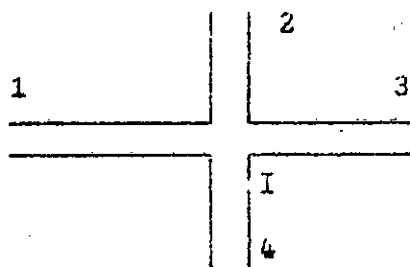
Au niveau du point (I), on aura superposition des deux ondes de surpression (CP) venant de la vanne et de dépression (CM) venant du réservoir, la combinaison des deux équations (1) et (2) donne :

$$Q[I] = \frac{CP - CM}{R_1 + R_2}$$

$$H[I] = CP - R_1.Q[I]$$

IV-JONCTION DE PLUSIEURS CONDUITES

Pour déterminer les conditions aux limites d'un tel système prenant par exemple la jonction de quatre conduites en un point (I), comme le montre la figure ci-dessous



Les conduites (3) et (4) sont obturées par des vannes placées à leurs extrémités aval, par conséquent l'équation (V.2) est valable pour les conduites (1) et (2)

$$\begin{aligned} CP1 &= H[I] + R1.Q1[I] \\ CP2 &= H[I] + R2.Q2[I] \end{aligned}$$

Alors que l'équation (V.1) est valable pour les conduites (3) et (4)

$$\begin{aligned} CM1 &= H[I] - R3.Q3[I] \\ CM2 &= H[I] - R4.Q4[I] \end{aligned}$$

Pour pouvoir déterminer les conditions aux limites au niveau du point (I), on serait amené à considérer que la variation des caractéristiques de l'écoulement dans la zone

limitée par les pointillets (voir figure) sont négligeables (hypothèse fortement justifiée du moment que le pas de discrétisation est nettement supérieur à l'espace commun aux conduites).

On a alors:

$$H_p = H1 = H2 = H3 = H4$$

De l'équation (V.1), on tire

$$Q1[I] = - H_p/R1 + CP1/R1$$

$$Q2[I] = - H_p/R2 + CP2/R2$$

De l'équation (V.2) , on tire :

$$Q3[I] = -Hp/R3 - CM3/R3$$

$$Q4[I] = -Hp/R4 - CM4/R4$$

L'équation de continuité reste toujours vérifiée :

$$Q1[I] + Q2[I] + Q3[I] + Q4[I] = 0$$

En remplaçant les débits par leur valeurs respectives il vient :

$$-Hp \cdot \Sigma 1/Ri + CP1/R1 + CP2/R2 + CM3/R3 + CM4/R4 = 0$$

D'où

$$Hp = \frac{CP1/R1 + CP2/R2 + CM3/R3 + CM4/R4}{1/R1 + 1/R2 + 1/R3 + 1/R4}$$

en généralisant à N conduites on a :

$$Hp = \frac{\Sigma CPi/Ri + \Sigma CMi/Ri}{\Sigma 1/Ri}$$

V- CAS D'UNE POMPE :

On appelle pompe tout appareil qui aspire un fluide d'une région à basse pression pour le refouler vers une région à plus grande pression.

Soit une pompe qu'on connecte respectivement à ses extrémités (entrée et sortie) , aux conduites d'aspiration (diamètre D_a ; longueur L_a ; vitesse de l'onde C_a ; le nombre de points discretisation N_a ;...) et de refoulement (diamètre D_r ; longueur L_r ; vitesse de l'onde C_r ; le nombre de points discretisation N_r ;...).

Lors d'une disjonction, si une pompe se peut arrêter, à cause de la différence de hauteurs de remplissage, que le débit inverse augmente. Si ce dernier est assez important il peut arriver que la pompe fonctionne comme une turbine hydraulique c'est à dire que le fluide entrainera cette pompe dans le sens de rotation inverse. Cet écoulement du liquide en sens inverse ne s'arrêtera qu'avec la fermeture complète du clapet anti-retour (installé juste après la pompe).

Pour l'étude du coup de bélier, il importe de connaître les paramètres nominaux de la pompe : débit nominal (Q_n) et hauteur d'élevation nominale (H_n), assurés à la vitesse de rotation nominale N_n .

Le mode de représentation des relations hauteurs (H) et débit (Q) consiste à reporter, pour une vitesse de rotation spécifique (N_s) (la vitesse de rotation de la pompe étalon qui est semblable à la pompe considérée et qui crée, un régime de fonctionnement semblable, une hauteur $H_e = 1m$ avec un débit $Q_e = 0.075 m^3/s$) donnée, en abscisse la variable (v/α) ou (α/v) et en ordonnée la fonction (h/v) ou (h/α).

avec

$$h = H/H_n ; \quad v = Q/Q_n ; \quad \alpha = N/N_n$$

Dans cette façon de procéder et en utilisant cette à des essais fait par MARSHAL, SUTER [7] effectués sur trois grandes familles semblables de pompes ($N_s = 35, N_s = 147, N_s = 261$ ou $N_s = N \cdot \sqrt{Q/H}$) les fonctions suivantes :

$$W_h(x) = \frac{h}{\alpha^2 + v^2} \quad \text{et} \quad W_b(x) = \frac{\beta}{\alpha^2 + v^2}$$

avec

$$x = \pi + \text{arctg}(v/\alpha).$$

En pratique cette méthode est de loin la plus utilisée, depuis le début des années 80, pour la résolution du problème transitoire au passage de l'onde au niveau de la pompe.

Le tableau (voir annexe) donne les valeurs des deux fonctions (W_h) et (W_b) pour des variations de x de $\pi/44$ (x varie dans les limites 0 et 2π). Dans ce tableau on a porté non pas x mais les entiers (I) qui se calculent d'après

$$I = (44 \cdot x / \pi + 1) \quad (\text{changement de variable})$$

Ainsi à chaque valeur de I on aura $Wh(I)$ et $Wb(I)$.

Au niveau de la pompe les inconnues seront :

- Les hauteurs à l'aspiration et au refoulement de la pompe .
- Les débits à l'aspiration et au refoulement de cette pompe.
- La vitesse de rotation de la pompe.

Ainsi pour déterminer à chaque pas de temps l'ensemble de ces quantités il faut cinq équations :

$$\begin{array}{cccccc} \text{Na-2} & \text{Na-1} & \text{Na} & 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

La charge donne par la pompe

$$M_p = M_{pr[1]} - H_{pa[N]} \quad (V.3)$$

D'après l'équation (V.2)

$$H_{pa[N]} + R_a \cdot Q_{pa[N]} = C_P \quad (V.4)$$

D'après l'équation (V.1)

$$M_{pr[1]} - R_r \cdot Q_{pr[1]} = C_M \quad (V.5)$$

Au trois équations on peut rajouter l'équation qui traduit la conservation du débit.

$$Q_{pa[N]} = Q_{pr[1]} \quad (V.6)$$

La cinquième et dernière équation est relative à la variation de la vitesse de rotation.

Dès l'arrêt de la pompe la puissance P_a absorbée sera prise sur la puissance vive emmagasinée du poids en rotation. Cette énergie vaut :

$$E = J \cdot W^2 / 2$$

J : moment d'inertie
W : vitesse de rotation

Avec

$J = mr^2$ où (m) est la masse en rotation et (r) le rayon de giration

DONSKY [7] présente un graphique de (mr^2) de plusieurs moteurs.
L'équation estimée est :

$$mr^2 = 3550. \left[\frac{P}{N} \right]^{1.435}$$

où P : La puissance de la pompe

N : Nombre de tours de la roue par minute.

Le travail élémentaire absorbé pendant le laps de temps dt est :

$$d(J.W^2)/2 = - J.W.dW$$

Le signe $(-)$ du second membre est pris en considération du fait de la diminution de (W) .

En égalant ces deux travaux élémentaires, on trouve :

$$C.dt = - J.dW$$

$$C = - J.dW/dt$$

En réalité le couple est variable dans le temps et pour simplifier notre résolution, on le suppose comme étant constant durant (dt) et est égale à la moyenne du couple $C(t)$, couple connu au temps (t) et de $C(t+dt)$ valeur inconnue au temps $(t+dt)$ c'est à dire

$$C = [C(t) + C(t+dt)]/2$$

Etant donné que $C(t) = P(t)/W(t)$

$$= \text{o.g.} \left[H_r[1] - H_a[Na] \right] . Q_a[Na] / r_{en} / W$$

ou

$$W = Nn \cdot (2\pi/60) \cdot \alpha$$

ren : Rendement de la pompe.

Nn : Nombre de tours de rotation nominale.

N : Nombre de tours de rotation au temps (t+dt).

$$\alpha = N/Nn.$$

En posant :

$$\beta_0 = C(t)/Cn \quad \text{et} \quad \beta = C(t+dt)/Cn$$

L'équation du couple prend la forme en différences finies

$$\beta = J \cdot \frac{Nn}{Cn} \cdot \frac{\pi}{15} \cdot \frac{\alpha - \alpha_0}{dt} - \beta_0 \quad (V.7)$$

La charge dynamique totale fournie par la pompe est :

$$H_p = H_n \cdot h = H_n \cdot W_h(x) \cdot (c^2 + v^2).$$

$$x = \pi + \arctg(v/a).$$

Les valeurs des deux fonctions W_n et W_b sont données par le tableau (annexe) pour des variations de (x) de $(\pi/40)$. Le calcul de $W_h(x)$ se fait par interpolation linéaire, comme suite :

On remplace la fonction $W_h(x)$ par une droite pour les (x) entourant la valeur $(\pi + \arctg(v/a))$. L'équation de cette droite peut être définie grâce à deux points entourant le point de coordonnée (x) et $W_h(x)$.

Ces deux points sont :

$$M1 \left[(I-1) \cdot x, W_h(I) \right] \quad \text{et} \quad M2 \left[I \cdot x, W_h(I+1) \right]$$

En posant :

$$W_h(x) = W_0 + W_1 \cdot x$$

comme équation de la droite passant par le point $M1$ et $M2$, on aura :

$$W_1 = \left[W_h(I+1) - W_h(I) \right] / dx$$

$$W_0 = W_h(I-1) - I.W_1.dx$$

Il en résulte de ces considérations :

$$H_p = H_n.(\alpha^2 + v^2).[W_0 + W_1.(\pi + \arctg(v/\alpha))]$$

en combinant les expressions (V.3), (V.4), (V.5), (V.8) on obtient :

$$F_1 = C_P - C_M - (R_r + R_a).Q_a[N_a] + H_n.(\alpha^2 + v^2).(W_0 + W_1.x) \quad (V.9)$$

On procédera de la même manière pour la grandeur : $W_b(x)$

$$W_b(x) = B_0 + B_1.x$$

où :

$$B_1 = \frac{W_b(I+1) - W_b(I)}{dx}$$

$$B_0 = W_b(I-1) - I.B_1.dx$$

comme

$$\beta = (\alpha^2 + v^2).W_b(x)$$

et

$$\beta = J. \frac{N_n}{C_n} \cdot \frac{\pi}{15} \cdot \frac{\alpha - \alpha_0}{dt} - \beta_0$$

en posant

$$G_j = J. \frac{N_n}{C_n} \cdot \frac{\pi}{15} \cdot \frac{1}{dt}$$

l'expression (V.9) devient :

$$F_2 = (\alpha^2 + v^2).(B_0 + B_1.x) + \beta_0 - G_j.(\alpha_0 - \alpha) = 0. \quad (V.11)$$

Ainsi les cinq équations se réduisent aux deux équations (V.9) et (V.11) suivantes :

$$\begin{aligned} F1 &= 0 \\ F2 &= 0 \end{aligned} \quad (V.12)$$

Le système d'équations non linéaires où les inconnues sont α et v sera résolue par la méthode de Newton-Raphson.

$$\begin{cases} F1 + F1\alpha.D\alpha + F1v.Dv = 0 \\ F2 + F2\alpha.D\alpha + F2v.Dv = 0 \end{cases}$$

où

$F1\alpha$, $F1v$, $F2\alpha$, $F2v$ sont les dérivées de $F1$ et $F2$ par rapport à la variable prise pour indice (v ou α).
En utilisant la règle de CRAMER, on obtient :

$$Dv = \frac{F2.F1\alpha - F1.F2\alpha}{F1v.F2\alpha - F1\alpha.F2v} \quad \text{et} \quad D\alpha = \frac{F1.F2v - F2.F1v}{F1v.F2\alpha - F1\alpha.F2v}$$

Les valeurs de $F1$, $F2$ et leurs dérivées partielles par rapport à α et v sont déterminées à chaque pas de l'itération avec pour :

$$v = 2.v0 - v00$$

$$\alpha = 2.\alpha0 - \alpha00$$

où

$v0$ et $\alpha0$: correspondent aux valeurs de v et de α à l'itération J

$v00$ et $\alpha00$: correspondent aux valeurs de v et de α à l'itération $J-1$

Une fois le calcul de (Dv) et de $(D\alpha)$ étant fait, on affecte:

$$\text{à } v \longrightarrow v + Dv$$

et

$$\text{à } \alpha \longrightarrow \alpha + D\alpha$$

Améliorant ainsi les valeurs de v et de α initialement données.

Généralement l'itération est supposée terminée en imposant par exemple :

$$|Dv| + |D\alpha| \leq 0.005$$

ANALYSE NUMERIQUE

INTRODUCTION

L'analyse numérique est une science ancienne. De grands mathématiciens tels que NEWTON, GAUSS, FOURRIER, développèrent des algorithmes (que l'on utilise encore à nos jours) adaptés au calcul manuel.

