

MINISTRE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT HYDRAULIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ELABORATION DE MODELES DE GESTION
DES SYSTEMES HYDRIQUES

Proposé
par

MM. N. DECHEMI
A. BERMAD

Etudié
par

M^{elle} H. KAHALERRAS

Dirigé
par

MM. N. DECHEMI
A. BERMAD

ANNEE UNIVERSITAIRE 1992-1993

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT HYDRAULIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

**ELABORATION DE MODELES DE GESTION
DES SYSTEMES HYDRIQUES**

Proposé

N. DECHEMI
A. BERMAD

Etudié

H. KAHALERRAS

Dirigé

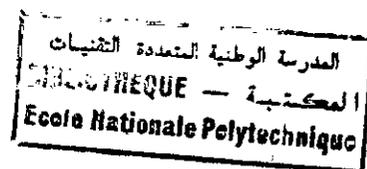
N. DECHEMI
A. BERMAD

ANNEE UNIVERSITAIRE 1992-1993

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

**Les prévisions sont très difficiles,
surtout en ce qui concerne le futur**

SOMMAIRE



RESUME

REMERCIEMENTS

| | |
|---|----|
| INTRODUCTION | 1 |
| PREMIERE PARTIE | 4 |
| I GENERALITES SUR LA SCIENCE DE LA GESTION | 5 |
| I.1 Formulation Générale d'un Problème de Gestion | 8 |
| I.2 Méthode de Traitement des Problèmes de Gestion des Ressources Hydriques | 9 |
| II Les Application de la PL dans les Problèmes de Gestion des Ressources Hydriques | 13 |
| II.1 Structure Mathématique: | 15 |
| II.1.1 Caractéristiques Générales | 15 |
| II.1.2 Structure Générale | 16 |
| II.2 Résolution Analytique du Problème: Méthode du Simplexe | 18 |
| II.2.1 Expression de la Première Solution de Base ... | 19 |
| II.2.2 Critère d'Optimalité: | 20 |
| II.2.3 Critère de Choix d'une Nouvelle Variable de Base | 21 |
| II.2.4 Passage d'une Solution de Base à une Autre: .. | 21 |
| II.2.5 Critère de Choix de l'Equation Recevant la Nouvelle Variable de Base | 23 |
| II.2.6 Valeur de la Fonction Economique: | 24 |

| | | |
|---------|--|----|
| III | DUALITE ET ANALYSE POST-OPTIMAL | 32 |
| III.1 | Interpretation des Coefficients $Z_j - C_j$: | 32 |
| III.1.1 | Interpretation des Coefficients $(C_j - Z_j)$ d'une Variable Originale | 32 |
| III.1.2 | Interpretation du Coefficient $(C_j - Z_j)$ d'une Variable d'Ecart | 33 |
| III.1.3 | Interpretation des Coefficients $(C_j - Z_j)$ d'une Variable d'excédent: | 36 |
| III.1.4 | Interpretation du Coefficient $(Z_j - C_j)$ d'une variable artificielle: | 38 |
| III.2 | Dualité: | 44 |
| III.2.1 | Interpretation Economique de la Dualité: | 48 |
| III.2.2 | Relation Entre les Elements du Tableau du Problème Primał et du Problème Dual | 50 |
| III.3 | Analyse Post-Optimale: Analyse de sensibilité | 52 |
| III.3.1 | Modification des Coefficients de la Fonction Objectif | 53 |
| III.3.2 | Modification du second membre des contra- intes: | 56 |
| III.3.3 | Modification des Coefficients Technologiques a_{ij} : | 57 |
| III.3.4 | Ajout d'une Variable | 60 |
| III.3.5 | Ajout d'une contrainte. | 60 |
| IV | APPLICATION | 64 |
| IV.1 | Fonction Objectif | 67 |
| IV.2 | Contraintes du problème | 69 |
| IV.3 | Transformation du Programme Linéaire | 70 |
| IV.4 | Résolution du Programme Linéaire: | 72 |
| IV.5 | Analyse de Sensibilité: | 75 |
| | DEUXIEME PARTIE | 80 |
| I | GENERALITES SUR LA GESTION PROBABILISTE DES RESERVOIRS | 81 |
| II | GESTION DES RESERVES | 84 |
| II.1 | Procéssus Markovien | 84 |

| | | |
|---------|---|-----|
| II.2 | <i>Théorie de Moran pour la Gestion des Réserves:</i> ... | 85 |
| II.2.1 | <i>Probabilités Inconditionnelles et de Transi- tion du nième Ordre:</i> | 88 |
| II.2.2 | <i>Probabilités d'Etat Stationnaire:</i> | 93 |
| III.2.3 | <i>Modèle de Gould:</i> | 96 |
| II.3 | <i>Corrélations et Changements Saisonniers des Apports:</i> | 97 |
| II.3.1 | <i>Corrélation des Apports</i> | 97 |
| II.3.2 | <i>Effets Saisonniers:</i> | 98 |
| II.4 | <i>Modèles Stochastiques:</i> | 102 |
| II.4.1 | <i>Modèles de PL:</i> | 103 |
| II.4.2. | <i>Modèles de PD</i> | 105 |
| II.5 | <i>Téchniques de Discrétisation des Réservoirs en Etat:</i> | 107 |
| II.5.1 | <i>Téchniques de Discrétisation:</i> | 108 |
| II.5.2 | <i>Contraintes sur le Nombre d'Etat:</i> | 112 |
| | | |
| III | <i>APPLICATION DES MODELES PROBABILISTES DISCRET POUR LA GESTION DU BARRAGE DE LA CHEFFIA</i> | 114 |
| III.1 | <i>Description du Barrage Etudié:</i> | 114 |
| III.2 | <i>Description du modèle utilisé:</i> | 115 |
| | | |
| | <i>CONCLUSION GENERALE</i> | 129 |

ANNEXE A

ANNEXE B

BIBLIOGRAPHIE

La détermination de la meilleure allocation et utilisation des ressources limitées par l'homme, est un problème aussi ancien que l'est celui-ci. Le problème d'allouer de façon optimale une ressource telle que l'eau, ayant une distribution future incertaine, est souvent très complexe. Les études d'une variété d'économistes, d'ingénieurs et de mathématiciens ont donné lieu à grand nombre de modèles pouvant être utilisés comme outils d'aide dans le développement des politiques optimales de gestion des ressources en eau.

Abstract

Determining the best allocation and utilization of man's limited resources is a problem perhaps as old as man himself. The problem of optimally allocation of a resource such as a water having an uncertain futur supply is even more complex. The studies of a variety of economists, engineers and mathematicians have resulted in a number of models that can be used to aid in the development of optimal water ressource management policies.

ملخص

إن أفضل إستعمال للموارد المحدودة، من طرف الإنسان، تعد مشكلة قديمة قدم هذا الأخير. إن مشكلة توزيع مورد كالماء بطريقة محكمة، لها آفاق غير مضمونة وفي غالب الأحيان معقدة. لقد أعطت دراسات الكثير من الاقتصاديين والمهندسين وعلماء الرياضيات عدة نماذج يمكن إستعمالها كأداة لتطوير فنون التسيير المحكم لموارد المياه.

REMERCIEMENTS



Je remercie Mr le Docteur Dechemi et Mr Bermad pour m'avoir encadré et guidé dans la préparation de ce mémoire.

Je remercie l'ensemble des membres de jury, pour l'intérêt et l'attention qu'ils ont bien voulu porter à cette thèse.

Je tiens à remercier Mr Sadat de l'ANB, ainsi que toute personne ayant participé de loin ou de près à l'élaboration de ce travail.

Enfin, je ne cesserai de remercier mes parents, à qui je dédie ce mémoire, pour m'avoir encouragé et donné la volonté nécessaire pour aller aussi loin que possible dans mes études.

INTRODUCTION

L'eau est une ressource naturelle précieuse. Sa présence est indispensable pour le développement de la vie. Du fait, d'une part de sa rareté et d'autre part de l'incompatibilité de ses diverses utilisations, une étude systématique, mais orientée vers la résolution des problèmes concrets s'est imposée.

Pour un partage plus économe de cette ressource, elle peut être emmagasinée lors des périodes humides pour répondre aux besoins en eau des périodes sèches.

La gestion des systèmes hydriques ou plus précisément des systèmes de retenues consiste à déterminer les soutirages devant être effectués sur un ensemble d'ouvrages de contrôle afin de mieux rencontrer l'ensemble des besoins des usagers.

A cause de la stochasticité des apports d'une part, et de la demande en eau d'autre part, un risque de défaillance est lié aux décisions précises. Pour une meilleure exploitation du système, il est nécessaire d'étudier le problème dans son ensemble afin d'avoir une meilleure vision sur les interactions entre les variables et de considérer les buts poursuivis, qu'il est souhaitable de satisfaire.

Ce projet a été initié pour contribuer à la résolution des problèmes concernant la ressource "eau".

L'objectif est de montrer, dans une première étape, comment la programmation linéaire peut être appliquée à l'optimisation d'un système de ressource en eaux.

Dans le chapitre I, on présentera, d'une manière globale la science de la gestion, ses domaines d'application et comment formuler un problème d'optimisation. La dernière partie de ce chapitre est consacrée aux différentes méthodes mathématiques utilisées pour résoudre les problèmes de gestion des ressources hydriques.

Le chapitre II présente la méthode de programmation linéaire, ses applications dans le domaine de gestion des ressources en eau, son aspect mathématique et enfin une méthode de résolution (Le Simplexe).

Le chapitre III, quant à lui, décrit un outil fondamental de la programmation mathématique qui est l'interprétation économique des variables duales (coûts/profits marginaux).

Et enfin, dans le chapitre IV, on donne les résultats (et leur interprétation) pour l'exemple étudié.

Dans la deuxième partie, on envisage le cas de la gestion des réservoirs en utilisant des modèles probabilistes discrets.

Le premier chapitre est consacré à la présentation des différents travaux dans ce domaine.

Le chapitre II, présente les modèles Markoviens discrets pour la gestion des réserves, les effets des corrélations et des vari-

ations saisonnières des apports sur celles-ci, les différents modèles stochastiques pouvant être utilisés et enfin les différentes techniques de discrétisation d'un réservoir en états.

Enfin dans le chapitre III, une application de ces modèles probabilistes pour le barrage de La Chéffia est envisagée.

PREMIERE PARTIE

I GENERALITES SUR LA SCIENCE DE LA GESTION

Les pratiques actuelles en matière de gestion ne peuvent que surprendre en premier abord par leurs diversités. Chaque cas semble être tout à fait particulier, interdisant toute généralisation.

On distingue deux types de gestion:

En premier lieu, vient la gestion à but unique où le problème à étudier est relativement simple. Il s'agit de satisfaire un seul objectif. Le cas le plus simple est la production hydroélectrique. La particularité de cet objectif par rapport aux autres usages des réservoirs est d'être bien défini, il s'agit de satisfaire la demande en électricité au moindre coût.

Ensuite, on trouve la gestion à buts multiples: les ouvrages hydrauliques construits actuellement sont de plus en plus utilisés pour satisfaire des objectifs multiples qui apparaissent souvent contradictoires. Si les usages potentiels des réservoirs sont nombreux, en pratiques les buts envisagés sont rarement au delà de deux (2) (hydroélectricité + irrigation, protection contre les crues + soutient des étiages, etc...). Du fait de la complexité du problème il est nécessaire de procéder par étapes. En pratique, on est toujours confronté à une même alternative: soit appliquer des algorithmes simples mais optimaux sur des

schémas simplifiés, soit utiliser des procédures empiriques essayant de prendre en compte la diversité de la réalité, sans garantir d'optimalité.

*** Evolutions Possibles**

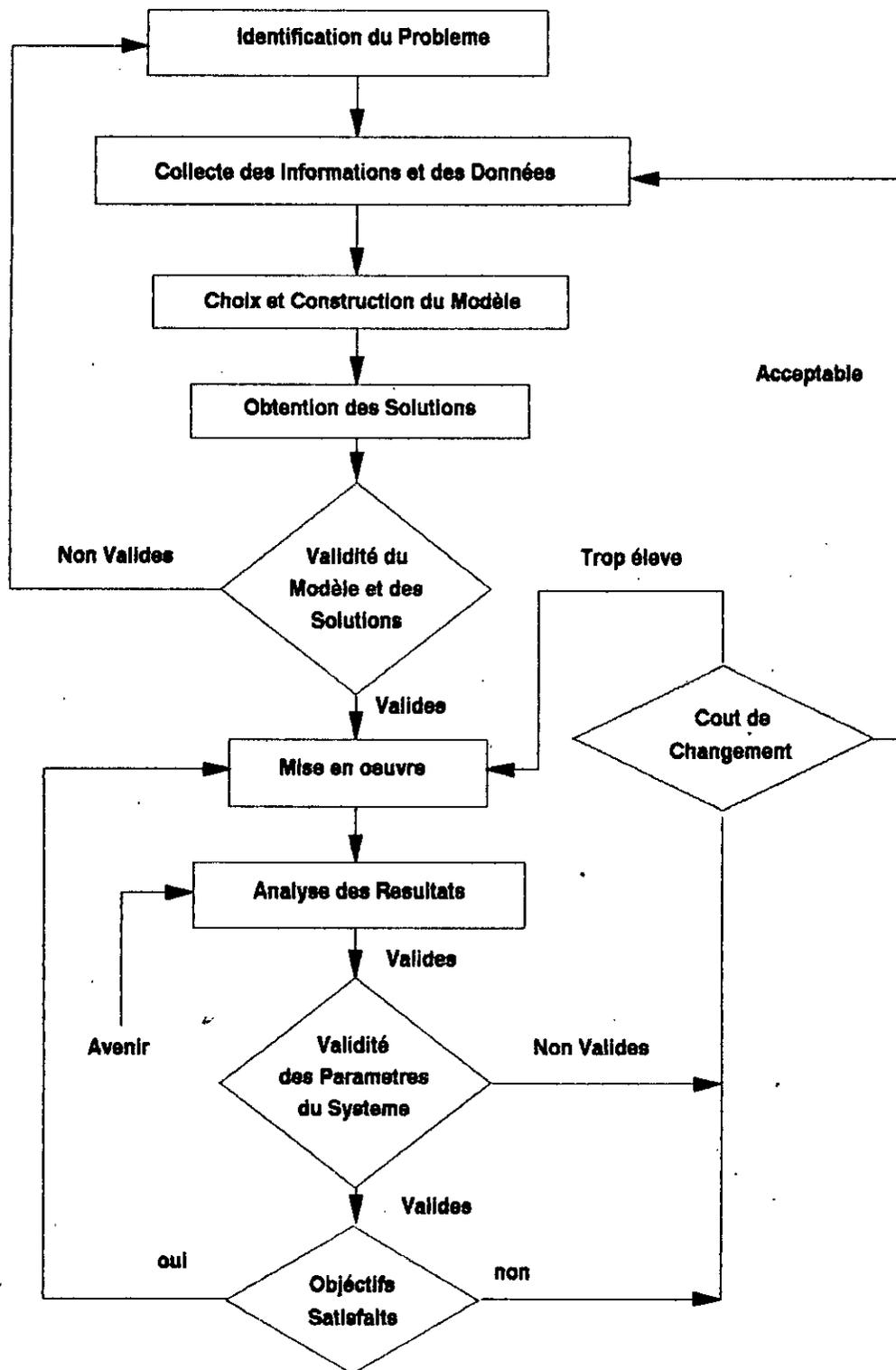
De nombreux réservoirs sont gérés quotidiennement depuis de nombreuses années sans qu'il ait semblé utile de remettre en cause l'efficacité de cette gestion. Cependant, la mise en oeuvre de moyens techniques modernes, tel que le traitement des données, permet des améliorations très significatives de l'efficacité des ouvrages.

De nombreux moyens techniques sont disponibles, des exigences nouvelles apparaissent: Il faudrait quantifier clairement les objectifs, avoir une meilleure connaissance du milieu à étudier, quantifier les impacts, accroître les possibilités de prévisions et enfin décider en temps réel.

*** La Démarche de la Science de Gestion**

Le problème qui se pose à un gestionnaire, en présence d'un système complexe, est comment choisir les variables que l'on contrôle afin que le système remplisse au mieux les objectifs choisis.

Pour résoudre un tel problème, la démarche suivante est nécessaire:



Les étapes d'une étude de recherche opérationnelle

I.1 Formulation Générale d'un Problème de Gestion

La formulation d'un problème de gestion doit être la plus représentative possible de la réalité car, lors de la phase d'optimisation, la solutions n'est optimale que pour le problème formulé.

Une formulation typique se présente comme suit

$$\text{Min } Z = f(x) \tag{1}$$

sujet à

$$h(x) \geq B \tag{2}$$

$$x \geq 0 \tag{3}$$

où

x: est le vecteur des variables de décisions.

h(x): vecteur contrainte du système.

B: vecteur des valeurs de chaque contrainte.

f(x): la fonction économique décrivant les critères de décision.

D'après cette formulation on peut distinguer les composantes suivantes:

* **Fonction Economique:** C'est une fonction à une ou plusieurs variables qui décrit le critere d'optimisation. Elle doit tenir compte des bénéfices et des pertes susceptibles d'être engendrées lors de l'exploitation du système.

les bénéfices peuvent provenir de: la vente de l'énergie, la fourniture d'eau potable et d'irrigation, l'utilisation des réservoirs pour des fins récréatifs, etc... Les pertes peuvent provenir

du dépassement des niveaux acceptables susceptibles de provoquer des inondations ou des sécheresses, du non-respect de la demande en eau ou en énergie etc...

*** Les Contraintes:** Tout problème d'exploitation des réservoirs, pour satisfaire certains objectifs, se trouve confronter à des contraintes d'ordre physiques et opérationnelles.

En ce qui concerne les contraintes physiques ; ce sont généralement des limitations des débits, l'équation de continuité, la courbe d'emmagasinement d'un réservoir, l'équation d'énergie dans le cas d'un ouvrage hydroélectrique etc... Ce sont donc des limites physiques qui ne peuvent transgresser en aucun cas. Si elles ne sont pas respectées il y a bris du système.

Pour les contraintes opérationnelles: elles sont imposées à l'exploitation, ce sont des limitations de débits fournis à l'aval, des limitations de niveaux pour préserver les activités des usagers se trouvant à l'aval de l'ouvrage etc... Elles ne sont pas actives en toute période et il n'est pas nécessaire de les satisfaire toujours si une défaillance à une période permet d'en éviter de plus importantes à d'autres périodes.

I.2 Méthode de Traitement des Problèmes de Gestion des Ressources Hydriques

Le domaine de gestion des systèmes hydriques a connu et continue à connaître de nombreux développements et améliorations et

cela par l'introduction des systèmes analytiques et des méthodologies de recherche opérationnelle pour la résolution de tels problèmes

La littérature récente sur la régulation des réservoirs s'est concentrée sur les méthodes d'optimisation et de simulation pour la recherche des règles de décision rationnelles pour simplifier les prises de décision.

Yeh (1985) a structuré une revue bibliographique en fonction des méthodes utilisées: Ce sont notamment la Programmation Linéaire (PL), la Programmation Dynamique (PD), la Programmation Non Linéaire (PNL) et la Simulation. Ce sont des méthodes appliquées en environnement déterministe ou stochastique. Ces dernières, sont ensuite subdivisées en variantes particulières.

Thomas et Water-Mayer (1962) ont utilisé la PL pour déterminer l'ensemble des prélèvements qui maximisent la valeur des bénéfices espérés.

Young (1967) a appliqué la PD pour déterminer l'ensemble des soutirages minimisant une fonction de pertes grâce à un long enregistrement où les débits sont donnés chaque année.

Hall et al. (1968) ont maximisé le revenu total des opérations d'un seul réservoir. Les revenus proviennent de la vente d'énergie et d'eau. Les décisions optimales sur les prélèvements, la fourniture d'eau étaient dérivées par PD.

Becker et Yeh (1974) ont développé un algorithme pour l'exploitation mensuelle au temps réel d'un système complexe de ressource en eaux. La procédure utilise les meilleures caractéristiques de la PL et la PD. La PL sert pour l'optimisation mois

après mois (les non-linéarités ont été résolues par des techniques itératives) et la PD est utilisé pour déterminer une politique normale d'exploitation à travers le nombre de mois spécifié.

Hicks et al (1974) ont utilisé la PNL pour l'optimisation d'un système hydroélectrique en utilisant la méthode des pénalités.

Mejia et al (1974) ont utilisé la PL pour résoudre un problème définissant au début de chaque période les prélèvements aux neuf petits réservoirs de la rivière du Nord.

Bechard et al (1985) ont développé le modèle MORRO pour le bassin versant de la rivière des Outaouais, comprenant plus de trente (30) réservoirs et quarante trois (43) centrales exploitées par Hydro-Quebec et Hydro-Outario. MORRO est un modèle de PL, c'est un compromis entre la production hydroélectrique et la protection contre les inondations

Tremblay (1989) a développé un modèle de simulation stochastique pour l'évaluation d'une politique d'exploitation. Il tient compte du caractère aléatoire des volumes entrants et considère la demande comme étant connue.

Cependant, on constate toujours un fossé important entre outils pratiques, d'une part, et méthodes théoriques applicables à l'étude de la gestion des réservoirs, d'autre part. Au niveau théorique, il y a un développement important des méthodologies mathématiques, économiques, probabilistes etc... Cependant, les applications de ces méthodes ne semblent trop souvent que des illustrations artificielles et trop schématiques.

Cet grand écart entre pratique et théorie est dû aux causes suivantes:

*** Evaluation des Coûts des Divers Objectifs:**

L'évaluation des divers objectifs que doit satisfaire un système de réservoirs est une des difficultés rencontrées dans ce domaine.

Le seul objectif bien défini est celui de la production hydroélectrique, car différents algorithmes et études ont été établis.

*** La Prise en Compte des Incertitudes dans la Gestion:**

Les différents types d'incertitudes qu'on rencontre lors d'une étude de la gestion des réservoirs sont:

a/ Les incertitudes physiques où l'on rencontre l'aspect stochastique des apports et des consommations d'eau.

b/ Les incertitudes technologiques qui comportent d'une part, les méconnaissances des processus physiques et d'autre part, la taille réduite des données hydrologiques. Ces incertitudes du fait de leur complexité sont rarement prises en compte lors de la formulation d'un problème de gestion.

II Les Application de la PL dans les Problèmes de Gestion des Ressources Hydriques

La PL a été l'une des techniques de gestion des ressources hydriques les plus largement utilisées. Elle est en rapport avec la résolution d'un certain type spécial de problème: Un problème dans lequel toutes les relations entre les variables sont linéaires aussi bien dans les contraintes que dans la fonction objectif à optimiser.

L'application de la PL dans le domaine de gestion des ressources hydriques varie des problèmes relativement simples d'une simple allocation des ressources à des situations complexes.

Sous certaines hypothèse, les problèmes linéaires peuvent être linéarisés et résolus par des procédures itératives ou approximatives.

Lorsque la PL* est appliquée à un modèle de réservoir, l'objectif serait de minimiser la capacité (ou le coût) du réservoir tout en satisfaisant toutes les contraintes, ou maximiser le bénéfice total annuel qui est représenté comme une fonction de stockage ou de lâchure dans chaque période d'exploitation.

Pour une meilleure application de la PL, il est nécessaire que la fonction coût soit convexe et la fonction bénéfice concave (unicité de l'optimum)

* Evolution de la PL:

Ce n'est qu'à partir de 1947 que les chercheurs ont commencé à reconnaître l'importance de trouver une solution à un système contenant simultanément des égalités linéaires et des inégalités linéaires qui minimisent ou maximisent quelques combinaisons des importantes variables.

