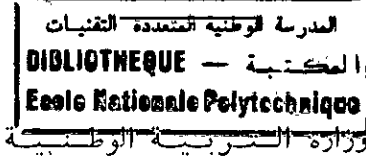


الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

3/93



MINISTRE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT HYDRAULIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDE

THEME

**SIMULATION ET ANALYSE
DES ECOULEMENTS BIDIMENSIONNELS
A SURFACE LIBRE
EN ZONES DE TRANSITIONS**

Proposé et dirigé par :
Mr Omar BELHADJ

Etudié par :
Mr Ali BERREKSI
Mr Abdelatif BOUHADJI

PROMOTION 1993

E N P 10, Avenue Hacén Badi - EL-HARRACH - ALGER

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

المدرسة الوطنية للعلوم والتقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

وزارة التربية الوطنية

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT HYDRAULIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDE

THEME

**SIMULATION ET ANALYSE
DES ECOULEMENTS BIDIMENSIONNELS
A SURFACE LIBRE
EN ZONES DE TRANSITIONS**

Proposé et dirigé par :
Mr Omar BELHADJ

Etudié par :
Mr Ali BERREKSI
Mr Abdelatif BOUHADJI

PROMOTION 1993

E N P 10, Avenue Hacén Badi - EL-HARRACH - ALGER

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

REMERCIEMENTS

En premier lieu nous tenons a remercier Mr Rabah BOUHADJI et tous ses collegues de travail pour l'aide precieuse qui nous ete fournie dans l'elaboration de cette these.

Nous remercions ensuite Mr Omar BELHADI de nous avoir encadre et nous avoir conseille.

Nous tenons egalement a remercier nos enseignants :

- Melle S. BENMAMAR
- Mr M. BERKANI
- Mr B. MAHDI

pour leur aide.

Nos derniers remerciements vont a nos amis(es) de la promotion ainsi qu'a :

- Melle Doudja SOUAG
- Mr Karim HAFIDI
- Mr Reda GHEZAL



Ali BERREKSI

**Eleve Ingenieur
Dept. Hydraulique
E.N.P**



Abdelatif BOUHADJI

**Eleve Ingenieur
Dept. Hydraulique
E.N.P**



**Omar BELHADJ
Enseignant
Dept. Hydraulique
E.N.P**

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEDICATIONS

A ma mere
A mes freres
A mes soeurs
A ma grand- mere
A mon oncle Hocine
A tous ceux qui me sont chers(es)

Je dedie ce modeste travail.

Ali BERREKSI

A mon pere
A ma mere
A ma grand-mere
A mon ami Hamza , sa mere , sa grand-mere
A tous ceux qui me sont chers(es)

Je dedie ce modeste travail.

Abdelatif BOUHADJI

TABLE

DES MATIERES

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 0	— HISTORIQUE.....	1
CHAPITRE I	— INTRODUCTION GENERALE.....	6
I.1	— INTRODUCTION.....	6
I.2	— CLASSIFICATION DES ECOULEMENTS.....	8
I.3	— REGIME D'ECOULEMENT.....	10
I.4	— CANAUX PRISMATIQUES CANAUX NON PRISMATIQUES.....	12
CHAPITRE II	— ECOULEMENT DANS LES TRANSITIONS.....	13
II.0	— INTRODUCTION.....	13
II.1	— ONDES TRANSVERSALES.....	14
II.1.1	— Exemple d'une Déviation Brusque d'un Mur.....	15
II.1.2	— Ondes Positives Ondes Négatives.....	17
II.2	— REDUCTION DES ONDES TRANSVERSALES.....	20
II.3	— RETRECISSEMENT D'UN CANAL DANS DES CONDITIONS D'ECOULEMENT SUPERCRITIQUE.....	21
II.3.1	— Type de Rétrécissement.....	21
II.3.2	— Rétrécissement en Forme d'Entonnoir.....	23
II.4	— ELARGISSEMENT D'UN CANAL DANS DES CONDITIONS D'ECOULEMENT SUPERCRITIQUE.....	27
II.5	— GENERALITES SUR LE RESSAUT HYDRAULIQUE.....	29
II.5.1	— Définition et Description du Ressaut.....	29
CHAPITRE III	— MODELISATION MATHEMATIQUE.....	32
III.1	— EQUATION FONDAMENTALE.....	32
III.1.1	— Hypothèses.....	32
III.1.2	— Mise en Equation.....	33
A	— Equation de Continuité.....	35
B	— Equation Dynamique.....	36

III.2 --	TRANSFORMATION GEOMETRIQUE.....	42
III.2.1 —	Transformation des Equations.....	45
A —	Equation de Continuité.....	45
B —	Equation Dynamique.....	47
III.3 —	CONDITIONS INITIALES CONDITIONS AUX LIMITES.....	50
III.3.1 —	Conditions Initiales.....	50
III.3.2 —	Conditions Aux Limites.....	50
A —	Conditions d'Amont et d'Aval.....	51
B —	Conditions de Symétrie.....	51
C —	Conditions sur les Parois latérales.....	52
CHAPITRE IV —	RESOLUTION PAR LA METHODE DES DIFFERENCES	
	FINIES.....	55
IV.1 —	PRESENTATION DE LA METHODES DES DIFFERENCES FINIES..	55
IV.1.1 —	Introduction et Généralités.....	55
IV.1.2 —	Analyse de l'Approximation.....	60
A —	Erreur de Troncature	60
B —	Convergence.....	60
C —	Consistance.....	60
D —	Stabilité	61
E —	Schéma explicite Schéma implicite...	61
IV.2 —	CHOIX DU SCHEMA NUMERIQUE.....	62
IV.3 —	DESCRIPTION DES SCHEMAS DE TYPE	
	PREDICTEUR-CORRECTEUR.....	62
IV.4 —	SCHEMA DE MacCormack.....	64
IV.4.1 —	Cas Unidimensionnel.....	64
IV.4.2 —	Cas Bidimensionnel.....	66
IV.5 —	APPLICATION DU SCHEMA DE MacCormack	
	AUX EQUATIONS DE SAINT-VENANT.....	72
IV.6 —	STABILITE DU SCHEMA.....	79
IV.7 —	TRAITEMENT NUMERIQUE DES ONDES DE CHOC	
	VISCOSITE ARTIFICIELLE.....	81
IV.8 —	ORGANIGRAMME DE CALCUL.....	85

CHAPITRE V	— APPLICATIONS.....	89
V.A	— ANALYSE DE L'ECOULEMENT SUPERCRITIQUE DANS UN RETRECISSEMENT RECTILIGNE SYMETRIQUE.....	89
V.A.1	— Déroulement des Calculs.....	89
V.A.2	— Résultats et Critiques.....	92
V.B	— ANALYSE DE L'ECOULEMENT SUPERCRITIQUE DANS UN ELARGISSEMENT PROGRESSIF SYMETRIQUE.....	113
V.B.1	— Déroulement des Calculs.....	113
V.B.2	— Résultats et Critiques.....	115
V.C	— RESSAUT HYDRAULIQUE DANS UN ELARGISSEMENT RECTILIGNE.....	129
V.C.1	— Déroulement des Calculs.....	129
V.C.2	— Résultats et Critiques.....	131
*	CONCLUSION GENERALE.....	134
*	BIBLIOGRAPHIE.....	137

LISTE DES FIGURES

FIG (A.1): Ligne d'eau le long de l'axe de l'écoulement dans le rétrécissement	95
FIG (A.2): Ligne d'eau le long de la paroi dans rétrécissement.....	96
FIG (A.3): Permanisation de l'écoulement le long de l'axe dans le rétrécissement.....	97
FIG (A.4): Permanisation de l'écoulement le long de la paroi dans le rétrécissement.....	98
FIG (A.5): Comparaison entre les modèles permanents et non permanents.....	99
FIG (A.6): Effet de la viscosité artificielle.....	100
FIG (A.7): Représentation tridimensionnelle de la surface libre dans le rétrécissement $\theta=6^\circ$	101
FIG (A.8): Courbe iso-hauteurs de l'écoulement dans le rétrécissement $\theta=6^\circ$	102
FIG (A.9) : Influence de l'angle θ sur l'écoulement le long de l'axe dans le rétrécissement.....	103
FIG (A.10): Influence de l'angle θ sur l'écoulement le long la paroi dans le rétrécissement.....	104
FIG (A.11): Représentation tridimensionnelle de la surface libre dans le rétrécissement $\theta=10^\circ$	105
FIG (A.12): Courbe iso-hauteurs de l'écoulement dans le rétrécissement $\theta=10^\circ$	106
FIG (A.13): Représentation tridimensionnelle de la surface libre dans le rétrécissement $\theta=20^\circ$	107
FIG (A.14): Courbe iso-hauteurs de l'écoulement dans le rétrécissement $\theta=20^\circ$	108
FIG (A.15): Profil de vitesse le long de l'axe dans le rétrécissement.....	109
FIG (A.16): Profil de vitesses le long de la paroi dans le rétrécissement.....	110
FIG (A.17): Distribution des modules de vitesses dans le rétrécissement $\theta=6^\circ$	111
FIG (A.18): Courbes iso-vitesses de l'écoulement dans le rétrécissement $\theta=6^\circ$	112

FIG (B.1): Profil en long de la surface libre le long de l'axe dans l'élargissement progressif.....	117
FIG (B.2): Profil en long de la surface libre le long de la paroi dans l'élargissement progressif.....	118
FIG (B.3): Permanisation de l'écoulement le long de l'axe dans l'élargissement progressif (Hauteurs).....	119
FIG (B.4): Permanisation de l'écoulement le long de la paroi dans l'élargissement progressif (Hauteurs).....	120
FIG (B.5): Représentation tridimensionnelle de la surface libre dans l'élargissement progressif.....	121
FIG (B.6): Courbes iso-hauteurs de l'écoulement dans l'élargissement progressif.....	122
FIG (B.7): Profil de vitesses le long de l'axe dans l'élargissement progressif.....	123
FIG (B.8): Profil de vitesses le long de la paroi dans l'élargissement progressif.....	124
FIG (B.9) : Permanisation de l'écoulement le long de l'axe dans l'élargissement progressif (vitesses).....	125
FIG (B.10): Permanisation de l'écoulement le long de la paroi dans l'élargissement progressif (vitesses).....	126
FIG (B.11): Distribution des modules de vitesses dans l'élargissement progressif.....	127
FIG (B.12): Courbes iso-vitesses de l'écoulement dans l'élargissement progressif.....	128
FIG (C.1) : Formation d'un ressaut hydraulique dans l'élargissement.....	133

RESUME

ملخص

الهدف من هذه الاطروحة ، هو تحليل جريان المياه في مناطق ربط المجاري ذات السطح الحر . هذا التحليل تم باستعمال معادلات " سانت فونو " على أعماق معدّلة في حالة غير مستقرة ، وفي مجال حولت احداثياته ثم حسب الجريان تعداديا باستعمال شكل " ماك كورماك " استعمال النموذج الرياضي ، في حالته غير المستقرة ، لايجاد حلول في الحالة المستقرة ، وهذا باخذ عنصر الزمن كوسيط .

ان نتائج النموذج الرياضي ، التي قورنت مع نتائج تجريبية و حسابية لعدة باحثين ، توضح توافقا جيدا بينها ، وهذا في حالة صحة فرضية توزيع ضغط الماء السكوني .

ABSTRACT

The object of this thesis is to analyse flows in nonprismatic open channel with rectangular cross-sectional. To analyse flows in these channels, two-dimensional, depth-averaged, unsteady flow equations in a transformed coordinate system are solved numerically by using the MacCormack scheme. The unsteady flow model is used to obtain steady flow solution by treating the time variable as an iteration parameter and letting the solution converge to the steady state. The results obtained, compared with computational and experimental data obtained by other investigators, show satisfactory agreement in cases where the assumption of hydrostatic pressure distribution is valid.

RESUME

Le but de cette thèse est d'analyser des écoulements à surface libre dans des canaux non prismatiques à section transversale rectangulaire. L'analyse de ces écoulements a été faite à partir des équations bidimensionnelles, moyennées sur la profondeur, en régime non permanent dans un système de coordonnées transformées et résolues numériquement par un schéma de MacCormack. Le modèle en régime non permanent est utilisé pour obtenir des solutions en régime permanent en traitant la variable temps comme paramètre d'itération et en laissant la solution converger vers un état permanent. Les solutions obtenues, comparées aux résultats expérimentaux et numériques d'autres chercheurs, montrent un accord satisfaisant dans le cas où l'hypothèse de la distribution hydrostatique de pression est valide.

CHAPITRE 0

HISTORIQUE

Chapitre 0

HISTORIQUE

L'hydraulique est une science aussi ancienne que la civilisation humaine puisqu'elle commande toutes les utilisations de l'eau .

On possède de nombreux témoignages de l'existence d'ouvrages hydrauliques datant de la préhistoire, notamment en Egypte, en Iran, en Inde, au Pakistan et en Chine. Au début, ces ouvrages étaient destinés essentiellement à l'irrigation, mais par la suite on a assisté à l'apparition des canalisations artificielles et des petits appareils hydrauliques tels que le siphon et la pompe volumétrique à piston .

En définitive, l'hydraulique de l'antiquité fut surtout, en dehors du principe d'approximations successives vers le but cherché, un art.

On doit tout de même admirer l'oeuvre de ces anciens constructeurs qui ont permis à leurs successeurs d'entreprendre le développement de la science de l'hydraulique .

Ces inventions et découvertes antérieures furent utilisées et perfectionnées par les ingénieurs Grècs et ensuite par les ingénieurs Romains qui acquirent des Grècs une grande partie des connaissances initiales qu'ils utilisèrent par la suite pour l'amélioration et l'invention d'autres ouvrages hydrauliques.

Comme toutes les autres filières scientifiques, l'hydraulique passa par une période de transition fréquemment dénommée " l'âge des ténèbres ". Le progrès de la science fut lent et laborieux et ce ne fut qu'au bout de plusieurs siècles que l'accumulation des efforts de nombreux savants en différents pays, permit de clarifier les principes élémentaires de mécanique sur lesquels allait se fonder la science de l'hydraulique .

Pendant la renaissance, l'hydraulique qui porte encore la marque distinctive de ses origines empiriques, fut nécessairement retardée dans son développement jusqu'au moment où la méthode expérimentale fit son apparition dans le domaine de la mécanique .

Le siècle qui suivit immédiatement la renaissance contribua d'une manière générale au développement de l'hydraulique; il est même surprenant de constater que les réalisations atteignirent une telle ampleur, car ni les mathématiques, ni la mécanique n'étaient encore assez avancées pour servir de guides certains dans l'interprétation des faits observés .

Le développement ultérieur de l'hydraulique repose essentiellement sur l'amélioration des outils mathématiques et sur des notions de mécanique qui prirent un très large essor au XVII siècle. Parmi les célèbres mathématiciens du XVII siècle qui contribuèrent au développement des mathématiques, de la mécanique et de la physique on cite :

- Descartes (1598 - 1650)
- Pascal (1623 - 1662)
- Huyghens (1629 - 1695)
- Newton (1642 - 1728)

En définitive, pendant une période d'une centaine d'années, les

CHAPITRE 0 : HISTORIQUE

mathématiques, la physique et la mécanique avaient pris un essor remarquable, toutes les possibilités étaient donc enfin rassemblées pour permettre l'énoncé des principes de base du mouvement des liquides .

Au cours de ces trois derniers siècles, de très nombreux savants contribuèrent au développement de l'hydraulique. Nous ne citerons que les principaux :

- Bernoulli	(1700 - 1782)	Laplace	(1749 - 1827)
- Euler	(1707 - 1783)	Reech	(1805 - 1884)
- Clairaut	(1713 - 1827)	St-Venant	(1797 - 1886)
- D'Alembert	(1717 - 1783)	Darcy	(1803 - 1858)
- Lagrange	(1736 - 1813)	Bergeron	(1876 - 1948)

Il faut noter ici que les contributions principales du début du XX siècle ne tiennent tant dans de nouvelles découvertes que dans la vérification, l'assimilation et le développement des découvertes déjà faites. On assista aussi dans cette période à la création d'un

CHAPITRE 0 : HISTORIQUE

certain nombre d'instituts et de laboratoires de recherches d'hydraulique, notamment en France, aux U.S.A, en Allemagne et autres.

A présent, l'hydraulique moderne étend ses frontières au-delà de son domaine traditionnel. La recherche hydraulique se développe très largement dans les laboratoires industriels ou universitaires auxquels se sont adjoints, dans divers pays, des laboratoires gouvernementaux bénéficiants de l'appui financier de l'état.^[5]

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

GENERALE

CHAPITRE I

INTRODUCTION GENERALE

I.1 INTRODUCTION

Les transitions dans les canaux à surface libre sont communément utilisées dans les applications hydrauliques, notamment dans la réduction des pertes d'énergie, dans certains dispositifs d'écoulement critique, et dans certains bassins d'amortissement.

L'analyse de l'écoulement dans une zone de transition devient compliquée si l'écoulement est supercritique et est accompagné d'ondes transversales (ondes de choc), ou si un ressaut hydraulique se forme lorsque l'écoulement passe du régime supercritique au régime subcritique.

Actuellement, les modèles mathématiques relatifs aux

écoulements supercritiques dans les canaux évoluent rapidement.

Dans cette thèse, un modèle d'écoulement non permanent bidimensionnel est utilisée pour obtenir des solutions à l'état permanent en utilisant le temps comme paramètre d'itération. une telle méthode est capable de simuler les écoulements mixtes subcritique et supercritique, si une technique numérique appropriée est utilisée.

Une extrême attention doit être prise en compte lors de la discrétisation d'un domaine physique de forme géométriquement complexe. Pour cela, nous avons utilisé une transformation géométrique simple (mais efficace !) pour analyser notre problème, en convertissant le domaine physique en un domaine de calcul rectangulaire;notre modèle sera donc basé sur des équations en coordonnées transformées.