Les équations aux dérivées partielles constituent l'un des plus grands développements dans toutes les branches de l'analyse numérique. Le champ d'application des équations aux dérivées partielles augmente d'importance, englobant le domaine de l'aéronautique de la physique nucléaire et encore de l'hydraulique.

En effet plusieurs problèmes en hydraulique exigent des solutions numériques, faute de la complexité des équations régissant le mouvement des fluides. L'une des méthodes récentes pour approcher la solution de ces problèmes est la méthode des caractéristiques.

I-TECHNIQUE DE PROGRAMMATION UTILISEE

Pour l'élaboration des programmes permettant la transformation du modèle mathématique en un modèle numérique nous avons adopté le langage "TURBO PASCAL" version 6.0 et cela pour différentes raisons dont :

- a) Un programme écrit en "TURBO PASCAL" est plus structuré.
- b) La compilation et le linkage sont très rapides.
- c) Le compilateur indique l'endroit de l'erreur si elle existe.
- d) Possibilité d'utiliser des modules graphiques inexistants dans les compilateurs FORTRAN actuels.

1- PROGRAMMATION MODULAIRE :

La programmation modulaire consiste en la subdivision du programme en plusieurs sous-programmes (procédure) ceci permet :

D'éviter la répétition d'un bloc d'instruction en plusieurs endroits du programme.

De modifier le programme sans que celui-ci ne soit détruit.

D'économiser dans l'espace mémoire : Le système réserve de l'espace mémoire aux variables locales d'un bloc pour la durée d'exécution de celui-ci seulement.

2) MENU :

Nous avons réalisés ce menu afin que l'utilisateur de notre programme puisse savoir les différentes fonctions de ce dernier qui sont :

Calculs des charges au niveau des points de discrétisation pour les différents cas suivants :

- Conduite simple.
- Plusieurs conduites en série.
- Arrêt brusque d'une pompe.

Mais ceci n'est possible que si l'on introduit sur clavier les paramètres suivants :

- Matériau des conduites.
- Nombre de tronçon.
- Cas de fermeture.
- Pertes de charge linéaire et singulière.
- Diamètre des conduites.
- Longueur des conduites.

III- DICTIONNAIRE DES VARIABLES :

Tout programme doit être compris par l'utilisateur pour cela il est donc nécessaire de définir les variables utilisées dans celui-ci, ainsi que les procédures.

1- DEFINITION DES PARAMETRES

M : Nombre de tronçon en série.

L[I] : Longueur du tronçon I.

D[I] : Diamètre du tronçon I.
 S[I] : Section du tronçon I.
 EM : Module d'élasticité du matériau constituant la conduite
 Ep : Epaisseur de la paroi du tronçon.
 EF : Module de compressibilité du fluide.
 N[I] : Nombre de noeuds du tronçon I.
 Nt : Nombre de noeuds total.

2- DEFINITION DES PROCEDURES :

Nous avons utilisé des procédures dont les fonctions sont:

Ouverture : Permet l'ouverture des fichiers de données et de résultats.

Lecture (Lecture_P) : Permet la lecture des données introduites sur écran pour les conduites en série (pompes).

discrétise (Discrétise_P) : Permet le calcul de la célérité des ondes et la discrétisation des conduites en série (conduite de refoulement)

R_Lambda_T : permet le calcul des coefficients de perte de charge linéaires ainsi que les coefficients "R et T" définis auparavant.

Permanent (Permanent_P) : permet le calcul des charges et débits au niveau des points discrétisés des conduites en série (refoulement) à l'état permanent

Incrémentation : permet l'incrémentation du temps "dt"

... la valeur de la rotation de la pompe.

Refoulement (aspiration) : permet le calcul des charges et débits au point de discrétisation de la conduite de refoulement (aspiration).

Res_NI : permet le calcul de la charge et débit au niveau du réservoir et du tronçon "1".

Tronçon2 : permet le calcul des charges et débits au niveau des points des tronçons (2,3,...,M).

V_brusque (V_lente) : permet le calcul du débit et de la charge au niveau de la vanne pour une fermeture brusque (lente).

Affectation : permet d'affecter les valeurs de la charge et du débit calculées au temps (t+at) à celle calculées au temps (t).

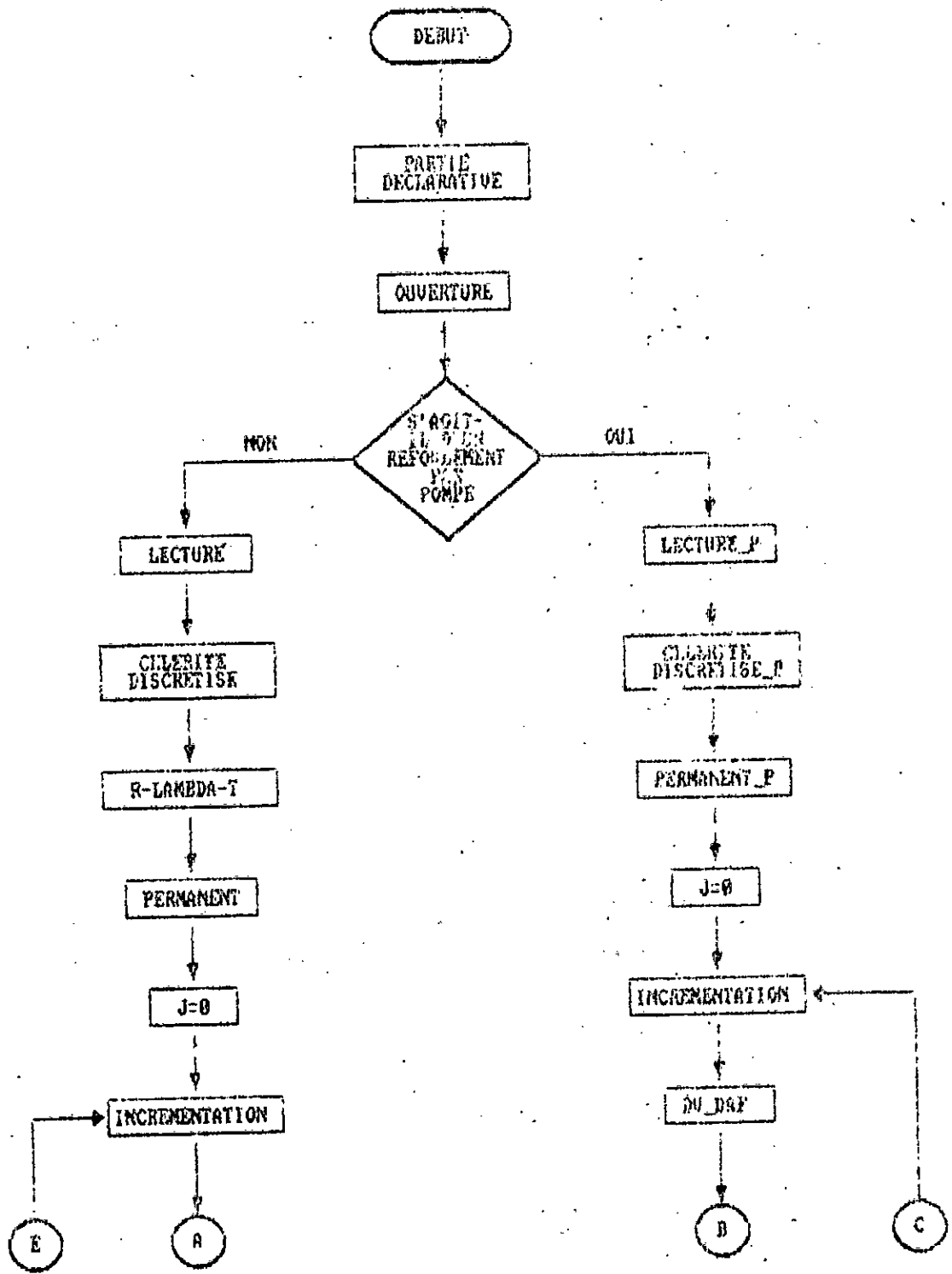
Ecriture : permet l'affichage des résultats dans des fichiers.