Ainsi en 1947 un groupe de chercheurs sous la direction de George B. Danzig a développé ce qui est maintenant connu sous le nom de la méthode numérique du Simplexe.

Le développement réel de l'application de la PL avait été en industrie et ce n'est qu'au début de 1960 qu'elle a été appliquée dans les problèmes des ressources hydriques (Mass, 1962).

*** Applications de la PL:**

La PL a été appliquée pour résoudre les problèmes de qualité et de quantité d'eau.

Pour la qualité de l'eau l'objectif le plus courant est la minimisation du coût des traitements des eaux. La PL a été aussi appliquée à une grande variété de problèmes de ressources hydriques en rapport surtout avec la dimension de la quantité d'eau tel que:

- Les usages à buts multiples: L'objectif est une allocation optimale d'une ressource limitée à des usages multiples des fois même en contradiction.

- L'alimentation en eau: Il s'agit d'une distribution locale et optimale de l'eau.

- *Le transport de l'eau:* Dans ce domaine la PL a été utilisée pour minimiser le diamètre des conduites tout en respectant les exigences sur le débit et la pression, pour la gestion optimale des systèmes d'égouts...

- *Analyses hydrologiques:* La PL avait été utilisée pour résoudre les problèmes hydrologiques tel que l'estimation des paramètres des modèles hydrologiques qui sont toujours difficiles à estimer par des techniques statistiques

II.1 Structure Mathématique:

II.1.1 Caractéristiques Générales

En structurant un modèle de programmation linéaire pour un système réel, ce dernier doit être décomposé en un nombre d'éléments: "Les activités". Un exemple d'activité peut être le traitement de l'eau, le développement des récoltes, la production d'énergie

A ces activités on leur associe ce que l'on appelle "niveau d'activité". Ce sont les inconnues du problème. Les niveaux d'activité sont par exemple les m³ d'eau traités par jour, Kilowatts d'énergie générés par une centrale donnée, les hectares dévoués pour la croissance des plantes etc...

Etre amené à analyser un système par PL, une situation doit rencontrer les quatre critères suivants:

- Proportionnalité des niveaux d'activité.
- Non négativité des niveaux d'activité
- Additivité des niveaux d'activité.

- Linéarité de la fonction objectif.

II.1.2 Structure Générale

Mathématiquement la recherche d'un programme linéaire à n variables et m équations de contraintes consiste à déterminer les valeurs des variables $(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$ qui optimisent la fonction $Z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ tout en respectant les contraintes suivantes

$$\sum_j a_{ij}x_j (\leq, =, \geq) \quad \forall i = \overline{1, m}$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1, n}$$

Où

- (x_1, \dots, x_n) = variables (inconnues du problème)
- (c_1, \dots, c_n) = coefficients (profits ou coûts unitaires) des variables de la fonction objectif.
- (b_1, \dots, b_m) = quantités disponibles des coefficients ressources.
- (a_{11}, \dots, a_{1n}) = coefficients technologiques de chaque activité P/R à La ressource $n^\circ = i$.

Le programme linéaire se présente souvent, comme un système contenant des égalités et des inégalités: C'est le programme linéaire canonique. Pour le transformer en un système d'équations, certaines transformations sont nécessaires pour obtenir un PL standard.

Ainsi, le passage de la forme canonique à la forme standard se fait comme suit:

- Une équation du type

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

se ramène à une équation en introduisant dans le premier membre une variable, dite d'écart, x_{n+1} .

L'inéquation est équivalente au système

$$\begin{cases} x_{n+1} \geq 0 \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + x_{n+1} = b_i \end{cases}$$

- Une inéquation du type

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$$

se ramène à une équation en introduisant dans le premier membre une variable dite d'excédent, x_{n+1} .

L'inéquation est équivalente au système

$$\begin{cases} x_{n+1} \geq 0 \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots - x_{n+1} = b_i \end{cases}$$

Ainsi le coefficient a_{ij} à affecter à cette variable d'écart est nul dans toutes les inégalités sauf celle concernée par cette variable, et dans ce cas, est égal à +1 si l'inégalité est "inférieure ou égale" et à -1 dans le cas contraire. On obtient ainsi un système à $(n+m)$ variables et m contraintes.

II.2 Résolution Analytique du Problème: Méthode du Simplexe

La programmation linéaire continue de faire l'objet de nouvelles publications, mais leurs apports se situent essentiellement au niveau de la performance des algorithmes, car ses fondements sont simples ainsi que l'interprétation économique des résultats

Avant de décrire la procédure de calcul, il est préférable de donner quelques définitions des termes qui vont être utilisés ultérieurement.

i) *Solution de base*: En rendant n variables égales à zéro, si le système de m équations et m inconnues restant admet une solution unique, cette solution sera appelée une solution de base. Il existe au plus $\binom{n}{m}$ solutions de base.

ii) *Solution de base réalisable*: Il s'agit de toute solution de base qui satisfait l'ensemble des contraintes du problème (y compris les contraintes de non négativité)

iii) *Solution de base réalisable optimale*: C'est une solution de base réalisable qui optimise la fonction économique.

iv) *Variables hors base*: Ce sont les n variables de la solution qui sont nulles.

v) *Solution de base dégénérée*: Une solution de base est dite dégénérée si au moins une variable de base est nulle.

Lorsque le problème contient plusieurs centaines de variables et contraintes, il n'est pas toujours possible de trouver la solution optimale par inspection. Pour cela la méthode du Simplexe vient contribuer d'une façon efficace à cette enquête de l'optimum. La méthode du Simplexe est un algorithme d'exploration

Dans tout ce qui va suivre, on considèrera le cas des programmes linéaires du type max à second membre positif ou nul.

Dans une première étape il faudrait exprimer les variables de base, notées $x_i, i = \overline{1, m}$, en fonction des variables hors base:

$$x_i^* = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad \forall i = \overline{1, m}$$

$$x_j \geq 0, \quad x_i^* \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, m} \wedge \forall j = \overline{1, n}$$

II.2.2 Critère d'Optimalité:

Dans cette étape on exprime la fonction-objéctif en fonction des variables hors base.

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{j=1}^n C_j x_j + \sum_{i=1}^m C_i^* \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^m C_i^* b_i - \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^m C_i^* a_{ij} - C_j \right) \end{aligned}$$

En posant $Z_0 = \sum_{i=1}^m C_i^* b_i$

et $Z_j = \sum_{i=1}^m C_i^* a_{ij}$

L'expression de Z devient:

$$Z = Z_0 - \sum_{j=1}^n x_j (Z_j - C_j)$$

Ainsi, on peut énoncer le critère d'optimalité:

Lorsqu'on maximise une fonction et que celle-ci a un maximum unique, la solution de base optimale est obtenue lorsque tous les coefficients $(C_j - Z_j)$ des variables hors base sont négatifs.

II.2.3 Critère de Choix d'une Nouvelle Variable de Base

Si le coefficient $(C_j - Z_j)$ est positif et que la variable correspondante x_j a une valeur positive, la valeur de la fonction-objectif sera d'autant plus grande.

La plus grande valeur à donner à x_j devra conserver les x_i non négatifs. Il existera donc au moins une variable de base x_i qui deviendra nulle. Il suffit alors de rendre variable de base la variable hors base x_j dont le coefficient $(C_j - Z_j)$ est positif.

Dans le cas où plusieurs coefficients $(C_j - Z_j)$ sont positifs, le choix portera sur la variable ayant $|Z_j - C_j|$ le plus grand, i.e celui qui donne le plus grand accroissement à la fonction-objectif.

II.2.4 Passage d'une Solution de Base à une Autre:

Pour rendre la procédure d'amélioration plus simple, il faudrait essayer de transformer le système en un système comparable au système à la première itération. La procédure de transformation est la suivante:

Supposant que x_k devient variable de base à la k_1 ème équation, i.e à la place de la variable x_{k_1} .

L'expression des variables de base en fonction des nouvelles variables de base est:

$$x_{k_1}^* = b_{k_1} - \sum_{j \neq k} a_{k_1 j} x_j - a_{k_1 k} x_k$$

$$x_k = \frac{b_{k_1}}{a_{k_1 k}} - \sum_{j \neq k} \frac{a_{k_1 j}}{a_{k_1 k}} x_j - \frac{x_{k_1}^*}{a_{k_1 k}} \quad (1)$$

$$x_i = b_i - \sum_{j \neq k} a_{ij} x_j - a_{ik} x_k$$

En remplaçant x_k par l'expression trouvée dans (1) On obtient:

$$x_i^* = b_i - a_{ik} \cdot \frac{b_{k_1}}{a_{k_1 k}} - \sum_{j \neq k} x_j \left(a_{ij} - a_{ik} \cdot \frac{a_{k_1 j}}{a_{k_1 k}} \right) + a_{ik} \cdot \frac{x_{k_1}^*}{a_{k_1 k}}$$

Ainsi on obtient les règles suivantes:

a) Les nouveaux coefficients (a'_{ij}) de la k_1 ème équation sont:

$$a'_{k_1 j} = \frac{a_{k_1 j}}{a_{k_1 k}}$$

b) Les nouveaux coefficients a'_{ij} de la i ème équation sont

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{ik} \cdot \frac{a_{k_1 j}}{a_{k_1 k}}, \quad i \neq k_1.$$

c) Les nouveaux b' , sont:

$$b'_{k_1} = \frac{b_{k_1}}{a_{k_1 k}} \quad \wedge \quad b'_i = b_i - a_{ik} \frac{b_{k_1}}{a_{k_1 k}}, \quad i \neq k_1$$

d'après ces dernières équations, on remarque que lors du passage d'un ensemble de variables de base à un autre une seule variable a changé: C'est le principe du Simplexe déjà énoncé

II.2.5 Critère de Choix de l'Equation Recevant la Nouvelle Variable de Base

i.e critère de choix de la variable sortant de la base

Pour déterminer la variable sortant de la base, on divise les éléments de la colonne des variables de base par les éléments correspondants de la colonne de la variable qui va entrer dans la base.

Pour que la nouvelle solution de base soit réalisable, il faudrait que les conditions suivantes soient respectées

i) $a_{k_1 k} \geq 0$

et

ii) $\frac{b_{k_1}}{a_{k_1 k}} = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}}, a_{ik} > 0 \right\}$

II.2.6 Valeur de la Fonction Economique:

Puisque toutes les variables hors base seront nulles, l'équation donnant la valeur de la fonction-objectif devient:

$$\begin{aligned}
 Z &= Z_0 + \sum_{j=1}^n x_j \cdot (C_j - Z_j) \\
 &= \sum_{i=1}^m c_i^* b_i' + \sum_{i=1}^m c_i^* (b_i' - a_{ik}') \\
 &= \sum_j C_j x_j + \sum_j C_j^* x_j^* \\
 &= C_k x_k + \sum_{j \neq k_1} C_j^* x_j^* = C_k x_k + \sum_j C_j^* x_j^* \\
 &= C_k x_k + \sum_j C_j^* \left(b_i - a_{ik} \cdot \frac{b_{k_1}}{a_{k_1 k}} \right) \\
 &= \sum_j C_j^* b_i + C_k \cdot \frac{b_{k_1}}{a_{k_1 k}} - \sum_j C_j^* \cdot a_{ik} \frac{b_{k_1}}{a_{k_1 k}}
 \end{aligned}$$

On obtient à la fin:

$$Z = Z_0 - \frac{b_{k_1}}{a_{k_1 k}} \cdot (Z_k - C_k)$$

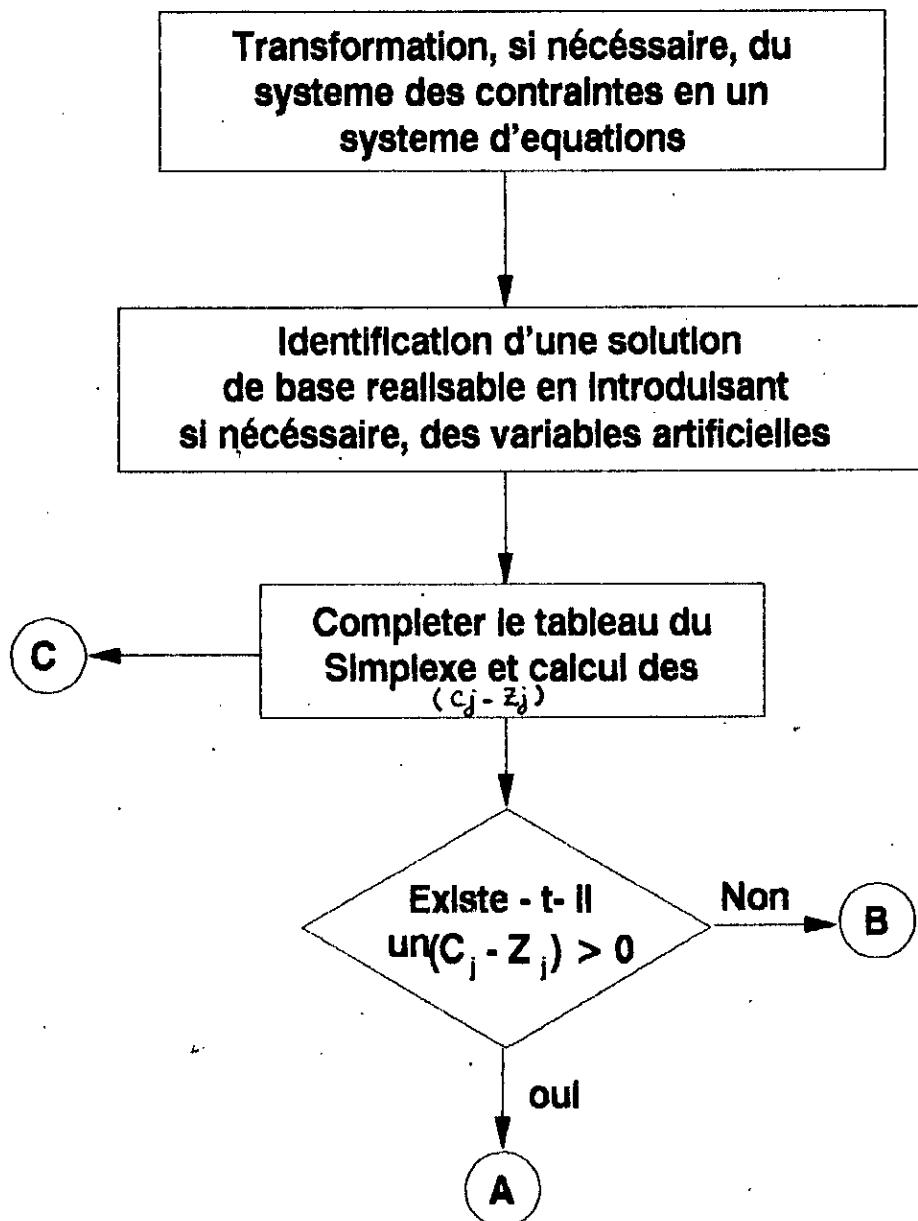
Ainsi l'accroissement total donné par cette solution de base est $x_k |Z_k - C_k|$. La plus grande valeur donnée à x_k est $\frac{b_1}{a_{k1}}$ de telle façon que les contraintes du programme linéaire soient vérifiées.

Tableau du Simplexe:

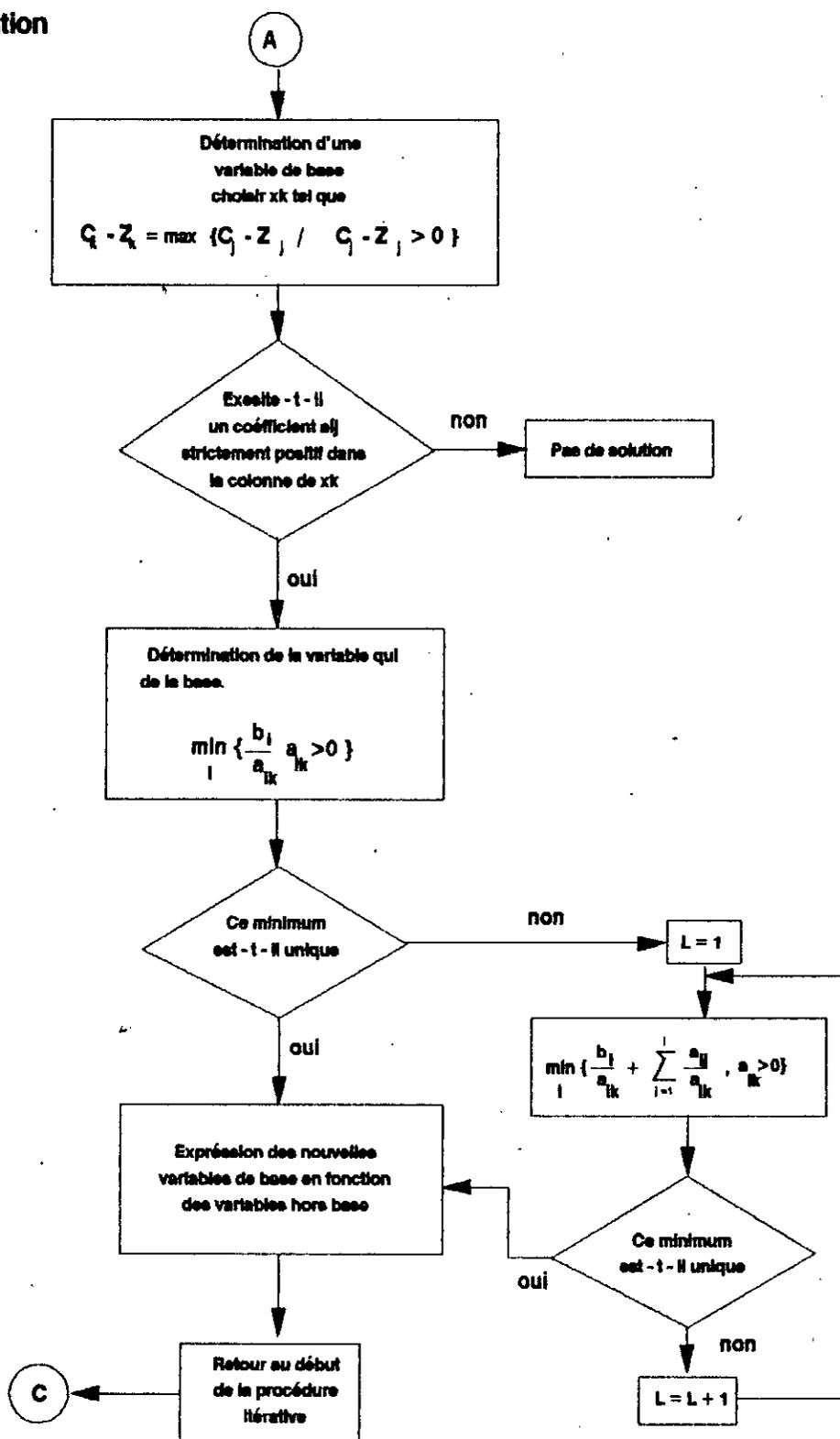
Pour une meilleure commodité dans l'emploi de cette méthode, il est plus avantageux d'utiliser des tableaux qui se présentent ainsi

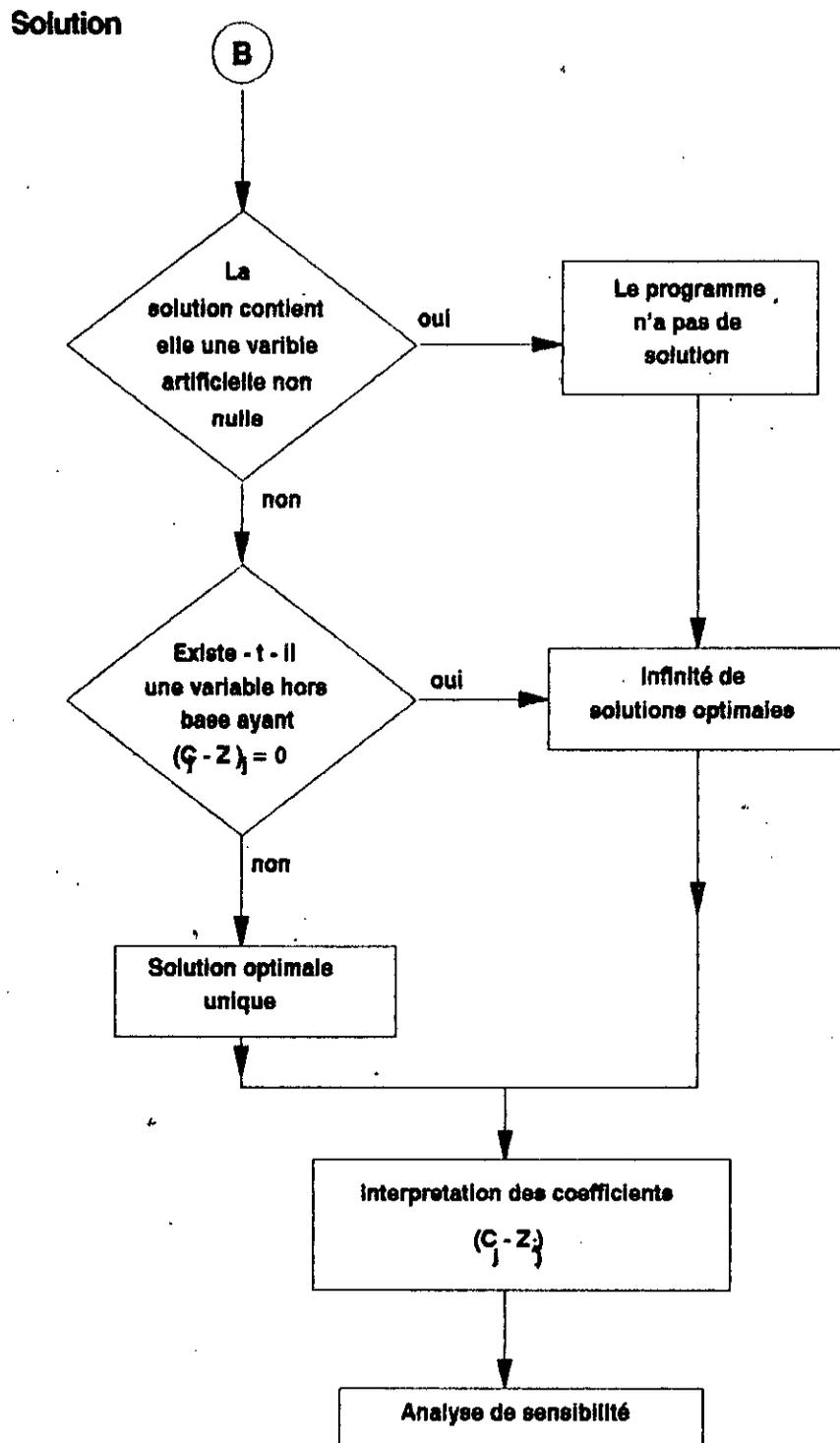
| | | | | | | | | |
|------------|-------------|----------------|-------|----------------|--------------------|-------|--------------------|----------|
| C^* | x^* | C_1 x_1 | | C_n x_n | C^*_1 x^*_1 | | C^*_m x^*_m | b_1 |
| C^*_1 | x^*_1 | a_{11} | | a_{1n} | 1 | | 0 | b_1 |
| . | . | | | $a_{1-1,n}$ | 0 | 1 | 0 | |
| C^*_1 | x^*_1 | a_{11} | | a_{1n} | | | | b_1 |
| . | . | | | | | | | |
| C^*_{k1} | x^*_{k1} | a_{k11} | | a_{k1n} | | | | b_{k1} |
| . | . | | | | | | | |
| C^*_m | x^*_m | a_{m1} | | a_{mn} | 0 | 0 | 1 | b_m |
| | Z_j | Z_1 | | Z_n | 0 | 0 | 0 | Z |
| | $C_j - Z_j$ | $C_1 - Z_1$ | | $C_n - Z_n$ | 0 | 0 | 0 | |

L'organigramme donne les étapes d'amélioration est le suivant:



Itération





Organigramme simplifié de la méthode du Simplexe.