On utilisera ce modèle pour analyser les differents cas suivants:

- l'écoulement supercritique dans un rétrécissement.
- l'écoulement supercritique dans un élargissement.
- le ressaut hydraulique dans un élargissement.

Les résultats obtenus seront comparés à des travaux antérieurs de différents chercheurs effectués numériquement et expérimentalement.

I.2 CLASSIFICATION DES ECOULEMENTS

Les écoulements à surface libre peuvent être classés suivant la variation de la profondeur de l'écoulement dans le temps et dans l'espace. Si le temps est pris comme critère de classification, on distinguera l'écoulement permanent et l'écoulement non permanent . Si l'espace est pris comme critère, on distinguera l'écoulement uniforme et l'écoulement varié .

Un écoulement à surface libre est dit uniforme, si la profondeur de l'écoulement est la même en toute section du canal, un écoulement uniforme peut être permanent ou non permanent.

Remarquons qu'un écoulement uniforme non permanent implique que la surface libre fluctue en restant parallèle à la pente de fond, évidemment ce cas est pratiquement impossible .

Un écoulement à surface libre est dit varié, si la profon

deur de l'écoulement varie le long du canal, il peut être évidemment permanent ou non permanent. Un écoulement varié peut alors présenter soit une variation graduelle, soit une variation brusque et rapide : l'écoulement varié se subdivise donc en écoulement graduellement varié et en écoulement brusquement varié [18].

Cette classification est résumée comme suit :

I. Ecoulement permanent.

1. Ecoulement uniforme

2. Ecoulement varié

a. Ecoulement graduellement varié

b. Ecoulement brusquement varié

II. Ecoulement non permanent.

1. Ecoulement uniforme non permanent

2. Ecoulement varié non permanent

a. Ecoulement non permanent graduellement varié

b. Ecoulement non permanent brusquement varié.

I.3 REGIME D'ECOULEMENT

L'effet de la gravité sur le régime d'écoulement est représenté par le rapport des forces d'inertie aux forces de gravité. Ce rapport est donné par le nombre de Froude:

$$F = \frac{V}{(gH)^{1/2}}$$

où V est la vitesse d'écoulement, g l'accélération de la pesanteur et H la hauteur hydraulique définie comme étant le rapport entre la section mouillée du canal et la largeur de la surface libre .

Pour un canal rectangulaire, cette hauteur devient la profondeur de l'écoulement .

On dira que l'écoulement est en régime critique si le nombre de Froude est égal à l'unité (soit $V = \sqrt{gH}$).

L'écoulement est en régime subcritique, si le nombre de Froude F est inférieur à l'unité (soit $V < \sqrt{gH}$). Dans cette état l'effet de la gravité est plus prononcée ceci se traduit par une faible vitesse d'écoulement .

Si par contre F est supérieur à l'unité (soit $V > \sqrt{gH}$) le régime d'écoulement devient supercritique; les forces d'inertie deviennent alors plus prépondérantes ceci se traduit par une vitesse d'écoulement importante .

Remarque

La vitesse critique \sqrt{gH} est plus souvent appelée célérité de l'onde gravitaire qui apparait dans un canal lors d'un changement local dans la profondeur de l'eau.

On doit noter qu'une onde gravitaire peut se propager vers l'amont d'un canal pour un écoulement en régime subcritique, mais ne peut se propager dans cette direction pour un régime supercritique.

Pour cette raison ,la possibilité ou l'impossibilité de la

propagation d'ondes gravitaires vers l'amont peut être utilisée comme critère de distinction entre un régime subcritique et supercritique .

I.4 CANAUx PRISMATIQUES, CANAUx NON PRISMATIQUES (3)

On dit qu'un canal est prismatique si :

- Les génératrices du canal sont des droites parallèles entre elles.
- La forme du canal ne varie pas le long du courant liquide.

On dit qu'un canal est non prismatique si :

- Les génératrices du canal ne sont plus parallèles entre elles.
- La forme du canal est soumise à des changements locaux de sections le long du courant liquide.

Les changements locaux de sections peuvent être :

- Des rétrécissements brusques ou graduels (convergent).
- Des élargissements brusques ou graduels (divergent).

CHAPITRE 2

ECOULEMENT

DANS

LES TRANSITIONS

CHAPITRE II

ECOULEMENT DANS LES TRANSITIONS

II.0 INTRODUCTION

Tout changement de section d'un canal considéré provoque une surface d'écoulement non plane. Les dénivellations ainsi générées sont négligeables pour des écoulements fluviaux (ou subcritiques), mais deviennent importantes pour des écoulements torrentiels (ou supercritiques) ⁽²²⁾.

On relève d'une part, que les conditions d'écoulements torrentielles ne se retrouvent pratiquement que dans des canaux artificiels, et d'autre part que des ondes de choc sont habituellement présentes dans des canaux non prismatiques pour des écoulements en régime supercritique; ce qui nécessitera une surélévation importante des parois du canal.

Dans ce chapitre, la formation d'ondes transversales sera examinée, tout d'abord, pour les déviations de mur vertical dans un canal. On poursuivra par l'analyse des rétrécissements puis, des élargissements et on terminera par une brève description du ressaut hydraulique.

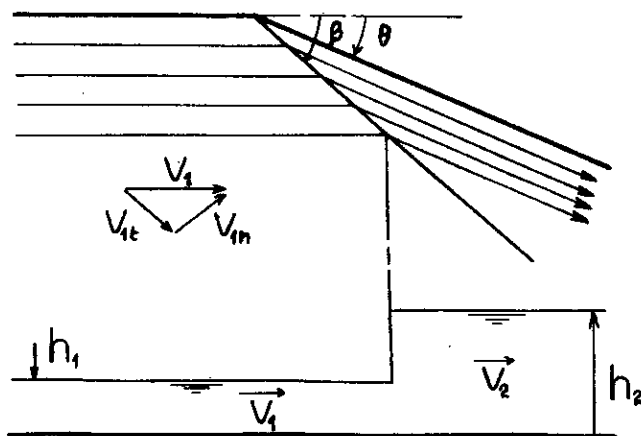
II.1 ONDES TRANSVERSALES (8,14,22)

Par opposition à un écoulement subcritique dans des canaux découverts, un écoulement supercritique peut provoquer des ondes de choc.

Chaque obstacle dans un canal (par exemple, pile, déviation, ou jonction) crée des perturbations qui provoquent des ondes stationnaires à la surface de l'eau (creux, surélévation). De telles ondes sont appelées : ondes transversales ou, par analogie avec la dynamique des gaz : ondes de chocs.

II.1.1 Exemple d'une Déviation Brusque d'un Mur

Considérons un écoulement supercritique parallèle dans un canal rectangulaire. En un certain point le mur est dévié vers l'écoulement d'un angle θ . Cette déviation cause une perturbation de l'écoulement faisant un angle β par rapport à la direction initiale de l'écoulement. L'angle β est appelé : angle de choc et la ligne correspondante : onde transversale.



Déviation d'un mur et ondes de choc

Les équations de continuité et de quantité de mouvement appliquées perpendiculairement au front du choc donnent :

$$\| \quad h_1 v_1 \sin \beta = h_2 v_2 \sin(\beta - \theta) \quad (ET_1)$$

$$\| \quad \frac{h_1^2 - h_2^2}{2} = \frac{h_2 v_2^2 \sin^2(\beta - \theta) - h_1 v_1^2 \sin^2 \beta}{g} \quad (ET_2)$$

où les indices « 1 » et « 2 » indiquent respectivement les sections amont et aval de l'onde de choc.

On peut montrer de plus que les projections des vitesses v_1 et v_2 sur le front d'onde de choc ne varient pas ,donc

$$\| \quad h_1 \tan \beta = h_2 \tan(\beta - \theta) \quad (ET_3)$$

Ainsi, si l'on connaît h_1, v_1 et θ , les équations $(ET_1), (ET_2)$, (ET_3) donnent des expressions pour les inconnues h_2, v_2 et β .

L'élimination du terme $v_2 \sin(\beta - \theta)$ dans (ET₁), (ET₂) donne pour l'angle de choc:

$$\| \sin\beta = \frac{1}{F_1} \left[\frac{Y(1+Y)}{2} \right]^{1/2} \quad (ET_4)$$

où $Y = h_2/h_1$; pour $Y \approx 1$, correspondant à de petites variations de la surface libre de l'amont à l'aval, on obtient

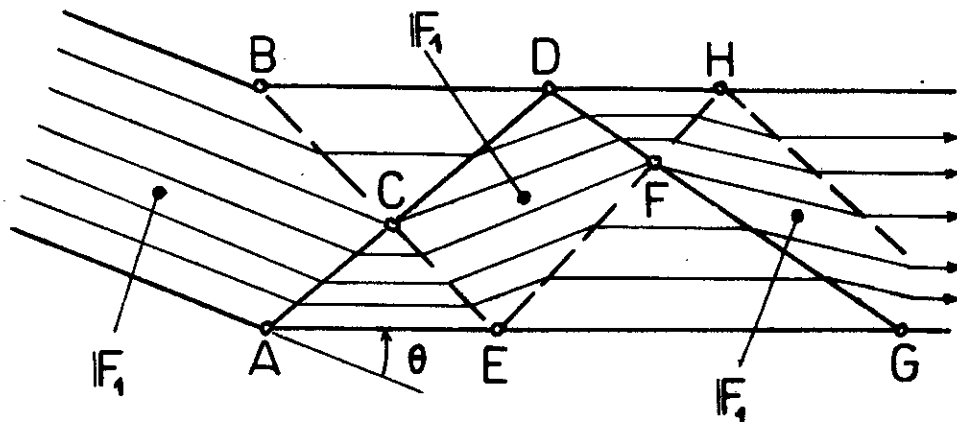
$$\| \sin\beta = \frac{1}{F_1} \quad (ET_5)$$

L'angle de choc devient $\beta = 90^\circ$ pour $F_1 = 1$ et diminue pour des nombres de Froude élevés.

II.1.2 Ondes Positives, Ondes Négatives [14]

La figure ci-dessous représente un canal dont le nombre de Froude de l'écoulement à l'entrée $F_1 > 2$. Aux points A et B, le

canal change de direction d'un angle θ .



Au point A, le changement de direction rentre dans l'écoulement: la déviation du mur est qualifiée de « positive » et une onde positive se forme avec augmentation de la profondeur de l'écoulement .

Au contraire, la déviation du mur au point B est « négative » et une onde négative se forme avec diminution de la profondeur de l'écoulement. Cette onde est différente de l'onde positive

du fait que le changement de profondeur est progressif et non brutal.

La zone à l'amont des ondes transversales, c'est-à-dire à gauche de ACB, n'est pas influencée par le changement de direction et les lignes de courant restent parallèles au canal d'entrée.

Dans les zones ACE et BCD, les lignes de courant sont parallèles aux murs du canal aval et les profondeurs de l'écoulement augmentent et diminuent respectivement.

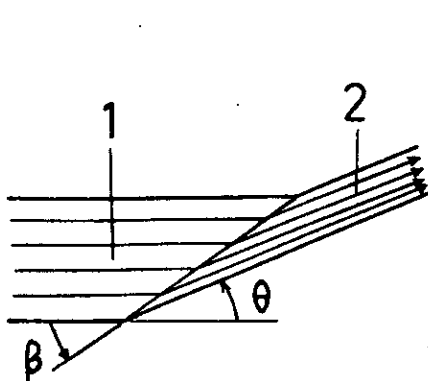
Le point C est l'intersection des deux ondes transversales. Toutes deux pénètrent dans des zones perturbées, mais aboutissent (en raison de l'inversion) à la zone d'état initial. Il en résulte que les caractéristiques dans la zone CDEF sont égales à h_1 et F_1 . Cependant, les lignes de courant ont dévié de 2θ par rapport à la direction de l'écoulement initial.

A l'aval de la ligne DFE, une inversion se produit de nouveau: les lignes de courant deviennent parallèles aux murs. La profondeur de l'écoulement augmente dans la zone DFH et diminue dans la zone EFG.

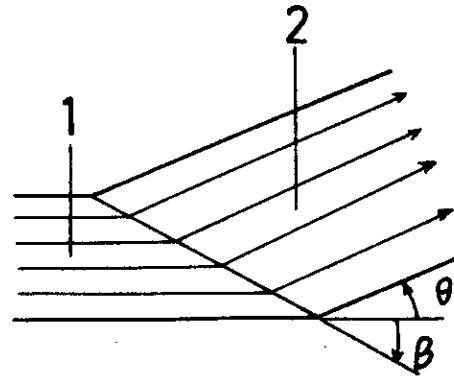
Le long du mur AEG, la surface s'élève tout d'abord brusquement puis tombe au-dessous de la profondeur initiale h_1 . L'écoulement devient ainsi agité dans le canal, ce qui nécessite des murs plus hauts que ceux de la zone d'entrée, pour cela une partie importante de l'étude d'un coursier porte sur la réduction des sommets des ondes .

II.2 REDUCTION DES ONDES TRANSVERSALES (14)

Le moyen le plus efficace pour réduire les ondes transversales est basé sur le principe de l'interférence d'ondes . Selon ce principe, une onde négative est produite pour remplacer une onde positive identique. Par exemple, une déviation de mur positive dans un canal de largeur finie, telle que représentée sur la figure (a) ci-dessous conduit à une augmentation de la profondeur d'écoulement ($h_2 > h_1$). Dans la figure (b), l'inverse se produit conduisant à une diminution de la profondeur d'écoulement à l'aval.



fig(a)



fig(b)

II.3 RETRECISSEMENT D'UN CANAL DANS DES CONDITIONS D'ECOULEMENT

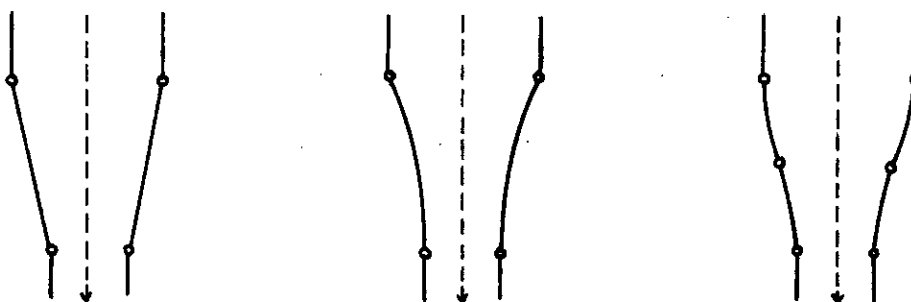
SUPERCRITIQUE (8,14,22)

II.3.1 Type de Rétrécissement

Un problème important est l'étude du rétrécissement pour passer d'un canal d'entrée de largeur b_1 à un canal de largeur $b_2 < b_1$.

On distingue les rétrécissements en forme d'entonnoir, en forme d'éventail et en forme de tuyère (respectivement a,b,c dans

les figures ci-après):



- a -

- b -

- c -

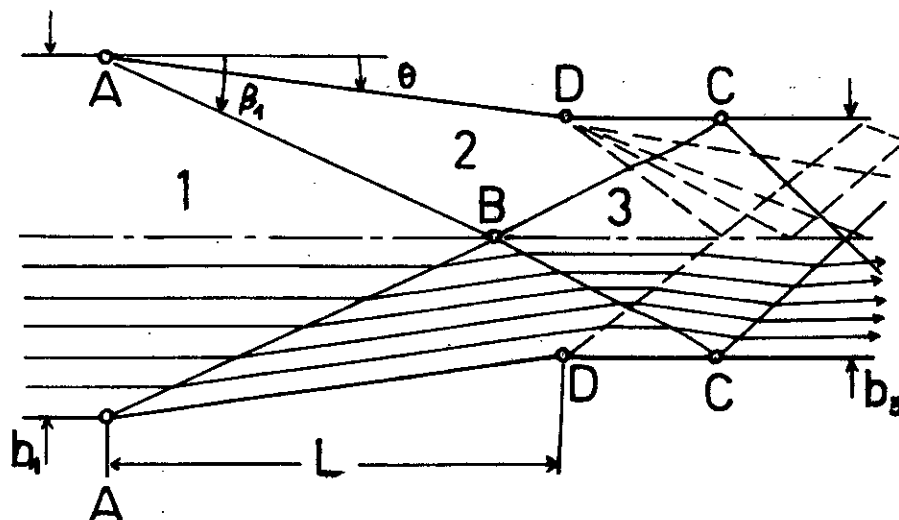
Le premier type à une forme polygonale entre la partie large et la partie étroite du canal. Dans la forme en éventail, on utilise des arcs circulaires dont la courbure est orientée vers l'écoulement alors que dans la forme en tuyère deux arcs circulaires sont disposés en S.

Le rétrécissement en forme d'éventail présente le minimum de déviations élémentaires et correspond ainsi à la forme optimale du point de vue géométrique, ce type d'ouvrage sera, en particulier, conçu pour les évacuateurs de crue dont le seuil est arqué.

En ce qui concerne le rétrécissement en forme de tuyère, l'arc amont aura un rayon plus petit que l'arc aval.

On s'intéressera plus particulièrement au rétrécissement en forme d'entonnoir.

II.3.2 Rétrécissement en Forme d'Entonnoir



Représentation de l'écoulement dans un rétrécissement de canal

d'après Ippen et Dawson (1951)

La figure ci-dessus représente un rétrécissement symétrique, de tracé rectiligne, avec lignes de courant et ondes transversales.

L'indice « 1 » correspond aux conditions d'écoulement à l'entrée; h_1 , v_1 et F_1 étant respectivement la profondeur, la vitesse et le nombre de Froude de l'écoulement à l'entrée.

Pour un angle de rétrécissement arbitraire θ , le schéma de l'écoulement est représenté par la figure précédente.