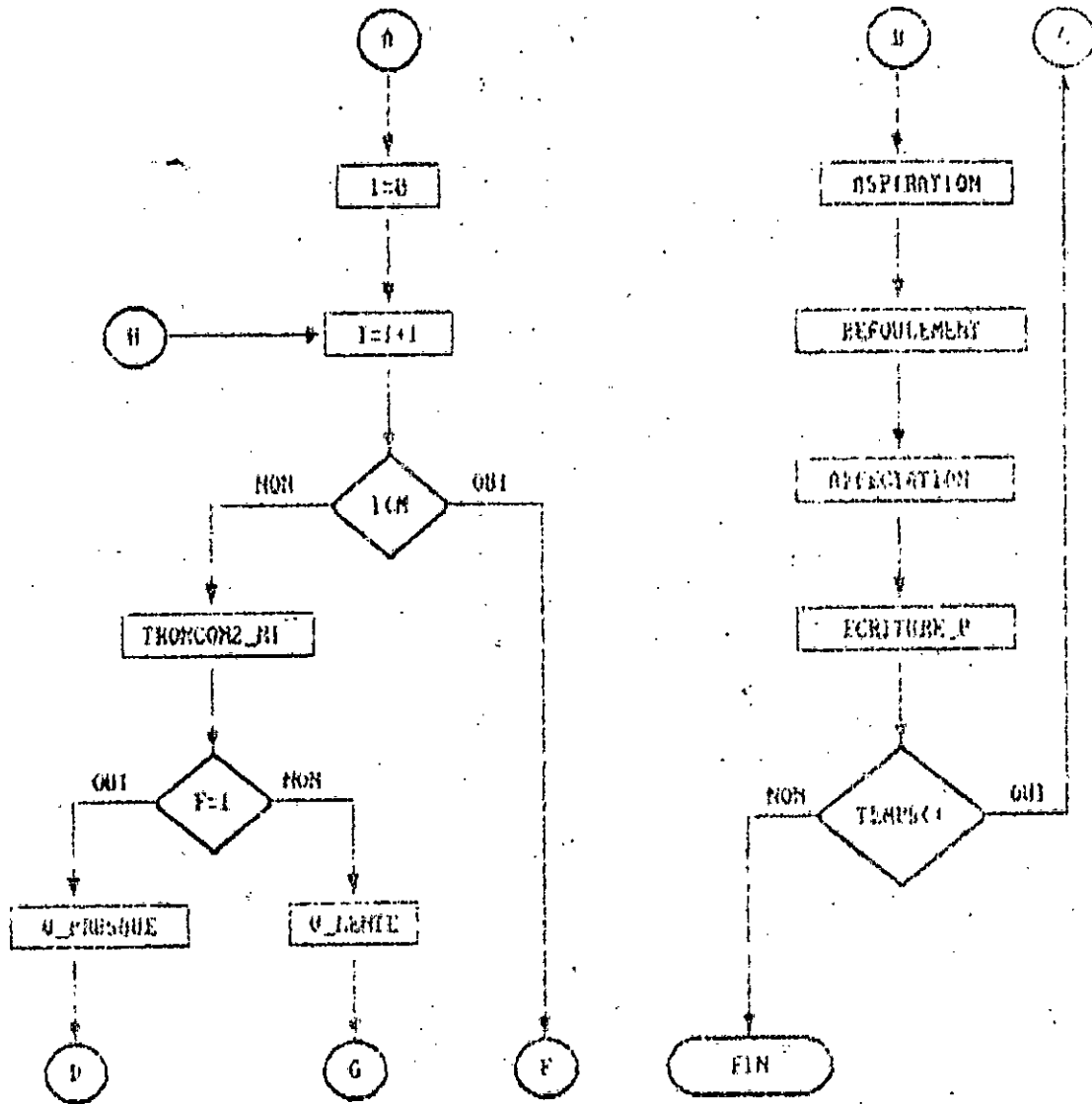
III- ORGANIGRAMME

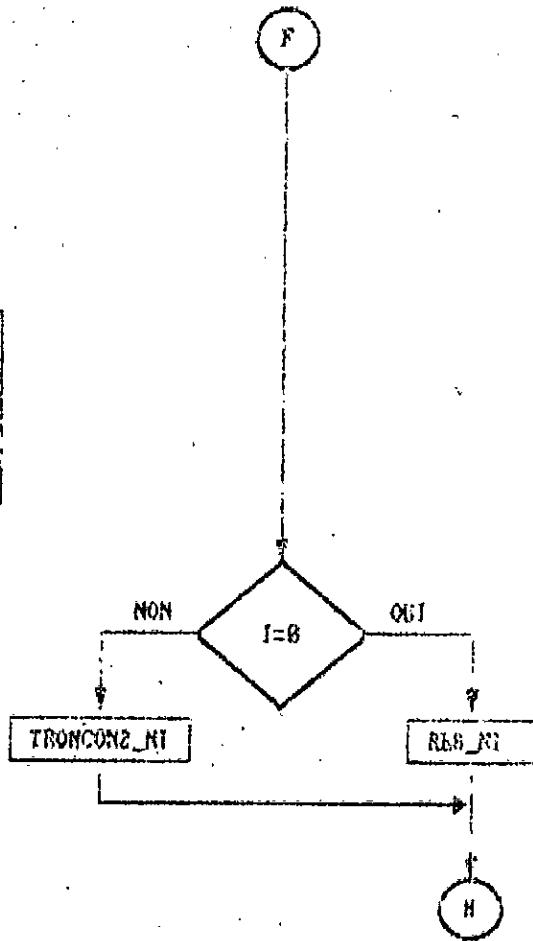
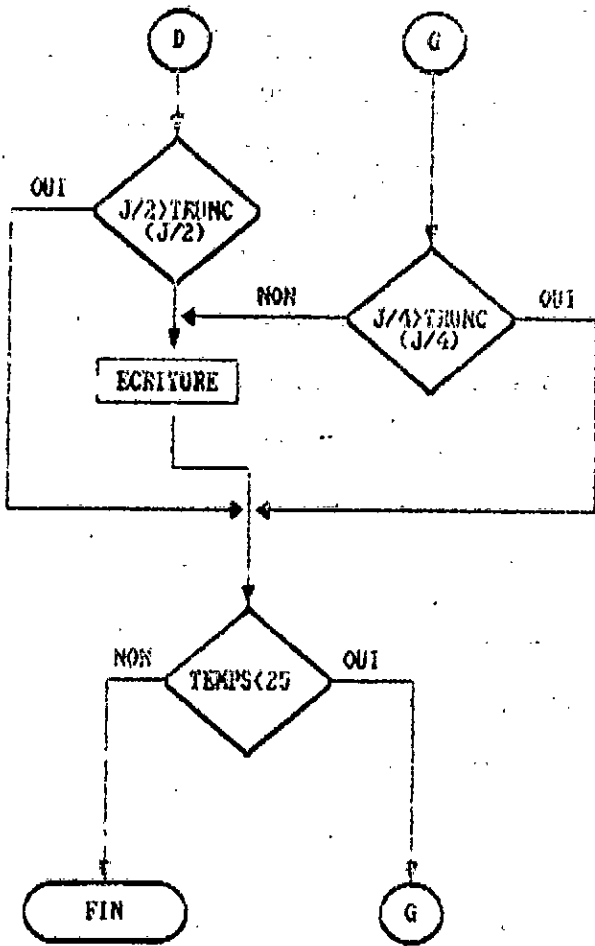
Pour accéder facilement au programme nous avons réalisé un organigramme pour une ample explication.

Les différentes structures de celui-ci sont détaillées dans les pages suivantes.

UNION CARBIDE







ANALYSE DES RESULTATS

I-ANALYSE D'UNE FERMETURE BRUSQUE DE LA VANNE :

On se propose d'étudier la surpression et la dépression dans une conduite d'adduction gravitaire, résultant de la fermeture d'une vanne se trouvant à l'extrémité aval de la conduite alimentée par un réservoir à côte constante à l'amont. Puis de comparer nos résultats à ceux trouvés par TAN, COL [1]

Les caractéristiques de la conduite sont :

Le diamètre = 0.01097 m

La longueur = 91.44 m

Le matériau utilisé est le cuivre

Le module d'élasticité est $1.1 \cdot 10^{10}$ Pa

L'épaisseur est 0.00081 m

La charge au réservoir = 137.46 m

Le coefficient de pertes de charge (f) = 0.02

sachant que la célérité de l'onde est donnée par la relation (page 28).

d'où $C = 1200$ m/s

La vitesse d'écoulement à l'état permanent est

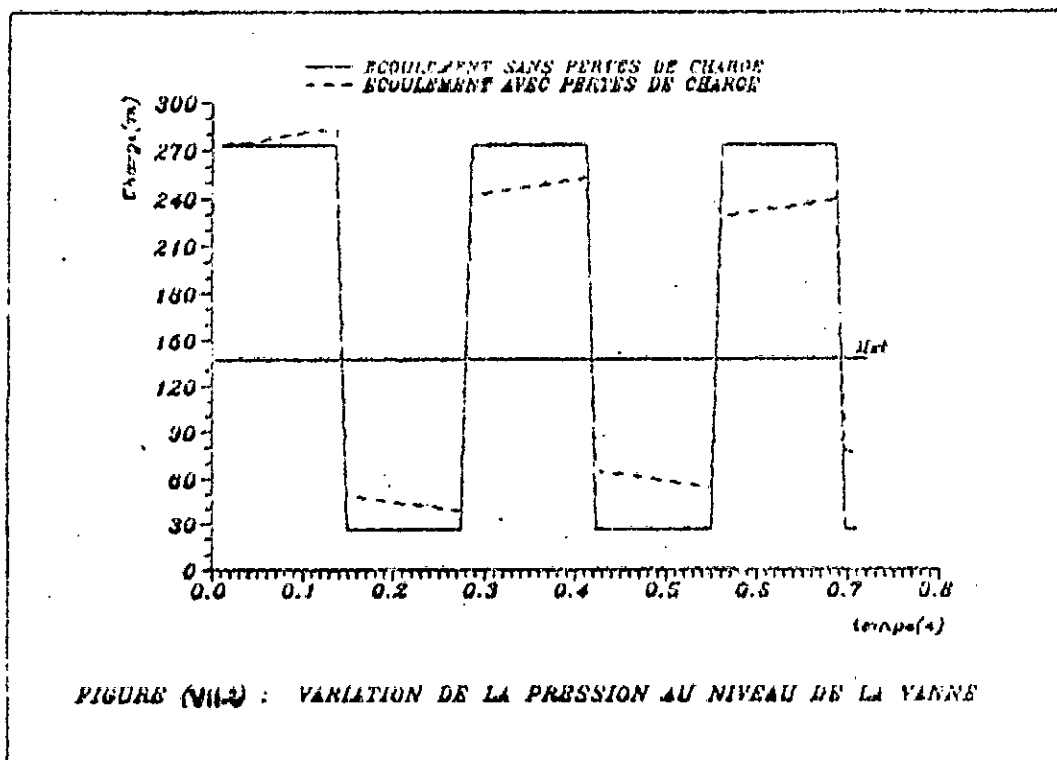
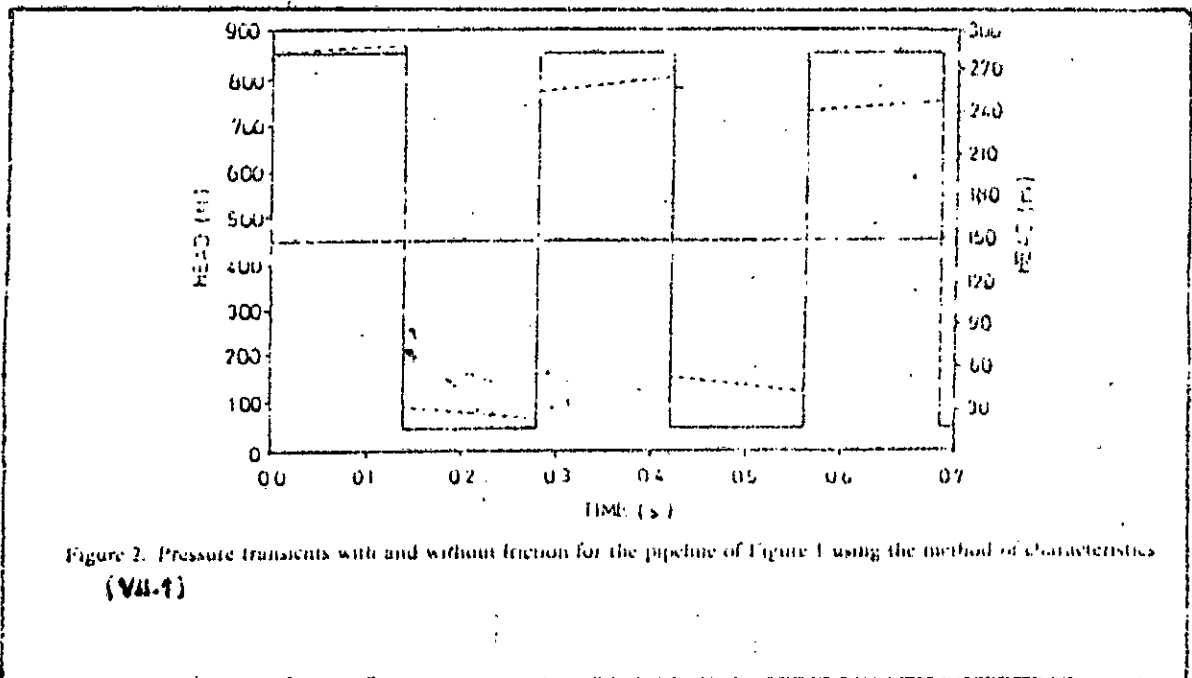
$V_0 = 1$ m/s

Nous présentons sur la figure (VII.1), les résultats obtenus par TAN, COL et sur la figure (VII.2) nos résultats.

De la comparaison des deux graphes nous pouvons déduire ce qui suit :

La surpression et la dépression présentées sur les deux figures oscillent périodiquement autour de la charge statique. La période des oscillations vaut $4L/C$

Le coup de bélier est atteint juste avant le temps caractéristique $2L/C$



Application à la conduite d'AEP de la ville de MEDEA

Analysons le phénomène du coup de bélier dans la conduite de distribution d'eau potable de la ville de MEDEA. L'importance de celui ci dépend de plusieurs paramètres notamment

- Les pertes de charges dans la conduite.
- La nature du matériau de la conduite.
- L'épaisseur de la paroi de la conduite.
- Le régime d'écoulement dans la conduite.

a- Influence des pertes de charge sur le coup de bélier :

Les caractéristiques de la conduite sont :

Le diamètre est 0.3 m

La longueur est 1220 m

L'épaisseur est 0.005 m.

la conduite est en acier

La charge au réservoir est 93 m

La célérité de l'onde est 1164 m/s

Le schéma (VII.3) montre la variation de la charge à la vanne en fonction du temps pour 2 cas de figures :

- Ecoulement sans pertes de charge (courbe en trait plein)
- Ecoulement avec pertes de charge (courbe en pointillés)

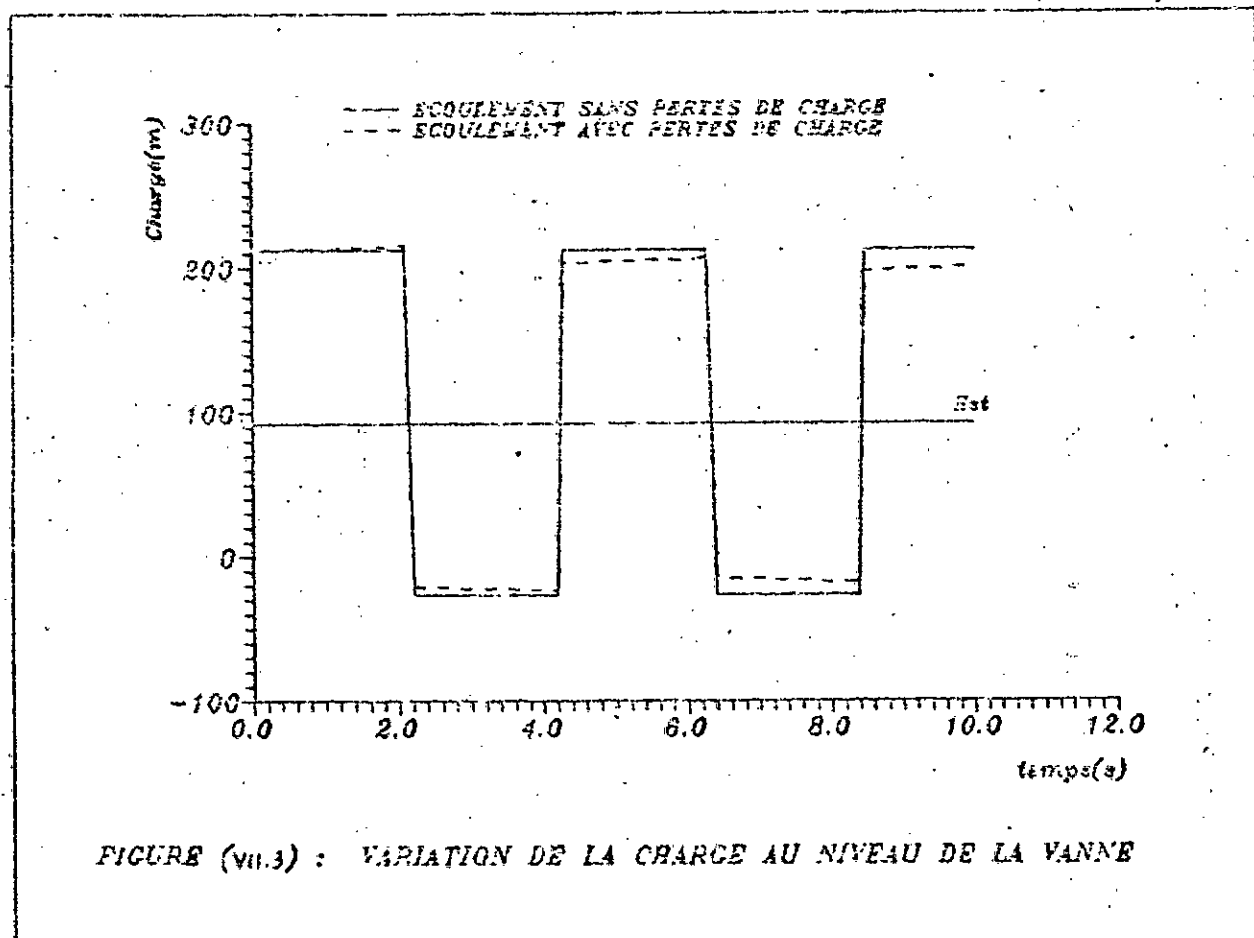
On constate à travers ces résultats que :

- La surpression et la dépression oscillent périodiquement autour de la charge statique, cette période est égale à $4L/C$

- Pour l'écoulement sans pertes de charge, la surpression et la dépression restent constantes au niveau de la vanne. Cette surpression (dépression) reste la même sur toute la conduite

- Pour l'écoulement avec pertes de charge, la surpression et la dépression augmentent respectivement de 0 à $2L/C$ et de $2L/C$ à $4L/C$. Cette augmentation est égale à $(f.L.V^2/(2.g.D))$ []

Ce dernier résultat s'explique par le fait que la perte de charge est transformée en une énergie potentielle provoquée par la propagation de l'onde. Le phénomène de surpression et de dépression s'amortira au cours du temps pour se stabiliser autour de la charge statique.



b-Influence du matériau sur le coup de bélier :

Pour montrer l'influence du matériau sur le coup de bélier, on a considéré deux conduites l'une en fonte l'autre en acier de caractéristiques identiques .