Variables Artificielles

Pour la recherche d'une première solution de base, et pour rendre cette recherche moins fastidieuse, l'introduction de variables artificielles est nécessaire.

Puisque les (b_i) , dans la méthode du Simplexe, doivent être positifs ou nuls, dans le cas de variables d'excédent on obtient des variables isolées mais négatives. Ceci entraîne la nécessité d'introduire une variable artificielle dans les contraintes où interviennent des inéquations du type (\geq) de même que dans les contraintes sous forme d'équation. A l'optimum ces variables doivent être nécessairement nulles, sinon il n'y aura pas satisfaction des contraintes originales.

Dans le cas d'un problème de maximisation, pour s'assurer que la solution de base ne contient pas de variables artificielles, on donne à ces variables des coefficients $C_i = -M$ où M est une valeur positive très grande.

Si à l'optimum, l'une des variables artificielles est non nulle, la fonction-objectif Z tendra vers une valeur infinie mais négativement ($Z \rightarrow -\infty$): Chose impossible puisqu'il s'agit d'un problème de maximisation. Dans ce cas on dira que l'optimisation est non atteinte. Ainsi le coefficient $(-M)$ oblige la variable artificielle à être hors base lorsque la solution du programme linéaire existe.

Dans le cas d'une minimisation, on prend C_j (variable artificielle) = M .

Une fois sorti de la base une variable artificielle n'y reviendra plus.

Résolution du Simplexe en deux Etapes:

Lors qu'un programme linéaire contient des variables artificielles, une fois sorties de la base, ces dernières n'y reviennent plus. Pour cette raison, on pourra procéder en deux étapes pour la résolution du problème.

Première étape:

- Tous les coefficients C_j de la fonction-objectif sont pris égaux à zéro, sauf ceux des variables artificielles qui prennent la valeur -1 (dans le cas d'un problème de minimisation, ces coefficients prendront la valeur $+1$) i.e

$$C_j = \begin{cases} -1 & \text{si } x, \text{ variable artificielle} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Avec le modèle transformé on résout normalement le problème jusqu'à obtention du maximum. Il est évident que l'optimum est atteint lorsque $Z_0 = 0$. Dans cette équation toutes les variables artificielles sont nulles et deviennent variables hors base: La première étape se termine à ce niveau.

Deuxième étape:

- L'ensemble des variables de base est le même que celui qui rend $Z_0 = 0$ dans la première étape.

- Les différents coefficients C_j dans la fonction-objectif seront pris égaux à leurs vrais valeurs, sauf ceux des variables artificielles qui seront égaux à zéro.

III DUALITE ET ANALYSE POST-OPTIMAL

III.1 Interpretation des Coefficients $Z_j - C_j$:

Dans un problème linéaire apparaît 4 types de variables:

- les variables originales du problème
- les variables d'écart
- les variables d'excédent
- et les variables artificielles

Selon l'augmentation unitaire de chacune de ces variables, les coefficients $(C_j - Z_j)$ correspondant à ces variables auront une interprétation différente.

III.1.1 Interprétation des Coefficients $(C_j - Z_j)$ d'une Variable Originale

La valeur de la fonction économique ou objectif est donnée par l'expression suivante:

$$Z = Z_0 - \sum_j X_j \cdot (Z_j - C_j)$$

En considérant une augmentation unitaire d'une variable originale X_k on obtient

$$\begin{aligned}
 Z &= Z_0 - \sum_{j \neq k} X_j \cdot (Z_j - C_j) - X_k \cdot (Z_k - C_k) \\
 &= Z_0 - \sum_{j \neq k} X_j \cdot (Z_j - C_j) - (X_k + 1) \cdot (Z_k - C_k) \\
 &= Z_0 - \sum_j X_j \cdot (Z_j - C_j) + (C_k - Z_k)
 \end{aligned}$$

D'après cette dernière relation on peut conclure que: si $(C_j - Z_j)$ est négatif, pour un problème de maximisation (minimisation), il indique la diminution (augmentation) de la fonction objectif correspondant à un accroissement unitaire de la variable originale X_j

III.1.2 Interprétation du Coefficient $(C_j - Z_j)$ d'une Variable d'Ecart

Soit la $i^{\text{ème}}$ contrainte du type \leq

$$\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i$$

en, introduisant une variable d'écart, cette inéquation devient:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+l} = b_i \quad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = -x_{n+l} + b_i$$

En posant $x_{n+l} = 1$, le second membre de cette équation devient: $b_i - b_{i-1} < b_i$.

Supposant que la contrainte du problème original est:

$$\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i'$$

au lieu de

$$\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i$$

La i ème contrainte devient

$$\sum_j a_{ij} x_j + x_{n+l}' = b_i'$$

au lieu de

$$\sum_j a_{ij} x_j + x_{n+l} = b_i$$

où

$$x_{n+1} = x'_{n+1} + 1$$

La solution du nouveau problème diffère de l'ancien par la i ème contrainte, elle est obtenue à partir du problème original en écrivant x_{n+1} en fonction de x'_{n+1} dans les contraintes et la fonction objectif.

$$\begin{aligned} Z &= Z_0 - \sum_j X_j \cdot (Z_j - C_j) \\ &= Z_0 - \sum_{j \neq n+1} X_j \cdot (Z_j - C_j) - X_{n+1} (Z_{n+1} - C_{n+1}) \\ &= Z_0 - \sum_{j \neq n+1} X_j \cdot (Z_j - C_j) - (x'_{n+1} + 1) \cdot (Z_{n+1} - C_{n+1}) \\ &= Z_0 - \sum_j X_j \cdot (Z_j - C_j) - (Z_{n+1} - C_{n+1}) \\ &= Z_0 - \sum_j X_j \cdot (Z_j - C_j) + (C_{n+1} - Z_{n+1}) \end{aligned}$$

L'interprétation de $(C_{n+1} - Z_{n+1})$ s'annonce comme suit: Si $(C_j - Z_j)$ est négatif, pour un problème de maximisation (minimisation), il indique la diminution (augmentation) de la fonction objectif correspondant à un diminution unitaire du second membre de la contrainte où est utilisée la variable d'écart.

III.1.3 Interprétation des Coefficients ($C_j - Z_j$)

d'une Variable d'excédent:

Soit la i ème contrainte du type \geq

$$\sum a_{ij} x_j \geq b_i$$

en introduisant une variable d'excédent, cette inéquation devient:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = x_{n+i} + b_i$$

En posant $x_{n+i} = 1$, le second membre de cette équation devient: $b_i' = b_i + 1 > b_i$.

Supposant que la contrainte du problème original est:

$$\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i'$$

au lieu de

$$\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i$$

La i ème contrainte devient

$$\sum_j a_{ij} x_j - x_{n+l}' = b_i'$$

au lieu de

$$\sum_j a_{ij} x_j - x_{n+l} = b_i$$

où

$$x_{n+l} = x_{n+l}' + 1$$

La solution du nouveau problème diffère de l'ancien par la i ème contrainte, il est obtenu à partir du problème original en écrivant x_{n+l} en fonction de x_{n+l}' dans les contraintes et la fonction objectif.

$$\begin{aligned} Z &= Z_0 - \sum_j X_j \cdot (Z_j - C_j) \\ &= Z_0 - \sum_{j \neq n+l} X_j \cdot (Z_j - C_j) - X_{n+l} (Z_{n+l} - C_{n+l}) \\ &= Z_0 - \sum_j X_j \cdot (Z_j - C_j) + (C_{n+l} - Z_{n+l}) \end{aligned}$$

Donc lorsque $(C_j - Z_j)$ est négatif, dans un problème de maximisation, il indique la diminution (augmentation) de la

fonction objectif correspondant à un accroissement unitaire du second membre de la contrainte où est utilisée la variable d'excédent.

**III.1.4 Interprétation du Coefficient ($Z_j - C_j$)
d'une variable artificielle:**

Deux cas peuvent se présenter:

1- Cas où une variable artificielle est utilisée dans une contrainte de forme \geq : Dans un tel type de contrainte, toute l'information est donnée par la variable d'excédent, ainsi aucune interprétation ne peut être donnée au coefficient ($Z_j - C_j$) de la variable artificielle X_j

2- Cas où une variable artificielle est utilisée dans une contrainte sous forme d'équation:

Soit une contrainte sous la forme:

$$\sum_j a_{lj} x_j = b_l$$

Pour résoudre le problème, on ajoute une variable artificielle x_{n+1}

$$\sum_j a_{lj} x_j + x_{n+1} = b_l$$

Comme on ne connaît les interprétations des coefficients ($Z_j - C_j$) que pour des contraintes du type (\leq) ou (\geq), il faudrait transformer l'équation initiale en deux inégalités:

$$\sum_j a_{ij} x_j = b_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sum_j a_{ij} x_j \leq b_i \\ \text{et} \\ \sum_j a_{ij} x_j \geq b_i \end{cases}$$

et on introduisant des variables d'écart et d'excédent on aura:

$$\sum_j a_{ij} x_j + x_{n+l}' = b_i$$

et

$$\sum_j a_{ij} x_j - x_{n+l}'' = b_i$$

Un accroissement unitaire de b_i entraîne

$$\sum_j a_{ij} x_j + x_{n+i}'(1) = b_i(1)$$

et

$$\sum_j a_{ij} x_j - x_{n+i}''(1) = b_i(1)$$

avec $b_i(1) = b_i + 1$

et $x_{n+i}'(1) = x_{n+i}' + 1$

$x_{n+i}''(1) = x_{n+i}'' + 1$

la fonction objectif s'écrit:

$$Z = Z_0 - \sum_{\substack{j \neq n+i(x_{n+i}') \\ \neq n+i(x_{n+i}'')}} x_j (Z_j - C_j) - x_{n+i}' (Z_{n+i}' - C_{n+i}') \\ - x_{n+i}'' (Z_{n+i}'' - C_{n+i}'')$$

$$Z = Z_0 - \sum_{j \neq n+i} x_j (Z_j - C_j) - x_{n+i}'(1) (Z_{n+i}' - C_{n+i}') - x_{n+i}''(1) (Z_{n+i}'' - C_{n+i}'') \\ + (Z_{n+i}' - C_{n+i}') - (Z_{n+i}'' - C_{n+i}'')$$

$$Z = Z_0 - \sum_j x_j (Z_j - C_j) + (Z_{n+i}' - C_{n+i}') + (Z_{n+i}'' - C_{n+i}'')$$

Comme $C_{n+i}' = C_{n+i}'' = 0$ alors

$$Z = Z_0 - \sum_j x_j (Z_j - C_j) + (Z_{n+1}' - Z_{n+1}'')$$

Deux cas se présentent:

2.1 Si la variable d'excédent joue le rôle de variable de base, alors:

$$Z_{n+1}'' = \sum_{k=1}^m C_{n+k}'' a_{k,n+1} = 0$$

et si la variable x'_{n+1} joue le rôle de variable artificielle ($x'_{n+1} = x_{n+1}$) et dans la solution optimale tous les coefficients de x'_{n+1} sont les mêmes que ceux de x_{n+1} . Ceci entraîne que $Z'_{n+1} = Z_{n+1}$ et par suite

$$Z = Z_0 - \sum x_j (Z_j - C_j) + Z_{n+1}$$

* Si $Z_j < 0$ et augmentation du second membre d'une unité alors la fonction objectif diminue.

* Si $Z_j > 0$ et augmentation du second membre d'une unité alors la fonction objectif croit.

2.2 Si la variable d'écart x'_{n+1} joue le rôle de variable de base, alors $Z'_{n+1} = 0$ et si la variable d'excédent joue le rôle de variable artificielle de signe contraire ($x_{n+1} = -x''_{n+1}$) et par suite $Z_{n+1} = -Z''_{n+1}$.

La fonction objectif devient:

$$Z = Z_0 - \sum x_j (Z_j - C_j) + Z_{n+i}$$

On trouve le même cas que dans 2.1 et l'interprétation reste inchangée.

Dans le cas d'une diminution du second membre le nouveau problème diffère de l'originale de deux contraintes.

$$\sum_j a_{ij} x_j + x_{n+i}'(2) = b_i(2)$$

et

$$\sum_j a_{ij} x_j - x_{n+i}''(2) = b_i(2)$$

où $b_i(1) = b_{i-1}$

et $x_{n+i}'(2) = x_{n+i}' - 1$

$x_{n+i}''(2) = x_{n+i}'' - 1$

la fonction objectif s'écrit:

$$Z = Z_0 - \sum_j x_j (Z_j - C_j) + (Z_{n+i}'' - Z_{n+i}')$$

- Si la variable d'excédent est considérée comme variable de base, alors $Z''_{n+1} = 0$ et si la variable d'écart est considérée comme variable artificielle ($x'_{n+1} = x_{n+1}$) et par suite $Z_{n+1} = Z'_{n+1}$.

La fonction objectif devient

$$Z = Z_0 - \sum x_j (Z_j - C_j) - Z_{n+1}$$

* Si $Z_j < 0$ et diminution du second membre d'une unité alors la fonction objectif augmente.

* Si $Z_j > 0$ et diminution du second membre d'une unité alors la fonction objectif diminue.

- Si la variable d'écart est considérée comme variable de base, alors $Z'_{n+1} = 0$ et si la variable d'excédent est variable artificielle ($x_{n+1} = -x''_{n+1}$) et par suite $Z_{n+1} = -Z''_{n+1}$.
La fonction objectif devient:

$$Z = Z_0 - \sum x_j (C_j - Z_j) - Z_{n+1}$$

On obtient la même forme que précédemment aussi l'interprétation reste identique.

En résumé on peut dire que:

Dans le cas d'un problème de maximisation (minimisation), lorsqu'il y a modification unitaire du second membre d'une contrainte

sous forme d'équation, la modification subit par la fonction objectif est donnée par le coefficient Z_j de la variable artificielle x_j apparaissant dans cette contrainte.

III.2 Dualité:

Au problème linéaire posé, appelé problème primal correspond un problème dit problème dual dans lequel la fonction à minimiser (si le primal est un problème de maximisation) est une combinaison linéaire des b_i . L'optimum du dual est lié à un ensemble de contraintes qui sont aussi fonctions linéaires des a_{ij} , mais bornées cette fois par les C_j .

Le tableau ci-dessous présente la correspondance entre les deux problèmes primal et dual.

| <i>Problème Primal</i> | <i>Problème Dual</i> |
|--|---|
| <i>Forme canonique</i> | |
| $\max z = C^t \cdot X$ $AX \leq B$ $X \geq 0$ | $\text{Min } Z = B^t \cdot Y$ $YA \geq C$ $Y \geq 0$ |
| <i>où</i> $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ | |
| <i>Forme standard</i> | |
| $\max z = C^t \cdot X$ $DX = B$ $X \geq 0$ <p><i>où</i> $D = [A, I]_{(m, n+m)}$ <i>I</i>: matrice unité</p> | $\text{Min } Z = B^t \cdot Y$ $Y \cdot G = C$ $Y \geq 0$ $G = \begin{bmatrix} -I \\ A \end{bmatrix}_{(m+n, m)}$ |

Tableau III.2.1: *Correspondance primal-dual.*

L'intrêt de l'examen simultané des problèmes dual et primal réside dans le fait que des relations caractéristiques unissent leurs solutions tels que:

- La valeur optimale des deux fonctions à optimiser est la même $Z_{max} = Z_{min}$.
- Si la solution de l'un ou l'autre des problèmes est donnée, la solution de l'autre peut être déterminée.

Dans plusieurs cas, il est plus efficace numériquement de résoudre le problème dual du problème donné que le problème donné lui même. Ceci résulte du fait que l'effort numérique pour résoudre un programme linéaire est proportionnel au nombre d'équations de contraintes. Si le problème donné contient un large nombre de contraintes mais peu de variables, le dual va contenir peu de contraintes mais un large nombre de variables et donc peut être facilement résolu.

Les solutions du problème dual fournissent souvent un aperçu utile pour la modélisation du système par le primal.

La valeur de la première variable duale, par exemple, représente la valeur par laquelle la fonction objective du primal va changer par unité de changement de la quantité b_1 : Ceci est du fait que par définition la valeur de la $i^{\text{ème}}$ variable duale est égale à la valeur du coefficient $(Z_j - C_j)$ de la variable d'écart x_j apparaissant dans la $i^{\text{ème}}$ contrainte du primal.

Lorsqu'un programme linéaire donné, présente un mélange d'inégalités et d'égalités, son programme dual présentera aussi un mélange d'inégalités et d'égalités mais différemment.

Le tableau suivant présente les différentes transformations que le PL subit lors du passage du primal vers le dual et inversement.

| Maximum | Minimum |
|---|---|
| - Matrice des coefficients ($m \times n$) | - Transposée de la matrice des coefficients ($m \times n$) |
| - Seconds membres des contraintes | - Coefficients de la fonction objectif |
| - Coefficients de la fonction objectif | - Seconds membres des contraintes |
| * Nombre des contraintes <i>i</i> ème contrainte = <i>i</i> ème contrainte \leq <i>i</i> ème contrainte \geq | * Nombre des variables originales <i>i</i> ème variable arbitraire <i>i</i> ème variable ≥ 0 <i>i</i> ème variable ≤ 0 |
| * Nombre des variables originales <i>j</i> ème variable arbitraire <i>j</i> ème variable ≥ 0 <i>j</i> ème variable ≤ 0 | * Nombre des contraintes <i>j</i> ème contrainte = <i>j</i> ème contrainte \leq <i>j</i> ème contrainte \geq |

Tableau III.2.2: Transformation d'un PL lors d'un passage du primal au dual.

III.2.1 Interprétation Économique de la Dualité:

Avant d'entamer le concept économique de la dualité il est nécessaire de définir ce qui est le coût marginal.

Définition: coûts marginaux: Le coût marginal mesure l'effet sur la fonction objectif de la décision de relâcher la contrainte correspondante en ajoutant une unité supplémentaire de la "ressource" associée à cette contrainte

Pour l'interprétation économique des résultats il faudrait considérer deux catégories de problème:

- Dans une première catégorie de problèmes économiques, le vecteur x est un vecteur de production, le vecteur C est un vecteur de profits unitaires et le vecteur b est un vecteur de contraintes portant sur des ressources limitées, la matrice A est une matrice de coefficients techniques dans laquelle a_{ij} indique la quantité de ressource i , nécessaire à la production d'une unité j .

Le problème est un problème de maximisation des profits globaux et s'écrit:

$$\text{Max } z = C^t \cdot X$$

sujet à

$$A \cdot X \leq B$$

$$X \geq 0.$$

Les deux problèmes primal et dual vont de présenter ainsi:

Problème Primal

- Maximiser (le profit total) = $\sum_j (\text{profit unitaire de } j) \times (\text{niveau de l'activité } j)$
- $\sum_j (\text{quantité de la ressource } i \text{ nécessaire à la production d'une unité de produit } j) \times (\text{niveau de l'activité } j) \leq \text{quantité disponible de la ressource } i$
- (niveau de j) ≥ 0

Problème Dual

- Minimiser (le coût total de production) = $\sum_i (\text{quantité disponible de la ressource } i) \times y_i$
- $\sum_i y_i \times (\text{quantité de la ressource } i \text{ nécessaire à la production d'une unité de produit } j) \geq \text{profit unitaire de } j$
- $y_i \geq 0$

- Une deuxième catégorie de problème économique cherche à satisfaire un ensemble de demandes définies par des seuils minimaux représentés par un vecteur b , à l'aide du facteur de production en quantité x dont le coût est C .

Le problème est un problème de minimisation du coût global de production et s'écrit:

$$\text{Min } z = C^t \cdot X$$

$$A \cdot X \geq B$$

$$X \geq 0$$

Les deux problèmes dual et primal vont se présenter ainsi

Problème Primal

- Minimiser (le coût total) = $\sum_j (\text{coût unitaire de } j) \times (\text{niveau de } j)$
- $\sum_j (\text{quantité de la ressource } i \text{ nécessaire à la production d'une unité de produit } j) \times (\text{niveau de l'activité } i) \geq (\text{demande de } i)$
- (niveau de j) ≥ 0

Problème Dual

- Maximiser (les ressources demandées) = $\sum_i (\text{demande de } i) \times y_i$
- $\sum_i y_i \times (\text{quantité de la ressource } i \text{ nécessaire à la production d'une unité de produit } j) \leq \text{coût unitaire de } j$
- $y_i \geq 0$

III.2.2 Relation Entre les Eléments du Tableau du Problème Primal

et du Problème Dual

Soit un problème de maximisation (resp de minimisation) dont la i ème contrainte est du type \leq , et soit x_{n+1} la variable d'écart associée à cette contrainte. D'après ce qui a été vu dans le paragraphe d'interprétation des coefficients ($z_j - c_j$) une augmentation du second de la i ème contrainte contenant cette variable d'écart entraîne une modification de la fonction objectif de la valeur : $Z_{n+1} - C_{n+1}$

A l'optimum, la valeur optimale y_i de la variable duale associée avec la i ème contrainte est:

$$y_i^* = Z_{n+1}^* - C_{n+1} \geq 0 \quad (\text{resp } \leq 0)$$

De même pour une contrainte du type ≥ 0 , et pour la variable (d'excédent) x_{n+1} , la optimale y_i^* sera égale à:

$$y_i^* = C_{n+1} - Z_{n+1}^* \leq 0 \quad (\text{resp } \geq 0)$$

Le tableau ci-dessous résume ces deux situations

| <i>i</i> ème contrainte du type \leq | | |
|---|--|---|
| <i>Variable d'écart de la ième contrainte</i> | <i>Valeur optimale de la variable duale associée</i> | <i>Signe de la variable duale associée</i> |
| x_{n+1} | $y_i^* = -(C_{n+1} - Z_{n+1}^*)$ | <i>Problème de maximisation</i> $y_i^* \geq 0$ |
| | | <i>Problème de minimisation</i> $y_i^* \leq 0$ |

| <i>i</i> ^{ème} contrainte du type \geq / | | |
|--|---|--|
| Variable d'excédent de la <i>i</i> ^{ème} contrainte | Valeur optimale de la variable duale associée | signe de la variable duale associée |
| X_{n+1} | $y_i^* = C_{n+1} - Z_{n+1}^*$ | Problème de maximisation $y_i^* \leq 0$ |
| | | Problème de minimisation $y_i^* \geq 0$ |

Tableau III.2.3: Relations entre éléments du tableau primal et celui du dual

Du fait de la relation très étroite entre les variables duales et les coefficients $(Z_j - C_j)$ des variables d'écarts associées à la *i*^{ème} contrainte, ils auront les mêmes interprétations.

Elles indiquent l'amélioration apportée à la fonction objectif suite à une modification marginale des contraintes (second membre).

III.3 Analyse Post-Optimale: Analyse de sensibilité

L'analyse Post-Optimale consiste en une étude de sensibilité des résultats fournis par la résolution du problème d'optimisation, lorsqu'on fait varier une ou plusieurs valeurs des

paramètres (c, b ou A) en programmation lineaire.

L'interprétation économique des variables duales (coûts marginaux) rend la programmation lineaire plus utiles aux pre-neurs de décisions que la solution primale optimale. en pra-tique, on cherchera à connaitre le domaine de variation possible des paramètres constituant le problème tout en gardant cette interprétation valable.