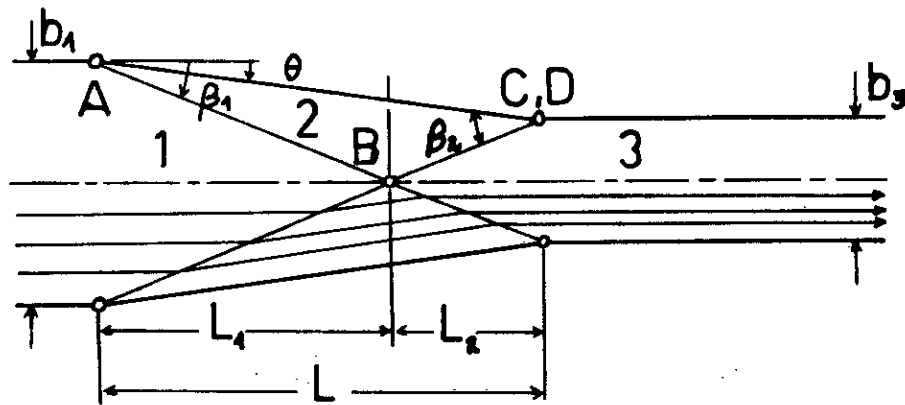
Les largeurs du canal d'entrée et du canal de sortie sont respectivement b_1 et b_3 . Ce changement de la largeur du canal provoque un système d'ondes de choc.

En particulier des ondes transversales positives partent des points A sous un angle β_1 . Les deux ondes de choc des points A se rencontrent au point B situé sur l'axe du canal, puis sont réfléchies sur les murs opposés aux points C et pénètrent dans le canal aval. Simultanément, des ondes négatives se forment aux points D. La superposition des ondes positives et négatives conduit à un écoulement agité. Il en résulte que l'écoulement dans le canal aval connaît des perturbations.

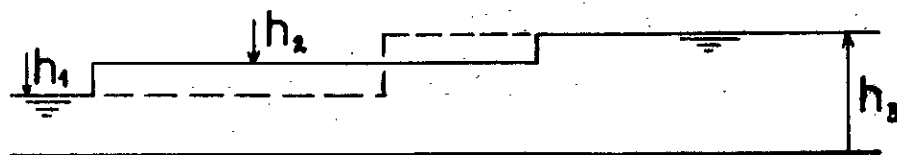
Par conséquent un choix correct de l'angle de rétrécissement θ , conduit à une nette amélioration de l'écoulement.

Il est évident que le choix de θ dépend du nombre de Froude amont F_1 et du rapport des largeurs $\phi = b_1/b_3$. Une fois ϕ et θ fixés, chaque changement de F_1 conduit à la situation représentée dans la figure précédente.

a) -



b) -



Conception d'un rétrécissement de canal en forme d'entonnoir

d'après Ippen et Dawson (1951)

a) - Vue en plan

b) - Coupe longitudinale avec:

(---) Profil de la surface libre dans l'axe du canal

(—) Profil de la surface libre le long des parois

Si l'onde transversale positive est dirigée exactement vers le point D ,l'interférence des ondes se produit comme précédemment. L'écoulement qui en résulte dans le canal aval n'a pratiquement pas de perturbations de surface. Il s'ensuit que seul l'écoulement dans la zone 2 n'est pas axial (fig.(a) ci- dessus); la figure (b) représente des profils caractéristiques de surface, le long des murs latéraux et le long de l'axe du canal.

D'après Hager et Bretz l'angle de rétrécissement θ peut-être déterminé par la formule approchée suivante :

$$\| \tan\theta = \frac{1}{2F_1} \left[\frac{b_1}{b_3} - 1 \right] \quad (ET_6)$$

si $\theta < 10^\circ$

La conception se base sur le débit pour lequel la hauteur maximale de l'onde se produit .

Ce débit n'est pas connu à priori. On considère, en général, le débit de projet. Pour tous les autres débits, la forme du rétrécissement ne sera pas conforme à l'équation (ET_6).

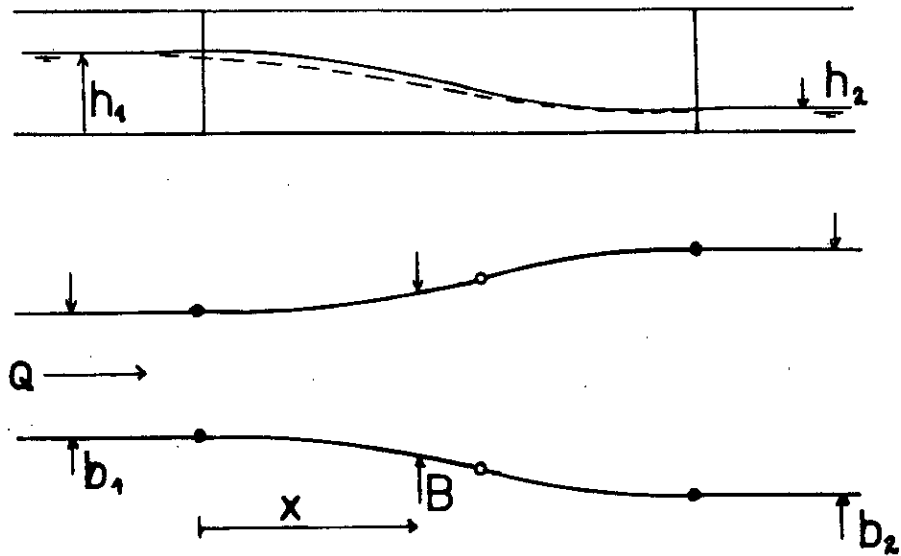
II.4 ELARGISSEMENT D'UN CANAL DANS DES CONDITIONS D'ECOULEMENT SUPERCRITIQUE (22)

Les écoulements sortant d'une conduite, d'un évacuateur de crue ou d'un coursier à pente raide peuvent déboucher dans un canal aval de largeur plus grande.

Par opposition à une réduction de la largeur d'un canal, où la vitesse moyenne v diminue et la hauteur d'eau h augmente en direction de l'écoulement, v dans des canaux à parois divergentes augmente et h décroît pour des conditions pseudo-uniformes.

Rouse et al.(1951) ont présenté des résultats permettant le dimensionnement des élargissements dans des conditions d'écoulement torrentielles.

Un tel élargissement est représenté dans la figure ci-dessous :



Géométrie d'un élargissement

dans des conditions d'écoulement torrentielles

- (—) Profil de la surface libre le long de l'axe
- (---) Profil de la surface libre le long des parois
- (•) Début et fin de la transition

où b_1 et b_2 sont les largeurs à l'amont et à l'aval du canal rectangulaire. L'écoulement provient d'un canal amont prismatique de largeur b_1 sur un canal aval de largeur infinie ($b_1/b_2 \rightarrow 0$).

La fonction de la largeur $B=B(x)$ dans la transition est :

$$\| \quad B \quad 1 \quad x$$

$$\| \quad \frac{\quad}{b_1} = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{x}{b_1 F_1} \right]^{3/2} + 1 \right) \quad (ET_7)$$

$$\| \quad b_1 \quad 2 \quad b_1 F_1$$

où F_1 est le nombre de Froude amont.

Remarquons que si la transition entre le canal étroit et le canal plus large est trop brusque, des ondes transversales importantes peuvent se former. Par contre, une transition trop progressive conduit à un ouvrage de grande longueur et coûteux.

Remarquons aussi que la forme de l'élargissement représenté par l'équation ET_7 empêche la séparation de l'écoulement.

II.5 GENERALITES SUR LE RESSAUT HYDRAULIQUE [21]

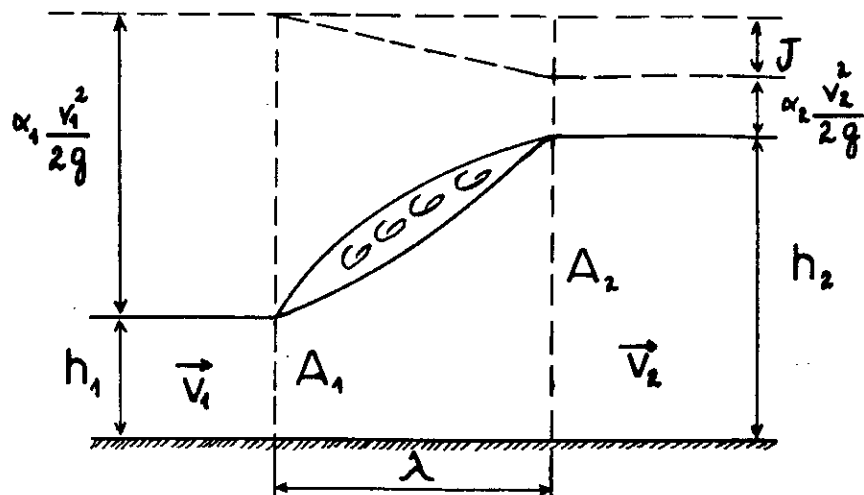
II.5.1 Définition et Description du Ressaut

Le ressaut hydraulique est une brusque surélévation de la surface libre d'un courant permanent ou transitoire. Celle-ci passe d'une profondeur $h_1 < h_c$ supercritique, h_1 correspondant à un axe d'amont à une profondeur $h_2 > h_c$ subcritique, h_2 correspondant à un axe d'aval. La profondeur h_c est la profondeur critique de l'écoulement dans le canal.

Le ressaut sépare un axe supercritique ou d'amont d'un axe subcritique ou d'aval.

Si le ressaut présente un exhaussement suffisamment important de la ligne d'eau, un ou plusieurs rouleaux se produisent avec déferlement et turbulence, si bien qu'une perte de charge non négligeable se produit au droit du ressaut.

Si on désigne A_1 et A_2 comme étant les sections à l'amont et à l'aval où les filets fluides sont supposés pratiquement parallèles, on distinguera :



- les profondeurs conjuguées h_1 dans A_1 et h_2 dans A_2 ;
- la hauteur du ressaut ($h_2 - h_1$) ;
- la longueur du ressaut L ;
- la perte de charge J qui est l'abaissement de la ligne de charge ;

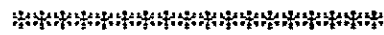
La longueur du ressaut L est déterminée par des formules empiriques dont voici les plus simples :

- $L = 5h_2$
- $L = 6(h_2 - h_1)$

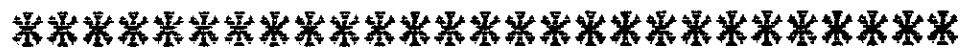
Les autres éléments du ressaut, eux, peuvent se calculer à partir de considérations théoriques.

Selon que les nombres de Froude sont proches ou éloignés de 1, le ressaut présente des allures différentes.

CHAPITRE 3



MODELISATION



MATHEMATIQUE



CHAPITRE III

MODELISATION MATHEMATIQUE

III.1 EQUATIONS FONDAMENTALES [7,16,17]

Les équations bidimensionnelles d'un écoulement graduellement varié en régime non permanent dans les canaux à surface libre sont obtenues en appliquant les principes de conservation de la masse et de quantité de mouvement et en faisant des hypothèses simplificatrices.

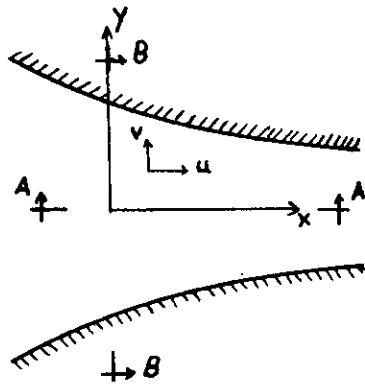
III.1.1 Hypothèses

- Liquide incompressible.

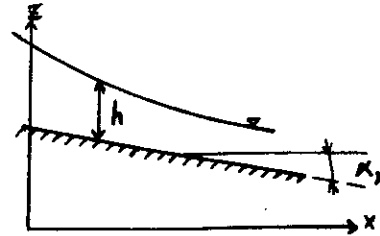
- Distribution hydrostatique des pressions.
- Répartition uniforme des vitesses transversales.
- Faibles pentes de fond du canal.
- Les pertes de charge générales sont les mêmes que dans le cas d'un mouvement permanent et uniforme de même profondeur.
- Les contraintes tangentielles au fond du canal sont prépondérantes sur les autres contraintes.
- Accélération de Coriolis négligée

III.1.2 Mise en Equation

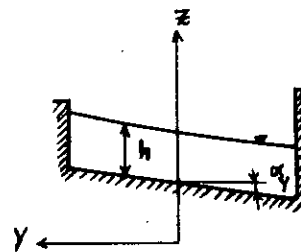
L'espace étant rapporté à un trièdre orthonormé xyz on se propose donc d'étudier l'écoulement d'une masse liquide à surface libre.



Fig(III.1) Vue en Plan



Fig(III.2) Section A-A

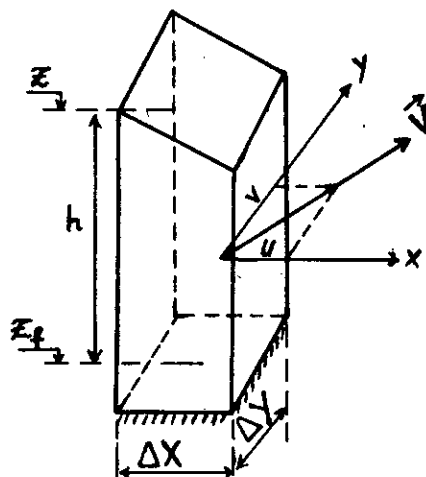


Fig(III.3) Section B-B

Les inconnues à déterminer en chaque points en fonction du temps sont:

- h , le tirant d'eau
- V , la vitesse d'écoulement.

Considérons un prisme élémentaire de base $\Delta x, \Delta y$ et de hauteur h :



Fig(III.4)

où Z_f : côte du fond

Z : côte de la surface libre

h : tirant d'eau

V : vecteur vitesse

u : composante du vecteur vitesse V dans la direction x

v : composante du vecteur vitesse V dans la direction y

A – Equation de Continuité

Le principe de continuité exprime la conservation de la masse, ce qui signifie qu'aucun fluide ne peut ni être créé, ni

disparaître dans un volume donné.

La relation mathématique correspondante s'obtient en écrivant que l'accroissement de volume élémentaire est dû à la différence des débits qui y pénètrent et qui en sortent :

$$\Delta h \Delta x \Delta y = [uh(x,y,t) - uh(x+\Delta x,y,t)] \Delta y \Delta t + [vh(x,y,t) - vh(x,y+\Delta y,t)] \Delta x \Delta t$$

D'où en divisant par $\Delta x \Delta y \Delta t$ et en faisant tendre ces grandeurs vers zéro on obtient :

$$\begin{aligned} & \| \\ & \| \quad \delta h \quad \delta(uh) \quad \delta(vh) \\ & \| \quad \frac{\quad}{\delta t} + \frac{\quad}{\delta x} + \frac{\quad}{\delta y} = 0 \quad (MM_1) \\ & \| \\ & \| \end{aligned}$$

B - Equation Dynamique

Les équation dynamiques s'obtiennent en appliquant l'équation des quantités de mouvement au prisme considéré

$$\begin{aligned} & \| \\ & \| \quad \int_{\Omega} \frac{\delta V}{\delta t} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{V}_n d\Gamma = \Sigma \mathbf{F}_{ext} \\ & \| \\ & \| \end{aligned}$$

Ω : Volume du prisme

Γ : Surface du prisme

\mathbf{F}_{ext} : Représente les forces extérieures (par unité de masse)

En projetant sur x il vient :

$$\frac{\delta u}{\delta t} h \Delta x \Delta y + (hu^2 \Delta y)_{x+\Delta x} - (hu^2 \Delta y)_x + (huv \Delta x)_{y+\Delta y} - (huv \Delta x)_y + u \frac{\delta h}{\delta t} \Delta x \Delta y = F_x$$

De même en projetant sur y il vient :

$$\frac{\delta v}{\delta t} h \Delta x \Delta y + (hv^2 \Delta x)_{y+\Delta y} - (hv^2 \Delta x)_y + (huv \Delta y)_{x+\Delta x} - (huv \Delta y)_x + v \frac{\delta h}{\delta t} \Delta x \Delta y = F_y$$

Les forces extérieures sont dues à :

- La pression
- Au poids
- Aux frottements

1. La Pression

Dans l'hypothèse d'une répartition hydrostatique des pressions, les isobares sont des surfaces parallèles à la surface libre.

Soit P la résultante des forces de pression s'exerçant sur le prisme élémentaire :

$$| P | = gh\Delta x\Delta y$$

En projetant sur x et y il vient :

$$P_x = - gh \frac{\delta z}{\delta x} \Delta x \Delta y$$

$$P_y = - gh \frac{\delta z}{\delta y} \Delta x \Delta y$$

2. Le Poids

Le poids n'intervient pas car il est pratiquement parallèle à z

3. Les Frottements

La force due au frottement est proportionnelle à la surface de contact de l'eau et du fond: le fond étant supposé relativement plat, cette surface est égale, pour le prisme élémentaire, à $\Delta x \Delta y$

Elle est proportionnelle au carré de la vitesse et dirigé en sens opposé, d'où une expression de la forme :

$$-C_f V |V| \Delta x \Delta y$$

La loi de CHEZY donne:

$$C_F = \frac{g}{C^2}$$

C est le coefficient de CHEZY .

Si on utilise le coefficient de MANNING alors :

$$C = \frac{1}{n} R_H^{1/6}$$

R_H est le rayon hydraulique. Si le canal rectangulaire est infiniment large alors $R_H \approx h$.

n est le coefficient de MANNING

Divisant par $\Delta x \Delta y$ et faisant tendre ces quantités vers zéro on obtient alors les équations suivantes:

$$\frac{\delta(uh)}{\delta t} + \frac{\delta(u^2h+gh^2/2)}{\delta x} + \frac{\delta(uvh)}{\delta y} = gh(S_{0x} - S_{fx}) \quad (MM_2)$$

$$\frac{\delta(vh)}{\delta t} + \frac{\delta(uvh)}{\delta x} + \frac{\delta(v^2h+gh^2/2)}{\delta y} = gh(S_{0y} - S_{fy}) \quad (MM_3)$$

$$S_{fx} = n^2 \frac{u(u^2+v^2)^{1/2}}{h^{4/3}}$$

$$S_{fy} = n^2 \frac{v(u^2+v^2)^{1/2}}{h^{4/3}}$$

$S_{0(x,y)}$ et $S_{f(x,y)}$ sont respectivement la pente de fond et la pente de frottement dans les directions x et y.