- Conduite en fonte : $E = 1,2 \cdot 10^8 \text{ Pa}$
 $C = 1008 \text{ m/s}$
- Conduite en acier : $E = 2,0 \cdot 10^8 \text{ Pa}$
 $C = 1164 \text{ m/s}$

Le schéma (VII.4) montre deux cas de figure de variation de la charge à la vanne en fonction du temps :

- Pour une conduite en fonte.
- Pour une conduite en-acier.

On constate que :

- La surpression et la dépression pour la conduite en acier sont plus importantes que celles de la conduite en fonte.
- La période des oscillations est plus grande pour la conduite en fonte

Ces deux résultats s'expliquent par le fait que :

Le module d'élasticité du matériau étant proportionnel à la célérité des ondes , de plus celle ci est proportionnelle à la surpression maximale et est inversement proportionnelle à la période des oscillations.

Puisque le module d'élasticité de l'acier ($E = 2,0 \cdot 10^8 \text{ Pa}$) est plus grand que celui de la fonte ($E = 1,2 \cdot 10^8 \text{ Pa}$), d'où les résultats précédents.

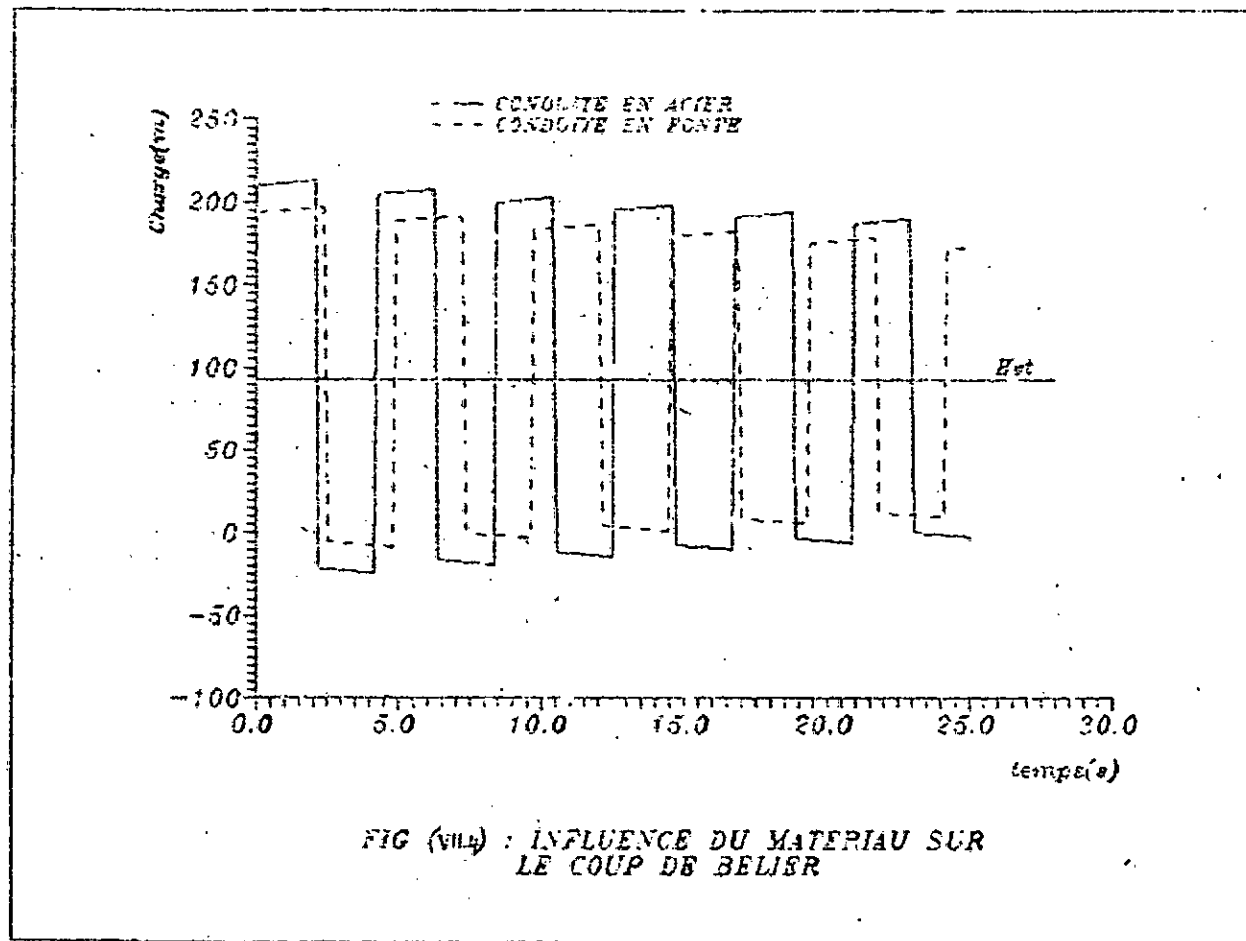


FIG (VII) : INFLUENCE DU MATERIAU SUR LE COUP DE BELIER

influence de l'épaisseur de la conduite sur le SDD de
béliet

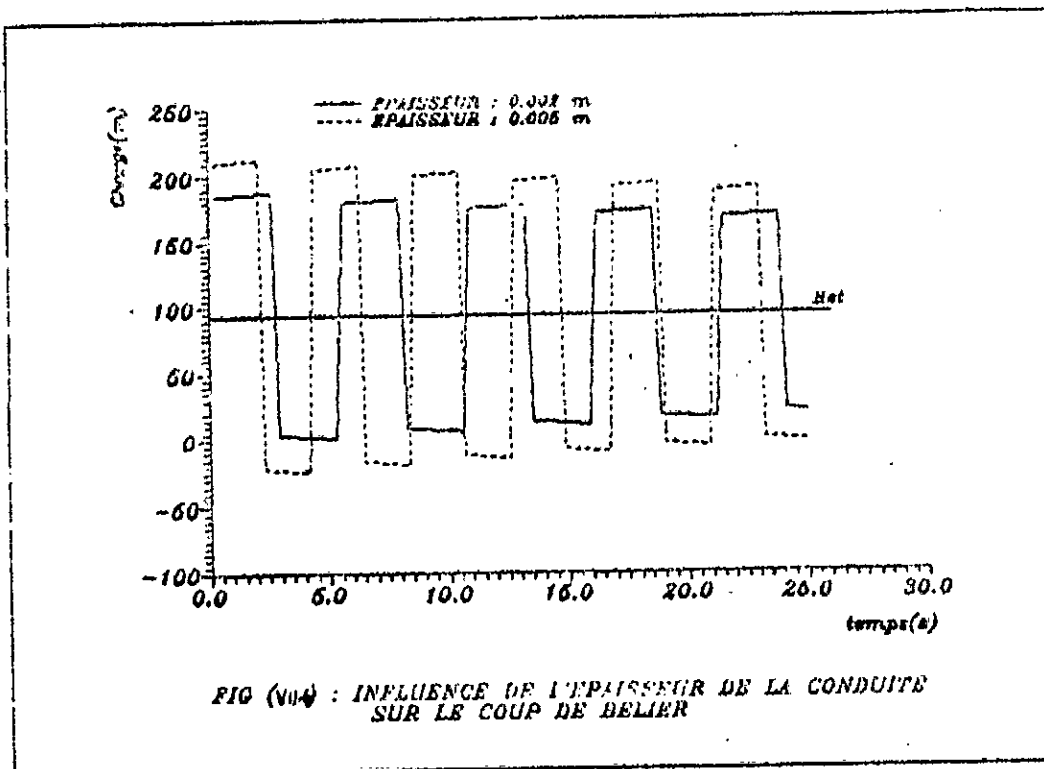
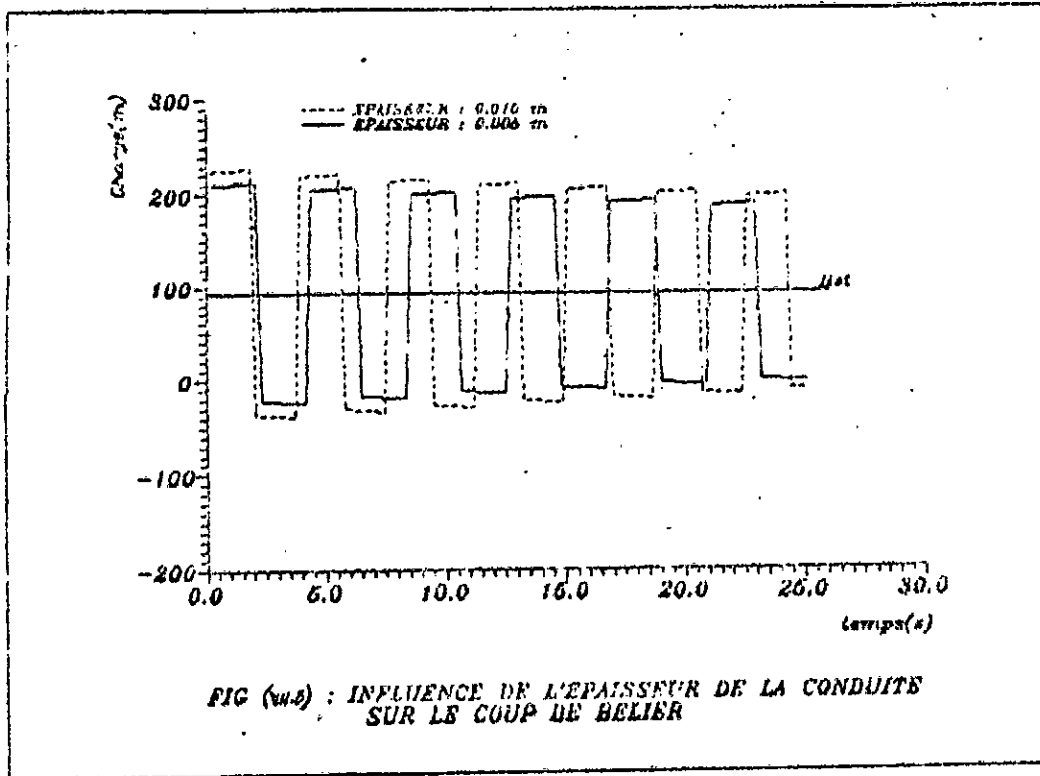
Les figures (VII.5), (VII.6), montrent la variation de la surpression et de la dépression en fonction du temps, pour trois épaisseurs différentes (0,002 m ; 0,005 m ; 0,01 m), en maintenant les caractéristiques de la conduite en acier constantes.

- | | |
|-------------------------|--------------|
| - Epaisseur e = 0.002 m | C = 918 m/s |
| - Epaisseur e = 0.005 m | C = 1164 m/s |
| - Epaisseur e = 0.01 m | C = 1303 m/s |

On constate que :

- Lorsque l'épaisseur de la paroi augmente, la surpression (dépression) augmente, tandis que pour la période d'oscillations diminue.

Ceci peut être expliqué de la même manière que précédemment dans (b).



d-Influence du régime d'écoulement sur le coup de bélier

L'écoulement dans une conduite en présence du coup de bélier est turbulent. Pour cela, on a considéré deux régimes d'écoulements :

- Ecoulement turbulent lisse.
- Ecoulement turbulent rugueux.

Le schéma (VII.7) qui représente ces deux cas de figure montre la variation de la charge à la vanne en fonction du temps.

On constate que :

L'amortissement du phénomène est beaucoup plus important pour l'écoulement turbulent rugueux. Ceci s'explique par le fait que cet écoulement présente un coefficient de pertes de charge plus important.