L'analyse portera sur un tel modèle:

$$\begin{aligned} \text{max } z &= \sum C_j X_j \\ \text{sujet à } \sum a_{ij} x_j &\leq b_i \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

III.3.1 Modification des Coefficients de la Fonction Objectif

Les modifications des coefficients c_j (profits ou coûts) de la fonction objectif peuvent provenir par exemple d'une erreur dans l'estimation des coûts, d'un changement de prix...

La question qui se pose: Ces modifications vont elles changer la solution optimale déjà obtenue? Pour répondre à une telle question il faut considérer séparément le cas où la variable x_j associée au coefficient c_j , sujet de changement, est une vari-able hors base, et le cas où elle est variable de base dans la solution optimale.

1. Modification d'un coefficient c_j d'une variable hors base:
Considérons deux types de problèmes:

* Problème de maximisation: Le critère d'optimalité pour un tel cas est: $C_j - Z_j^* \leq 0 \quad \forall j$

Si $C_j = C_j + \Delta C_j$, le tableau optimal du Simplexe ne sera modifié que pour $C_j - Z_j^*$ qui deviendra $C_j + \Delta C_j - Z_j^*$ [Z_j^* n'est pas affectée par la variation de C_j car:

$$Z_j = \sum_i C_i \alpha_{ij} \quad \text{où } C_i \text{ coefficient associé aux variables de base]}$$

La solution restera optimale tant que:

$$C_j + \Delta C_j - Z_j^* \leq 0 \Rightarrow \Delta C_j \leq Z_j^* - C_j$$

Donc les coefficients des variables "hors base" peuvent varier sans remettre en cause l'optimalité de la solution de départ à condition que cette variation soit au plus égale à la valeur duale correspondante s'il s'agit d'un accroissement et sans limitation si cette variation est négative.

* Problème de minimisation: Le critère d'optimalité est: $C_j - Z_j^* \geq 0 \quad \forall j$

Si $C_j = C_j + \Delta C_j$,

Le nouveau critère d'optimalité devient:

$$\Delta C_j \geq (Z_j^* - C_j)$$

Ainsi il y aura conservation de la solution optimale de départ à condition que cette variation soit égale à la valeur duale correspondante s'il s'agit d'une diminution et sans limitation si cette variation est positive.

2. Modification d'un Coefficient c_j d'une Variable de base:

Dans ce cas z_j^* change du fait de la variation des coefficients c_j de la base.

* Dans le cas d'un problème de maximisation, dans laquelle la variable de base x_j est associée à la l ème contrainte du tableau optimal, la solution de base restera optimale tant que:

$$C_j - Z_j^* \leq 0$$

où

$$Z_j^* = \sum_{i=1}^m (C_i + \Delta C_i) \cdot a_{ij}$$

et par suite on obtient:

$$\underset{\substack{a_{lk}^* > 0 \\ l = \overline{1, m} \\ x_k^* \text{ hors base}}}{\text{maximum}} \left\{ \frac{C_k - Z_k^*}{a_{lk}^*} \right\} \leq \Delta C_j \leq \underset{\substack{a_{lk}^* < 0 \\ l = \overline{1, m} \\ x_k^* \text{ hors base}}}{\text{minimum}} \left\{ \frac{C_k - Z_k^*}{a_{lk}^*} \right\}$$

* Par analogie, pour un problème de minimisation on obtient le domaine de variation des C_j

$$\underset{\substack{a_{lk}^* < 0 \\ l = \overline{1, m} \\ x_k^* \text{ hors base}}}{\text{maximum}} \left\{ \frac{C_k - Z_k^*}{a_{lk}^*} \right\} \leq \Delta C_j \leq \underset{\substack{a_{lk}^* > 0 \\ l = \overline{1, m} \\ x_k^* \text{ hors base}}}{\text{minimum}} \left\{ \frac{C_k - Z_k^*}{a_{lk}^*} \right\}$$

III.3.2 Modification du second membre des contraintes:

Comme les conditions d'optimalité ne font pas intervenir les seconds membres b_i alors l'optimalité de la solution est garantie, reste à déterminer les limites de variation Δb_i pour lesquelles la solution reste réalisable i.e que toutes les composantes du vecteur solution restent inchangées.

Deux cas sont à envisager:

i- Soit un problème de maximisation dans lequel la i ème contrainte est du type \leq et soit x_{n+1} la variable d'écart associée à cette contrainte. Le domaine de variation de Δb_i est

$$\underset{\substack{a_{k,n+1}^* > 0 \\ k=1, m}}{\text{maximum}} \left\{ \frac{-b_k^*}{a_{k,n+1}^*} \right\} \leq \Delta b_i \leq \underset{\substack{a_{k,n+1}^* < 0 \\ k=1, m}}{\text{minimum}} \left\{ \frac{-b_k^*}{a_{k,n+1}^*} \right\}$$

Si Δb_i est dans ces limites alors les nouvelles valeurs optimales des variables de base sont:

$$\bar{x}_j^* = x_j^* + a_{i,n+1}^* \cdot (\Delta b_i)$$

Les résultats ci-dessus sont valables dans le cas d'un problème de minimisation

ii- Soit un problème de maximisation mais dans ce cas la i ème contrainte est du type \geq et soit x_{n+1} la variable d'excédent associée à cette contrainte. Le domaine de variation des Δb_i est

$$\underset{\substack{a_{k,n+1}^* < 0 \\ k=1, m}}{\text{maximum}} \left\{ \frac{-b_k^*}{a_{k,n+1}^*} \right\} \leq \Delta b_i \leq \underset{\substack{a_{k,n+1}^* > 0 \\ k=1, m}}{\text{minimum}} \left\{ \frac{-b_k^*}{a_{k,n+1}^*} \right\}$$

Si Δb_i vérifie cette condition, les nouvelles valeurs optimales des variables de base sont:

$$\bar{x}_j^* = x_j^* - a_{i,n+i}^* (\Delta b_i)$$

Ces résultats restent valables dans le cas d'un problème de minimisation.

Il est à remarquer que ce type de problème peut être traité en utilisant le problème dual, et cela est du fait que les constantes des contraintes sont aussi les coefficients de la fonction objectif du dual.

III.3.3 Modification des Coefficients Technologiques a_{ij} :

Il est aussi important pour un gestionnaire de voir la sensibilité de la solution optimale du programme linéaire vis à vis des modifications des coefficients technologiques a_{ij} .

1- Cas où la variable x_j est une variable hors base.

Dans ce cas seule la valeur de son coefficient ($z_j - c_j$) est affectée par cette modification.

ii- La i ème contrainte est du type \leq :

Puisque à l'optimum les variables sont ≥ 0 , alors en passant au problème dual on aura:

$$a_{1j} \cdot y_1^* + a_{2j} \cdot y_2^* + \dots + (a_{ij} + \Delta a_{ij}) \cdot y_i^* + \dots + y_m^* \geq C_j$$

* Si $y_i^* = 0$: aucune limitation n'est imposée sur Δa_{ij} i.e

$\Delta a_{ij} \in \mathbb{R}$

* Si $y_i^* > 0$ on aura

$$\Delta a_{ij} \geq \frac{C_j - \sum_{k=1}^m a_{kj} y_k^*}{y_i^*}$$

$$\Delta a_{ij} \geq \frac{C_j - Z_j^*}{y_i^*}$$

i2- La ième contrainte est du type \geq : On aura en passant au problème dual:

$$a_{1j} \cdot y_j^* + a_{2j} \cdot y_j^* + \dots + (a_{ij} + \Delta a_{ij}) \cdot y_j^* + \dots + y_m^* \leq C_j$$

Et par suite:

$$\Delta a_{ij} \leq \frac{C_j - Z_j^*}{y_i^*}$$

ii- Cas où la variable x_j est variable de base dans la solution optimale.

Lorsqu'une variable x_j est de base, en plus des coefficients $(Z_j - C_j)$, il y aura les valeurs des variables de base qui vont être affectées. En effet, à l'itération où x_j devient variable de base, ses coefficients seront utilisés pour le calcul de ceux des autres variables: Tous les éléments apparaissant dans le tableau du Simplex vont être affectés.

Une modification apportée aux coefficients a_{ij} d'une variable de base dans la solution optimale exige des calculs complexes, il devient alors préférable de retraiter le problème.

ii1- Cas où x_j est une variable de base et où la ressource i est totalement utilisée.

La contrainte associée à cette ressource est telle que

$$a_{i1}x_1^* + \dots + a_{in}x_n^* + x_{n+i}^* = b_i$$

D'après cette équation, on peut conclure que dans un tel cas toute modification Δa_{ij} du coefficient a_{ij} est impossible sans changer la valeur des variables dans la solution optimale:

$$\Delta a_{ij} = 0$$

ii2- Cas où x_j est une variable de base et où la ressource i n'est pas totalement utilisée.

Dans ce cas il est possible d'utiliser la quantité supplémentaire de cette ressource pour la fabrication du produit j . La base optimale restera inchangée tant que ce supplément ne dépasse pas l'excédent de la ressource i disponible. Autrement dit:

* Dans le cas d'une contrainte du type \leq

$$\Delta a_{ij} \leq \frac{x_{n+i}^*}{y_j^*}$$

où x_{n+i}^* est la valeur optimale de la variable d'écart associée à la i ème contrainte

* Dans le cas d'une contrainte du type \geq

$$\Delta a_{ij} \geq \frac{-x_{n+i}^*}{y_j^*}$$

III.3.4 Ajout d'une Variable

Si une fois la solution optimale obtenue, on remarque l'oubli d'une variable. Faut-il recommencer du départ ?

Pour éviter un travail supplémentaire, un moyen rapide est mis au point:

- Ajuster le tableau final du simplexe avec les coefficients technologiques de cette nouvelle variable.

- Calcul $Z_j - C_j$ de cette nouvelle variable: Si le coefficient $C_j - Z_j$ obtenu est ≤ 0 la solution optimale obtenue initialement est toujours valide sinon on doit poursuivre le processus itératif en introduisant cette nouvelle variable comme variable de base.

III.3.5 Ajout d'une contrainte.

Il arrive très souvent lors de l'élaboration d'un modèle d'omettre une ou plusieurs contraintes. Que faut-il faire dans une telle situation? La réponse à une telle question est la suivante:

On vérifie si la solution de base optimale obtenue respecte cette contrainte ajoutée:

- 1- Si cette contrainte est respectée: La solution reste optimale

- 2- Sinon, il suffit d'exprimer la variable d'écart ou la variable artificielle apparaissant dans cette contrainte en fonction des variables hors base de la solution de base déjà obtenue et de poursuivre le processus itératif jusqu'à atteindre l'optimum.

Il est à remarquer que les domaines de variation obtenus dans chaque cas ne sont valables que lorsqu'un seul coefficient ou paramètre (c_j ou a_{ij} ou b_i) varie.

Le tableau ci joint présente ou récapitule les différents cas se présentant lors d'une étude Pos-Optimale.

| | Cas possible | Borne Inférieure | | Bornes Supérieure | |
|-----------------|------------------------|--|--|--|--|
| | | variables hors base | variables de base | variables hors base | variables de base |
| Δc_j | Maximisation | $-\infty$ | $\max_{a_{ik}^* > 0} \left\{ \frac{C_k - Z_k^*}{a_{ik}^*} \right\}$ | $Z_j^* - c_j$ | $a_{ik}^* < 0$ |
| | Minimisation | $Z_j^* - c_j$ | $\max_{a_{ik}^* < 0} \left\{ \frac{C_k - Z_k^*}{a_{ik}^*} \right\}$ x_k^* hors base | $+\infty$ | $\min_{a_{ik}^* > 0} \left\{ \frac{C_k - Z_k^*}{a_{ik}^*} \right\}$ x_k^* hors base |
| Δc_j | ième contrainte \leq | $\max_{\substack{a_{k,n+l}^* > 0 \\ k=1,m}} \left\{ \frac{-b_k^*}{a_{k,n+l}^*} \right\}$ | | $\min_{\substack{a_{k,n+l}^* < 0 \\ k=1,m}} \left\{ \frac{-b_k^*}{a_{k,n+l}^*} \right\}$ | |
| | ième contrainte \geq | $\max_{a_{k,n+l}^* < 0} \left\{ \frac{b_k^*}{a_{k,n+l}^*} \right\}$ | | $\max_{a_{k,n+l}^* > 0} \left\{ \frac{b_k^*}{a_{k,n+l}^*} \right\}$ | |
| Δa_{ij} | variable hors base | contrainte \leq | contrainte \geq | contrainte \leq | contrainte \geq |
| | | $y_i^* = 0: -\infty$ $y_i^* > 0: \frac{c_j - Z_j^*}{y_i^*}$ | $y_i^* = 0: -\infty$ $y_i^* > 0: -\infty$ | $y_i^* = 0: +\infty$ $y_i^* > 0: +\infty$ | $y_i^* = 0: +\infty$ $y_i^* > 0: \frac{c_j - Z_j^*}{y_i^*}$ |
| | variable de base | * ressource i non totalement utilisée | | * ressource i non totalement utilisée | |
| | | $-\infty$ | $-\frac{x_{n+l}^*}{x_j^*}$ | $\frac{x_{n+l}^*}{x_j^*}$ | $+\infty$ |
| | | * ressource i totalement utilisée | | | |
| | | 0 | 0 | 0 | 0 |

Tableau III.3.1: Différents cas d'une étude Post-Optimale.

- *Critique de la Méthode de la Programmation Linéaire*

La programmation linéaire est une des méthodes très largement développées. Elle présente les avantages suivants:

- Performance et diversité des algorithmes de résolution
- Le nombre de variables de décision est non limité dans le modèle

Cependant elle présente certains inconvénients tels que:

- le fait que cette technique soit déterministe
- La programmation linéaire exige que les contraintes et la fonction objectif soient linéaires.

IV APPLICATION

L'exemple qui sera traité dans cette partie illustre un cas très répandu de l'application de la programmation linéaire dans la gestion des ressources hydriques.

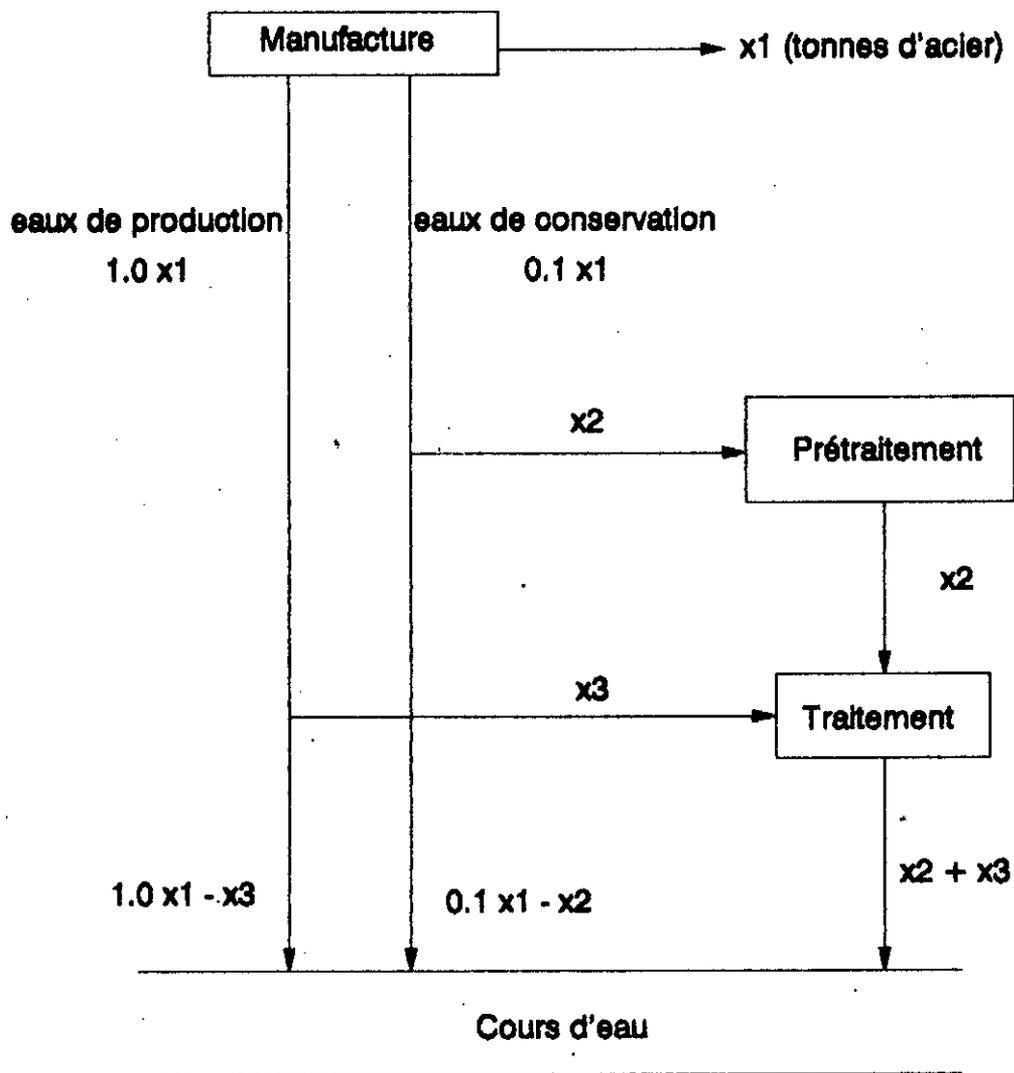
Soit une usine produisant un produit donné et générant deux types distincts et différents de rejet. Un exemple peut être les eaux de conservation et de production provenant d'une usine de laminage d'acier.

Ces eaux usées peuvent être soit rejetées directement dans le cours d'eau sans traitement mais sujet à une taxe de rejet, soit traitées dans une station existante qui élimine 90 % des matières désagréables.

Cependant, certaines eaux de conservation peuvent avoir besoin d'un certain degré de prétraitement. Par exemple, elles peuvent nécessiter une neutralisation avant de passer à la station de traitement.

Le problème est de déterminer le niveau de production qui maximise l'écart entre les profits espérés, les coûts de traitement des eaux usées ainsi que les taxes de rejet.

Le modèle d'exploitation est schématisé comme suit:



Définition des Activités:

X_1 : Tonnes d'acier à produire par jour.

X_2 : Milliers de mètres cubes d'eau de conservation à traiter par jour.

X_3 : Milliers de mètres cubes d'eau de production à traiter par jour

Les Données du Problème:

Le tableau ci-dessous résume l'ensemble des données et informations nécessaires pour élaborer le modèle d'optimisation

| Données | Coût |
|--|---|
| - Revenus de production de l'acier. | 25 DA / tonne |
| - Quantité d'eau de conservation générée. | 0.1 10^3 m ³ / tonne d'acier |
| - Quantité d'eau de production générée. | 1.0 10^3 m ³ / tonne d'acier |
| - Coût du prétraitement des eaux de conservation. | 0.2 DA / 10^3 m ³ |
| - Coût de traitement des eaux de production et des eaux de conservation prétraitées. | 0.1 DA / 10^3 m ³ |
| - Taxe de rejet des eaux de production non traitées. | 0.05 DA / 10^3 m ³ |
| - Taxe de rejet des eaux de conservation non traitées. | 0.15 DA / 10^3 m ³ |
| - Capacité de l'usine de prétraitement. | 2 10^3 m ³ / jour |
| - Capacité de l'usine de traitement. | 50 10^3 m ³ / jour |
| - Efficience de la station de traitement. (Pour les deux types d'eaux usées) | 0.9 |

IV.1 Fonction Objectif

Les différents éléments constituant cette fonction objectif sont:

- 1 Revenus espérés de la production d'acier.
- 2 Coût de traitement des 2 types d'eaux usées.
- 3 Taxes de rejet.

L'objectif est de maximiser l'écart entre ces trois composantes

1- Profits de production: P_1

Si X_1 représente la quantité d'acier produite par jour et C_1 le profit unitaire de cette production alors les revenus espérés seront:

$$P_1 = C_1 \cdot X_1$$

Dans cet exemple $C_1 = 25 \text{ DA / tonne}$ et par suite $P_1 = 25 X_1$

2- Coût de Traitement des Eaux Usées:

On distingue deux coûts de traitement, celui pour les eaux de conservation et celui pour les eaux de production.

a- Coût de prétraitement des eaux de conservation:

$$p_1 = 0.2 x_2$$

b- Coût de traitement des eaux de conservation:

$$p_2 = 0.1 x_2$$

c- Coût de traitement des eaux de production:

$$p_3 = 0.1 x_3$$

Ainsi le coût global de traitement de ces deux types d'eaux usées est:

$$P_2 = p_1 + p_2 + p_3 = 0.2x_2 + 0.1(x_2 + x_3) = 0.3x_2 + 0.1x_3$$

3- Taxes de rejet:

On distingue dans cette catégorie deux types: les taxes de rejet des eaux usées non traitées et celle des eaux usées traitées.

a- Taxes de rejet des eaux de conservation non traitées

La quantité d'eau de conservation non traitée est $(0.1x_1 - x_2)$, ainsi la taxe de rejet qui lui est correspondante est:

$$p_4 = 0.15(0.1X_1 - X_2)$$

b- Taxes de rejet des eaux de production non traitées

La quantité d'eau de production non traitée est $(1.0x_1 - x_3)$, ainsi la taxe de rejet correspondante est

$$p_5 = 0.05(X_1 - X_3)$$

c- Taxes de rejet des eaux de conservation traitées

De la même façon

$$p_6 = 0.15 \cdot 0.1x_2$$

d- Taxes de rejet des eaux de production traitées

Dans ce cas cette taxe aura pour valeur

$$p_7 = 0.05 \cdot 0.1x_3$$

Les taxes totales de rejet sont ainsi égales à:

$$\begin{aligned} P_3 &= p_4 + p_5 + p_6 + p_7 \\ &= 0.065x_1 - 0.135x_2 - 0.045x_3 \end{aligned}$$

La fonction objectif s'obtient ainsi:

$$P = P_1 - P_2 - P_3$$

$$P = 24.935x_1 - 0.165x_2 - 0.055x_3$$

IV.2 Contraintes du problème

Très diverses, les contraintes dans un tel problème peuvent se présenter comme suit :

- Les quantités d'eaux usées pouvant être traitées sont limitées par la capacité de chaque station: De telles contraintes s'expriment de la façon suivante:

$$x_2 \leq 2 \quad \text{pour le prétraitement}$$

et $x_2 + x_3 \leq 50 \quad \text{pour le traitement}$

- Il est nécessaire que l'écoulement se fasse de la manufacture vers le cours d'eau: Mathématiquement cette contrainte se traduit par:

$$x_1 - x_3 \geq 0$$

et $0.1x_1 - x_2 \geq 0$

- Se basant sur des considérations de la qualité de l'eau une agence de régularisation avait, auparavant, imposé des restrictions sur les quantités maximales d'eau de production et de conservation pouvant être rejetées sans traitement: un maximum de 500 10^3 m^3 / jour pour les eaux de conservation et 10 10^3 m^3 / jour les eaux de production: En termes d'inéquations ces contraintes s'expriment de la manière suivantes

$$x_1 - x_3 \leq 10$$

et $0.1x_1 - x_2 \leq 500$

Une fois, tous les éléments définis, le programme linéaire se présente comme suit:

Maximiser: $P = 24.935x_1 - 0.165x_2 - 0.055x_2$

sujet à

$$x_2 \leq 2$$

$$x_2 + x_3 \leq 50$$

$$x_1 - x_3 \geq 0$$

$$0.1x_1 - x_2 \geq 0$$

$$0.1x_1 - x_2 \leq 500$$

$$x_1 - x_3 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (\text{non négativité})$$

IV.3 Transformation du Programme Linéaire

Le modèle linéaire trouvé est un mélange d'inégalités de sens différents. Pour le rendre sous forme d'un système d'équations linéaires, les transformations suivantes sont nécessaires:

a- Contraintes du type \leq : Introduction d'une variable d'écart:

$$x_2 \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_2 + x_4 = 2 \\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_2 + x_3 \leq 50 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_2 + x_3 + x_5 = 50 \\ x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$0.1x_1 - x_2 \leq 500 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0.1x_1 - x_2 + x_6 = 500 \\ x_6 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1 - x_3 \leq 10 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 - x_3 + x_7 = 10 \\ x_7 \geq 0 \end{cases}$$

b- Contraintes du type \geq : Introduction d'une variable d'excédent:

$$x_1 - x_3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x_1 + x_3 + x_8 = 0 \\ x_8 \geq 0 \end{cases}$$

$$0.1x_1 - x_2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -0.1x_1 + x_2 + x_9 = 0 \\ x_9 \geq 0 \end{cases}$$

Le PL devient:

Maximiser: $P = 24.935x_1 - 0.165x_2 - 0.055x_2$

sujet à

| | | | | | |
|-------------------------------|-------------|---------|---------|---------|---------|
| | x_2 | $+ x_4$ | | | $= 2$ |
| | $x_2 + x_3$ | | $+ x_5$ | | $= 50$ |
| $0.1 x_1 - x_2$ | | | | $+ x_6$ | $= 500$ |
| | x_1 | $- x_3$ | | $+ x_7$ | $= 10$ |
| | $-x_1$ | $+ x_3$ | | $+ x_8$ | $= 0$ |
| $-0.1x_1 + x_2$ | | | | $+ x_9$ | $= 0$ |
| $x_1, x_2, \dots, x_9 \geq 0$ | | | | | |

Sous forme matricielle le PL s'écrit:

Maximiser $P = C^t \cdot X$

sujet à

$$DX = B$$

$$X \geq 0$$

Où

$$C^c = [24.935 \quad -0.165 \quad -0.055 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$X^c = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8 \quad x_9]$$

$$B_t = [2 \quad 50 \quad 500 \quad 10 \quad 0 \quad 0]$$

et

$$D = \begin{array}{c|ccccccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

IV.4 Résolution du Programme Linéaire:

Une fois transformé, le programme linéaire est résolu en utilisant la méthode du Simplexe.