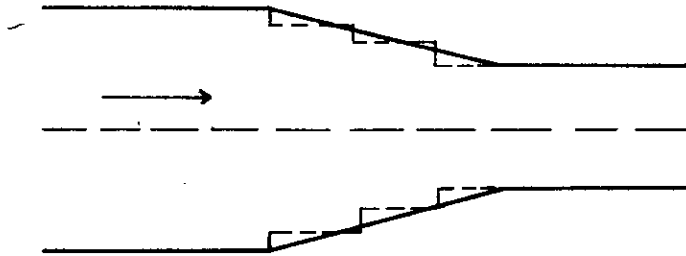
III.2 TRANSFORMATION GEOMETRIQUE

Comme nous l'avons signalé dans la partie introduction, une extrême attention doit être prise en compte lors de la discrétisation du domaine physique de forme géométrique complexe.

En effet, on est souvent amené en pratique, à résoudre des problèmes dans des canaux à géométrie irrégulière.

Le problème principale qui se pose , quand on utilise la technique des différences finies, est la prise en compte des conditions aux limites au niveau des parois latérales.

ROACHE [7] a établi que l'utilisation d'une procédure d'interpolation après discrétisation du domaine physique telle représenté sur la figure(III.5) ci-dessous, a conduit à des solutions abérantes.



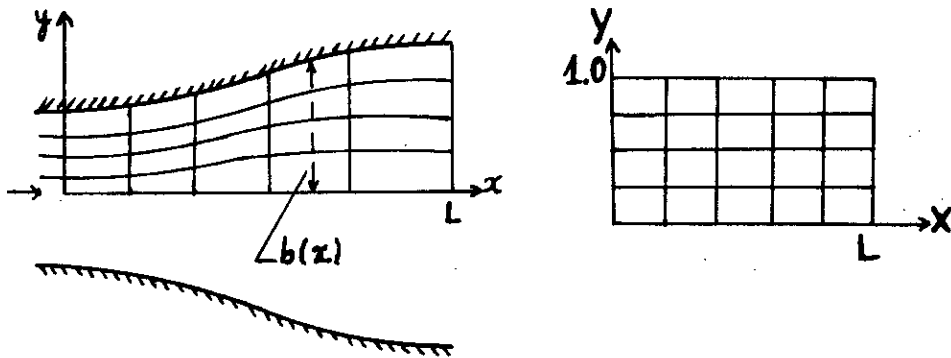
Fig(III.5)

Pour cette raison, il est plus convenable dans de tels cas de transformer le domaine physique en un domaine de calcul rectangulaire plus simple à analyser.

Cette procédure est basée sur la transformation de coordonnées suivante (Anderson et al. (7,17))

$$\begin{aligned}
 & \| \\
 & \| \quad X = x \\
 & \| \qquad \qquad \qquad (MM_4) \\
 & \| \quad \quad \quad y \\
 & \| \quad Y = \frac{y}{b(x)} \\
 & \| \quad \quad \quad b(x) \\
 & \|
 \end{aligned}$$

Où $b(x)$ est la distance entre l'axe de symétrie et la paroi latérale à une distance x .



Fig(III.6) Transformation De Coordonnées

Pour

Une Transition Symétrique

Avec cette transformation, il est à présent possible d'appliquer les différences finies dans un maillage uniformément espacé dans le plan de calcul dont les frontières coïncident avec $Y=0$ et $Y=1$.

Remarquons que nous nous intéressons seulement à des canaux symétriques; mais ceci n'enlève en rien la généralité à des canaux assymétriques.

III.2.1 Transformation des Equations

Dans le but d'appliquer la procédure précédente on doit évidemment transformer les équations MM_1, MM_2, MM_3 en X et Y

Soit f une fonction de $x(X,Y), y(X,Y)$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta x} &= \frac{\delta f}{\delta X} \frac{\delta X}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta Y} \frac{\delta Y}{\delta x} \\ & \hspace{15em} (MM_5) \end{aligned}$$

A- Equation de Continuité

A partir de l'équation MM_1 , on tire de MM_5 :

$$\frac{\delta h}{\delta t} + \frac{\delta(uh)}{\delta X} + \frac{1}{b(X)} \frac{\delta(vh)}{\delta Y} = 0$$

c'est-à-dire:

$$b(X) \frac{\delta h}{\delta t} + b(X) \frac{\delta(uh)}{\delta X} + \frac{\delta(vh)}{\delta Y} = 0$$

soit en réarrangeant les termes:

$$\frac{\delta(hb)}{\delta t} + \frac{\delta(uhb)}{\delta X} - hu \frac{\delta b}{\delta X} + \frac{\delta(vh)}{\delta Y} = 0$$

En supposant les termes de second ordre négligeables, on peut mettre l'équation précédente sous la forme :

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & \parallel \frac{\delta(hb)}{\delta t} + \frac{\delta(uhb)}{\delta X} + \frac{\delta}{\delta Y} (vh - Yhu) = 0 \quad (MM_6) \\ & \parallel \\ & \parallel \end{aligned}$$

B- Equation de quantité de mouvement

A partir de l'équation MM₂, on tire de MM₅

$$\frac{\delta(uh)}{\delta t} + \frac{\delta(u^2h+gh^2/2)}{\delta X} + \frac{1}{b(X)} \frac{\delta(uvh)}{\delta Y} = gh(S_{OX} - S_{EX})$$

c'est-à-dire:

$$b(X) \frac{\delta(uh)}{\delta t} + b(X) \frac{\delta(u^2h+gh^2/2)}{\delta X} + \frac{\delta(uvh)}{\delta Y} = ghb(S_{OX} - S_{EX})$$

soit en réarrangeant les termes:

$$\frac{\delta(uhb)}{\delta t} + \frac{\delta[b(u^2h+gh^2/2)]}{\delta X} - \frac{\delta b}{\delta X} (u^2h+gh^2/2) + \frac{\delta(uvh)}{\delta Y} = ghb(S_{OX}-S_{EX})$$

En supposant les termes de second ordre négligeables, on peut écrire l'équation précédente sous la forme: MM₇

$$\begin{aligned} & \frac{\delta(buh)}{\delta t} + \frac{\delta[b(u^2h+gh^2/2)]}{\delta X} + \frac{\delta}{\delta Y} [uvh - Y(u^2h+gh^2/2)] = ghb(S_{OX} - S_{FX}) \\ & \hspace{25em} (MM_7) \end{aligned}$$

De même pour l'équation MM_3 , on tire de MM_5

$$\frac{\delta(vh)}{\delta t} + \frac{\delta(uvh)}{\delta X} + \frac{1}{b(X)} \frac{\delta(v^2h+gh^2/2)}{\delta Y} = gh(S_{OY} - S_{FY})$$

c'est-à-dire:

$$\frac{\delta(vhb)}{\delta t} + b \frac{\delta(uvh)}{\delta X} + \frac{\delta(v^2h+gh^2/2)}{\delta Y} = ghb(S_{OY} - S_{FY})$$

soit en réarrangeant les termes:

$$\frac{\delta(vhb)}{\delta t} + \frac{\delta(uvhb)}{\delta X} - \frac{\delta b}{\delta X}(uvh) + \frac{\delta(v^2h+gh^2/2)}{\delta Y} = ghb(S_{0Y} - S_{FY})$$

En supposant les termes de second ordre négligeable on peut écrire l'équation précédente sous la forme MM₈:

$$\frac{\delta(bvh)}{\delta t} + \frac{\delta(buvh)}{\delta X} + \frac{\delta}{\delta Y}[v^2h + gh^2/2 - Y \frac{\delta b}{\delta X}(uvh)] = ghb(S_{0Y} - S_{FY})$$

(MM₈)

Remarquons que les équations MM6,MM7,MM8 sont valables pour des canaux à section rectangulaire.

III.3 CONDITIONS INITIALES, CONDITIONS AUX LIMITES

III.3.1 Conditions Initiales

Lors des calculs, les conditions initiales sont ,bien sûr, les conditions au temps initial $t=0$.

Pour commencer les calculs à partir de l'état non permanent, les valeurs des trois variables h , u et v sont judicieusement spécifiées en tous les points du maillage.

III.3.2 Conditions Aux Limites

Quatre types de conditions doivent être prises en compte dans les différentes applications:

- Les conditions d'amont et d'aval
- La condition de symétrie
- Les conditions sur les parois latérales

A- Conditions d'Amont, Conditions d'Aval (13)

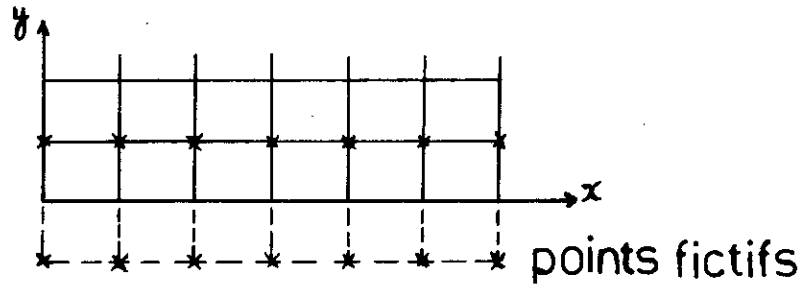
Pour les écoulement bidimensionnels en régime supercritique, trois conditions aux limites doivent être spécifiées à l'amont et aucune à l'aval.

Par contre, pour les écoulement bidimensionnels en régime subcritique, deux conditions aux limites doivent être spécifiées à l'amont et une condition à l'aval.

B- Conditions de Symétrie (7,12,17)

Pour le calcul des variables u, v et h au niveau de l'axe d'écoulement, il est nécessaire d'utiliser la procédure évidente de réflexion.

Dans cette procédure, les valeurs des variables u, v et h aux points du maillage fictif (Fig(III.7) ci-dessous) sont remplacées par les valeurs aux points intérieurs correspondant.



Fig(III.7)

Remarquons que cette procédure est exacte pour une ligne symétrique_[7].

C- Conditions sur les Parois Latérales _[7,12]

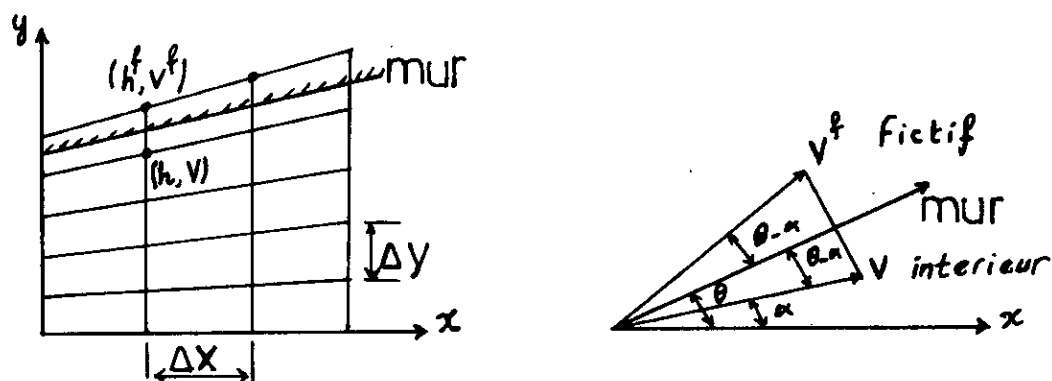
Pour permettre le calcul des valeurs h, u et v au niveau des parois latérales, une multitude de procédures est utilisée._[17]

Notre choix s'est porté encore une fois sur la procédure de réflexion qui nous a paru être la plus appropriée.

Cette procédure est l'une des plus utilisée et la plus

recommandée pour analyser un écoulement dans des canaux à section rectangulaire.

En se référant à la figure III.8 ci-dessous, la profondeur d'écoulement h et la valeur de la vitesse résultante V au point de réflexion fictif du maillage et au point intérieur correspondant, sont les mêmes.



Fig(III.8) Procédure de réflexion pour la paroi latérale

La direction de la vitesse résultante V est déterminée telle que sa composante normale au mur soit nulle.

Si θ est l'angle que fait la paroi avec l'axe des x , et

α l'angle que fait la vitesse résultante au point intérieur du maillage et l'axe des x, alors les composantes u^f et v^f au point du maillage fictif sont, dans la cas d'un canal divergent:

$$\begin{aligned} & \| \\ & \| \quad u^f = V \cdot \cos(2\theta - \alpha) \\ & \| \\ & \| \quad v^f = V \cdot \sin(2\theta - \alpha) \\ & \| \end{aligned}$$

et dans le cas d'un canal convergent :

$$\begin{aligned} & \| \\ & \| \quad u^f = V \cdot \cos(2\theta - \alpha) \\ & \| \\ & \| \quad v^f = -V \cdot \sin(2\theta - \alpha) \\ & \| \end{aligned}$$

V est la vitesse résultante au point intérieur du maillage.

SDFEF

SDFDFDFDF

SDFDFDFDF

DFDFDFDFDF

CHAPITRE 4

CHAPITRE IV

RESOLUTION PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES

« Les solutions analytiques exactes, qui sont rares en physique, sont élégantes, mais n'ont pas plus de valeur intrinsèque que les solutions numériques. On ne doit pas sous-estimer la facilité et la puissance des méthodes de calcul numérique ».

M.A. RUDERMAN

Cours de physique de BERKELEY

IV.1 PRESENTATION DE LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES

IV.1.1 Introduction et Généralités

Les équations aux dérivées partielles, constituent l'un

des plus rapide développement dans toutes les branches des sciences physiques.

Le champs d'application des équations aux dérivées partielles augmente d'importance, englobant le domaine hydraulique.

En effet, plusieurs problèmes en hydraulique exigent, par manque de solutions analytiques, une solution numérique des équations aux dérivées partielles, et l'une des méthodes classiques pour approcher cette solution est l'utilisation de la méthode des différences finies.

La méthode consiste à estimer par approximation les valeurs d'une ou de plusieurs fonctions à partir des conditions aux limites.

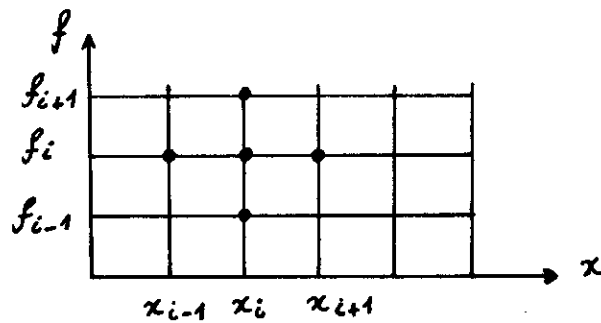
Cette approximation représente une discrétisation du domaine et le remplacement de l'opérateur différentiel par un opérateur aux différences finies. En d'autres termes, le domaine de variation continu, est remplacé par un ensemble fini de points ou noeuds, délimité par des frontières et formant ainsi un réseau.

Si f est une fonction continue et continument différentiable, on écrit:

$$\left\| \begin{array}{l} \delta f \\ \delta x \end{array} \right\|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$$

où: $f_i = f(x_i)$

$$x_i = (i-1)\Delta x$$



L'ordre d'approximation dans une méthode aux différences finies se détermine à l'aide du développement en série de Taylor de la fonction f :

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1!} \delta f + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \delta^2 f(x) + \dots + \frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} \delta^{n-1} f(x) + R_n$$

où le reste R_n est de l'ordre de $\|\Delta x\|^n$, ce que l'on note habituellement :

$$R_n = o(\|\Delta x\|^n)$$

Cas d'une approximation à plusieurs dimensions

La méthode peut être aisément étendue au cas où la fonction f considérée dépend de deux ou plusieurs variables.

Ainsi, si f dépend de deux variables (x,t) ; et si dans le plan Oxt on trace une série de droites parallèles aux axes déterminant de la sorte un réseau de points (i,j) auxquels correspond les coordonnées de la fonction inconnue $f_{i,j}$, on peut écrire pour les différences centrales :

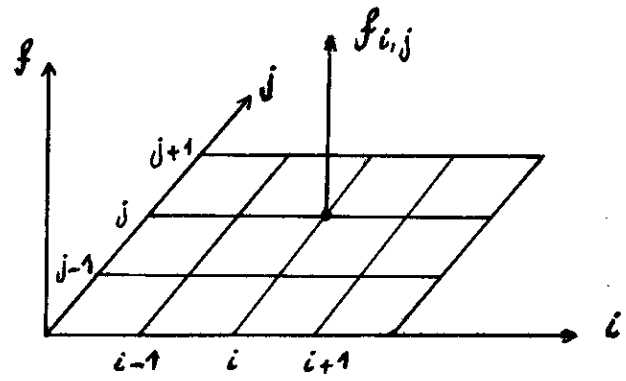
$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{l} \delta f \\ \delta x \end{array} \right\|_{i,j} &= \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2 \Delta x} \\ \left\| \begin{array}{l} \delta f \\ \delta t \end{array} \right\|_{i,j} &= \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2 \Delta t} \end{aligned}$$

De même pour les dérivées de second ordre :

$$\left[\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \right]_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\left[\frac{\delta^2 f}{\delta t^2} \right]_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\Delta t^2}$$

$$\left[\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta t} \right]_{i,j} = \frac{(f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1}) - (f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j-1})}{4 \Delta x \Delta t}$$



IV.1.2 Analyse de l'Approximation [4,10,19,20]

A- Erreur de Troncature

L'erreur de troncature vient du fait qu'on a tronqué le développement en série de Taylor de la fonction f .

L'erreur de troncature par pas est la différence entre la valeur calculée et la valeur exacte, en supposant qu'au pas précédent la valeur calculée et la valeur exacte étaient identiques.

B- Convergence

Le schéma numérique est convergent si la solution du problème discrétisé tend, en un certain sens, vers la solution du problème aux dérivées partielles, lorsque Δx et Δt tendent simultanément vers zéro.