-Pour l'écoulement turbulent lisse, le coefficient de pertes de charge donné par la formule de BLASIUS est :

$$f = \frac{0.3164}{Re} = 0.01351$$

-Pour l'écoulement turbulent rugueux, la variation du (f) ne dépend que de la rugosité, celui ci est donné par la formule de NIKURADZE :

$$f = 8.g. \left[0.000253 + \frac{0.0000647}{D} \right] = 0.0067$$

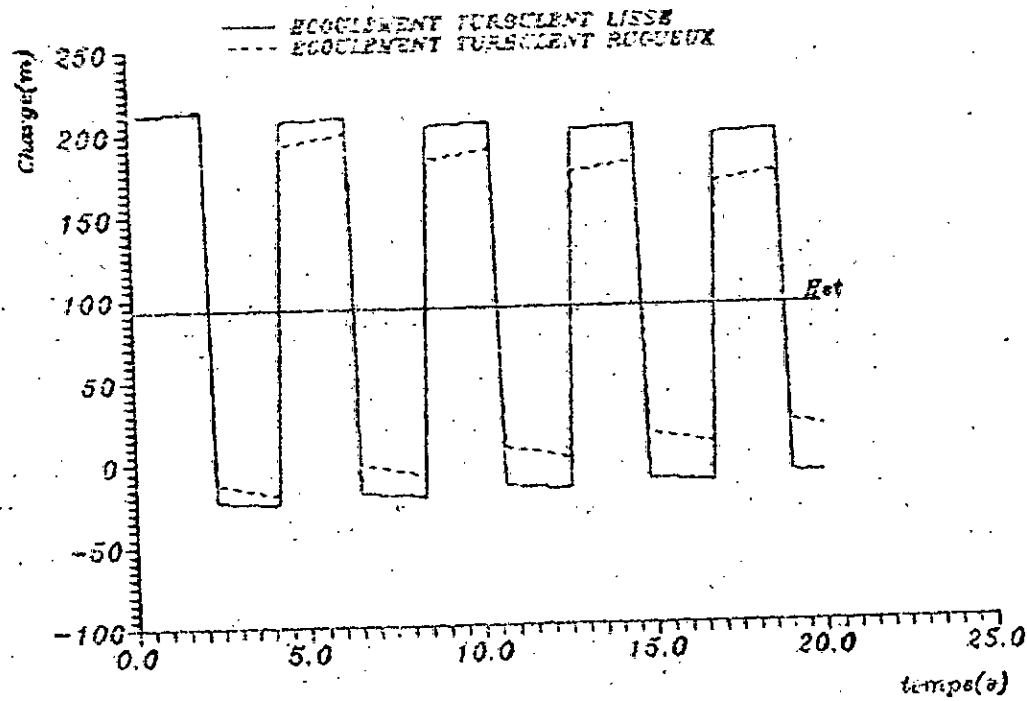


FIG (VII): INFLUENCE DU REGIME D'ECOULEMENT
SUR LE COUP DE BELIER

II- ANALYSE D'UNE FERMETURE LENTE DE LA VANNE

Pour pouvoir comparer nos résultats avec ceux trouvés par d'autres chercheurs [1], nous avons étudié le cas d'une conduite de caractéristiques :

- La longueur est 600 m
- La diamètre est 0.5 m
- La cote du plan d'eau dans le réservoir est 150 m
- La fermeture de la vanne s'effectue suivant la loi $(1-t/T_m)^{**b}$ avec un temps de manœuvre de 2.1 s

où $1.4 < b < 1.6$

Pour notre cas on choisira $b = 1.5$

- La célérité des ondes est $C = 1200$ m/s

Nous présenterons sur la figure (VII.8) les résultats trouvés par L.Streeter [1] et sur la figure (VII.9) nos résultats.

De la comparaison de ces deux graphes , nous pouvons déduire ce qui suit :

- Dans les deux courbes la surpression et la dépression , représentées sur les deux figures oscillent autour de la charge statique.

- La charge augmente depuis l'état permanent jusqu'à la surpression maximale qui est atteinte juste avant la fermeture totale de la vanne.

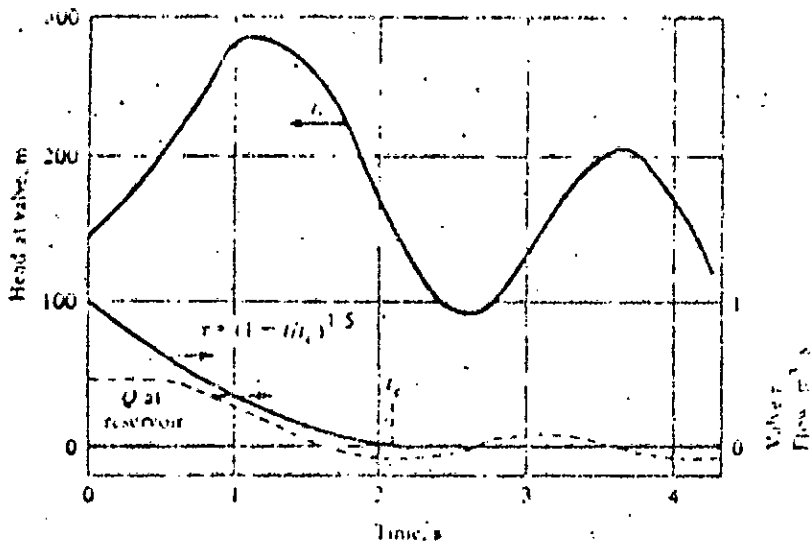


Figure 7-9 Response in single pipeline due to valve closure.

VII.8

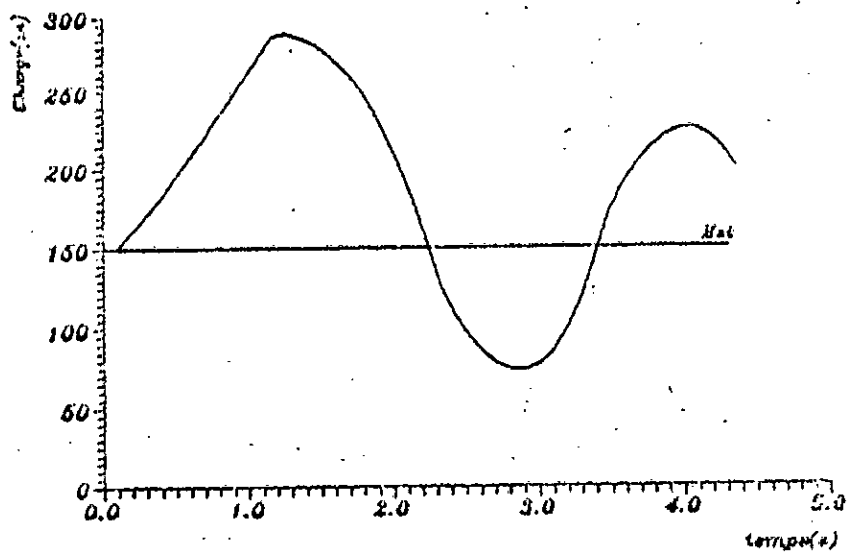


FIGURE (VII.9) : VARIATION DE LA CHARGE AU NIVEAU DE LA VANNE POUR UN TEMPS DE MANOEUVRE ($T_m = 2,1$ seconde)

ANALYSE DE LA LOI DE FERMETURE DE LA VANNE EN CAS DE COUP DE BÉLIER

Pour mettre en évidence l'influence de la loi de manoeuvre sur le coup de bélier, nous avons pris deux conduites en série dont les caractéristiques sont :

$$\begin{array}{ll} L1 = 2500 \text{ m} & D1 = 0,10 \text{ m} \\ L2 = 2000 \text{ m} & D2 = 0,15 \text{ m} \end{array} \quad e1 = e2 = 0,005 \text{ m}$$

Les deux figures (VII.10), (VII.11) présentent la variation de la surpression et de la dépression à la vanne en fonction du temps pour une manoeuvre lente (de 20 s et de 40 s) et pour une loi de fermeture donnée :

- La loi de fermeture $(1-t/T_m)$ est présentée en pointillet

- La loi de fermeture $(1-t/T_m)$ est présentée en trait plein

On constate que pour un temps de manoeuvre donné :

-La surpression maximale pour la loi de fermeture linéaire est plus importante.

-Celle ci a lieu après l'apparition du coup de bélier pour la loi non linéaire.

-Plus le temps de manoeuvre est grand, plus l'écart de surpression des deux lois et du temps d'apparition de celle ci, est important.

Ceci peut être expliquer par le fait que la section suivant la loi non lineaire varie plus rapidement au debut et plus lentement vers la fin , ce qui crée donc un coup de bélier moins important.

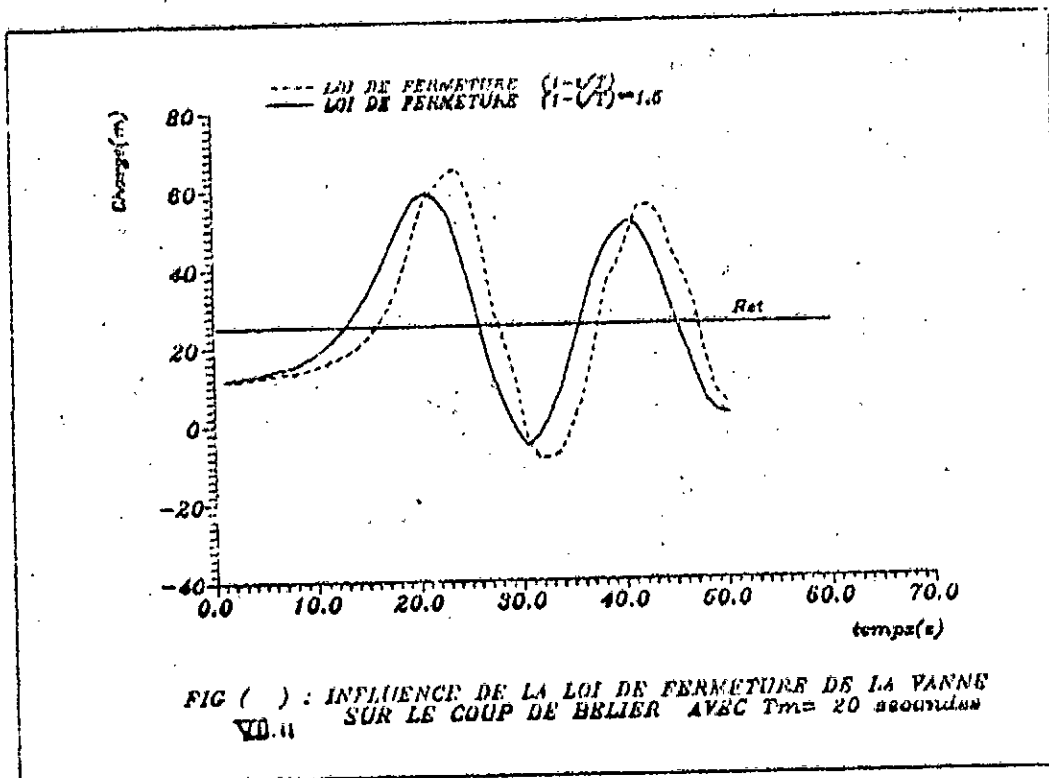
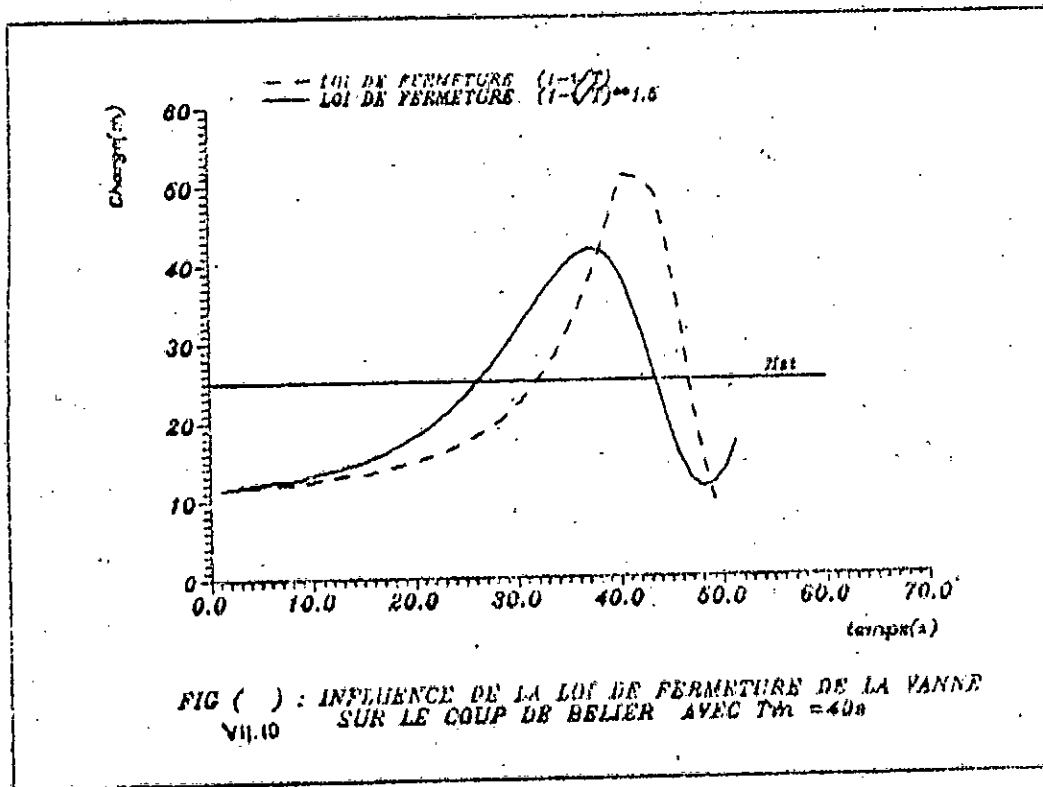
Cette surpression maximale peut être déduite directement de la formule théorique établie au chapitre (II) en effet :

$$\frac{H_{max}}{H_0} = 1 + K^2/2 + K^2 \cdot \sqrt{0.25 + 1/K^2}$$

K depend du temps de manoeuvre et de la loi de fermeture.