La solution optimale est atteinte après deux itérations

Les deux tableaux ci-dessous indiquent les phases initiales et finales de la résolution

Tableau initial

| | | | | | | | | | | | |
|-------|-------------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------|
| | C_j | 24.935 | -0.165 | -0.055 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | x_j | | | | | | | | | |
| C_i | x_i | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 | b_i |
| 0 | x_4 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| 0 | x_5 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 50 |
| 0 | x_6 | 0.1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 500 |
| 0 | x_7 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 10 |
| 0 | x_8 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | x_9 | -0.1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | Z_j | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $Z_0 = 0$ |
| | $C_j - Z_j$ | 24.935 | -0.165 | -0.055 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

x_7 sort de la base et x_1 y rentre

Tableau final

| | | C_j | 24.935 | -0.165 | -0.055 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
|-------------|-------|--------|---------|--------|--------|--------|-------|---------|-------|-------|---|-----------------|--|
| C_i | x_i | x_j | | | | | | | | | | b_j | |
| | | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 | | | |
| 0 | x_4 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | |
| -0.055 | x_3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 50 | |
| 0 | x_6 | 0 | -1 | 0 | 0 | -0.1 | 1 | -0.1 | 0 | 0 | 0 | 494 | |
| 24.935 | x_1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 60 | |
| 0 | x_8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 10 | |
| 0 | x_9 | 0 | 1.1 | 0 | 0 | 0.1 | 0 | 0.1 | 0 | 1 | 0 | 6 | |
| Z_j | | 24.935 | 24.88 | -0.055 | 0 | 24.88 | 0 | 24.935 | 0 | 0 | 0 | $Z_0 = 1493.35$ | |
| $C_j - Z_j$ | | 0 | -25.045 | 0 | 0 | -24.88 | 0 | -24.935 | 0 | 0 | 0 | | |

La solution optimale du programme linéaire est:

$$P_{\max} = 1493.35 \text{ DA / jour}$$

$$X_1 = 60 \text{ tonnes d'acier / jour}$$

$$X_2 = 0 \text{ } 10^3 \text{ m}^3 \text{ d'eau de concervation à traiter / jour}$$

$$X_3 = 50 \text{ } 10^3 \text{ m}^3 \text{ d'eau de production à traiter / jour}$$

IV.5 Analyse de Sensibilité:

Le but d'une telle analyse est la détermination des domaines de variation possibles, des différents paramètres constituant le programme linéaire tout en respectant le critère d'optimalité (chapitre III).

En appliquant les différentes règles du tableau (III.3.1) on obtient:

Domaine de Variation des Coefficients
de la Fonction Objectif

| Variable | Coefficients actuels | Diminution possible | Augmentation possible |
|----------|-------------------------|------------------------|--------------------------|
| X_1 | 24.935 | 24.88 | Aucune restriction |
| X_2 | -0.165 | Aucune restriction | 25.045 |
| X_3 | -0.055 | 24.88 | Aucune restriction |

Pour une meilleure compréhension prenons le cas du coefficient C_j associé à la variable de base.

D'après le tableau III.3.1:

$$\text{Max}\left(\frac{C_k - Z_k^*}{a_{lk}^*}\right) \leq \Delta C_j \leq \text{min}\left(\frac{C_k - Z_k^*}{a_{lk}^*}\right)$$

où l correspond au numéro de la contrainte contenant cette variable de base.

Prenons comme exemple x_1 , en se référant au tableau final du Simplexe on aura:

$$\text{Max}\left(\frac{C_k - Z_k^*}{a_{lk}^*}\right) = \text{Max}\left(\frac{C_2 - Z_2^*}{a_{42}^*}, \frac{C_5 - Z_5^*}{a_{45}^*}, \frac{C_7 - Z_7^*}{a_{47}^*}\right) = -24.88$$

$$\text{Min}\left(\frac{C_k - Z_k^*}{a_{lk}^*}\right) = \text{Min}\left(\frac{-25.045}{1}, \frac{-24.88}{1}, \frac{-24.935}{1}\right)$$

Aucun a_{lk}^* n'est négatif et par suite il n'y a aucune restriction sur C_1 en ce qui concerne une augmentation possible.

Donc:

$$\Delta C_1 \geq -24.88$$

De la même façon les domaines de variation de C_2 et C_3 sont déterminés.

Domaine de variation du
second membre

| Contrainte | second membre initial | second membre final | Diminution possible | Augmentation possible |
|-------------------------|-----------------------------|---------------------------|------------------------|--------------------------|
| $x_2 \leq 2$ | 2 | 2 | 2 | aucune réstriction |
| $x_2 + x_3 \leq 50$ | 50 | 50 | 50 | 4940 |
| $0.1x_1 - x_2 \leq 500$ | 500 | 494 | 494 | aucune réstriction |
| $x_1 - x_3 \leq 10$ | 10 | 60 | 10 | 4940 |
| $x_1 - x_3 \geq 0$ | 0 | 10 | aucune réstriction | 10 |
| $0.1x_1 - x_2 \geq 0$ | 0 | 6 | aucune réstriction | 6 |

Soit le cas de la contrainte $x_2 + x_3 \leq 50$; elle est du type \leq , d'après le tableau III.3.1:

$$\text{Max} \left(\frac{-b_k^*}{a_{k,n+l}^*} \right), a_{k,n+l}^* > 0 \leq \Delta b_l \leq \min \left(\frac{-b_k^*}{a_{k,n+l}^*} \right), a_{k,n+l}^* < 0$$

et par suite

$$\text{Max} \left(\frac{-b_k^*}{a_{k,5}^*} \right) \leq \Delta b_l \leq \min \left(\frac{-b_k^*}{a_{k,5}^*} \right), a_{k,5}^* < 0$$

$$a_{k,5}^* > 0$$

$$\begin{aligned} \text{Max} \left(\frac{-b_k^*}{a_{k,5}^*} \right) &= \text{Max} \left(\frac{-b_1^*}{a_{1,5}^*}, \frac{-b_2^*}{a_{2,5}^*}, \frac{-b_3^*}{a_{3,5}^*}, \frac{-b_4^*}{a_{4,5}^*}, \frac{-b_5^*}{a_{5,5}^*}, \frac{-b_6^*}{a_{6,5}^*} \right) \\ &= \text{Max} \left(\frac{-b_2^*}{a_{2,5}^*}, \frac{-b_4^*}{a_{4,5}^*}, \frac{-b_6^*}{a_{6,5}^*} \right) = -50 \end{aligned}$$

$$\text{min} \left(\frac{-b_k^*}{a_{k,5}^*} \right) = \text{min} \left(\frac{-494}{-0.1} \right) = 4940$$

Le domaine de variation de Δb_2 est:

$$-50 \leq \Delta b_2 \leq 4940$$

Conclusion: Pour maximiser l'écart entre les profits de productions et les coûts de traitement, l'usine ne devait pas faire subir un traitement aux eaux de conservation avant de les rejeter. La quantité de celles-ci étant très faible P/R à celle des eaux de production (un rapport de 1/10) cette valeur de x_2 semble raisonnable.

Pour préserver l'environnement, d'autres contraintes sur la quantité d'eau de conservation générée peuvent être imposées.

D'après cet exemple, on s'aperçoit que les résultats trouvés par le modèle de PL ne sont que des aides à la décision et que

d'autres facteurs différents peuvent intervenir ^{pour} les modifier tout en gardant l'aspect général du modèle et des solutions qu'il génère.

DEUXIEME PARTIE

I GENERALITES SUR LA GESTION PROBABILISTE DES RESERVOIRS

La connaissance des variations que peut subir le niveau du plan d'eau dans un réservoir pour une meilleure allocation de cette ressource semble être primordial. Pour cela, la construction de modèles prenant en considération la stochasticité des apports ainsi que celle de la demande est nécessaire

Une catégorie, bien spécifique, de modèles probabilistes traitant ce type de problème sont les modèles Markoviens discrets. Les éléments de base d'un processus de Markov sont "la période", "l'état" et "la transition".

* La période désigne l'intervalle du temps qui sépare deux évaluations successives de l'état du système.

* L'état d'un réservoir désigne le volume d'eau entourant un niveau particulier et auquel sont associés certaines informations.

* La transition définit le passage du réservoir d'un état à un autre.

Dans le cas de la gestion des réservoirs, les apports et/ou les réserves initiales au début de chaque période sont les états, les prélèvements effectués sont les décisions et le système fait une transition d'un état à un autre dans des périodes de temps successives.

Ces modèles sont discrets si les variables continues dans le temps

sont approximées par des unités discrètes, ils sont Markoviens car les transitions d'un état à un autre sont des événements aléatoires qui peuvent être approximés par un processus de Markov du premier ordre. Un tel processus tient compte de certaines corrélations existantes entre les états du système d'une période à une autre.

Manne (1962) partant du processus de Markov, a développé un modèle de PL pour optimiser la gestion d'un réservoir.

Thomas et Watermeyer (1962) ont étendu les travaux de Manne en définissant l'état initial du réservoir comme étant l'apport et la réserve ensemble plutôt que la réserve seule (processus Markovien à deux variables).

Loucks (1968) a développé un modèle de PL stochastique, le problème étant formulé en terme de probabilité d'atteindre un emmagasinement, Z_{t+1} , à partir de la réserve Z_t au début de la période t , les apports naturels, sujet à l'aléatoire et la corrélation, étant modélisés par un processus Markovien d'ordre 1.

Le but était l'optimisation d'une fonction économique de l'espérance des bénéfices en recherchant l'ensemble des probabilités d'atteindre un état Z_{t+1} pour chaque apport naturel possible et chaque prélèvement.

Les probabilités trouvées sont ensuite utilisées pour le calcul des probabilités conditionnelles d'un prélèvement étant en Z_t et recevant un apport donné.

Plusieurs, techniques stochastiques notamment la PD, techniques itératives et la PL faisant intervenir les chaînes de Markov du 1^{er} ordre avaient été revues et comparées par Loucks et Falkson (1970).

Houck et Tohon (1978) ont supposé une structure Markovienne discrète des débits. Ils ont établi une politique de gestion pour un système à plusieurs réservoirs à buts multiples en résolvant deux problèmes de PL successives dans le but d'approximer une formulation non linéaire.

II GESTION DES RESERVES

Dans un tel problème plusieurs méthodes ont été développées mais le mérite revient à Moran (1954) qui a initié une théorie basée sur une série d'apports indépendants, ayant une distribution de probabilité fixe.

Plusieurs chercheurs, après Moran, s'étaient intéressés au problème de gestion des réserves. Leurs travaux ont permis un développement considérable de cette branche. Parmi ces auteurs citons: Gould (1961) qui a incorporé la notion de défaillance dans l'année, Lloyd (1963) qui a développé une théorie probabiliste prenant en compte la corrélation des apports et les effets saisonniers.

II.1 Procéssus Markovien

un procéssus de Markov d'ordre 1 est un procéssus stochastique dans lequel la probabilité d'être dans n'importe quel quel état particulier et n'importe quelle période donnée ne dépend que de l'état acctuel (t) et l'état passé le plus récent ($t-1$).

Ainsi, le procéssus continu $\{Z(t), t \geq 0\}$, où $Z(t)$ est une variable aléatoire qui mesure par exemple le niveau d'eau dans un réservoir, est dit procéssus de Markov du premier ordre, si pour la série de temps $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ on a:

$$P_r \{Z(t_n) \leq z_n / Z(t_{n-1}) = z_{n-1}, \dots, Z(t_1) = z_1\}$$

$$P_r \{Z(t_n) \leq z_n / Z(t_{n-1}) = z_{n-1}\}$$

où z_n, z_{n-1}, \dots, z_1 est une série de nombres réels.

De la même façon les processus d'ordre supérieur peuvent être définis en rajoutant à l'équation précédente les termes correspondants.

Un cas particulier du processus Markovien est celui où le processus $Z(t)$ peut prendre des valeurs discrètes: un tel processus est dit chaîne de Markov.

Souvent dans la gestion des ressources en eau, les processus stochastiques continus sont approximatés par des chaînes de Markov pour simplifier la construction de modèles stochastiques d'optimisation.

II.2 Théorie de Moran pour la Gestion des Réserves:

Dans un réservoir, la réserve varie continuellement avec le temps, elle est influencée d'une part, par la corrélation des apports et leurs variations saisonnières, et d'autre part, par le taux de prélèvement. D'autres pertes telles que l'évaporation, suintement et réduction de la capacité par envasement affectent aussi les niveaux du réservoir.

La prise en compte totale de ces facteurs, rendant complexe la modélisation, Moran proposa les hypothèses simplificatrices suivantes:

1) Des pas de temps discrets sont considérés

2) Le réservoir est rempli durant la saison humide et les prélèvements sont effectués instantanément à la fin d'une période annuelle. Cependant, en général, il peut être supposé que les apports et les prélèvements se font continuellement durant l'année mais, quand le réservoir est à un niveau critique (bas), la demande est limitée à l'eau disponible.

3) Les séries discrètes des apports ne sont pas corrélées et elles ont une distribution de probabilité fixe.

4) Les pertes sont négligées, mais pour plus de précision, elles peuvent être approximativement comptées dans les quantités à retirer.

Ainsi la distribution des probabilités dans un réservoir peut être représentée par une simple chaîne de Markov.

La gestion probabiliste des réserves selon Moran peut se faire comme suit:

Soit un réservoir de capacité C et une série discrète d'apports indépendant $X(t)$.

Pour définir l'espace d'état, i.e l'ensemble des valeurs possibles que peut prendre la variable aléatoire, la capacité du réservoir est subdivisée en $(c+1)$ états soit $(c+2)$ limites.

Si $D(t)$ représente la demande annuelle, l'équation de continuité s'écrit:

$$Z(t) = Z(t-1) + X(t) - D(t)$$

$$\text{Sujet à } 0 \leq Z(t) \leq C$$

La contrainte $Z(t) \geq 0$ est nécessaire quand la demande ne peut être et la contrainte $Z(t) \leq C$ que partiellement satisfaite dans le cas de déversement.

La probabilité conditionnelle que le réservoir soit à l'état i au temps t sachant qu'il était à l'état j au temps $(t-1)$ est définie par:

$$q_t(i, j) = P_r \{ Z_t = i / Z_{(t-1)} = j \}$$

La distribution des réserves a une simple structure de chaîne de Markov du premier ordre et l'ensemble des valeurs de $q_t(i, j)$ forme ce qui est appelée matrice de transition.

Le problème est simplifié d'avantage, si ces probabilités sont indépendantes du temps, dans ce cas le processus est dit être homogène du temps. Cela signifie que:

$$P_r \{ Z(t) = i / Z(t-1) = j \} = P_r \{ Z(t-k) = i / Z(t-k-1) = j \}$$

avec $k = 1, 2, \dots$

L'ensemble des probabilités de transitions homogènes $q(i, j)$ est noté Q , et définit comme suit:

| | ÉTAT INITIAL | | | |
|---|--------------|----------|-------|----------|
| E | $q(0,0)$ | $q(0,1)$ | | $q(0,c)$ |
| T | . | . | | . |
| A | . | . | | . |
| T | . | . | | . |
| F | . | . | | . |
| I | . | . | | . |
| N | . | . | | . |
| A | . | . | | . |
| L | $q(c,0)$ | $q(c,1)$ | | $q(c,c)$ |

La matrice carrée Q d'ordre $(c+1)$ est dite stochastique si elle vérifie les propriétés suivantes

- $0 \leq q(i, j) \leq 1$

$$i, j = \overline{0, 1}$$

- $\sum_j q(i, j) = 1$

Il est conventionnel en pratique de prendre 0 comme l'état le plus bas avec le réservoir vide ou presque vide et un état c comme l'état le plus élevé quand le niveau du réservoir est autour du niveau de capacité. Un grand nombre d'états est pris en considération dans le but de minimiser les erreurs dans les probabilités calculées.

En pratique ce nombre varie entre 5 et 30. [8]

II.2.1 Probabilités Inconditionnelles et de Transition du nième Ordre:

Soit le vecteur ligne:

$$P_t = [p_t(0), p_t(1), \dots, p_t(c)]^T$$

représentant les probabilités inconditionnelles des états du réservoir au temps t et dans lequel la composante $p_t(j)$ est définie par:

$$P_t(j) = P_r\{Z(t) = j\}$$

Les vecteurs de probabilités inconditionnelles aux périodes (t) et $(t+1)$ sont reliés par

$$P_{t+1} = Q \cdot P_t$$

Au temps $(t+2)$

$$P_{t+2} = Q \cdot P_{t+1} = Q^2 \cdot P_t = Q^{(2)} \cdot P_t$$

où $Q^{(2)}$ est la matrice de transition du deuxième ordre des probabilités conditionnelles.

En général si le processus commence à zéro:

$$P_n = Q^{(n)} \cdot P_0$$

où $Q^{(n)}$ est la matrice de transition du nième ordre des probabilités conditionnelles.

L'exemple qui va être traité explique les différentes phases de cette méthode.

Exemple 1: Soit un cours d'eau dont les apports annuels peuvent être représentés par des variables aléatoires discrètes. Supposons que la distribution des débits est stationnaire. La variable continue est approximée par une variable discrète Q_t dans l'année t , qui prend la valeur q_1 .

La figure (1) illustre un ensemble possible de probabilités de

transition. Ces probabilités peuvent aussi être regroupée dans une matrice (figure 2) où chaque élément q_{ij} représente la probabilité de transition du débit q_i dans une année au débit q_j dans la suivante.

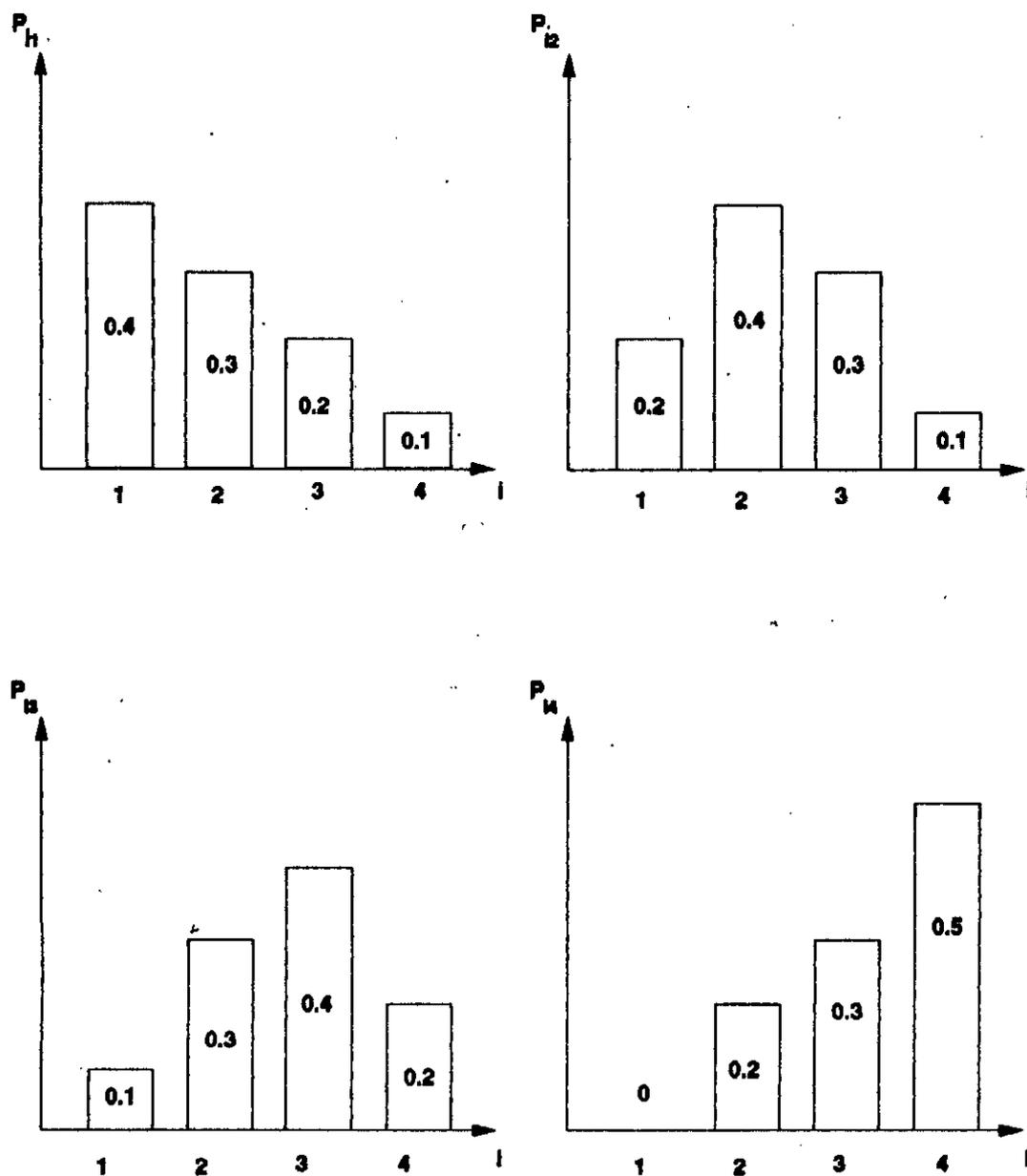


Figure 1: probabilités conditionnelles des débits annuels Q_t égal à q_i sachant que Q_{t-1} est égal à q_j pour $j=1,2,3,4$

quand le débit était q_j dans l'année $(t-1)$

| | | j | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------------|---|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 1 | | | | | |
| Probabilité | 1 | | 0.4 | 0.2 | 0.1 | 0 |
| du débit q_1 | 2 | | 0.3 | 0.4 | 0.3 | 0.2 |
| dans l'année t | 3 | | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.3 |
| | 4 | | 0.1 | 0.1 | 0.2 | 0.5 |

Pour le calcul des probabilités inconditionnelles supposons que l'apport dans l'année t est q_2 . Par conséquent, le vecteur P_0 sera défini comme suit:

$$P_0 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$$

En calculant le vecteur des probabilités inconditionnelles suivant l'équation

$$P_n = Q^{(n)} \cdot P_0$$

pour les neuf années à venir on obtient le tableau suivant

| n | Année | Probsbilité inconditionnelles des débits | | | |
|---------|-------|--|----------|----------|----------|
| | | $p^t(1)$ | $p^t(2)$ | $p^t(3)$ | $p^t(4)$ |
| $n = 0$ | t | 0.000 | 1.000 | 0.000 | 0.000 |
| $n = 1$ | t+1 | 0.200 | 0.400 | 0.300 | 0.100 |
| $n = 2$ | t+2 | 0.190 | .330 | 0.310 | 0.170 |
| $n = 3$ | t+3 | 0.170 | 0.316 | 0.312 | 0.199 |
| $n = 4$ | t+4 | 0.163 | 0.312 | 0.314 | 0.211 |
| $n = 5$ | t+5 | 0.159 | 0.310 | 0.315 | 0.216 |
| $n = 6$ | t+6 | 0.157 | 0.309 | 0.316 | 0.218 |
| $n = 7$ | t+7 | 0.156 | 0.309 | 0.316 | 0.219 |
| $n = 8$ | t+8 | 0.156 | 0.309 | 0.316 | 0.219 |
| $n = 9$ | t+9 | 0.156 | 0.309 | 0.316 | 0.219 |

On remarque que quand le temps progresse, les probabilités atteignent des valeurs limites dites les probabilités d'état stationnaire

II.2.2 Probabilités d'Etat Stationnaire:

Commençant dans la période $n=1$, il est raisonnable d'accepter que , comme le processus $Z(t)$ est continu, les états dans les périodes 2,3 et 4 ainsi de suite deviennent de moins en moins dépendant des états de la période 1.