C- Consistance

Nous n'aurons de chance d'obtenir la convergence du schéma que si nous approchons correctement le problème continu c'est-à-dire si nous remplaçons les dérivées partielles par des différences finies

effectivement voisines. La "qualité" de cette consistance s'appelle la précision du schéma.

D- Stabilité

Dans la résolution d'algorithmes, on n'attaque pas le pas $j \rightarrow j+1$ dans les mêmes conditions que le pas $0 \rightarrow 1$ car on l'aborde avec un lourd handicap: la lourde charge constituée par la somme des erreurs de discrétisation précédentes (et d'arrondis à l'occasion!); ainsi un coureur qui a déjà fait trois "cent mètres" dans sa journée n'aborde pas le quatrième dans la même forme que pour le premier!.

On dira alors qu'un schéma numérique est stable s'il est peu sensible à l'accumulation des erreurs de discrétisation et d'arrondis.

E- Schéma explicite, Schéma implicite

Un schéma est explicite, si chaque valeur approchée de la solution, au temps $t+\Delta t$ et au point x , est écrite à partir des valeurs de la solution précédente au temps t . Cette valeur est donc explicitement fonction des valeurs connues, déjà calculées, et s'obtient directement pour chaque x .

Un schéma est implicite, si la valeur approchée, en un point au temps $t+\Delta t$, est écrite en fonction de la solution précédente au temps t , et des valeurs voisines au temps $t+\Delta t$. Il s'agit donc d'une liaison implicite, entre toutes les valeurs au temps $t+\Delta t$, qui se résoud globalement.

IV.2 CHOIX DU SCHEMA NUMERIQUE

Plusieurs schémas aux différences finies sont utilisés dans le traitement des problèmes d'évolution, c'est-à-dire dépendant du temps. (9)

Les schémas de type prédicteur-correcteur du second ordre sont particulièrement performants pour le traitement des ondes de choc; et le schéma de MacCormack, schéma que nous adoptons, est bien adapté à la prise en compte de ces chocs.

IV.3 DESCRIPTION DES SCHEMAS DE TYPE PREDICTEUR-CORRECTEUR (2,9)

Si on considère l'équation écrite sous forme conservative de la forme:

$$\begin{aligned} & \| \\ & \| \quad \delta U \quad \delta F(U) \\ & \| \quad \frac{\quad}{\delta t} + \frac{\quad}{\delta x} = 0 \quad (DF_1) \\ & \| \\ & \| \end{aligned}$$

Le schéma s'écrit en deux étapes (DF₂):

-Etape PREDICTION

$$\begin{aligned} & \| \\ & \| \quad U^*_i = (1-\beta)U^n_i + \beta U^n_{i+1} - \alpha\tau(F^n_{i+1} - F^n_i) \\ & \| \end{aligned}$$

-Etape CORRECTION

$$\begin{aligned} & \| \\ & \| \quad U^{n+1}_i = U^n_i - [\tau/(2\alpha)] [(\alpha-\beta)F^n_{i+1} + (2\beta-1)F^n_i + (1-\alpha-\beta)F^n_{i-1} + F^*_i - F^*_{i-1}] \\ & \| \end{aligned}$$

où: $\tau = \Delta t / \Delta x$

et avec les notations évidentes :

$$F^n_i = F(U^n_i)$$

$$F^*_i = F(U^*_i)$$

U^*_i est la valeur prédictee. α et β sont des paramètres réels dont le rôle intervient au niveau de la stabilité et la consistance du schéma .

On peut considérer que U^*_i approche la solution exacte de (DF_1) au point $(x_i + \beta x, t_n + \alpha t)$.

IV.4 SCHEMA DE MacCormack

Le schéma de MacCormack, cas particulier du schéma de type prédicteur-correcteur, est obtenu en remplaçant α par 1 et β par 0 dans les équations algébriques précédentes.

IV.4.1 Cas Unidimensionnel (2,9,11)

Considérons l'équation sous forme conservative:

$$\begin{aligned} & \| \\ & \| \quad \delta U \quad \delta F(U) \\ & \| \quad \frac{\quad}{\delta t} + \frac{\quad}{\delta x} = D(U, x, t) \quad (DF_3) \\ & \| \quad \delta t \quad \delta x \\ & \| \end{aligned}$$

Le schéma de MacCormack appliqué à l'équation (DF₃) se compose de deux étapes:

- Etape PREDICTION

$$\begin{aligned} & \| \\ & \| \quad U^*_i = U^n_i - \tau(F^n_{i+1} - F^n_i) + \Delta t D^n_i \quad (DF_4) \\ & \| \end{aligned}$$

- Etape CORRECTION

$$\begin{aligned} & \| \\ & \| \quad U^{n+1}_i = 1/2 [U^n_i + U^*_i - \tau(F^*_i - F^*_{i-1}) + \Delta t D^*_i] \quad (DF_5) \\ & \| \end{aligned}$$

où: $\tau = \Delta t / \Delta x$

et avec les notations :

$$F^n_i = F(U^n_i)$$

$$F^*_i = F(U^*_i)$$

$$D^*_i = D(U^*_i)$$

IV.4.2 Cas Bidimensionnel

Le schéma de MacCormack peut être « aisément » étendu au cas bidimensionnel. Ainsi nous effectuons les mêmes étapes de calcul; la seule différence est l'apparition d'une inconnue en plus.

Si on considère l'équation (DF₆) sous forme conservative:

$$\begin{aligned} & \| \\ & \| \quad \delta V \quad \delta F(V) \quad \delta G(V) \\ & \| \quad \frac{\quad}{\delta t} + \frac{\quad}{\delta x} + \frac{\quad}{\delta y} = H(V, x, y, t) \quad (DF_6) \\ & \| \quad \delta t \quad \delta x \quad \delta y \\ & \| \end{aligned}$$

Le schéma s'écrit comme précédemment en deux étapes :

- Etape PREDICTION

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & \parallel \quad \delta V \quad = \quad \frac{V^*_{i,j} - V^n_{i,j}}{\Delta t} \\ & \parallel \\ & \parallel \quad \delta F \quad = \quad \frac{F^n_{i+1,j} - F^n_{i,j}}{\Delta x} \\ & \parallel \\ & \parallel \\ & \parallel \quad \delta G \quad = \quad \frac{G^n_{i,j+1} - G^n_{i,j}}{\Delta y} \\ & \parallel \\ & \parallel \\ & \parallel \quad H \quad = \quad H^n_{i,j} \\ & \parallel \end{aligned}$$

De cette première étape, on tire l'expression (DF₇):

$$V^*_{ij} = V^n_{ij} - \tau_x(F^n_{i+1j} - F^n_{ij}) - \tau_y(G^n_{ij+1} - G^n_{ij}) + H^n_{ij}\Delta t$$

(DF₇)

où: $\tau_x = \Delta t / \Delta x$;

$\tau_y = \Delta t / \Delta y$;

- Etape CORRECTION

$$\frac{\delta V}{\delta t} = \frac{V^{**}_{i,j} - V^*_{i,j}}{\Delta t}$$

$$\frac{\delta F}{\delta t} = \frac{F^*_{i,j} - F^*_{i-1,j}}{\Delta x}$$

$$\frac{\delta G}{\delta t} = \frac{G^*_{i,j} - G^*_{i,j-1}}{\Delta y}$$

$$H = H^*_{i,j}$$

De cette deuxième étape, on tire l'expression (DF_B):

$$\begin{aligned}
 & \| \\
 & \| \\
 & \| \\
 & \| V^{**}_{ij} = V^*_{ij} - \tau_x(F^*_{ij} - F^*_{i-1j}) - \tau_y(G^*_{ij} - G^*_{ij-1}) + H^*_{ij}\Delta t \\
 & \| \\
 & \| \\
 & \| \hspace{20em} (DF_B) \\
 & \|
 \end{aligned}$$

où: $\tau_x = \Delta t / \Delta x$

$\tau_y = \Delta t / \Delta y$

La solution au temps $n+1$ est telle que:

$$\begin{array}{l} \parallel \\ \parallel \\ \parallel \\ \parallel \\ \parallel \end{array} \quad V^{n+1}_{ij} = \frac{V^n_{ij} + V^{**}_{ij}}{2} \quad (DF_9)$$

REMARQUE

Dans ce schéma, les différences finies avant sont utilisées pour approximer les dérivées partielles spatiales dans l'étape prédiction et les différences finies arrières, utilisant les variables prédites, sont utilisées dans l'étape correction.

Il faut savoir qu'il est possible d'utiliser les différences finies arrières dans l'étape prédiction et les différences finies avants dans l'étape correction, comme il est possible d'alterner la direction de différentiation d'un pas de temps à l'autre.

IV.5 APPLICATION DU SCHEMA DE MacCormack

AUX EQUATIONS DE SAINT-VENANT

A partir des équations de base régissant notre problème
et que nous reprenons:

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & \parallel \frac{\delta(hb)}{\delta t} + \frac{\delta(uhb)}{\delta X} + \frac{\delta}{\delta Y} [vh - Yhu] = 0 \\ & \parallel \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & \parallel \frac{\delta(uhb)}{\delta t} + \frac{\delta}{\delta X} [b(u^2h + g)] + \frac{\delta}{\delta Y} [uvh - Y(u^2h + g)] = E_x \\ & \parallel \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & \parallel \frac{\delta(vhb)}{\delta t} + \frac{\delta}{\delta X} [buvh] + \frac{\delta}{\delta Y} [v^2h + g - Y(uvh)] = E_x \\ & \parallel \end{aligned}$$

$$\parallel E_x = gbh(S_{0X} - S_{EX})$$

$$\parallel E_y = gbh(S_{0Y} - S_{EY})$$

Et en posant

$$H = bh$$

$$U = bhu$$

$$V = bhv$$

$$F = \frac{U^2}{H} + \frac{gH^2}{2b}$$

$$G = \frac{UV}{bH} - Y \frac{\delta b}{\delta X} \left[\frac{U^2}{bH} + \frac{gH^2}{2b^2} \right]$$

$$K = \frac{UV}{H}$$

$$V^2 = Y \frac{\delta b}{\delta X} UV$$

$$S = \frac{V^2}{bH} + \frac{gH^2}{2b^2}$$

$$W = \frac{V - Y \frac{\delta b}{\delta X} U}{b}$$

$$SF_x = \frac{n^2 U (U^2 + V^2)^{1/2}}{H^{10/3}} \cdot b^{4/3}$$

$$SF_y = \frac{n^2 V (U^2 + V^2)^{1/2}}{H^{10/3}} \cdot b^{4/3}$$

Les équations de base de notre problème (équations de Saint-Venant) sont alors plus simple à formuler:

$$\begin{aligned} & \frac{\delta H}{\delta t} + \frac{\delta U}{\delta X} + \frac{\delta W}{\delta Y} = 0 \\ & \frac{\delta U}{\delta t} + \frac{\delta F}{\delta X} + \frac{\delta G}{\delta Y} = gH(S_{OX} - S_{FX}) \\ & \frac{\delta V}{\delta t} + \frac{\delta K}{\delta X} + \frac{\delta S}{\delta Y} = gH(S_{OY} - S_{FY}) \end{aligned}$$

Les équations de Saint-Venant auxquelles on applique le schéma de MacCormack se mettent sous la forme:

- Etape PREDICTION

$$\frac{H^*_{ij} - H^n_{ij}}{\Delta t} + \frac{U^{n+1}_{i+1j} - U^n_{ij}}{\Delta x} + \frac{W^{n+1}_{ij+1} - W^n_{ij}}{\Delta y} = 0$$

$$\frac{U^*_{ij} - U^n_{ij}}{\Delta t} + \frac{F^{n+1}_{i+1j} - F^n_{ij}}{\Delta x} + \frac{G^{n+1}_{ij+1} - G^n_{ij}}{\Delta y} = gH^n_{ij}(S_{0x} - S^n_{fxij})$$

$$\frac{V^*_{ij} - V^n_{ij}}{\Delta t} + \frac{K^{n+1}_{i+1j} - K^n_{ij}}{\Delta x} + \frac{S^{n+1}_{ij+1} - S^n_{ij}}{\Delta y} = gH^n_{ij}(S_{0y} - S^n_{fyij})$$

De cette première étape on tire, l'expression (DF₁₀):

$$\| \| H^*_{ij} = H^n_{ij} - \tau_x(U^n_{i+1j} - U^n_{ij}) - \tau_y(W^n_{ij+1} - W^n_{ij}) \quad (DF_{10})$$

$$\| \| U^*_{ij} = U^n_{ij} - \tau_x(F^n_{i+1j} - F^n_{ij}) - \tau_y(G^n_{ij+1} - G^n_{ij}) + gH^n_{ij}(S_{Ox} - S^n_{fxij}) \Delta t$$

$$\| \| V^*_{ij} = V^n_{ij} - \tau_x(K^n_{i+1j} - K^n_{ij}) - \tau_y(S^n_{ij+1} - S^n_{ij}) + gH^n_{ij}(S_{Oy} - S^n_{fyij}) \Delta t$$

- Etape CORRECTION

$$\| \| \frac{H^{**}_{ij} - H^*_{ij}}{\Delta t} + \frac{U^*_{ij} - U^*_{i-1j}}{\Delta X} + \frac{W^*_{ij} - W^*_{ij-1}}{\Delta Y} = 0$$

$$\| \| \frac{U^{**}_{ij} - U^*_{ij}}{\Delta t} + \frac{F^*_{ij} - F^*_{i-1j}}{\Delta X} + \frac{G^*_{ij} - G^*_{ij-1}}{\Delta Y} = gH^*_{ij}(S_{Ox} - S^*_{fxij})$$

$$\| \| \frac{V^{**}_{ij} - V^*_{ij}}{\Delta t} + \frac{K^*_{ij} - K^*_{i-1j}}{\Delta X} + \frac{S^*_{ij} - S^*_{ij-1}}{\Delta Y} = gH^*_{ij}(S_{Oy} - S^*_{fyij})$$

De cette deuxième étape on tire, l'expression (DF₁₁)

$$\| \| H^{**}_{ij} = H^*_{ij} - \tau_x(U^*_{ij} - U^*_{i-1j}) - \tau_y(W^*_{ij} - W^*_{ij-1}) \quad (DF_{11})$$

$$\| \| U^{**}_{ij} = U^*_{ij} - \tau_x(F^*_{ij} - F^*_{i-1j}) - \tau_y(G^*_{ij} - G^*_{ij-1}) + gH^*_{ij}(S_{ox} - S^*_{xij})\Delta t$$

$$\| \| V^{**}_{ij} = V^*_{ij} - \tau_x(K^*_{ij} - K^*_{i-1j}) - \tau_y(S^*_{ij} - S^*_{ij-1}) + gH^*_{ij}(S_{oy} - S^*_{yij})\Delta t$$

où

$$\tau_x = \Delta t / \Delta X$$

$$\tau_y = \Delta t / \Delta Y$$

La solution au temps n+1 est telle que :

$$\| \| H^{n+1}_{ij} = \frac{H^n_{ij} + H^{**}_{ij}}{2} \quad (DF_{12})$$

$$\| \| U^{n+1}_{ij} = \frac{U^n_{ij} + U^{**}_{ij}}{2} \quad (DF_{13})$$

$$\begin{array}{l}
 \| \\
 \| \qquad \qquad \qquad V^n_{ij} + V^{**}_{ij} \\
 \| \quad V^{n+1}_{ij} = \frac{\qquad \qquad \qquad}{2} \qquad \qquad \qquad (DF_{14}) \\
 \| \\
 \|
 \end{array}$$

IV.6 STABILITE DU SCHEMA

Le schéma de MacCormack n'est stable que si la condition C.F.L. (Courant-Friedrichs-Lewy) est satisfaite.

Cette condition est exprimée, pour les écoulements bidimensionnels, par l'expression suivante_[7]:

$$\begin{array}{l}
 \| \\
 \| \qquad \qquad \qquad (V + \sqrt{gh}) \Delta t \\
 \| \quad C_n = \frac{\qquad \qquad \qquad}{b(x) \Delta X \Delta Y} [\Delta X^2 + (b(x) \Delta Y)^2]^{1/2} \leq 1 \quad (DF_{15}) \\
 \| \\
 \|
 \end{array}$$

Où V est la vitesse résultante au point du maillage.

Cette condition doit être satisfaite en tout les points du maillage: il est donc évident de prendre l'incrément de temps suivant tel que:

$$\Delta t = C_n \frac{b_{\min}(x) \Delta X \Delta Y}{\max(V + \sqrt{gh}) [\Delta X^2 + (b_{\min}(x) \Delta Y)^2]^{1/2}} \quad (DF_{16})$$

A chaque temps t , la condition précédente (DF₁₆) fixe le pas de temps Δt ; les pas d'espace ΔX et ΔY étant supposés constants.

Il faut noter qu'une expérimentation numérique est requise avant de choisir la valeur optimale de la valeur C_n .

IV.7 TRAITEMENT NUMERIQUE DES ONDES DE CHOC

VISCOSITE ARTIFICIELLE {6,7,10,11,12,15,16}

Il arrive que les conditions aux limites imposées à un écoulement de fluide ne soient pas compatibles avec l'idée intuitive que la solution doit être une fonction continue à dérivées continues (idée sur laquelle se fonde la mise en équations).

Dans un tel cas, il faut renoncer à cette idée et admettre que la solution est une fonction régulière par domaine qui peut présenter des discontinuités sur certaines lignes limitant les domaines; à l'intérieur d'un domaine il n'y a pas de discontinuités et les équations sont valables.

Une onde de choc est justement une surface de discontinuité séparant deux domaines où la solution est régulière. La difficulté principale qui surgit lors de la présence d'ondes de choc est que la position des lignes de discontinuité n'est généralement pas connue a priori et fait partie des inconnues du problème.

Du point de vue numérique, les ondes de choc sont le plus souvent traitées en introduisant dans les équations un terme

supplémentaire, dit de viscosité artificielle, qui a la propriété d'être négligeable partout où la solution est régulière mais de permettre un lissage des singularités là où elles apparaissent. Avec cette méthode, la position du choc n'est pas prise en compte, ce qui la rend facile à mettre en oeuvre.