Dans ce qui suit, nous proposerons la fermeture de la vanne suivant loi :

$$f(t) = (1-t/T_m)^{1.5}$$



b-Influence du temps de manoeuvre sur le coup de bélier

Les figures (VII.12), (VII.13), (VII.14), (VII.14) montrent la variation de la charge à la vanne en fonction du temps pour des temps de manoeuvre différents.

On constate que :

- Le coup de bélier diminue lorsque le temps de manoeuvre augmente.
- Celui ci est atteint juste avant la fermeture totale de la vanne.
- Après la fermeture totale de la vanne, le phénomène oscille autour de la charge statique en s'amortissant au cours du temps.

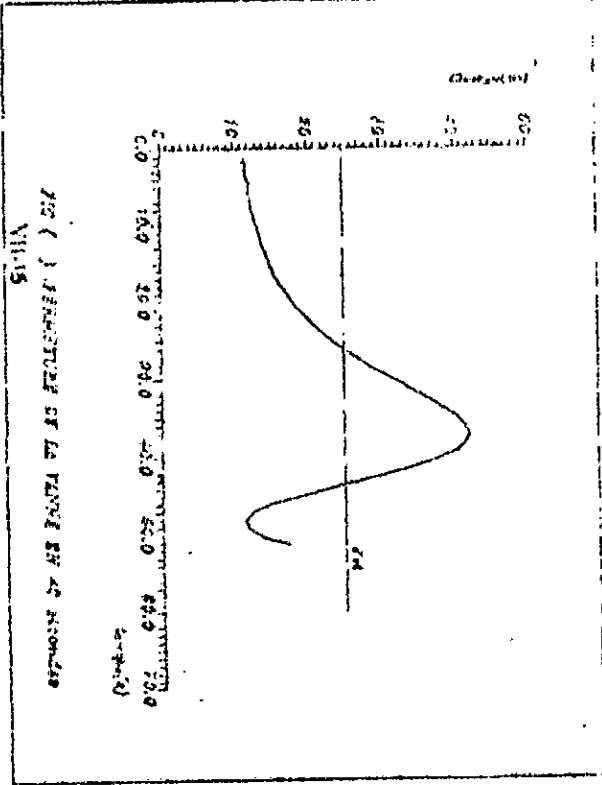
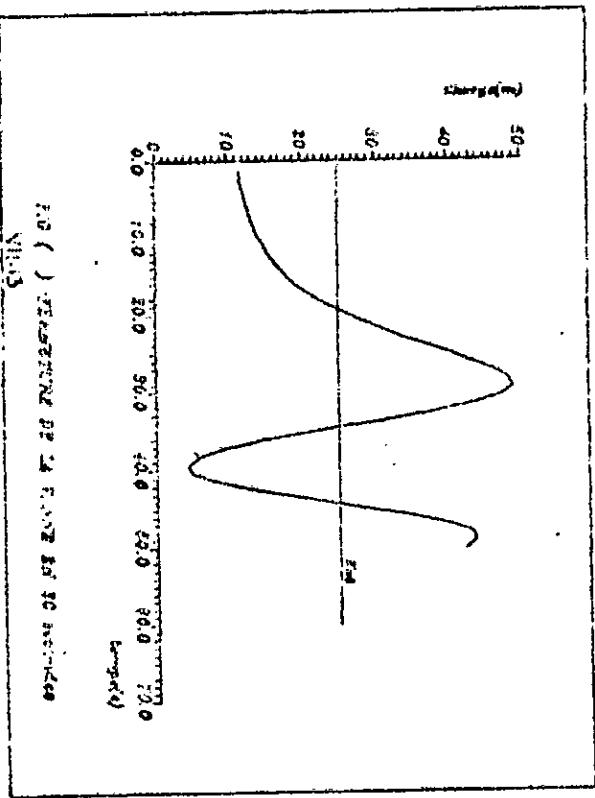
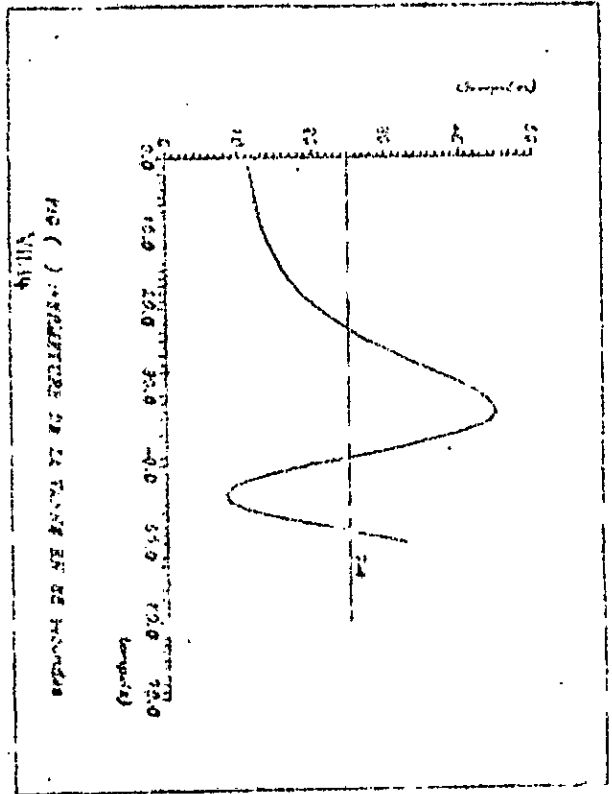
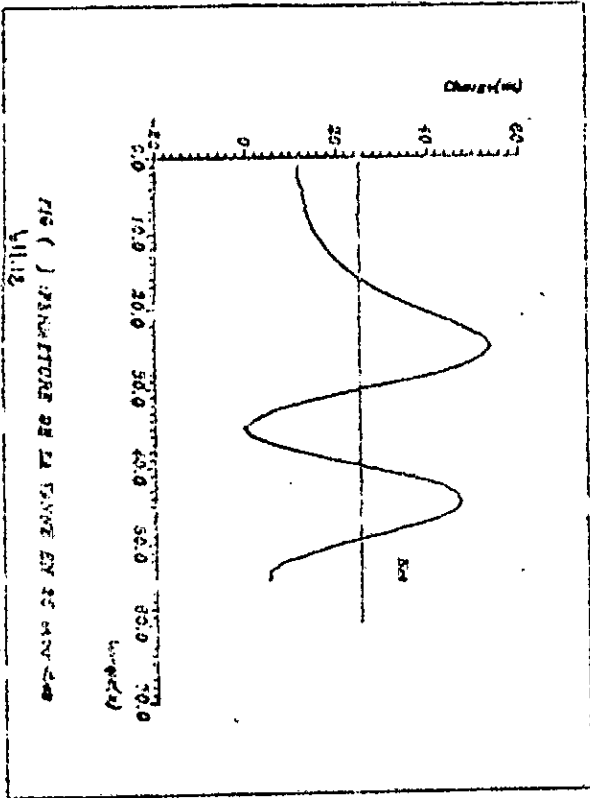
Ceci s'explique par le fait que :

Lors d'une succession de fermetures partielles de la vanne, des ondes de plus en plus importantes sont créées, elles ci sont réfléchies au niveau du réservoir en ondes de dépression

En arrivant à la vanne elle ne peuvent se superposer aux surpression encore en création, car la vanne est toujours ouverte et donc elles ne peuvent que s'échapper vers l'extérieur.

La superposition de la surpression et de la dépression n'aura lieu qu'après la fermeture totale de la vanne.

A partir de ce moment le phénomène devient oscillatoire analogue à celui d'une fermeture brusque de la vanne.



c- Loi de variation du coup de bélier en fonction du temps de manoeuvre

La figure (VII.15) , montre la variation du coup de bélier à la vanne en fonction du temps de manoeuvre pour des coefficients de perte de charge différents

On remarquera que

- Le coefficient de pertes de charge n'influe pas sur le coup de bélier lorsque le temps de manoeuvre devient assez important.

- Le coup de bélier varie en fonction du temps de manoeuvre suivant une loi que l'on pourra écrire sous la forme :

$$H_{max} = H_{max} \cdot \text{EXP} (F(f) \cdot T_m)$$

lente brusque

où $F(f)$: fonction du coefficient de perte de charge.

T_m : le temps de manoeuvre de la vanne.

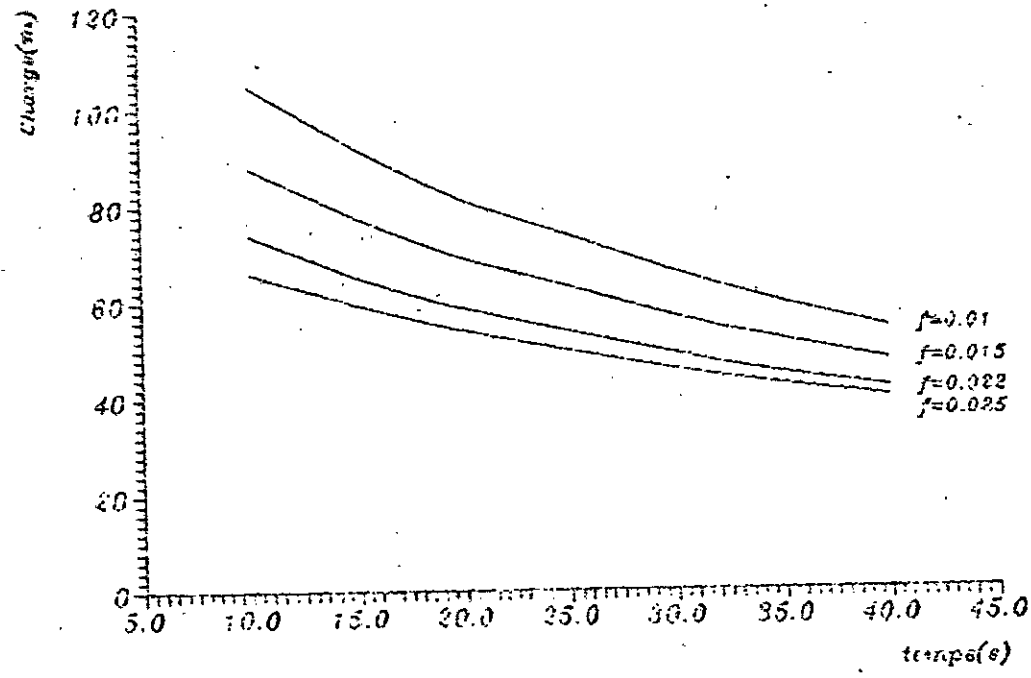


FIG () : VARIATION DE LA SURPRESSION MAXIMALE AU NIVEAU
 VII.16 DE LA VANNE EN FONCTION DU TEMPS DE MANOEUVRE

III- ANALYSE DU COUP DE BELIER POUR L'ARRÊT BRUSQUE D'UNE POMPE

La figure (VII.16) ,montre la variation de la charge en fonction du temps pour un arrêt brusque de la pompe .

Les caractéristiques de la pompe étudiée sont :

La charge manométrique est 77.5 m

Le débit nominal est 0.89 m³/s

La vitesse de rotation de la roue est 970 rpm

Les caractéristiques de la conduite de refoulement sont :

Le diamètre est 1 m

La longueur est 800 m

Sur la figure on constate que :

- Comme la fermeture de la vanne , la variation de la surpression (dépression) est un phénomène périodique de période (4.L/C).

- Les valeurs des surpressions et des dépressions sont plus importantes pour l'arrêt d'une pompe que pour la fermeture de la vanne ,ceci s'explique par l'inertie relativement grande donnée par la pompe au liquide.

- Contrairement à la fermeture d'une vanne la variation de la charge au niveau de la conduite (juste après la pompe) commence par une dépression.Ce phénomène est dû à facteurs :

1-La montée de la dernière colonne liquide qui continue son mouvement grâce à son inertie en engendrant derrière elle une dépression .

2-Cette dernière colonne est d'autre part mal alimenté par la pompe à cause de son arrêt brusque.