Définie d'une autre manière, il est espéré que la distribution des

probabilités d'états dans la période $n=6$ serait de loin moins influencée par l'état en période $n=1$ que la distribution en la période $n=2$.

Ainsi quand n croit, les éléments de la matrice $Q^{(n)}$ approchent des valeurs d'état stationnaire. Chaque colonne est équivalente à un vecteur limite des probabilités inconditionnelles définie par:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \pi = [\pi(0) \dots \pi(c)]^T$$

On obtient alors le système suivant

$$\begin{cases} \prod = Q_{(n)} \cdot \pi \\ \sum_{i=1}^{ne} \pi_i = 1 \end{cases}$$

où ne : est le nombre d'états

Une des équations du système est redondante, est comme il y a (ne) inconnues et $(ne+1)$ équations la solution du système existe et est unique.

La matrice de transition devient:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{Q^{(n)}\} = \begin{bmatrix} \pi(0) & \cdot & \cdot & \cdot & \pi(0) \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \pi(c) & \cdot & \cdot & \cdot & \pi(c) \end{bmatrix}$$

Exemple 2: Cet exemple traite du calcul du vecteur des probabilités à l'état stationnaire.

Deux méthodes permettent de déterminer celui-ci

La première méthode consiste à effectuer le produit $Q \times Q \dots$ jusqu'à ce qu'on obtient une matrice à colonnes identiques.

La deuxième méthode est la résolution du système.

$$\begin{cases} \prod = Q \cdot \pi \\ \sum \pi = 1 \end{cases}$$

1/ Soit la matrice de transition définie comme suit:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

En effectuant les différents produits $Q \times Q \dots$ on obtient

$$Q^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{16}{36} & \frac{15}{36} \\ \frac{20}{36} & \frac{21}{36} \end{bmatrix}$$

$$Q^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.4259 & 0.4306 \\ 0.5741 & 0.5694 \end{bmatrix}$$

$$Q^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.420 & 0.4282 \\ 0.5710 & 0.5718 \end{bmatrix}$$

$$Q^{(5)} = \begin{bmatrix} 0.429 & 0.429 \\ 0.571 & 0.571 \end{bmatrix}$$

à partir de $Q^{(5)}$ on obtient:

$$\pi = [0.429 \quad 0.571]^T$$

2/ En utilisant la deuxième méthode on obtient:

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \pi_0 + \frac{1}{2} \pi_1 = \pi_0 \\ \frac{1}{3} \pi_0 + \frac{1}{2} \pi_1 = \pi_1 \\ \pi_1 + \pi_0 = 1 \end{cases}$$

Une équation étant redondante, on la remplace alors par l'équation $\pi_1 + \pi_0 = 1$, on obtient le système :

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \pi_0 + \frac{1}{2} \pi_1 = \pi_1 \\ \pi_1 + \pi_0 = 1 \end{cases}$$

La solution d'un tel système est

$$\left[\pi_0 = \frac{3}{7} = 0.429 \quad , \quad \pi_1 = \frac{4}{7} = 0.571 \right]^T$$

III.2.3 Modèle de Gould:

La théorie développée par Moran pour les données annuelles fût modifiée par Gould (1961) en l'appliquant au x données mensuelles. Gould ajouta la probabilité de défaillance dans l'année, et prend en considération la corrélation des données mensuelles, cependant les données annuelles sont supposées être indépendantes comme dans le modèle de Moran.

Dans un tel modèle la défaillance signifie que la demande mensuelle stipulée ne peut être satisfaite durant une année particulière, de la somme du contenu du réservoir à la fin de l'année précédente et les apports durant l'année courante.

II.3 Corrélations et Changements Saisonniers des Apports:

Comme extension des travaux de Moran, Kendal (1957) a considéré un réservoir infini, différent du réservoir fini de Moran avec (de nouvelles limites inférieure et supérieure), et une distribution du type Gamma des apports. Le problème principal est la prise en compte lors de la gestion probabiliste des réserves des corrélations des effets saisonniers.

II.3.1 Corrélation des Apports

Reconnaissant la nécessité de minimiser l'écart entre la théorie et la pratique, Lloyd (1963) a amélioré la théorie de Moran en prenant en considération la corrélation des apports.

Une chaîne de Markov à deux variables était formulée pour tenir compte à la fois de la corrélation des apports et des états du réservoir sous l'hypothèse que les apports suivent aussi une chaîne de Markov.

Dans ce cas au lieu d'écrire la probabilité de transition de l'état $Z(t-1)$ à l'état $Z(t)$, la corrélation des apports est introduite et la probabilité de transition fera intervenir l'apport à la période correspondante

Par conséquent, la solution des probabilités d'état stationnaire exige un grand nombre d'équations, quoique cela n'appelle à aucun changement radical de l'approche.

II.3.2 Effets Saisonniers:

Les changements saisonniers sont des variations, qui dans une série chronologique, sont de nature périodique et réapparaissent régulièrement chaque année (ou à des intervalles plus courts).

Dans la recherche d'une solution des changements saisonniers de la distribution de probabilités des apports à l'intérieur d'un cycle annuel, Lloyd & Odoom (1964) ont suggéré la division de l'année en k saisons et l'utilisation des matrices de transition d'ordre 1 différentes pour chaque saison.

Les solutions des équations simultanées relative aux probabilités d'état stationnaire à la fin de l'année seront déterminées en faisant le produit des matrices dans l'ordre approprié.

Exemple 3: Application d'une chaîne de Markov à deux variables:

L'exemple suivant est une illustration du cas où l'on tient compte de la corrélation significative des apports entre les saisons.

Les données du problème sont groupées dans le tableau suivant:

| | | |
|-----------------------|------------|------------|
| Capacité du réservoir | 2 unités | |
| Saisons | Hiver | Eté |
| Demande | 1 u | 1 u |
| Apport | 1 u ou 2 u | 1 u ou 2 u |
| Nombre d'états | 2 | |
| Espace d'états | 0 | 1 |
| Limite des états | 0 ÷ 1 | 1 ÷ 2 |
| Réserve initiale | 0.5 u | 1.5 u |

Connaissant les apports d'hiver, les probabilités conditionnelles des apports pour l'été suivant sont:

| Apport de l'été suivant | Probabilité conditionnelle pour l'apport d'hiver | |
|-------------------------|--|-----|
| | 1 | 2 |
| 0 | 0.3 | 0.6 |
| 1 | 0.7 | 0.4 |

De la même façon, pour des apports d'été connus, les probabilités conditionnelles des apports pour l'hiver suivant sont données par:

| Apport de l'hiver suivant | Probabilité conditionnelle pour l'apport d'été | |
|------------------------------|---|-----|
| | 0 | 1 |
| 1 | 0.5 | 0.3 |
| 2 | 0.5 | 0.7 |

En incorporant les apports saisonniers on obtient les matrices suivantes des probabilités de transition à deux variables.

a- Matrice W des probabilités de transition pour l'hiver

| | | Probabilité de transition d'état du réservoir (au début de la sai- son d'hiver) | | | | | | |
|---|---|--|---|---------------------|-----|-----|-----|-----|
| | | 0 apport d'hiver | | 1 apport d'hiver | | | | |
| | | 1 | 2 | 1 | 2 | | | |
| Etat du la fin de la saison d'hiver | 0 | apport dans l'été suivant | 0 | 0.3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | apport dans l'été suivant | 0 | 0 | 0.6 | 0.3 | 0.6 | 0.4 |

Une probabilité nulle indique qu'une transition est impossible. Par exemple, à l'état 0 au début de la saison d'hiver et avec un apport de $1u$ et une demande de $1u$ ainsi qu'une réserve initiale de $0.5u$, d'après l'équation de continuité, la réserve finale à la fin de la saison d'hiver sera de $0.5u$ ce qui ne correspond pas à l'état 1 et par suite la probabilité de transition sera nulle.

Une probabilité différente de zéro indique qu'une transition est possible; par exemple partant de l'état 1 au début de la saison d'hiver, avec un apport de $1u$, une demande de $1u$, une réserve initiale de $1.5u$ on aboutit, grâce à l'équation de continuité, à une réserve finale de $1.5u$ qui correspond bien à l'état 1 à la fin de la saison d'hiver et par suite une probabilité de transition de 0.7

b- De la même façon on peut construire la matrice S des probabilités de transition pour l'été.

| | | Probabilité de transition d'état du réservoir (au début de la saison d'été) | | | | | |
|---|---|---|---|----------------|-----|-----|-----|
| | | 0 apport d'été | | 1 apport d'été | | | |
| | | 0 | 1 | 0 | 1 | | |
| Etat du réservoir à la fin de la saison d'été | 0 | apport dans l'hiver suivant | 1 | 0.5 | 0.3 | 0.5 | 0 |
| | | | 2 | 0.5 | 0.7 | 0.5 | 0 |
| | 1 | apport dans l'hiver suivant | 1 | 0 | 0 | 0 | 0.3 |
| | | | 2 | 0 | 0 | 0 | 0.7 |

II.4 Modèles Stochastiques:

Pour mettre au point une politique d'exploitation d'un réservoir, qui spécifie les prélèvements à effectuer en fonction de la réserve initiale et des apports dans chaque période, plusieurs modèles discrets d'optimisation peuvent être utilisés.

Les apports, étant stochastiques, et supposés être en corrélation qui est définie par les probabilités de transition des débits d'une période à une autre.

Puisque le problème consiste en la prise de décision avec risque, les objectifs seront exprimés comme des valeurs espérées et non des valeurs déterministes.

II.4.1 Modèles de PL:

Watermeyer et Thomas étaient parmi les premiers à avoir utilisé les processus Markoviens dans les modèles de PL pour déterminer des politiques d'exploitation et de gestion des ressources en eau.

Plus tard, Dutrich et Louck ont développé ces modèles pour chaque réserve initiale v , apport naturel i et prélèvement d dans chaque période t et nécessaire pour l'élaboration de politique de gestion.

L'objectif dans de tels modèles est par exemple la maximisation des bénéfices annuels nets espérés.

Ils se présentent comme suit:

$$\text{maximiser} \quad \sum_t^T \sum_v \sum_i \sum_d f_t X_{vid}^{(t)}$$

où $X_{vid}^{(t)}$: représente la probabilité de lâchure pour une réserve initiale v , un apport naturel i et un prélèvement d durant une période t . Une telle probabilité est dite aussi probabilité con-

jointe.

$f_t = f(v, i, d, t)$: représente pour chaque période les bénéfices espérés.

Sous les contraintes

- Somme des probabilités conjointes dans chaque période t doit être égale à l'unité.

$$\sum_v \sum_i \sum_d X_{vid}^{(t)} = 1 \quad \forall t$$

- Le produit de la probabilité conjointe pour une réserve finale \bar{v} dans une période t et de la probabilité de transition des apports j dans une période $(t+1)$ égalise la probabilité conjointe pour une réserve initiale \bar{v} et un débit j dans la période $(t+1)$

$$\sum_v \sum_i \sum_d f_t X_{vid}^{(t)} P_{ij}^{(t)} = \sum_{\bar{d}} X_{\bar{v}j\bar{d}}^{(t+1)} \quad \forall \bar{v}, j, t$$

où \bar{d} représente les lâchures dans la période $(t+1)$.

- Chaque probabilité conjointe doit être non négative

Ainsi

$$\text{maximiser} \quad \sum_t \sum_v \sum_i \sum_d f_t X_{vid}^{(t)}$$

$$\text{sujet à} \quad \sum_v \sum_i \sum_d X_{vid}^{(t)} = 1 \quad \forall t$$

$$\sum_v \sum_i \sum_d f_t X_{vid}^{(t)} P_{ij}^{(t)} = \sum_{\bar{d}} X_{\bar{v}j\bar{d}}^{(t+1)} \quad \forall \bar{v}, j, t$$

$$X_{vid}^{(t)} \geq 0 \quad \forall v, i, d$$

constitue le modèle de PL stochastique

Le vecteur des variables d'état est un vecteur de réserves et d'apports naturels plutôt qu'un scalaire d'apports seulement.

N'importe quelle fonction f_t , linéaire ou non, peut être utilisée pour exprimer l'objectif de la gestion.

D'autres modèles, issues de ce dernier, ont été ensuite mis au point. La différence principale entre ceux-ci est la façon de prendre en compte les apports.

Ils sont similaires au précédent sauf que l'apport passé le plus récent (immédiat) est utilisé, au lieu de l'apport présent, pour exprimer la politique actuelle de l'exploitation. En d'autres termes, la politique dans la période t ne dépend pas de l'apport i dans la période t mais de l'apport dans la période $(t-1)$.

Ainsi cette nouvelle catégorie de modèles se présente comme suit

$$\text{maximiser} \quad \sum_t \sum_h \sum_i \sum_v \sum_d P_{hi}^{(t)} f_t X_{vhd}^{(t)}$$

$$\text{sujet à} \quad \sum_v \sum_h \sum_d X_{vhd}^{(t)} = 1 \quad \forall t$$

$$\sum_v \sum_h \sum_d f_t X_{vhd}^{(t)} P_{nj}^{(t)} = \sum_d X_{\bar{v}j\bar{d}}^{(t+1)} \quad \forall \bar{v}, j, t$$

$$X_{vhd}^{(t)} \geq 0 \quad \forall v, h, d, t$$

II.4.2. Modèles de PD

Little était parmi les premiers à avoir développé ce type de modèles, il a supposé que les apports sont des variables aléa-

toires indépendantes. Pour tenir compte de la corrélation Buras et Butcher ont amélioré ce modèle en utilisant un processus Markovien pour les apports.

Soit $U_{vit}^{(n)}$ la valeur maximale des bénéfices espérés pour n périodes restantes avant la fin de l'exploitation du réservoir, la période actuelle t étant incluse.

Pour une période restante:

$$U_{vit}^{(1)} = \max_d \left(\sum_j P_{ij}^{(t)} f_t \right)$$

Avec deux périodes restantes

$$U_{vit}^{(2)} = \max_d \left(\sum_j P_{ij}^{(t)} [f_t \cdot U_{\bar{v}/t+1}^{(1)}] \right)$$

D'une manière générale, pour n périodes restantes.

$$U_{vit}^{(n)} = \max_d \left(\sum_j P_{ij}^{(t)} [f_t \cdot U_{\bar{v}/t+1}^{(n-1)}] \right)$$

où t : fait référence à la période actuelle et n : au nombre d'années restantes avant la fin de l'exploitation du réservoir.

Si cette équation est résolue pour chaque période pour les années successives, la politique \bar{v} (v, i, d) va être définie rapidement et se répétera dans chaque année successive, quand cette condition est satisfaite et quand l'écart $U_{vit}^{(n-1)} - U_{vit}^{(n)}$, reste constant pour tous les états v, i , toutes les périodes t , la politique d'exploitation aura atteint un état stationnaire; condition non établie que si les constantes f_t et les probabilités de transition $P_{ij}^{(t)}$ ne changent pas d'une période à une autre.

Comme pour les modèles de PL, si on prend en considération l'apport à la période (t-1), ce maximum des bénéfices espérés avec n périodes restantes avant la fin de l'exploitation sera défini comme suit:

$$U_{vht}^{(n)} = \max_d \left(\sum_t P_{hd}^{(t)} [f_t \cdot U_{v,t,t+1}^{(n-1)}] \right)$$

Ces modèles stochastiques simples de PL et PD présentés ont été structuré dans le but de définir des politiques d'exploitation d'un réservoir. Ceux-ci étant discrets, une interpolation est nécessaire pour définir des politiques continues basées sur des apports naturels et des réserves continues.

Pour plus de précision des modèles de simulation peuvent être utilisés afin de donner la distribution des réserves et des prélèvements continus de n'importe quelle politique.

II.5 Techniques de Discrétisation des Réservoirs en Etat:

Le problème qui se pose toujours avec n'importe quel modèle discret représentant un processus continu est celui du choix du schéma des classes d'intervalles.

Une grande attention a été donnée au problème "Combien d'états sont suffisants pour les besoins pratiques ?".

On cherche généralement l'unité discrète la plus petite, l'approximation la plus proche des situations continues et donc la plus grande fiabilité des résultats. Cependant, la discrétisation en de petites unités implique un grand nombre d'équations et par suite le processus de calcul, si la résolution est possible, peut devenir onéreux.

En augmentant le nombre d'états la solution devient très lentement asymptotique à la solution réelle. Généralement, avec des méthodes existantes, des résultats pratiques fiables ne sont obtenus que jusqu'à l'utilisation de trente états [8]. Cependant, Savarenskiy (1945) a recommandé 5 à 10 états, Moran (1959) 15 à 20 états avec l'utilisation d'une méthode de discrétisation moins efficace et Doran (1975) 5 à 10 états en utilisant la même méthode que Savarenskiy. Il apparaît qu'un tel nombre d'états, soit suffisant pour obtenir le risque de défaillance, la plus importante caractéristique de distribution des réserves dans les modèles probabilistes classiques, avec une précision de ± 0.001 (Klemes et Jones, 1969).

Un nombre d'états inadéquat, en plus du fait qu'il cause une décroissance dans la précision, peut entraîner un écroulement graduel du schéma d'optimisation. Cet écroulement peut être inaperçu et les résultats peuvent même sembler raisonnables.

II.5.1 Techniques de Discrétisation:

Plusieurs techniques de discrétisation ont été mises au point pour trouver un nombre adéquat d'états. Seulement, deux ont été les plus utilisées: Savarenskiy (1940) et Moran (1954).

A première vue, la différence entre les deux schémas peut sembler non importante, mais il a été démontré par Doran (1975) que les solutions utilisant le schéma de Savarenskiy convergent vers la solution continue plus rapidement que celles basées sur celui de Moran, cela veut dire que pour une capacité de stockage C

donnée, le schéma de Savarenskiy nécessite un plus petit nombre d'états que dans le cas du schéma de Moran pour atteindre une précision des probabilités des trois états importants:

1- La probabilité que le réservoir soit vide i.e le risque de défaillance ($P_r(Z(t) = 0)$);

2- la probabilité que le réservoir soit plein i.e probabilité de déversement ($P_r(Z(t) = C)$) et

3- la probabilité qu'il n'y est ni défaillance, ni déversement i.e que le débit sortant du réservoir est égal au débit désiré ($P_r(0 < Z(t) < C)$).

Pour illustrer les deux schémas de discrétisation, considérons un réservoir de capacité de stockage C alimenté par un apport aléatoire annuel x ayant une densité de probabilité $f(x)$ et opérant pour une demande annuelle D .

La base de définition d'états de réserves est la même dans les deux schémas et consiste en la subdivision de la capacité de stockage C en k zones d'égales longueurs:

$$\Delta = \frac{C}{k}$$

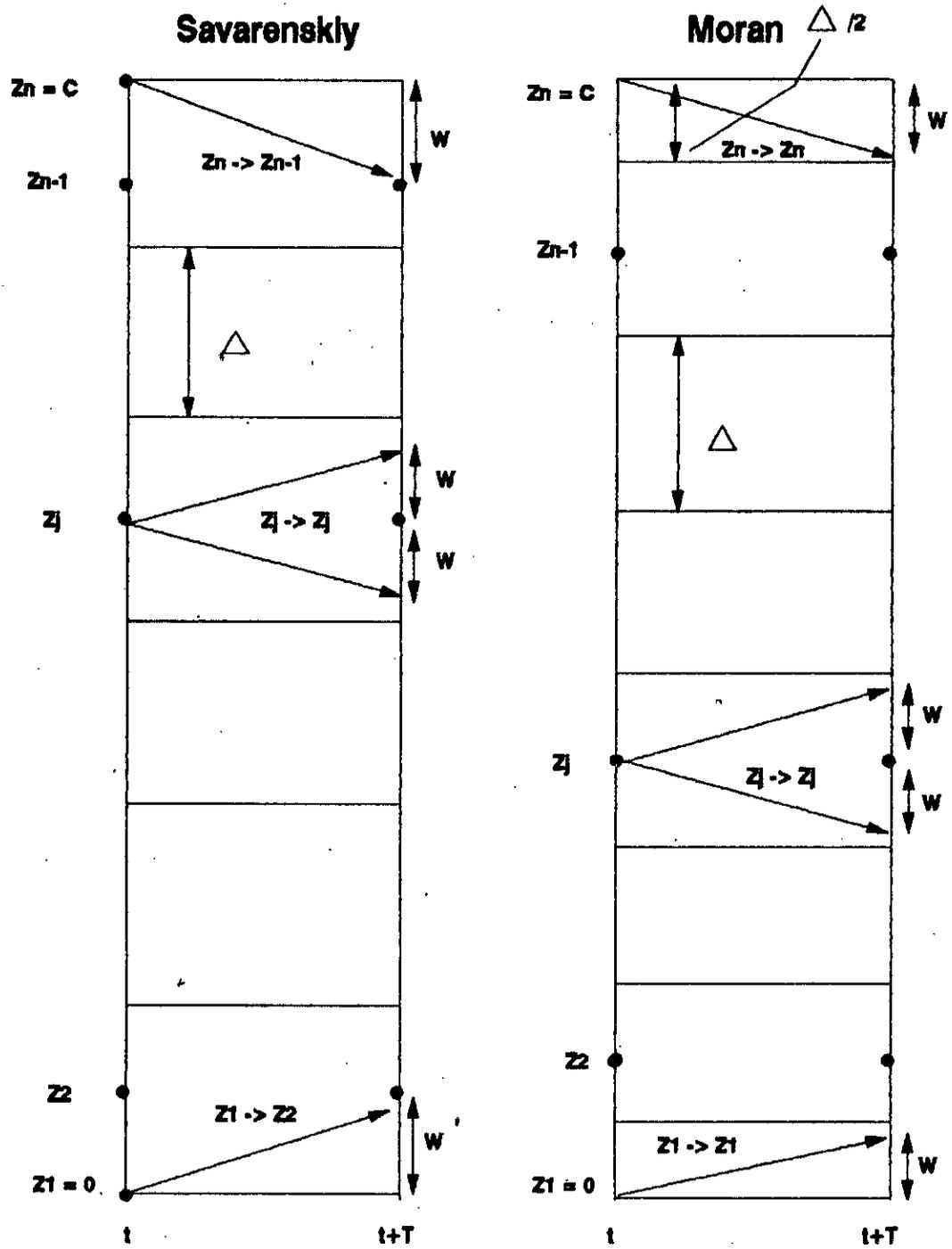


Figure 1: Schéma de discrétisation

Dans le schéma de Savarenskiy chacune de ces zones est considérée comme une classe d'intervalles et la réserve correspondante est définie au point central de cet intervalle. En outre, réservoir vide et plein sont définis comme des états séparés avec une classe d'intervalles "zéro". Par conséquent, il existe $n=k+2$ états:

$$Z_1 = 0, \dots, Z_j = (2j-3)\frac{\Delta}{2} \quad (2 \leq j \leq n-1) \quad \text{et } Z_n = C$$

Dans le schéma de Moran, les éléments internes sont aussi définis aux points centraux de leurs classes d'intervalle correspondant. Les deux états limites, cependant, représentent chacun une classe d'intervalles de largeur uniquement de $\Delta/2$ et étendue seulement d'un seul côté de leurs états respectifs (vers le haut dans le cas de Z_1 et vers le bas dans le cas Z_n) (voir figure 1).