Une procédure développée par Jameson et al.(1981) [7] est utilisée dans ce modèle pour amortir les oscillations numériques qui apparaissent avec ces chocs.

Les valeurs des variables calculées au nouveau pas de temps par le schéma de MacCormack sont modifiées en utilisant l'algorithme suivant :

$$\begin{aligned}
 & \| \\
 & \| \quad f^{k+1}_{ij} = f^{k+1}_{ij} + [\Gamma_{xi+1/2j} \cdot C_{i1} - \Gamma_{xi-1/2j} \cdot C_{i2}] \\
 & \| \\
 & \| \\
 & \| \quad \quad \quad + [\Gamma_{yij+1/2} \cdot C_{j1} - \Gamma_{yij-1/2} \cdot C_{j2}] \\
 & \| \\
 & \|
 \end{aligned}
 \tag{Df_{17}}$$

Où

||

|| $C_{i1} = f^{k+1}_{i+1j} - f^{k+1}_{ij}$

|| $C_{i2} = f^{k+1}_{ij} - f^{k+1}_{i-1j}$

||

|| $C_{j1} = f^{k+1}_{ij+1} - f^{k+1}_{ij}$

|| $C_{j2} = f^{k+1}_{ij} - f^{k+1}_{ij-1}$

||

Et

||

|| $\Gamma_{xi+1/2j} = \chi \max(\Omega_{xi+1j}, \Omega_{xij})$

|| $\Gamma_{xi-1/2j} = \chi \max(\Omega_{xi-1j}, \Omega_{xij})$

|| $\Gamma_{yij+1/2} = \chi \max(\Omega_{yij+1}, \Omega_{yij})$

|| $\Gamma_{yij-1/2} = \chi \max(\Omega_{yij-1}, \Omega_{yij})$

||

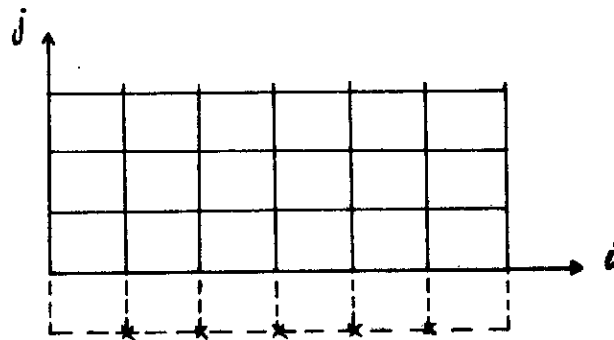
χ est une constante dite de dissipation.

Les valeurs de Ω_{xij} et Ω_{yij} sont données par:

$$\Omega_{xij} = \frac{|h_{i+1j} - 2h_{ij} + h_{i-1j}|}{|h_{i+1j}| + 2|h_{ij}| + |h_{i-1j}|}$$

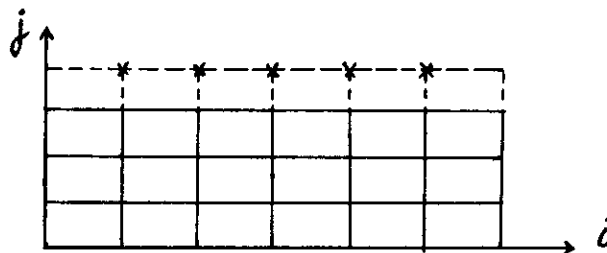
$$\Omega_{yij} = \frac{|h_{ij+1} - 2h_{ij} + h_{ij-1}|}{|h_{ij+1}| + 2|h_{ij}| + |h_{ij-1}|}$$

Aux points où h_{ij-1} n'existe pas (fig.ci-après)



$$\Omega_{x_{ij}} = \frac{|h_{ij+1} - h_{ij}|}{|h_{ij+1}| + |h_{ij}|}$$

Aux points où h_{ij+1} n'existe pas (fig. ci-après)

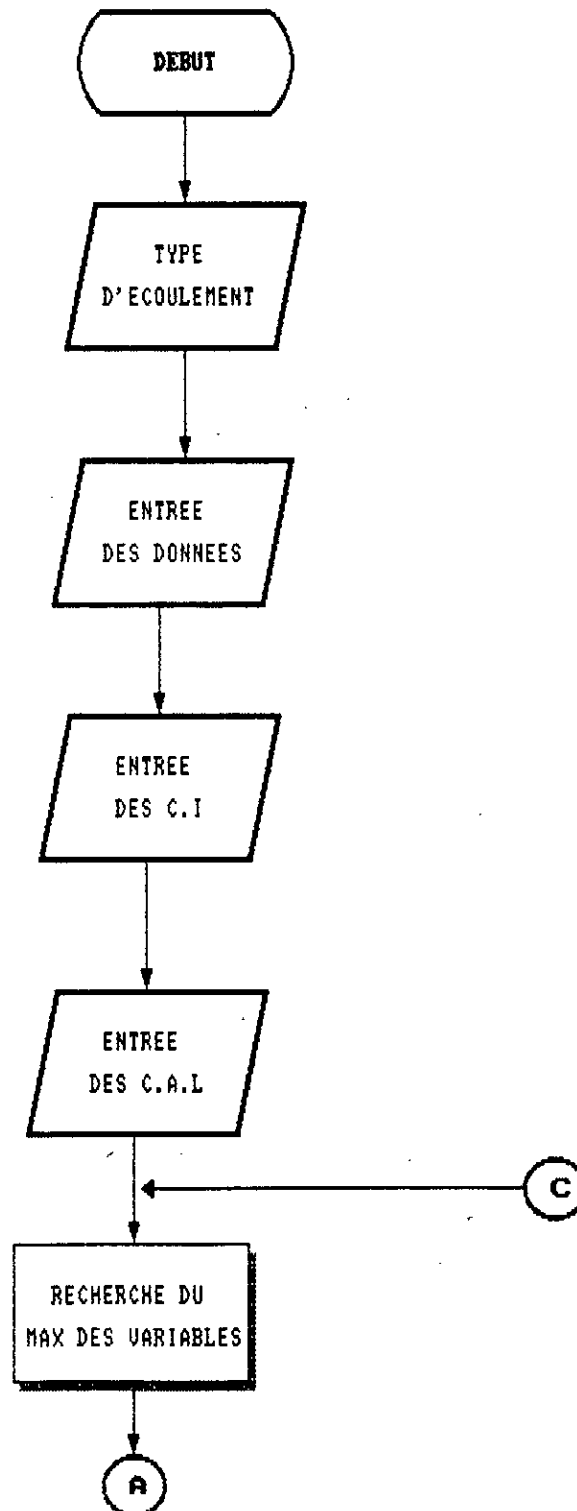


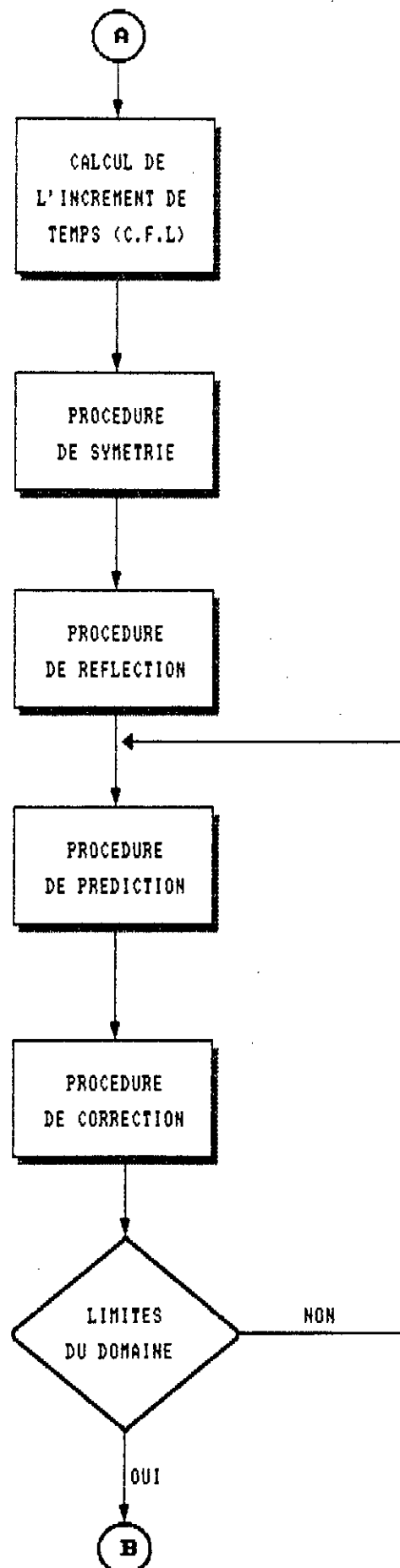
$$\Omega_{x_{ij}} = \frac{|h_{ij-1} - h_{ij}|}{|h_{ij-1}| + |h_{ij}|}$$

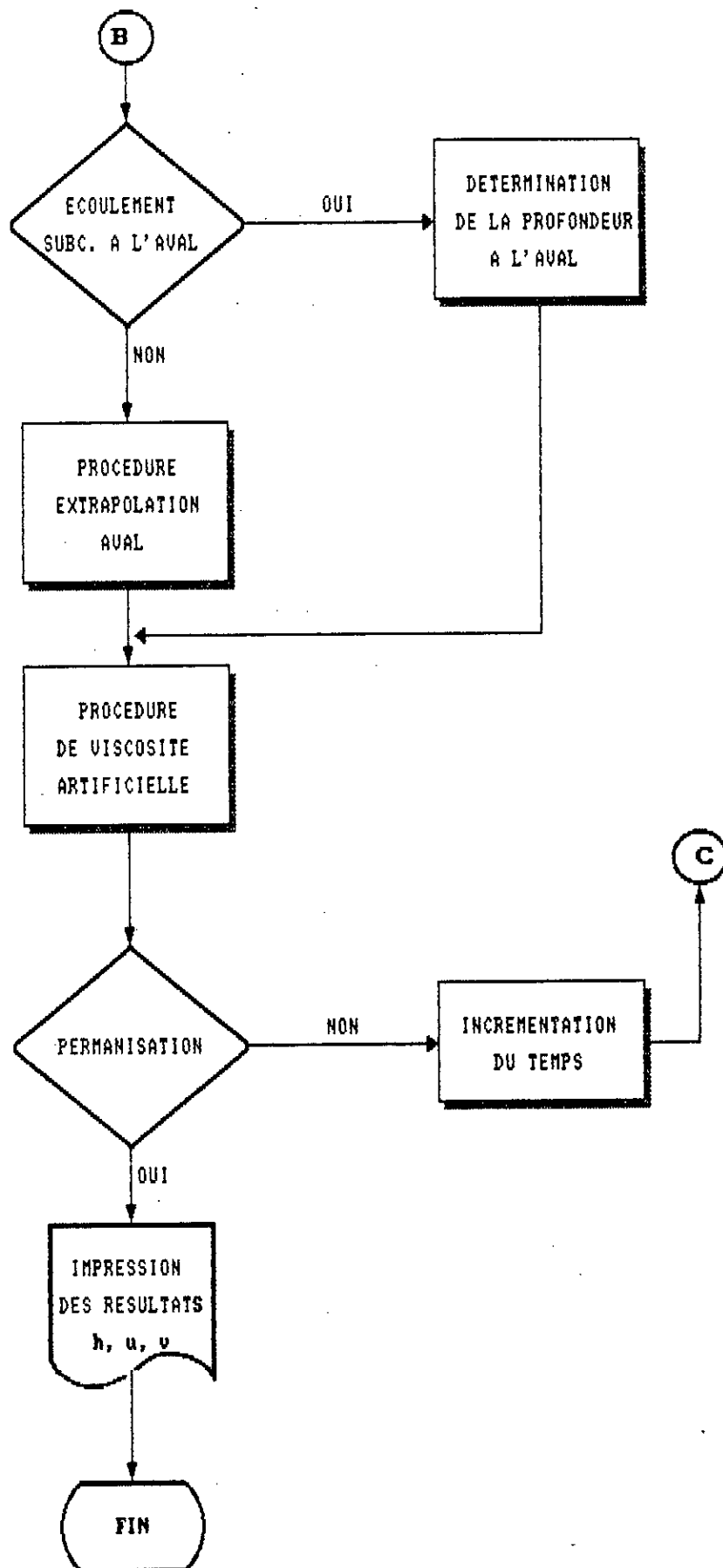
Remarquons que la relation $DF_{1,7}$ doit être vue comme étant une affectation .

IV.8 ORGANIGRAMME DE CALCUL

ORGANIGRAMME GENERAL







CHAPITRE 5

APPLICATIONS

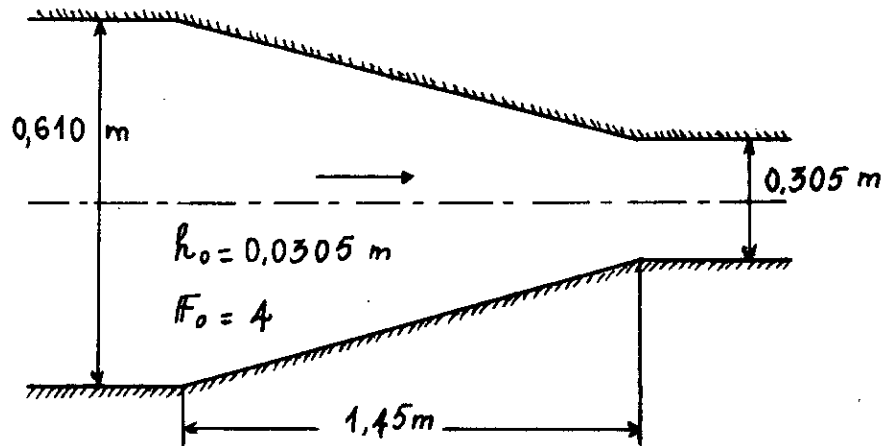
CHAPITRE V

APPLICATIONS

V.A 1^{ère} APPLICATION : ANALYSE DE L'ÉCOULEMENT SUPERCRITIQUE DANS
UN RÉTRÉCISSEMENT RECTILIGNE SYMÉTRIQUE

V.A.1 Déroulement des Calculs

Dans cette application, nous analysons un écoulement supercritique dans un rétrécissement rectiligne symétrique à section transverse rectangulaire dont les dimensions sont données sur la figure A ci-dessous:



Fig(A)

Les conditions aux limites de l'écoulement dans ce canal sont les suivantes:

- Le tirant d'eau à l'amont est $h_0 = 0.0305 \text{ m}$
- Le nombre de Froude à l'amont est $F_0 = 4$
- La vitesse transversale à l'amont est $v = 0 \text{ m/s}$
- Les pentes de fond et de frottement sont supposées nulles.

Nous utilisons un maillage assez raffiné en prenant les pas d'espace suivants:

$$\Delta X = 0.0483 \text{ m.}$$

$$\Delta Y = 0.0476$$

Pour les problèmes de stabilité et d'oscillation nous avons adopté, après analyse de la littérature et essais numériques, les coefficients suivants:

- Le coefficient de dissipation est $\alpha = 0.8$
- Le nombre de Courant est $C_n = 0.8$

La profondeur $h_b = 0.0305 \text{ m}$, la vitesse longitudinale $u = 2.188 \text{ m/s}$, et la vitesse transversale $v = 0 \text{ m/s}$ sont adoptées comme conditions initiales et sont spécifiées en tous les points du maillage.

Remarquons par ailleurs qu'en raison de la technique numérique utilisée, les valeurs des variables u, v, h sont extrapolées à l'aval. Nous devons cependant ne pas les confondre avec des conditions aux limites.

V.A.2 Résultats et Critiques

Les résultats que nous avons obtenus sont représentés sur les figures A.1 et A.2 .Ces deux figures nous montrent d'une part, le profil de la surface libre le long de l'axe médian du canal et le long des parois du mur, et d'autre part une comparaison avec les résultats expérimentaux et numérique d'autres chercheurs.

A travers ces deux représentations, on constate que:

- Les résultats que nous obtenons sont concordants avec les résultats numériques de CHAUDHRY, la différence est que notre modèle atteint plus rapidement l'état permanent (1.5 sec. contre 3 sec.).
- Notre modèle donne de très bons résultats dans les régions où les chocs ne sont pas fortement dominants.
- Il donne de moins bons résultats, comparés aux résultats expérimentaux, dans le voisinage du choc et ceci peut être expliqué par le fait que dans cette zone l'hypothèse d'une répartition hydrostatique des pressions n'est plus valide.

- La figure A.2, qui représente le profil de la surface libre le long du mur, nous permet de constater que la hauteur maximale du niveau d'eau est identique à celle mesurée.

En plus des résultats présentés ci-dessus, nous avons jugé utile de décrire les figures suivantes:

- Les figures A.3 et A.4 font référence à l'efficacité de la technique utilisée dans ce modèle: elles montrent la convergence du profil de la surface libre vers un état permanent.

- La figure A.5 compare la ligne d'eau le long de l'axe médian du canal calculée en utilisant un modèle permanent, et nous indique que la technique que nous avons utilisé conduit à des résultats comparables à ceux obtenus en utilisant d'autres techniques.