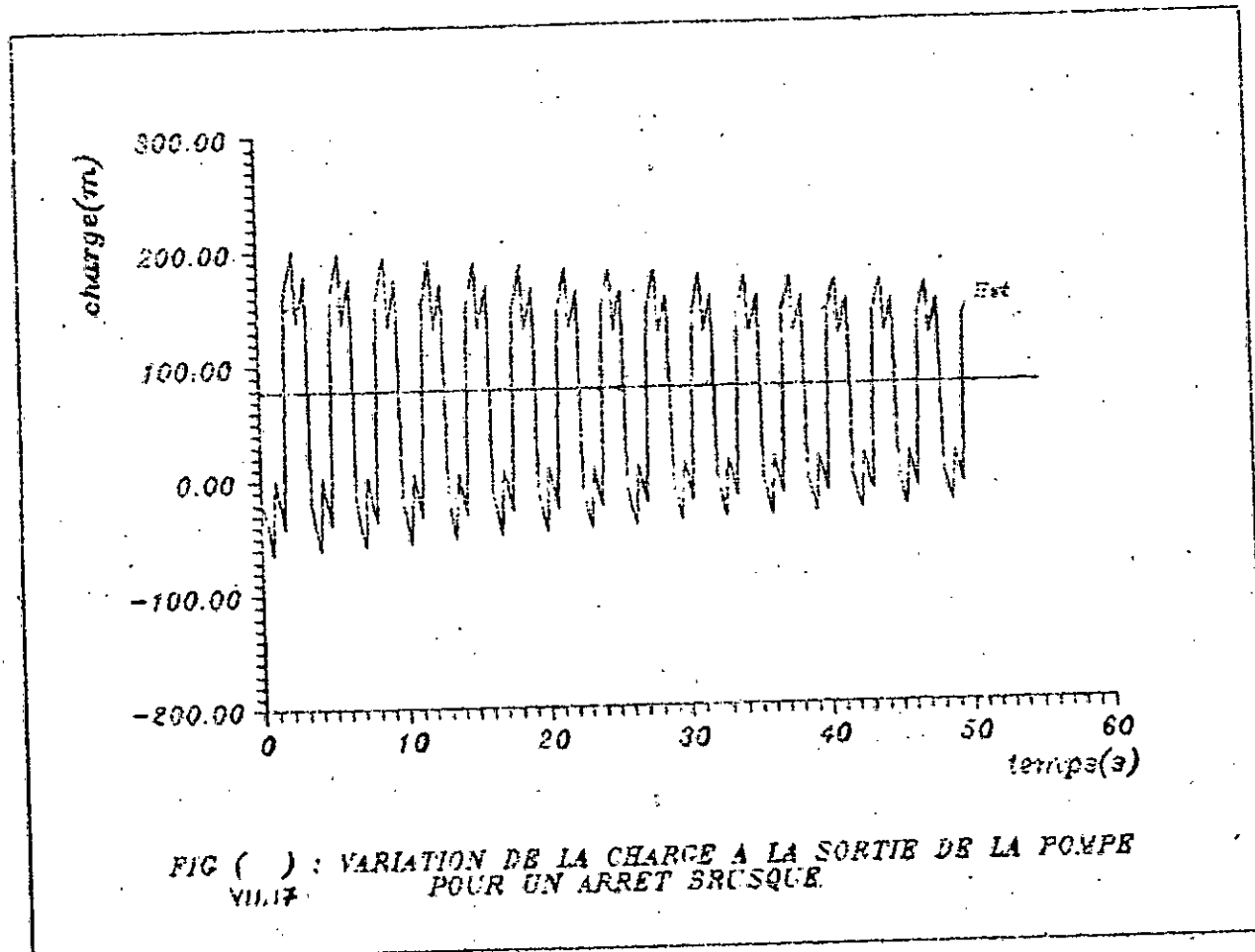


FIG () : VARIATION DE LA CHARGE A LA SORTIE DE LA POMPE
 POUR UN ARRET BRUSQUE.

DE PROTECTION

INTRODUCTION :

Les coups de béliers provoqués par des variations rapides du débit, peuvent être dus à des manœuvres de vanne, normales ou incorrectes, à l'arrêt prévu ou intempêtif de pompes d'alimentation, et plus rarement à des accidents survenant à la conduite (rupture ou obstruction par un corps étranger).

Pour protéger les tuyaux il convient d'empêcher, au moyen de disposition ou de dispositifs spéciaux appelés antibéliers, que la pression ne dépasse celle qui peut être supportée sans inconvénient; les antibéliers seront choisis et placés en fonction des risques contre lesquels on désire protéger les tuyaux.

Le rôle de ces appareils de protection consiste à absorber ou compenser en grande partie la variation de débit qui est elle-même à l'origine de régime transitoire.

Il existe plusieurs sortes d'appareils pour se protéger contre les coups de béliers : des antibéliers spécifiques, qui permettent de combattre un seul de ces risques, et d'autres qui ont un caractère universel, sous réserve de leur emplacement correct.

I-ANTIBELIER SPECIFIQUE :

Pour combattre les coups de bélier dus à la fermeture de la vanne d'alimentation, il convient de limiter la vitesse de fermeture de celle-ci.

Cette solution, qui ne protège pas contre l'arrêt intempêtif (toujours possible) d'une pompe, et particulièrement recommandée dans le cas des adductions purement gravitaires.

II-ANTIBELIERS NON SPECIFIQUES :

S'il peut être avantageux d'empêcher le coup de bélier de se produire, en revanche on ne lutte ainsi, comme nous venons de le voir, que contre une seule cause possible.

Les dispositifs sont installés en amont de la conduite et à amortir les ondes de pression, indépendamment de leur origine. Bien entendu, ils laissent ces ondes se propager entre le point de formation et l'endroit où ils sont installés.

1-SOUPAPES DE DECHARGES :

Une soupape de décharge est un appareil de robinetterie qui s'ouvre dès que la pression dans la conduite dépasse une valeur réglée à l'avance, grâce le plus souvent à un ressort taré; elle laisse alors passer un certain débit, ce qui superpose à l'onde de pression positive une onde négative.

Ce dispositif ne combat donc que les surpressions et non les dépressions; il nécessite une maintenance pour assurer un bon état de fonctionnement. Son prix peu élevé et la possibilité de le placé en divers points d'une conduite longue le rendent utilisable lorsque le point de formation du coup de bélier est incertain et que seules les surpressions sont initialement à craindre.

2-VENTOUSES :

Une ventouse est un appareil de robinetterie dont le rôle est tout d'abord d'évacuer l'air contenu dans les conduites. Cet air est le produit d'une dépression au-delà de la pression de vapeur du fluide considéré, l'évacuation de celui-ci peut se faire tout en limitant le coup de bélier de fin de purge, grâce à un orifice calibre contrôlant la vitesse maximale de sortie de l'air.

Les soupapes et les ventouses sont des appareils dont les diamètres de la tubulure sont fonction du diamètre de la canalisation principale.

Diamètre de la canalisation (m)	Diamètre de la tubulure de raccordement (m)	
	Décharge	Ventouse
0.15 - 0.30	0.06	0.027
0.35	0.06	0.040
0.40 - 0.50	0.10	0.040
0.50	0.15	0.040
0.60	0.15	0.060
0.70 - 0.80	0.20	0.060
0.90 - 1.25	0.30	0.100
1.50	0.40	0.100

LE MÉCANISME ANTI-BELIER

L'appareil que nous allons présenter possède l'avantage d'être efficace contre les surpressions et les dépressions à la fois. De plus, il peut répondre à des conditions d'encombrement qui rendent difficile dans certains cas l'utilisation des autres moyens.

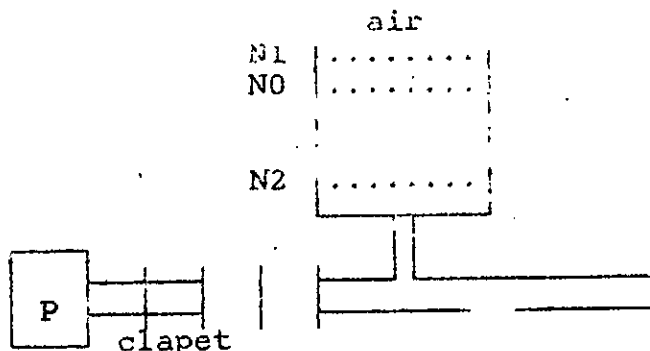
Cet amortissement est simplement constitué d'un tronçon très déformable placé en série avec la conduite à protéger; d'où l'appellation "en ligne". L'appareil joue son rôle d'antibelier en réduisant la célérité de propagation sur une partie du parcours de l'onde.

4-RESERVOIR ANTIBELIER :

Pour les installations de pompage de débit plus ou moins faibles (quelques litres à quelques mètres/secondes), la protection est le plus souvent assurée par un réservoir antibelier, qui a l'avantage de pouvoir être installé à proximité des pompes et des vannes susceptibles d'engendrer le coup de bélier.

Le dispositif permet de lutter autant contre les dépressions que les surpressions, en effet lorsque la pression a tendance à baisser au pied du réservoir, celui-ci fournit du liquide et permet d'ajuster la pression en fonction du niveau dans le réservoir; l'inverse se produit dans le cas contraire.

Il est nécessaire de s'assurer que le volume d'air est toujours suffisant et de le renouveler périodiquement, car l'eau sous pression dissout longuement l'air.



N0: Niveau en l'absence de coup de bélier.
 N1: Niveau en fin de surpression.
 N2: Niveau en fin de dépression.
 P : Pompe.

L'estimation du volume U_0 , au repos du matelas d'air nécessaire a été donné par M. Vibert, dans l'hypothèse d'une évolution isotherme de l'air, par la formule:

$$U_0 = \text{S.L.} \cdot \frac{v_0^2}{2 \cdot H_0} / f(H_{\min}/H_0)$$

avec :

H_0 et H_{\min} : Pressions absolues normales et minimales dans la conduite au niveau du réservoir.

$$f(H_{\min}/H_0) = H_0/H_{\min} - 1 - \ln(H_0/H_{\min})$$

L'abaque "à points alignés" représenté par la figure () permet de déterminer directement le volume U_0 , en reliant les échelles de gauche ($0. v_0^2/H_0$) et de droite (H_{\min}/H_0) par un trait rectiligne, ce qui donne le rapport ($U_0/\text{S.L.}$) sur l'échelle du milieu. Cet abaque associe à la pression minimale la pression maximale correspondante, réalisé par la même installation.

Pour amortir les oscillations spontanées du système, on a souvent intérêt à disposer une perte de charge asymétrique, en utilisant un ajutage de BORDA. Ce dispositif consomme l'énergie excédentaire du système au bout de plusieurs oscillations.

Le choix de la valeur admissible de la surpression est orienté, partiellement, par des considérations économiques: une protection très rudimentaire par des considérations économiques conduit à adopter des conduites résistant à une surpression élevée; au contraire, une très faible surpression nécessite un réservoir vaste et de coût très élevé. Le choix tiendra compte des pressions normalisées de service des tuyauteries; il sera effectué par l'installateur responsable de l'étude de protection contre les coups de béliers.

III- APPLICATION :

1- Application pour la conduite de distribution de Medea

Le cas simulé sur les figures (VIII.1), (VIII.2) sont celui de la fermeture instantanée d'une vanne se trouvant à l'extrémité aval d'une conduite alimentée par un réservoir à cote constante à l'amont.

D'après le tableau présenté ci-dessus, la soupape et la ventouse nécessaires pour amortir le phénomène dans cette conduite sont :

- Soupape de diamètre de tubulure de raccordement 0.6 m
- Ventouse de diamètre de tubulure de 0.027 m

La courbe en créneaux est la courbe de référence représentant l'évolution de la charge à l'aval de la conduite après fermeture de la vanne.

L'autre courbe montre l'influence de l'introduction des soupapes et des ventouses en limitons la surpression dans la conduite à (150 m), et la pression de vapeur absolue à (2.4 m).

On constate que la surpression admissible n'est atteinte qu'au début du phénomène du coup de bélier et que ce dernier se stabilise rapidement. D'où la nécessité des systèmes de protection.

b- En introduisant le système en ligne :

La conduite est constituée de deux tronçons :

$$L_1 = 1220 \text{ m} \quad D_1 = 0.3 \text{ m}$$

$$L_2 = 5 \text{ m} \quad D_2 = 0.3 \text{ m}$$

Dans le premier tronçon, le module d'élasticité et la célérité sont ($E_1 = 2,0 \cdot 10^9 \text{ Pa}$; et $C_1 = 1130 \text{ m/s}$), par contre dans le second ($E = 1,6 \cdot 10^9 \text{ Pa}$), plusieurs célérités sont considérées $C_2 = 50 \text{ m/s}$; $C_2 = 20 \text{ m/s}$; $C_2 = 5 \text{ m/s}$

La courbe en créneaux est une courbe de référence représentant l'évolution de la charge à l'aval de la conduite après la fermeture de la vanne; ceci en l'absence du tronçon L2.

Les autres courbes montrent l'influence de l'introduction du second tronçon (L2) sur l'évolution de la charge toujours au même point.

On constate une nette réduction de la surpression avec la diminution de la célérité (C2).

2-APPLICATION POUR UN POMPES, RESERVOIR A

Si nous limiterons la pression maximale admissible dans la conduite à (130 m).

On a :

$$\frac{H_{\max}}{H_0} = \frac{130}{70} = 1.86$$

et

$$\frac{V_0^2}{2.g} = \frac{1}{2.9,81} = 0,051 \text{ m}$$

Si nous relient par une droite , les deux points dans l'abaque de VIBERT, on a :

$$\frac{U_0}{L.A} = 0.0045$$

d'où

$$U_0 = 2,8 \text{ m}^3$$

Afin qu'il reste encore de l'eau dans le réservoir même si U_0 atteint sa valeur maximale, on prendra le volume total du réservoir de (4 m³) repartit comme suit :

2,8 m³ d'air

1,2 m³ d'eau

dans les conditions normales .

Il suffira d'examiner si , en raison du profil en long de la conduite cette dépression ne conduit pas à une cavitation en certains points .