La principale différence entre les deux schémas selon Kelmes (1965) et Doran (1975) est la précision avec laquelle les deux états limites sont présentés: tandis qu'ils sont nets dans le schéma de Savarenskiy, ils sont représentés avec une erreur $0 \leq \epsilon \leq \Delta/2$ dans le schéma de Moran. D'un autre côté, ce dernier est plus consistant que celui de Savarenskiy: "le changement net de réserves $W = x-D$ ne cause jamais de transition à un différent si $W < D/2$, tandis que pour le schéma de Savarenskiy une telle valeur de W ne cause pas de transition d'un état interne, mais peut le faire pour un état limite (figure 1).

En général, le schéma de Moran tend à surévaluer les probabilités de remplissage et à sousévaluer la probabilité que le réservoir soit capable de satisfaire la demande D .

II.5.2 Contraintes sur le Nombre d'Etat:

Il existe deux contraintes sur n qui doivent être satisfaites pour que le schéma de Savarenskiy soit applicable.

1- $n \geq 3$: Cette condition doit être satisfaite dans le but de définir les trois modes d'exploitation d'un réservoir (i.e exploitation sous défaillance, exploitation dans les conditions normales et exploitation dans les conditions de déversement).

2- La deuxième contrainte est imposée sur les limites de la distribution:

$$n \geq \left(\frac{C}{2D} + 2 \right)$$

Il est à remarquer que la satisfaction de ces contraintes est une condition nécessaire mais non suffisante pour obtenir des résultats significatifs.

En se basant sur ces deux schémas de discrétisation plusieurs techniques déterminant les limites des classes d'intervalles ont été développées. Ainsi, le découpage peut se faire soit:

- En choisissant des seuils et en suivant l'évolution des coefficients de la matrice de transition.

- En utilisant la fonction de répartition de l'historique des réserves. On considère des classe d'égales probabilités marginales.

- En se basant sur les paramètres du même historique (i.e moyenne et écart type). On procède au découpage à l'aide des seuils suivants:

$$\bar{Z} - k'\sigma, \dots, \bar{Z} - \sigma, \bar{Z}, \bar{Z} + \sigma, \dots, \bar{Z} + k\sigma$$

sujet à:

$$\bar{Z} - k'\sigma \geq 0$$

$$\bar{Z} + k\sigma \leq C$$

où \bar{Z} et σ sont respectivement la moyenne et l'écart type.

III APPLICATION DES MODELES PROBABILISTES
DISCRET POUR LA GESTION DU
BARRAGE DE LA CHEFFIA

III.1 Description du Barrage Etudié:

Le système hydrique à étudier consiste en un barrage situé à l'est de l'Algérie dans la wilaya de Annaba: Le Barrage de la Cheffia:

Se trouvant à 50 km de Annaba, il représente une source d'une importance capitale pour toute l'économie de la ville et ses unités industrielles et agricoles.

Le barrage de la Cheffia est exploité à des fins multiples dont:

- Alimentation en eau potable de la ville de Annaba et ses industries.
- Alimentation du complexe d'El Hadjar.
- Alimentation en eau d'irrigation du périmètre de la Bou Namoussa.
- Régularisation des crûes de l'oued Bou Namoussa et réduction des inondations de la plaine.

Autre caractéristiques du barrage sont illustrées dans le tableau suivant:

| | |
|---------------------------------|-------------------------|
| Construction | 1959 - 1965 |
| Côte maximale de la retenue | 165 m |
| Superficie du BV | 575 km ² |
| Capacité maximale de la retenue | 168.483 Hm ³ |
| Volume régularisé | 95.0 Hm ³ |
| Envasement moyen annuel | 0.2 Hm ³ |
| Volume mort | 13 Hm ³ |

III.2 Description du modèle utilisé :

Le modèle probabiliste utilisé repose principalement sur les théories de Moran et Gould. IL a été appliqué pour des données mensuelles.

Les différentes étapes de construction du modèle peuvent se résumer comme suit:

1- Discrétisation du barrage en états et détermination des classes d'intervalles ainsi que les réserves initiales pour chaque état.

2- Pour chaque état j , au début de chaque année, la réserve est supposée être constante.

3- Pour chaque état j , les réserves mensuelles sont calculées selon l'équation de continuité:

$$Z(t) = Z(t-1) + X(t) - D(t)$$

où

$Z(t)$: réserve à la fin de la période t .

$Z(t-1)$: réserve au début de la période t .

$X(t)$: apport de la période t .

$D(t)$: demande à la période t .

4- Pour chaque état j , détermination du nombre d'années déficitaires: si au moins un mois est déficitaire (réserve nulle); l'année est déficitaire.

5- Détermination du vecteur de probabilités de défaillance F : il est obtenu en divisant pour chaque état j , le nombre d'années déficitaires par le nombre d'années total.

6- Détermination de la matrice de transition

6.1- Pour chaque état j , à la fin de chaque année, la réserve finale obtenue est identifiée à un état donné i .

6.2- Pour chaque état i , on divise le nombre d'années total: On obtient ainsi la probabilité de transition de l'état j à l'état i : $q(i,j)$.

7- Détermination du vecteur de probabilités de l'état stationnaire: ceci se fait en résolvant le système:

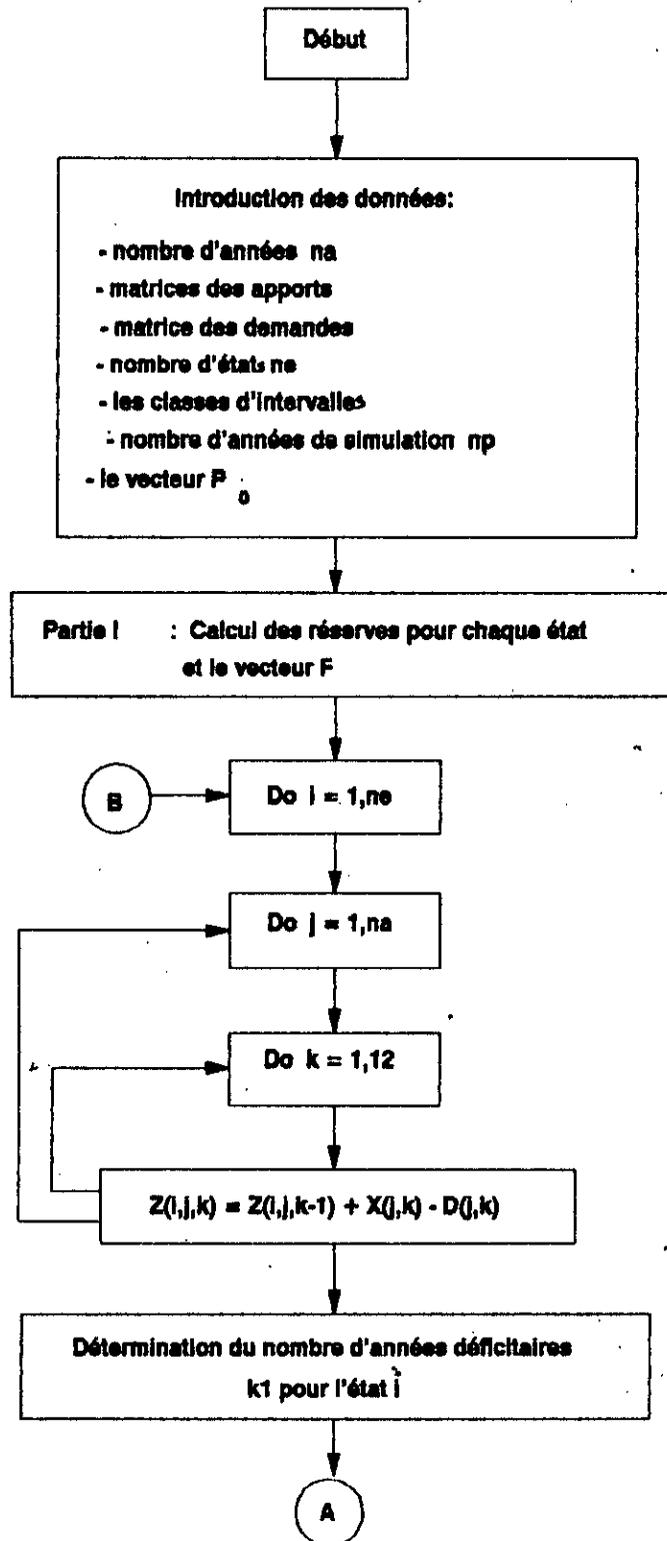
$$\begin{cases} Q \cdot \pi \\ \sum_i \pi_i = 1 \end{cases}$$

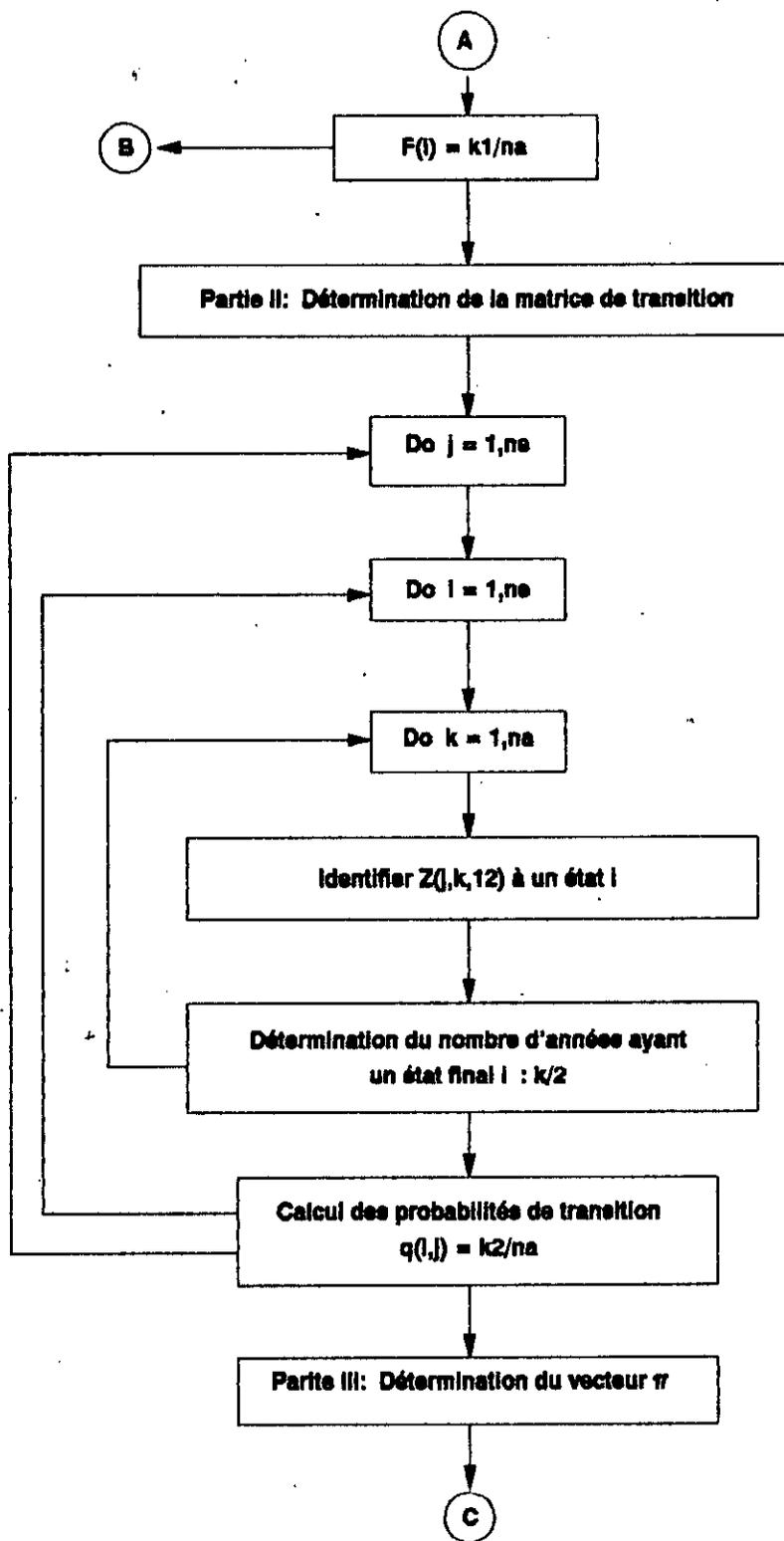
8- Calcul de la probabilité de défaillance donnée par le produit $F\pi$.

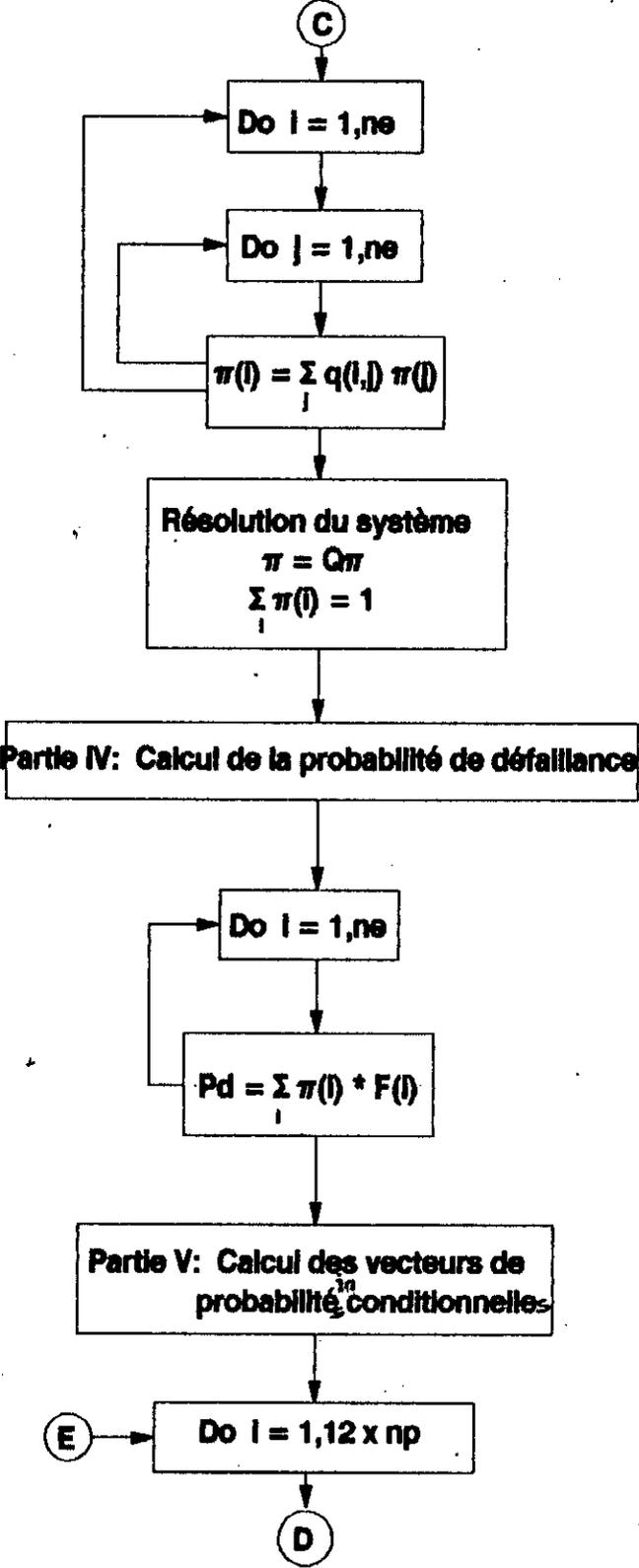
9- Calcul des probabilités inconditionnelles d'ordre n selon l'équation:

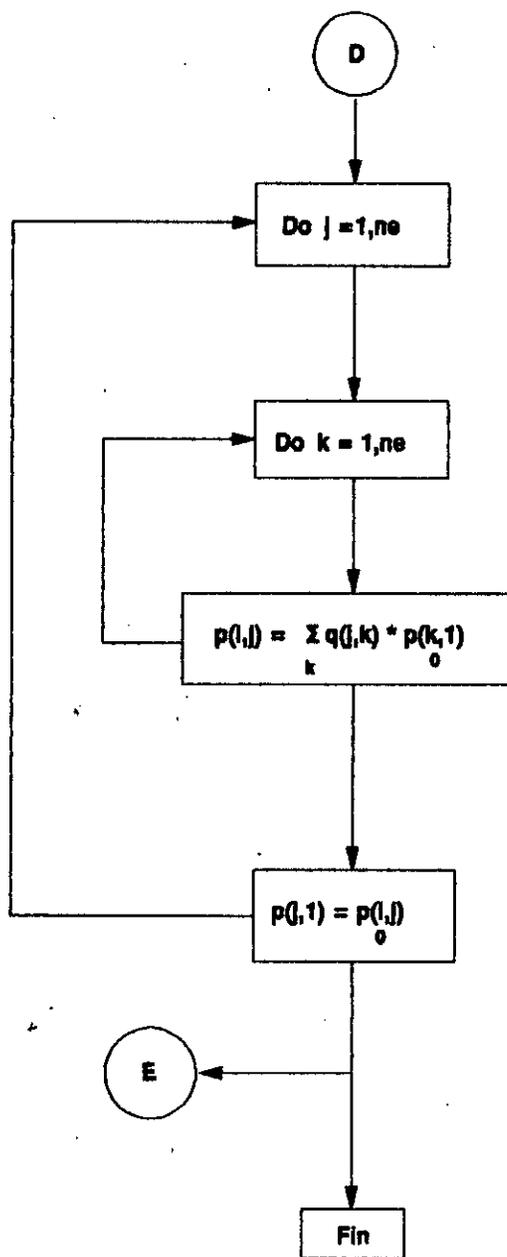
$$P_n = Q \cdot P_{n-1}$$

L'organigramme suivant récapitule ces différentes étapes









Organigramme du modèle 1

Le niveau du volume mort est pris comme niveau zéro, d'où la capacité effective du barrage est $C = 155$ Hms.

Soit P_0 le vecteur d'état initial qui correspond au mois de décembre 1992 où la réserve était 99 Hms (toujours par rapport au niveau du volume mort).

Comme la fiabilité des résultats est fonction du nombre d'états et de la technique de discrétisation utilisée, plusieurs méthodes ont été utilisées et un nombre d'états variable a été testé.

D'après les résultats obtenus (annexe A) on peut constater que:

- La méthode de Moran suréstime la probabilité de défaillance par rapport à la méthode de Savarenskiy dans presque tous les cas, sauf celui où le nombre d'états est égal à 15: ceci s'explique par le fait que la méthode de discrétisation de Savarenskiy ne donne de bons résultats que pour un nombre compris entre 5 et 10.

- D'une façon générale, la méthode de discrétisation basée sur la fonction de répartition des réserves donne la plus grande probabilité de défaillance.

- La probabilité de défaillance ne suit pas l'évolution du nombre d'états, cependant, elle est fonction des classes d'intervalles choisies pour un nombre d'états donné.

- Dans tous les cas, les probabilités de défaillance trouvées n'excèdent pas 10%, cela signifie qu'il y a peu de chances que le barrage passe par un état vide ou près du vide.

D'autre part, pour comparer les méthodes ^{entre} entre elles, les réserves probables des quatre premiers mois de l'année 1993 ont été comparées aux réserves réelles correspondantes aux mêmes mois (annexe B)

De cette comparaison on peut tirer que:

- Dans la majorité des cas la méthode de discrétisation basée sur un choix aléatoire des seuils donnent une forte sous-estimation des réserves

- Pour des nombres d'états réduits (3 à 5) les réserves probables semblent, pour la totalité des méthodes, approcher les valeurs réelles, cependant, la largeur de la classe d'intervalle est très grande d'où manque de précision.

- Pour un nombre d'états assez grand (12 à 15) il y a diminution de l'efficacité du modèle et les résultats pour les différentes méthodes s'éloignent des valeurs réelles.

- Les méthodes de Moran et de la fonction de répartition pour des nombres d'états égaux à 6 et à 11 donnent de bons résultats, cependant pour les autres cas les réserves trouvées s'éloignent des valeurs réelles.

- La méthode de Savarenskiy, est la seule méthode qui donne d'assez bons résultats pour les différents nombres d'états utilisés et plus particulièrement pour une discrétisation en 7 états.

- dans la plus part des cas, toutes ces techniques sous-estiment les réserves réelles cela est dû d'une part à une diminution de la capacité du barrage par l'effet d'envasement, et d'autre

part, à la non prise en compte dans l'équation de continuité des lâchés effectués de temps à autre pour atténuer les effets néfastes à la stabilité de l'ouvrage.