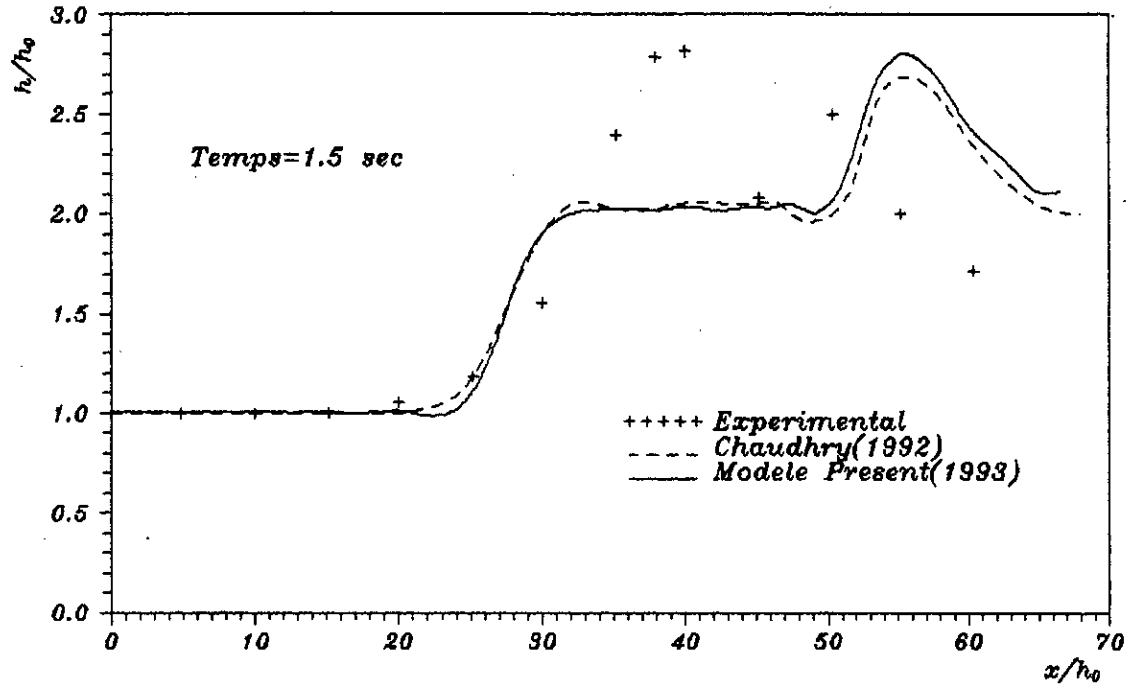
- Pour amortir les oscillations numériques, nous avons utilisé (après essais numériques), le coefficient \mathcal{X} le plus approprié; la figure A.6 est associée à la technique de viscosité artificielle et nous indique une comparaison des profils de la surface libre pour des coefficients de dissipation \mathcal{X} différents.

- Les figures A.7 et A.8 en donnant respectivement une représentation tridimensionnelle et plane de la surface libre, nous permettent de mieux visualiser la forme et la direction du choc.

- Sur les figures A.9 et A.10, nous comparons les profils de la surface libre le long de l'axe médian du canal et le long des parois du mur ; cela nous a permis de constater l'importance du choc et ses différentes positions pour des variations d'angles de rétrécissement θ du canal. Les figures A.7, A.8, A.11, A.12, A.13 et A.14 nous en donne une représentation tridimensionnelle et plane.

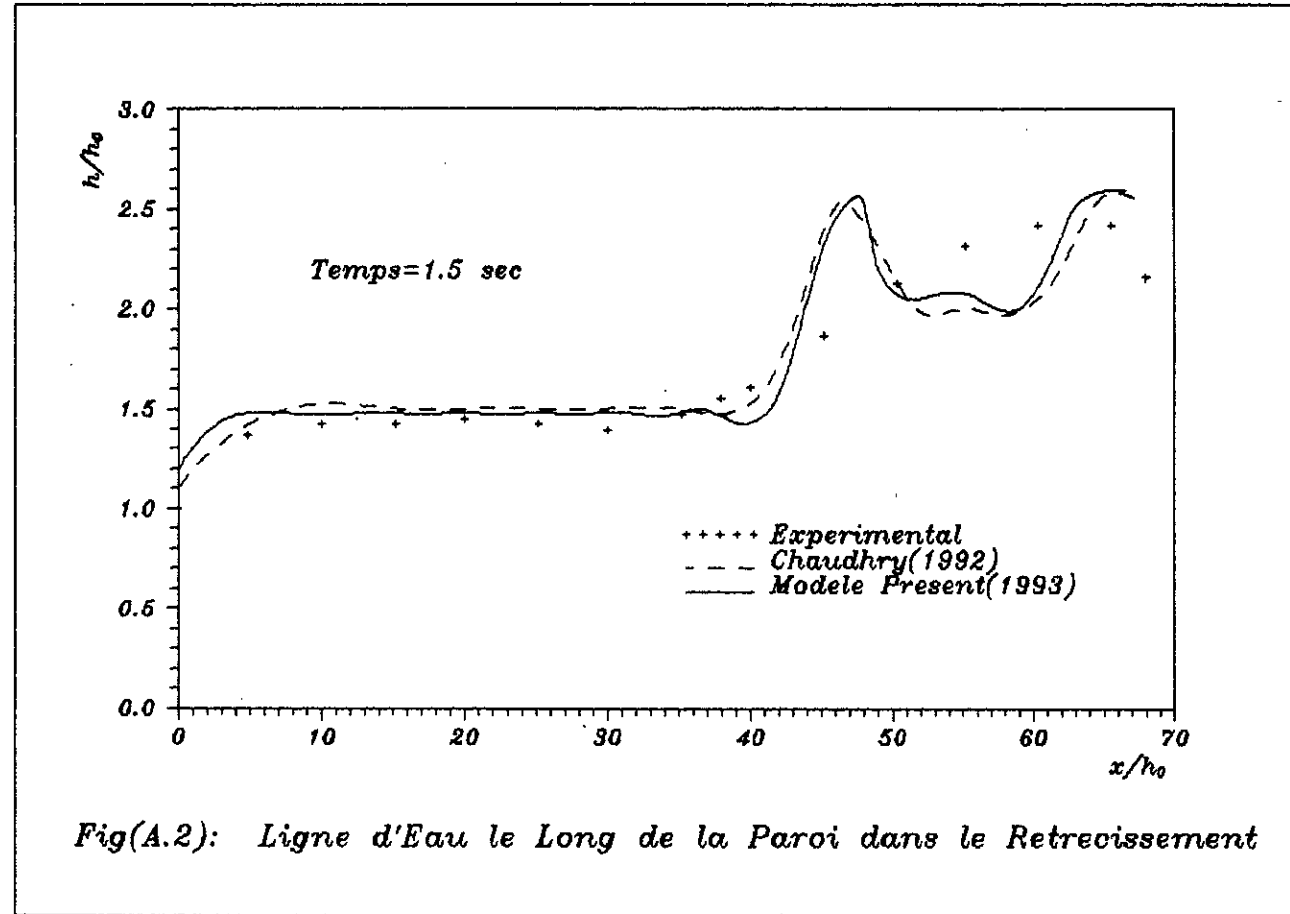
- Sur les figures A.15, A.16, A.17 et A.18 nous représentons la répartition des vitesses pour le rétrécissement étudié ($\theta=6^\circ$).

Resultats & Critiques

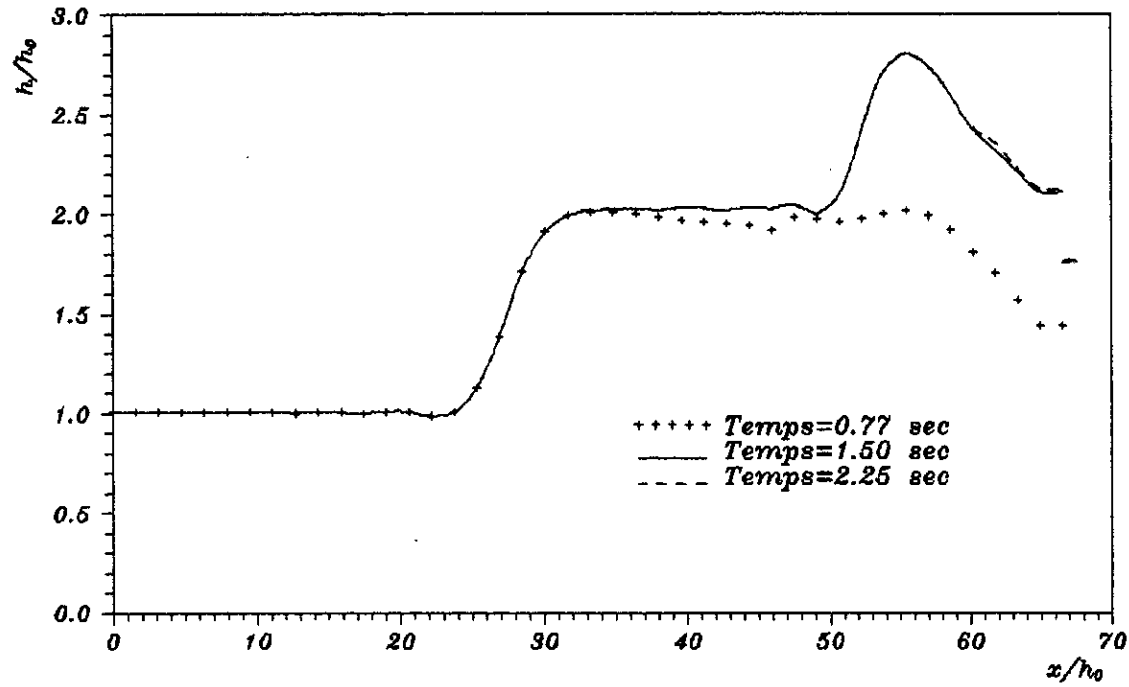


Fig(A.1): Ligne d'Eau le Long de l'axe de l'écoulement dans le Retrecissement

Resultats & Critiques

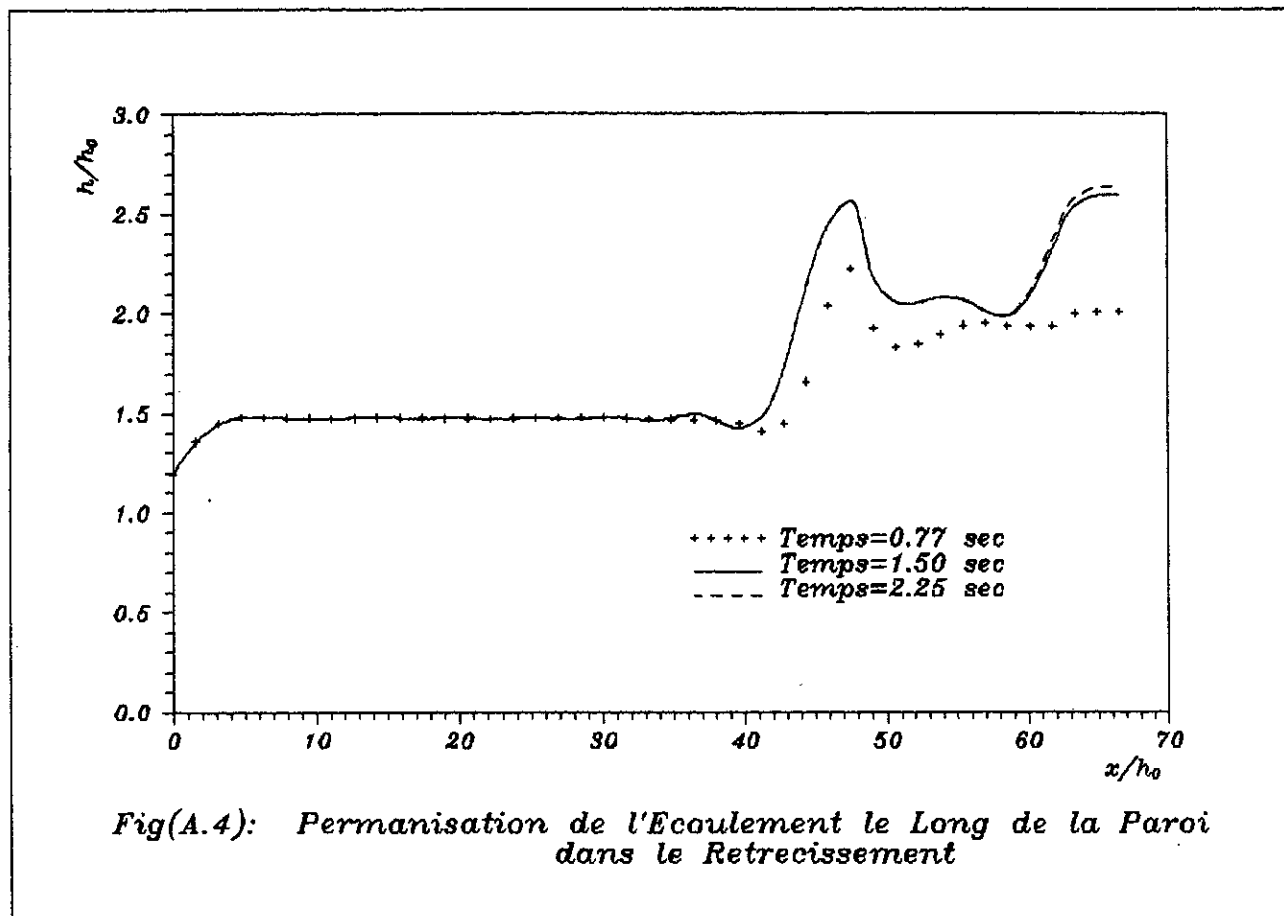


Resultats & Critiques

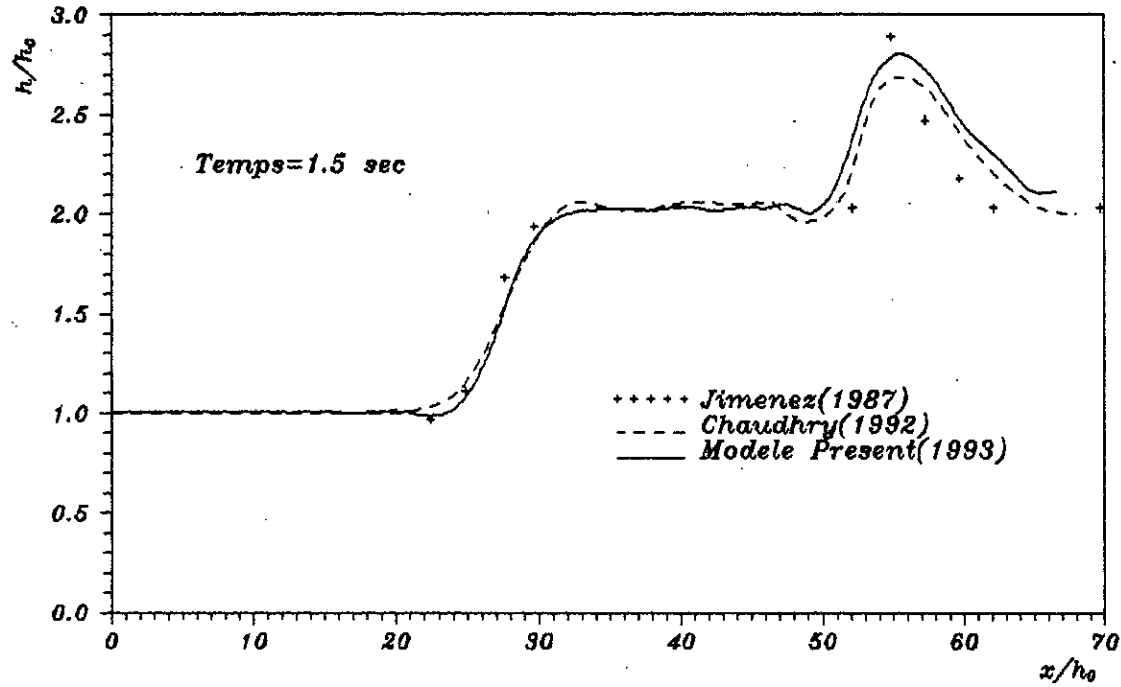


Fig(A.3): Permanisation de l'Ecoulement le Long de l'Axe dans le Retrecissement

Resultats & Critiques



Resultats & Critiques



Fig(A.5): Comparaison entre les Modeles Permanent et non Permanent

Resultats & Critiques

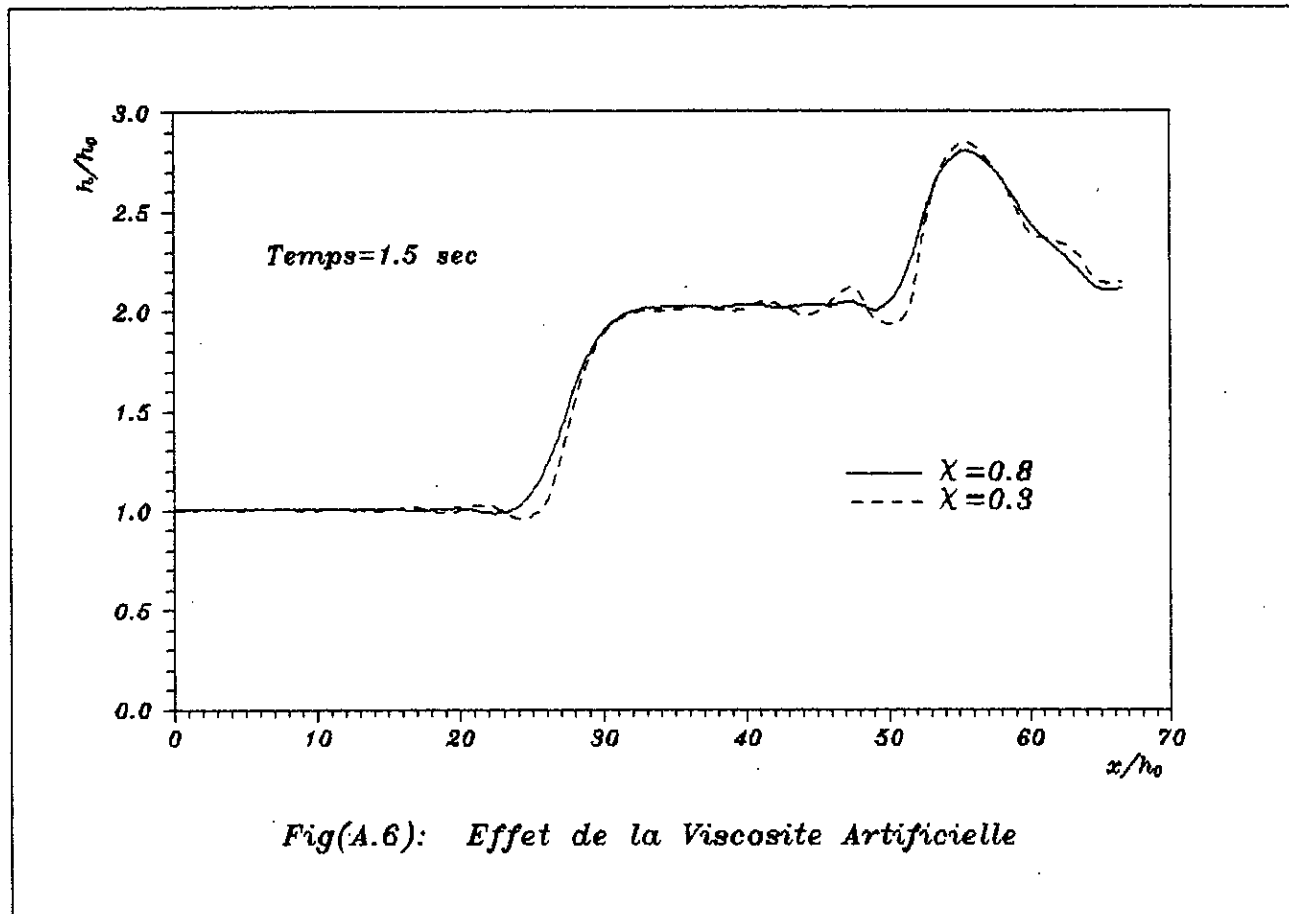


Fig (A7) :
*Représentation Tridimensionnelle
de la Surface Libre dans le Retrecissement*