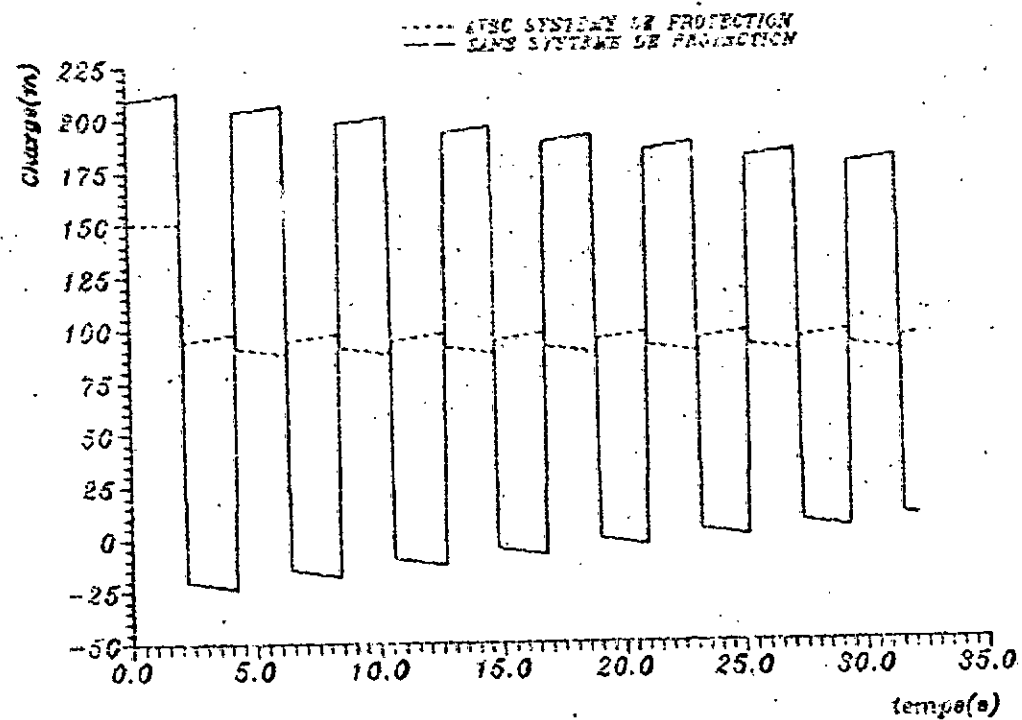


FIGURE () : VARIATION DE LA CHARGE AU NIVEAU DE LA VANNE
 AVEC SYSTEME DE PROTECTION

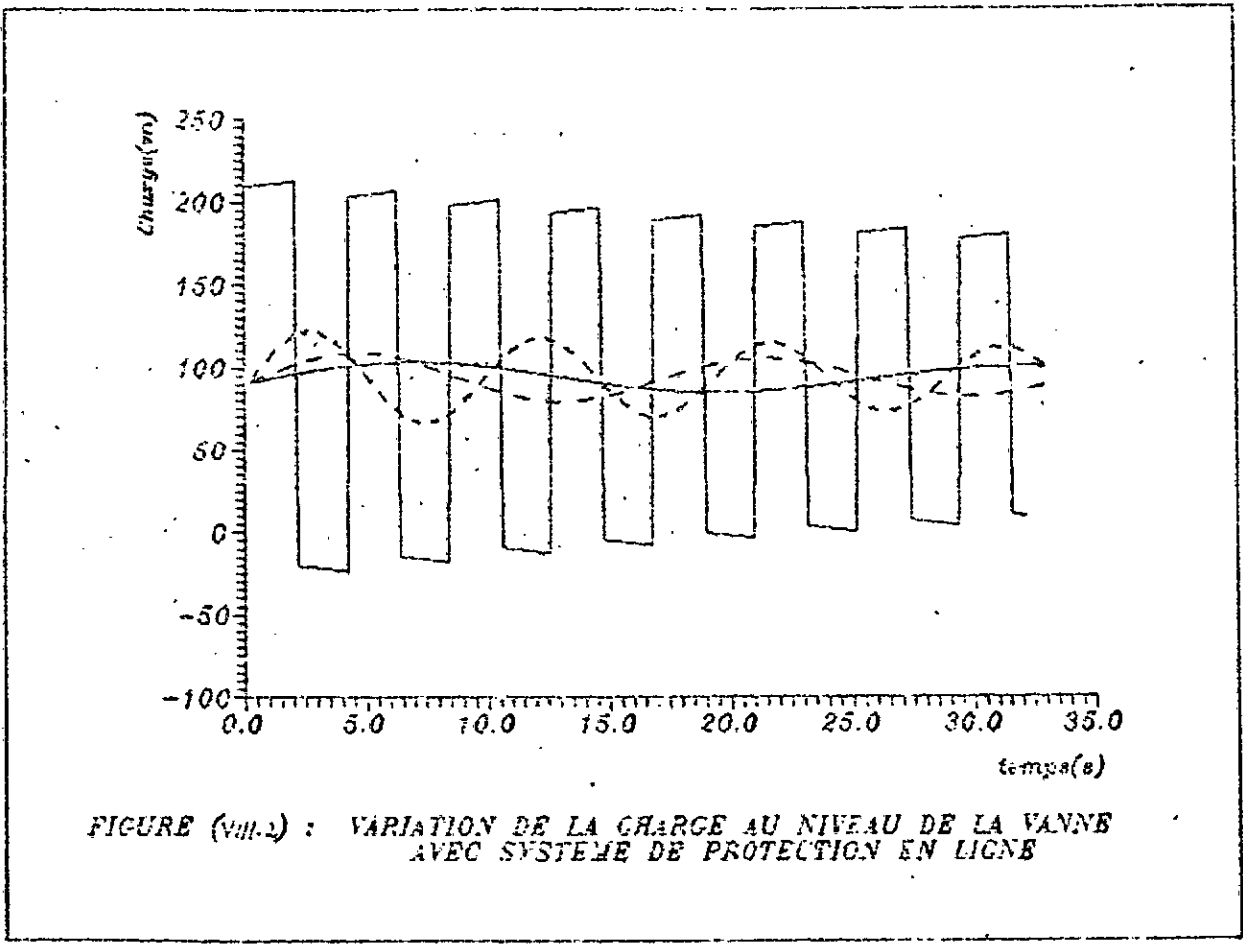


FIGURE (VIII.2) : VARIATION DE LA CHARGE AU NIVEAU DE LA VANNE AVEC SYSTÈME DE PROTECTION EN LIGNE

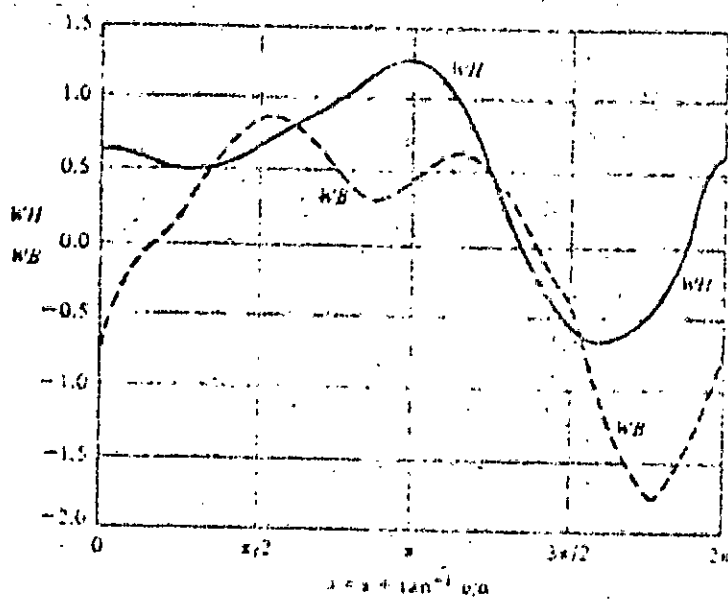


Figure 63. Complete pump characteristics (double suction pump, $N_s = 1,220 \text{ (rpm)}^3 / \text{m}^3$)

ABAQUE

DE M. VIBERT

POUR LE CALCUL SIMPLIFIÉ
DES RÉSERVOIRS D'AIR

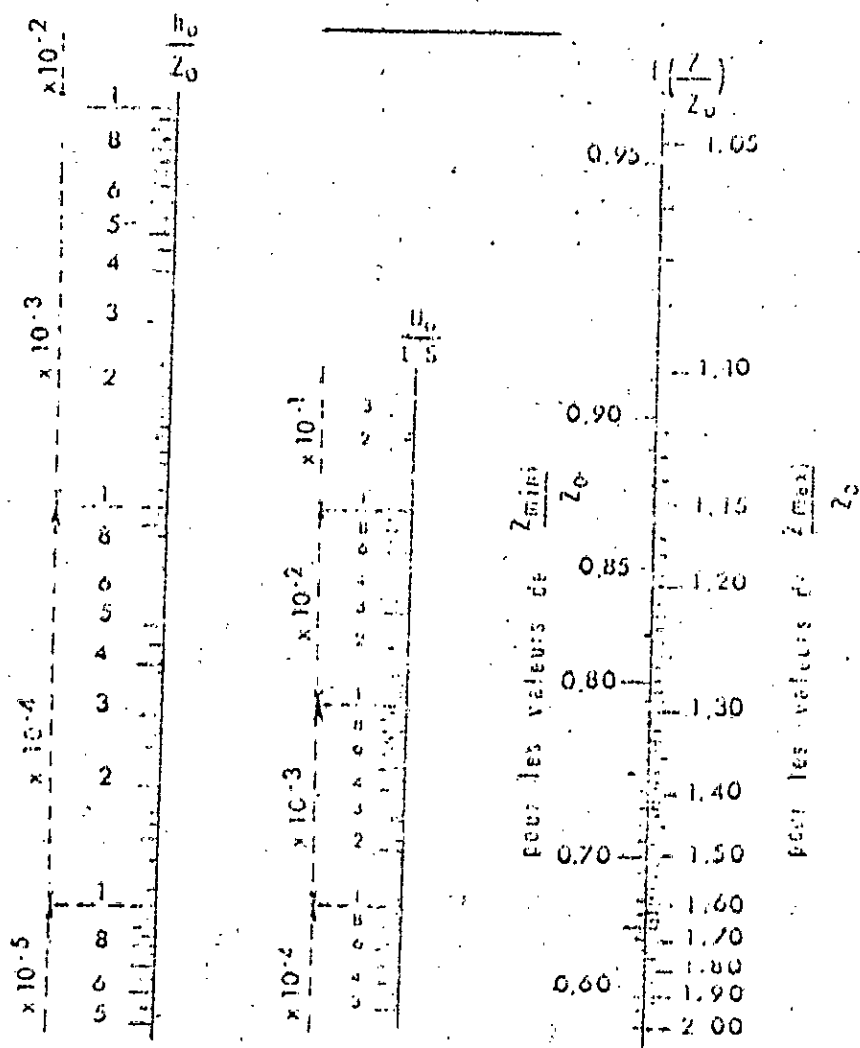


PLANCHE XXVII

CONCLUSION

L'étude de la simulation numérique des phénomènes transitoires (coup de bélier) dans les conduites est basée sur la méthode des caractéristiques.

Le système d'équation obtenu donne la description du régime transitoire dans une conduite en charge , qui se fait le long d'une perturbation quelconque. Donc elle donne une solution générale de la variation de la vitesse et de la pression dans le temps et dans l'espace sur la longueur de la conduite

L'analyse du coup de belier faite dans le chapitre (VII) montre l'influence des paramètres caractéristiques des conduites sur les surpressions et les dépressions occasionnées par la manoeuvre d'un organe de régulation de débit.

En ayant comme optique toute les circonstances nocives à la conduite , nous avons présentés au chapitre (VIII) des systèmes de protection antibéliers .

Celui qui nous parait le plus pratique et le plus économique, hormis la manoeuvre lente de la vanne est le système de protection en ligne , qui utilise les propriétés des conduites hautement distensibles, qui ont l'avantage d'être efficace contre les surpressions et les dépressions au même temps. De plus , ils peuvent répondre à des conditions d'encombrement.

Cependant pour la pratique industrielle les modèles mis au point permettent une prédiction sévères en écoulement transitoires, suffisamment nettes pour que l'ingénieur en tire des conclusions à l'établissement de son projet.

Mais il ne s'agit la que d'une satisfaction pragmatique, une étape dans la connaissance de ces phénomènes complexes d'écoulement transitoires qui seront encore à notre avis , dans les années à venir , un argument catalyseur de recherche en hydrodynamique.

1-1 CARTIER " MANUEL D'HYDRAULIQUE GENERALE " EYROLLES , PARIS 1972.

2-2 L.DUCROS " POMPES HYDRAULIQUES ET APPAREILS ELEVATEURS " DUNOD , PARIS 1967.

3-3 A. DUPONT " HYDRAULIQUE URBAINE TOME II " EYROLLES , PARIS 1979

4-4 J.A FOX " HYDRAULIC ANALYSIS OF UNSTEADY FLOW IN PIPE NETWORKS " THE MACMILLAN BOOK.

5-5 M. HUG " MECANIQUE DES FLUIDES APPLIQUEE " EYROLLES PARIS 1975.

6-6 Y. OURAGH " ECOULEMENT FORCES EN HYDRAULIQUE " TOME II OFU 1990.

7-7 L. STREETER " FLUID TRANSIENTS " MC GRAM HILL.

8-8 L. STREETER " FLUID MECHANICS " SEVENTH EDITION MC GRAM HILL 1979.

9-9 E. HADJ TAIB " ELABORATION D'ALGORITHMES DE CALCUL DES ECOULEMENTS TRANSITORIES ENCONTRÉS DANS UN MELANGE DE LIQUIDE ET DE GAZ " THESE PRESENTÉE A L'ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE 1977.

10-10 THIRRIOT " ANALYSE DES ERREURS DANS LE CALCUL DU COUP DE BELLER " HOUILLE BLANCHE N° 2 1967 .

11-11 TAN & COL " INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN FLUIDS " N° 7 AVRIL 1987.

12-12 AIRH " DISSIPATION D'ENERGIE DANS LE COUP DE BELLER " INTERNATIONAL JOURNAL OF HYDRAULICS RESEARCH 1989

BIBLIOGRAPHIE