D'après ces remarques, et en se référant au nombre d'états trouvé par la méthode stochastique, on adoptera dans notre cas, la méthode de Savarenskiy comme méthode de discrétisation et un nombre d'états égal à 7.

| États | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|--------------------------------|---|------|-------|-------|--------|---------|-----|
| limites (Hms) | 0 | 0-31 | 31-62 | 62-93 | 93-124 | 124-155 | 155 |
| Réserves initiales (Hms) | 0 | 15 | 46 | 70 | 108 | 139 | 155 |

Dans ce cas la matrice de transition est donnée par:

$$Q = \begin{pmatrix} 0.200 & 0.133 & 0.067 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.267 & 0.200 & 0.200 & 0.067 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.333 & 0.200 & 0.067 & 0.200 & 0.067 & 0.000 & 0.000 \\ 0.133 & 0.400 & 0.333 & 0.200 & 0.333 & 0.200 & 0.200 \\ 0.000 & 0.000 & 0.267 & 0.333 & 0.267 & 0.467 & 0.400 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.133 & 0.200 & 0.133 & 0.200 \\ 0.067 & 0.067 & 0.067 & 0.067 & 0.133 & 0.200 & 0.200 \end{pmatrix}$$

Le vecteur de probabilité de défaillance F:

$$F = [0.533 \quad 0.333 \quad 0.133 \quad 0.000 \quad 0.000 \quad 0.000 \quad 0.000]$$

Le vecteur de probabilité d'état stationnaire π :

$$\pi = [0.017 \quad 0.051 \quad 0.095 \quad 0.263 \quad 0.311 \quad 0.140 \quad 0.122]^T$$

La probabilité de défaillance P_d :

$$P_d = F \cdot \pi = 3.9\%$$

Pour le calcul des probabilités inconditionnelles la réserve initiale correspond à l'état 4; ainsi P_0 est telle que:

$$P_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T$$

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau III.2.1.

| Numéro du Mois | Etat | | | | | | |
|-------------------|----------------|------|-------|-------|--------|---------|------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| | Réserves (Hms) | | | | | | |
| | 0 | 0-31 | 31-62 | 62-93 | 93-124 | 124-155 | 155 |
| 1 | 0.0 | 0.0 | 6.7 | 33.3 | 26.7 | 20.0 | 13.3 |
| 2 | 0.4 | 3.6 | 8.9 | 24.4 | 34.7 | 15.1 | 12.9 |
| 3 | 1.2 | 4.2 | 8.7 | 26.5 | 32.0 | 14.8 | 12.7 |
| 4 | 1.4 | 4.7 | 9.2 | 26.2 | 31.6 | 14.4 | 12.5 |
| 5 | 1.5 | 4.9 | 9.4 | 26.3 | 31.4 | 14.2 | 12.4 |
| 6 | 1.6 | 5.0 | 9.5 | 26.3 | 31.2 | 14.1 | 12.3 |
| 7 | 1.6 | 5.1 | 9.5 | 26.3 | 31.1 | 14.1 | 12.3 |
| 8 | 1.6 | 5.1 | 9.5 | 26.3 | 31.1 | 14.1 | 12.3 |
| 9 | 1.6 | 5.1 | 9.5 | 26.3 | 31.1 | 14.1 | 12.3 |
| 10 | 1.6 | 5.1 | 9.5 | 26.3 | 31.1 | 14.0 | 12.2 |
| 12 | 1.6 | 5.1 | 9.5 | 26.3 | 31.1 | 14.0 | 12.2 |
| 13 | 1.7 | 5.1 | 9.5 | 26.3 | 31.1 | 14.0 | 12.2 |

Tableau III.2.1: Probabilités inconditionnelles (%)

On remarque que l'état le plus probable du premier mois de l'année 1993 est l'état 3, ensuite l'état 4 devient le plus probable jusqu'à atteinte de l'état stationnaire après 13 mois.

On remarque que le modèle sous-estime la valeur de la réserve du premier mois de l'année 1993, cela est du fait qu'il lui faudrait un certain temps d'adaptation avant de donner des résultats fiables.

De la même façon on peut opérer avec les données annuelles, on adoptera le schéma de savarenskiy et un nombre d'état égal à 7.

Matrice de transition

$$Q = \begin{bmatrix} 0.333 & 0.267 & 0.067 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.200 & 0.067 & 0.200 & 0.067 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.333 & 0.067 & 0.067 & 0.200 & 0.067 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.267 & 0.267 & 0.067 & 0.200 & 0.067 & 0.067 \\ 0.000 & 0.000 & 0.267 & 0.267 & 0.067 & 0.200 & 0.067 \\ 0.067 & 0.000 & 0.000 & 0.267 & 0.267 & 0.067 & 0.200 \\ 0.067 & 0.133 & 0.133 & 0.133 & 0.400 & 0.667 & 0.667 \end{bmatrix}$$

Le vecteur de probabilité de défaillance F :

$$F = [0.333 \ 0.267 \ 0.067 \ 0.000 \ 0.000 \ 0.000 \ 0.000]^T$$

Le vecteur de probabilité d'état stationnaire π

$$\pi = [0.010 \ 0.016 \ 0.036 \ 0.092 \ 0.114 \ 0.178 \ 0.553]^T$$

La probabilité de défaillance P_d :

$$P_d = F \cdot \pi = 1.0\%$$

Le vecteur P_0 :

$$P_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$$

Les vecteurs des probabilités inconditionnelles sont donnés par le tableau III.2.2

| Numéro de l'année | Etat | | | | | | |
|-------------------------|------------------|------|-------|-------|--------|---------|------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| | Réserves (Hma) | | | | | | |
| | 0 | 0-31 | 31-62 | 62-93 | 93-124 | 124-155 | 155 |
| 1 | 0.0 | 0.0 | 6.7 | 20.0 | 6.7 | 26.7 | 40.0 |
| 2 | 0.4 | 1.7 | 4.9 | 8.9 | 15.6 | 16.9 | 50.7 |
| 3 | 1.2 | 1.8 | 4.0 | 10.2 | 11.5 | 17.8 | 53.5 |
| 4 | 1.2 | 1.8 | 4.0 | 9.3 | 11.7 | 17.7 | 54.3 |
| 5 | 1.1 | 1.8 | 3.8 | 9.3 | 11.5 | 17.7 | 54.8 |
| 6 | 1.1 | 1.7 | 3.7 | 9.2 | 11.5 | 17.8 | 55.0 |
| 7 | 1.1 | 1.7 | 3.7 | 9.2 | 11.4 | 17.8 | 55.1 |
| 8 | 1.1 | 1.7 | 3.6 | 9.2 | 11.4 | 17.8 | 55.2 |
| 9 | 1.0 | 1.7 | 3.6 | 9.2 | 11.4 | 17.8 | 52.2 |
| 10 | 1.0 | 1.7 | 3.6 | 9.2 | 11.4 | 17.8 | 55.3 |
| 11 | 1.0 | 1.7 | 3.6 | 9.2 | 11.4 | 17.8 | 55.3 |
| 12 | 1.0 | 1.7 | 3.6 | 9.2 | 11.4 | 17.8 | 55.3 |
| 13 | 1.0 ⁺ | 1.7 | 3.6 | 9.2 | 11.4 | 17.8 | 55.3 |
| 14 | 1.0 | 1.7 | 3.6 | 9.2 | 11.4 | 17.8 | 55.3 |
| 15 | 1.0 | 1.7 | 3.6 | 9.2 | 11.4 | 17.8 | 55.3 |
| 16 | 1.0 | 1.7 | 3.6 | 9.2 | 11.4 | 17.8 | 55.3 |
| 17 | 1.0 | 1.7 | 3.6 | 9.2 | 11.4 | 17.8 | 55.3 |
| 18 | 1.0 | 1.6 | 3.6 | 9.2 | 11.4 | 17.8 | 55.3 |

Tableau III.2.2: Probabilités inconditionnelles (%)

L'état stationnaire est atteint après 18 ans, on remarque que l'état 6 est le plus probable, ainsi que les probabilités que le réservoir soit aux états 0,1 et 2 sont faibles par rapport aux autres états: Il y a de grandes chances que le réservoir soit à l'état plein chaque année.

Conclusion

D'après cet exemple, on peut dire que les résultats sont très sensibles à la technique de discrétisation ainsi qu'au nombre d'états utilisés, il faudrait éviter un nombre d'états réduit engendrant des classes d'intervalles larges afin de ne pas avoir une perte de précision, de même, il ne faudrait pas utiliser un grand nombre d'états, donc des tranches trop petites, car le peu de passages dans chaque état ne permet pas l'obtention de résultats fiables.

Le modèle utilisé ne prend pas en considération la corrélation des apports et leurs effets saisonniers; pour affiner les résultats il serait souhaitable d'utiliser une chaîne de Markov à deux variables.

Malgré ces inconvénients, ce modèle a donné d'assez bons résultats en ce qui concerne les quatre premiers mois de l'année 1993; il pourra être utilisé comme outil d'aide à la décision pour la gestion du barrage de la Cheffia.

CONCLUSION GENERALE

La croissance continue de l'incompatibilité des diverses utilisations des ressources en eaux, au cours de ces dernières décennies, a incité un effort considérable d'accroissement de la sensibilité et de la sélectivité des méthodes d'analyse qui permettent de développer l'immense domaine de recherche qu'est la gestion des ressources hydriques.

Les deux types de modèles (programmation linéaire et modèles probabilistes discrets) abordés dans cette thèse, ne constituent qu'un des aspects de la gestion de l'eau.

La méthodologie proposée ici a permis dans une première étape de développer un modèle de gestion simple et de structure favorable à la modélisation: La programmation linéaire. Une application à un cas simple a montré la complexité du domaine de gestion des ressources hydriques et la nécessité de prendre en considération, en plus des exigences économiques, des contraintes sociale, juridiques,...

Dans une deuxième partie, des modèles discrets ont été développés et une application au barrage de la Cheffia a été faite. La fiabilité des résultats est fonction en grande partie de la méthode de discrétisation et du nombre d'états utilisés.

Enfin, malgré la relative simplicité des systèmes et modèles étudiés, ce type de recherche vise à promouvoir une gestion de l'eau en développant un ensemble d'outils d'aide à la décision.

BIBLIOGRAPHIE

- [1]- A. Bermad, *Elaboration d'un modèle de gestion d'un barrage-Réservoir: Application au barrage de la Cheffia*, Thèse de Magister, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, 1990.
- [2]- J. Bernier, *Aspects méthodologiques de la gestion optimale des réservoirs à buts multiples*, *La Houille Blanche*, No. 2/3, 1977, pp 253 - 257.
- [3]- G.B. Dantzig, *Linear programming and extension*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, Dunod - Paris, 1966.
- [4]- D.G. Doran, *An efficient definition for discrete state reservoir analysis: The divided interval technique*, *Water Resources Research*, vol. 11, No. 6, December 1975, pp 867 - 873.
- [5]- N.L. Drobny, *linear programming applications in water resources*, *Water Resources bulletin*, December 1971, vol. 7, No 6, pp 1180 - 1193.
- [6]- Y. Emsellem, *La gestion intégrée des ressources en eaux*, *La Houille Blanche*, No 2/3, 1977, pp 243 - 252.
- [7]- C. Guerard, *Programmation linéaire*, Les Presses de l'Université de Montreal, Eyrolles - Paris, 1976.
- [8]- V. Klemes, *Discrete representation of storage for stochastic reservoir optimization*, *Water Resources Research*, Vol. 13, N .1, February 1977, pp.149-158.
- [9]- N. Kottegoda, *stochastic water resources technology*, University of Birmingham, 1980.
- [10]- D.Ploucks, *Markov models for flow regulation*, *Journal of the Hydraulics Division*, January 1970, HY1, pp. 165-181.

- [11]- D.P.Loucks, *Water resource systems planing and Analysis*, Cornell University, Prentice-Hall, Inc, Englewood cliffs, New Jersey, 1981.
- [12]- Y.Mechin et D. Normand, *Exemple d'application de la gestion optimale des réservoirs à buts multiples*, *la Houille Blanche*, No .2/3, 1977.
- [13]- J. Miquel et P.A. Roche, *La gestion des barrages-réservoirs: Réservoir opération*, *La Houille Blanche*, No.6, 1986, pp. 409-425.
- [14]- M. M'SILTI, *Application de la programmation non linéaire et multiobjectif à la gestion des ressources en eau*, *Thèse de doctorat*, Université Paris-Dauphines, 1984.
- [14]- M.Nedzela, *Introduction à la science de la gestion: méthodes déterministes en recherches opérationnelles*, *Presse de l'Université de Quebec*, 1983.
- [16]- M. Tremblay, *gestion du risque dans l'exploitation des systèmes hydriques*, *thèse de PHD*, Université de Montréal, Avril 1989.
- [17]- W.W.G Yeh, *Réservoir management and opérations modèles: Astate-of-the-Art Review*, *Water Resources Research*, Vol.21, No.12, pp 1797-1818, Décembre 1985.

ANNEXE A

Variation de la probabilité de défaillance en fonction de la méthode de discrétisation et du nombre d'états utilisés

| Méthode de discrétisation | Classes d'intervalles | | | | Pd (%) |
|-----------------------------|-----------------------|-------|---------|---------|--------|
| Savarenskiy | 0 | 0-77 | 77-155 | 155 | 2.6 |
| Moran | 0-26 | 26-78 | 78-130 | 130-155 | 3.0 |
| Fonction de répartition | 0 | 0-125 | 125-155 | 155 | 0.0 |
| Choix aléatoire des seuils. | 0 | 0-110 | 110-155 | 155 | 1.4 |

Tableau A1: Cas où le nombre d'états égal à 4

| Méthode de discrétisation | Classes d'intervalles | | | | | Pd (%) |
|----------------------------|-----------------------|-------|---------|---------|---------|--------|
| Savarenskiy | 0 | 0-52 | 52-104 | 104-155 | 155 | 3.7 |
| Moran | 0-19 | 19-58 | 58-97 | 97-136 | 136-155 | 5.9 |
| Fonction de répartition | 0 | 0-100 | 100-135 | 135-155 | 155 | 9.2 |
| choix aléatoire des seuils | 0 | 0-96 | 96-125 | 125-155 | 155 | 8.3 |

Tableau A2: Cas où le nombre d'états égal à 5

| Méthodes de discrétisation | Classes d'intervalles. | | | | P_j (%) |
|-----------------------------|------------------------|---------|---------|---------|-----------|
| Savarenskiy | 0 | 0-26 | 26-52 | 52-78 | 4,4 |
| | 78-104 | 104-130 | 130-155 | 155 | |
| Moran | 0-11 | 11-33 | 33-55 | 55-77 | 4,9 |
| | 77-99 | 99-121 | 121-143 | 143-155 | |
| Fonction de répartition | 0 | 0-60 | 60-90 | 90-124 | 4,8 |
| | 124-136 | 136-146 | 146-155 | 155 | |
| Choix aléatoire des seuils. | 0 | 0-44 | 44-96 | 96-111 | 3,2 |
| | 111-127 | 127-143 | 143-155 | 155 | |

Tableau A3: Cas où le nombre d'états égal à 8

| Méthodes de discrétisation | Classes d'intervalles. | | | | P_j (%) |
|-----------------------------|------------------------|---------|---------|---------|-----------|
| Savarenskiy | 0 | 0-31 | 31-62 | 62-93 | 3,9 |
| | 93-124 | 124-155 | 155 | | |
| Moran | 0-13 | 13-39 | 39-65 | 65-91 | 4,7 |
| | 91-117 | 117-143 | 143-155 | | |
| Fonction de répartition | 0 | 0-75 | 75-112 | 112-134 | 6,1 |
| | 134-146 | 146-155 | 155 | | |
| Choix aléatoire des seuils. | 0 | 0-58 | 58-102 | 102-119 | 4,5 |
| | 119-140 | 140-155 | 155 | | |
| Statistique | 0 | 0-7 | 7-55 | 55-103 | 3,5 |
| | 103-150 | 150-155 | 155 | | |

Tableau A4: Cas où le nombre d'états égal à 7

| Methodes de discretisation | Classes d'intervalles | | | Pj (%) |
|-----------------------------|-----------------------|-----------|-----------|--------|
| Savarenskiy | 0 - | 0 - 39 | 39 - 77 | 2,9 |
| | 77 - 116 | 116 - 155 | 155 | |
| Moran | 0 - 15 | 15 - 46 | 46 - 78 | 3,5 |
| | 78 - 108 | 108 - 140 | 140 - 155 | |
| Fonction de repartition. | 0 | 0 - 80 | 80 - 110 | 8,8 |
| | 110 - 136 | 136 - 155 | 155 | |
| choix aleatoire des seuils. | 0 | 0 - 85 | 85 - 125 | 5,7 |
| | 125 - 145 | 145 - 155 | 155 | |

Tableau A5: Cas où le nombre d'états égal à 8

| Methodes de discretisation | Classes d'intervalles | | | | Pj (%) |
|-----------------------------|-----------------------|-----------|-----------|-----------|--------|
| Savarenskiy | 0 | 0 - 17 | 17 - 34 | 34 - 51 | 3.3 |
| | 51 - 68 | 68 - 85 | 85 - 102 | 102 - 119 | |
| | 119 - 136 | 136 - 155 | 155 | | |
| Moran. | 0 - 8 | 8 - 23 | 23 - 39 | 39 - 54 | 3.5 |
| | 54 - 70 | 70 - 85 | 85 - 101 | 101 - 116 | |
| | 116 - 132 | 132 - 147 | 147 - 155 | | |
| Fonction de repartition. | 0 | 0 - 40 | 40 - 80 | 80 - 100 | 4.7 |
| | 100 - 115 | 115 - 130 | 130 - 137 | 137 - 145 | |
| | 145 - 152 | 152 - 155 | 155 | | |
| choix aleatoire des seuils. | 0 | 0 - 16 | 16 - 72 | 72 - 94 | 5.5 |
| | 94 - 104 | 104 - 114 | 114 - 124 | 124 - 134 | |
| | 134 - 140 | 140 - 155 | 155 | | |

Tableau B6: Cas où le nombre d'états égal à 11

| Methodes de discretisation | Classes d'intervalles | | | | | P _d (%) |
|----------------------------|-----------------------|---------|---------|---------|---------|--------------------|
| Savarenskiy | 0 | 0-12 | 12-24 | 24-36 | 36-48 | 4,8 |
| | 48-60 | 60-72 | 72-84 | 84-96 | 96-108 | |
| | 108-120 | 120-132 | 132-144 | 144-155 | 155 | |
| Moran | 0-6 | 6-17 | 17-28 | 28-39 | 39-50 | 4,2 |
| | 50-61 | 61-72 | 72-83 | 83-94 | 94-105 | |
| | 105-116 | 116-127 | 127-138 | 138-149 | 149-155 | |
| Fonction de répartition | 0 | 0-20 | 20-55 | 55-80 | 80-90 | 3,7 |
| | 90-105 | 105-115 | 115-125 | 125-130 | 130-135 | |
| | 135-140 | 140-145 | 145-150 | 150-155 | 155 | |
| Choix aléatoire des seuils | 0 | 0-11 | 11-37 | 37-75 | 75-90 | 5,1 |
| | 90-101 | 101-106 | 106-116 | 116-122 | 122-129 | |
| | 129-134 | 134-140 | 140-148 | 148-155 | 155 | |

Tableau A7: Cas où le nombre d'états égal à 15

ANNEXE B

**Comparaison des réserves probables et réelles des 4 premiers mois
de l'année 1993 en fonction de la méthode de discrétisation
et du nombre d'états utilisés**

Tableau B1: Cas où le nombre d'états égal à 4

| Reserves Probables des 4 premiers mois de l'année 1993 (Hm ³) | | | | | |
|---|------|----------|----------|----------|----------|
| Methode. | Mois | Janvier | Fevrier | Mars | Avril. |
| Savarenskiy. | | 77 - 155 | 77 - 155 | 77 - 155 | 77 - 155 |
| Moran | | 78 - 130 | 78 - 130 | 78 - 130 | 78 - 130 |
| Fonction de repartition | | 0 - 125 | 0 - 125 | 0 - 125 | 0 - 125 |
| Choix aléatoire. | | 0 - 110 | 0 - 110 | 0 - 110 | 0 - 110 |
| | | | | | |

Tableau B2: Cas où le nombre d'états égal à 5

| Reserves probables des 4 premiers mois de l'année 1993 (Hm ³) | | | | | |
|---|------|----------|----------|----------|----------|
| Methode. | Mois | Janvier | Fevrier | Mars | Avril. |
| Savarenskiy | | 52 - 104 | 52 - 104 | 52 - 104 | 52 - 104 |
| Moran | | 58 - 97 | 58 - 97 | 58 - 97 | 97 - 136 |
| Fonction de repartition | | 0 - 100 | 0 - 100 | 0 - 100 | 0 - 100 |
| Choix aléatoire des seuils. | | 0 - 96 | 0 - 96 | 0 - 96 | 0 - 96 |
| | | | | | |

Tableau B3: Cas où le nombre d'états égal à 6

| Réserves probables des 4 premiers mois de l'année 1993 (Hm ³). | | | | |
|--|---------------------------|----------|----------|----------|
| Méthode \ Mois | Janvier | Fevrier | Mars | Avril. |
| Savarensky. | 78 - 116 ou 116 - 155 | 78 - 116 | 78 - 116 | 78 - 116 |
| Moran | 78 - 108 ou 108 - 140. | 78 - 108 | 78 - 108 | 78 - 108 |
| Fonction de répartition | 0 - 85 ou 85 - 125 | 85 - 125 | 85 - 125 | 85 - 125 |
| Choix aléatoire des seuils. | 0 - 80 ou 80 - 110 | 80 - 110 | 80 - 110 | 80 - 110 |
| | | | | |

Tableau B4: Cas où le nombre d'états égal à 7

| Réserves probables des 4 premiers mois de l'année 1993 (Hm ³) | | | | |
|---|------------------------|----------|-----------|-----------|
| Méthode \ Mois | Janvier | Fevrier | Mars | Avril. |
| Savarensky | 62 - 93 | 93 - 124 | 93 - 124 | 93 - 124 |
| Moran. | 77 - 99 ou 99 - 121 | 99 - 121 | 99 - 121 | 99 - 121 |
| Fonction de répartition | 75 - 112 | 75 - 112 | 75 - 112 | 75 - 112 |
| Choix aléatoire des seuils. | 58 - 102 | 58 - 102 | 58 - 102. | 58 - 102 |
| Statistique. | 55 - 103 | 55 - 103 | 55 - 103 | 55 - 103. |

Tableau B6: Cas où le nombre d'états égal à 8

| Réserves probables des 4 premiers mois de l'année 1993 (Hm ³). | | | | |
|--|----------|----------|----------|----------|
| Méthode \ MOIS | Janvier | Fevrier | Mars | Avril. |
| Savarenskiy. | 78 - 104 | 78 - 104 | 78 - 104 | 78 - 104 |
| Moran | 65 - 81 | 81 - 117 | 81 - 117 | 81 - 117 |
| Fonction de répartition. | 60 - 99 | 99 - 124 | 99 - 124 | 99 - 124 |
| Choix aléatoire des seuils. | 44 - 96 | 44 - 96 | 44 - 96 | 44 - 96 |
| | | | | |

Tableau B7: Cas où le nombre d'états égal à 11

| Reserves probables des 4 premiers mois de l'année 1993 (Hm ³) | | | | |
|---|--|--------------------------|-----------|-----------|
| Méthode \ MOIS. | Janvier | Fevrier | Mars | Avril. |
| Savarenskiy. | 102 - 119 | 102 - 119 | 102 - 119 | 102 - 119 |
| Moran | 101 - 116 ou 132 - 147. | 110 - 116 | 101 - 116 | 101 - 116 |
| Fonction de répartition | 40 - 80 ou 80 - 110 ou 100 - 115 | 80 - 100 ou 100 - 115 | 40 - 80 | 40 - 80 |
| Choix aléatoire des seuils. | 72 - 94. | 72 - 94 | 72 - 94 | 72 - 94 |
| | | | | |

| Mois | Janvier | Février | Mars | Avril |
|-----------|---------|---------|------|-------|
| Réserves. | 128 | 125 | 130 | 126 |

Tableau B8: Réserves réelle des 4 premiers mois de l'année 1993 (Hm³)

Tableau B5: Cas où le nombre d'états égal à 15:

| Réserves probables des 4 premiers mois de l'année 1993 (Hm ³). | | | | | |
|--|------|--------------------|---------|---------|---------|
| Méthode | Mois | Janvier | Février | Mars | Avril. |
| Savarensky | | 84 - 96 | 84 - 96 | 84 - 96 | 84 - 96 |
| Moran | | 83 - 94 | 83 - 94 | 83 - 94 | 83 - 94 |
| Fonction de répartition | | 85 - 80 ou 80 - 90 | 80 - 90 | 80 - 90 | 80 - 90 |
| Choix aléatoire des seuils. | | 87 - 75 ou 75 - 90 | 75 - 90 | 75 - 90 | 75 - 90 |