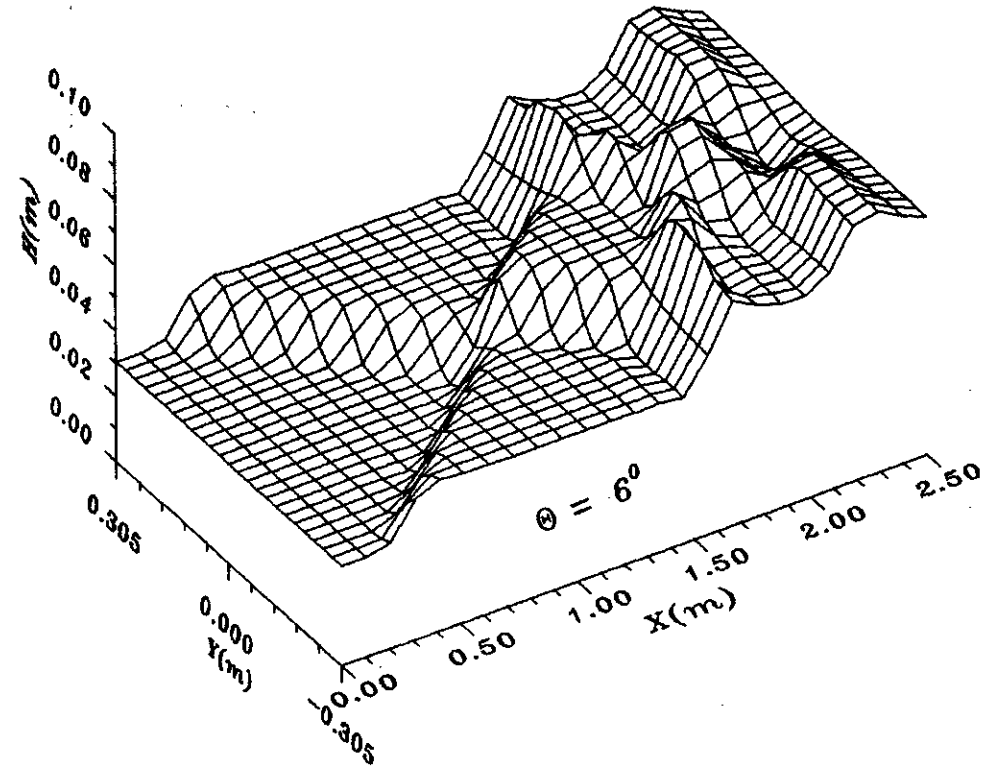
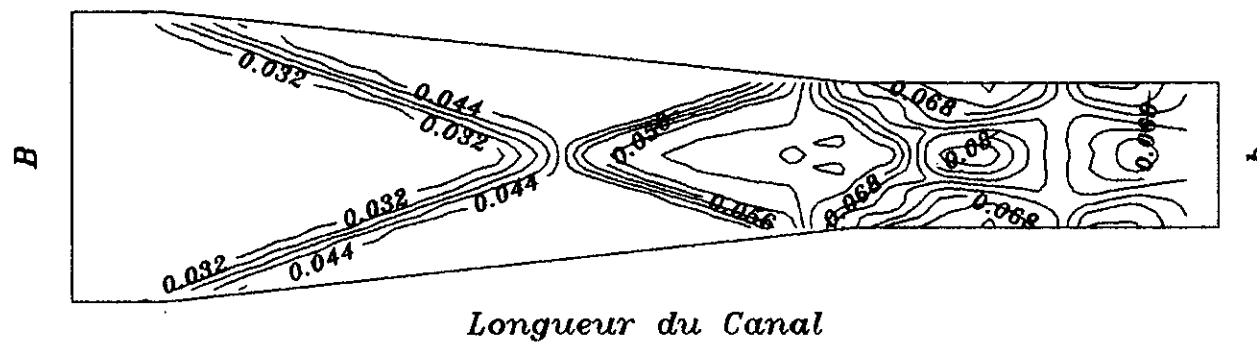
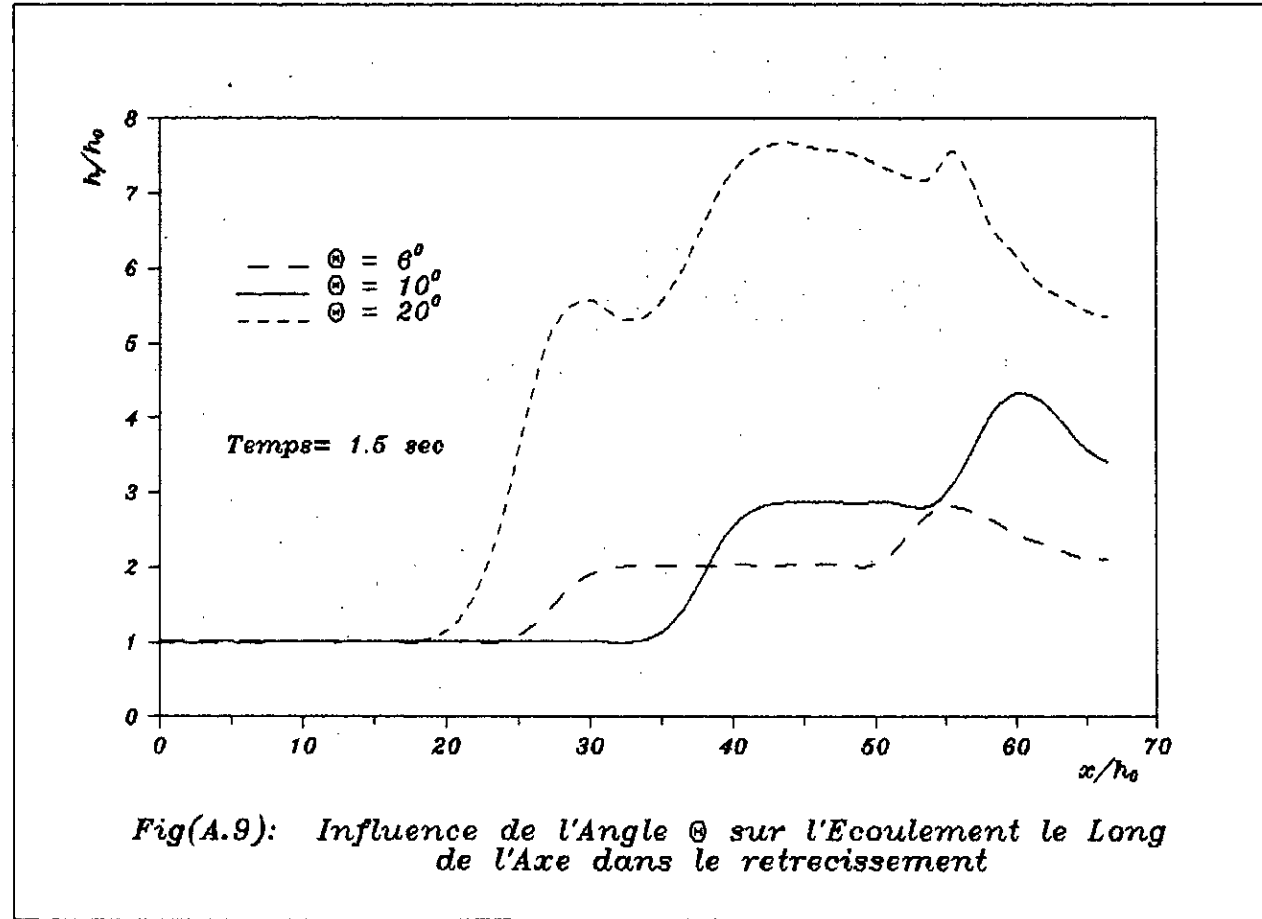


Fig (A8) :
Courbes Iso-Hauteurs de l'Écoulement
dans le Retrecissement
 $\theta = 6^\circ$



Resultats & Critiques



Resultats & Critiques

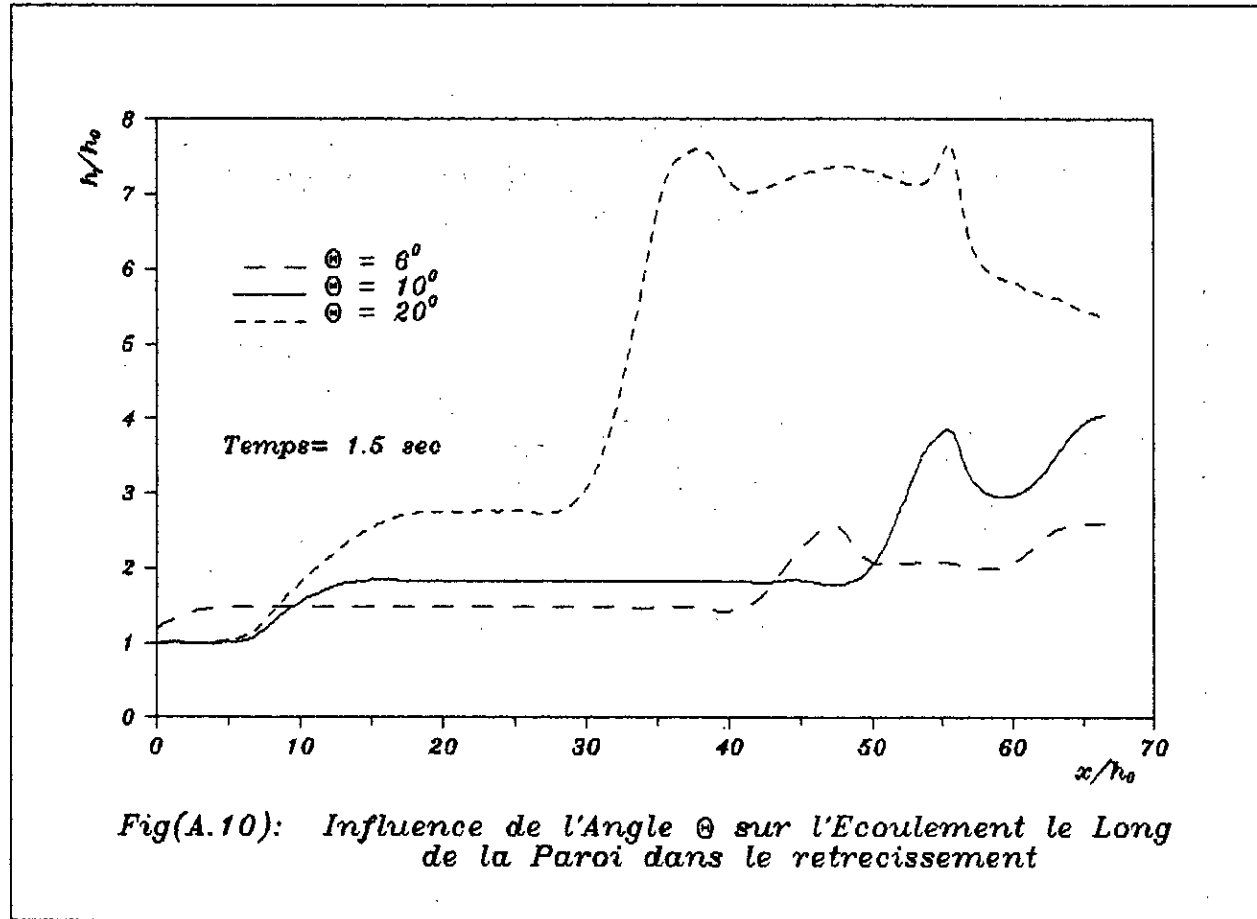


Fig (A11) :
Représentation Tridimensionnelle
de la Surface Libre dans le Retrecissement

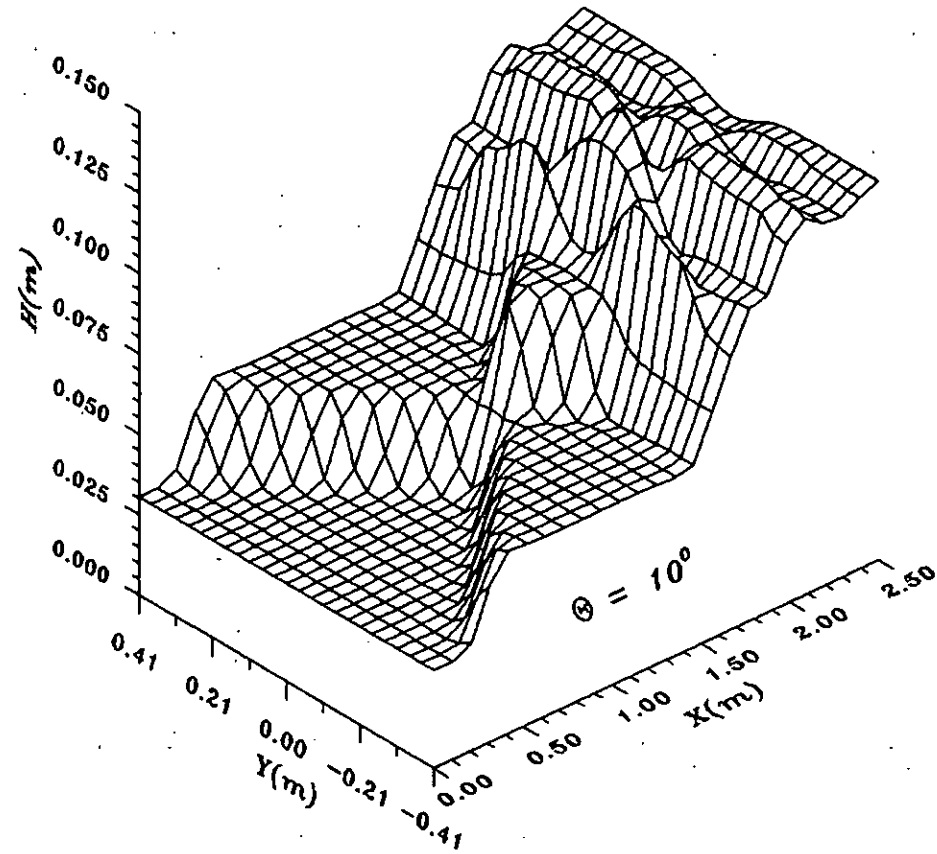


Fig (A12) :
Courbes Iso-Hauteurs de l'Écoulement
dans le Retrecissement

$$\Theta = 10^\circ$$

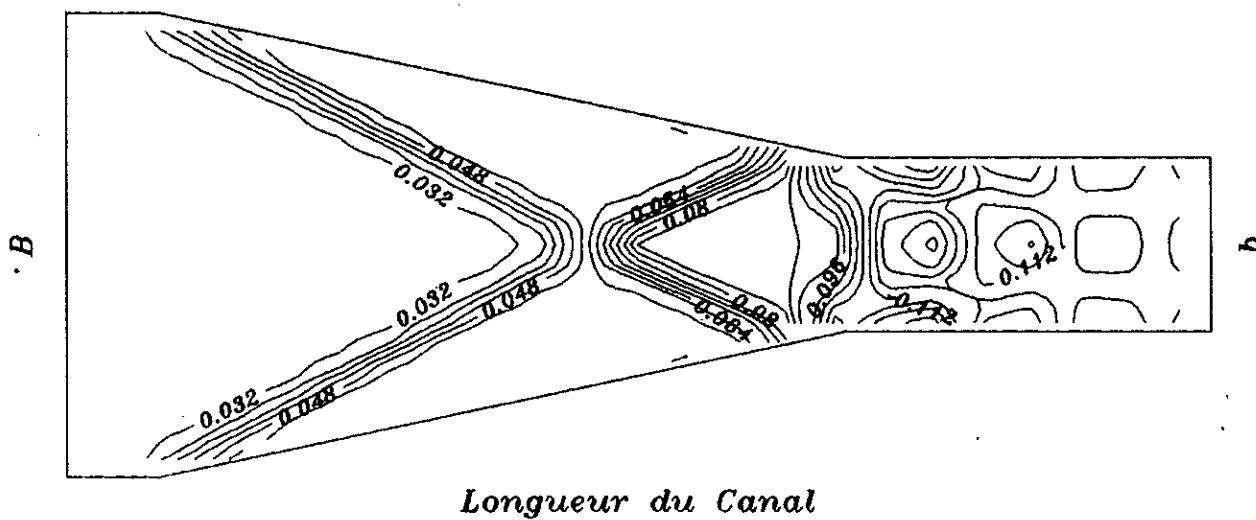


Fig (A13) :
Représentation Tridimensionnelle
de la Surface Libre dans le Retrecissement

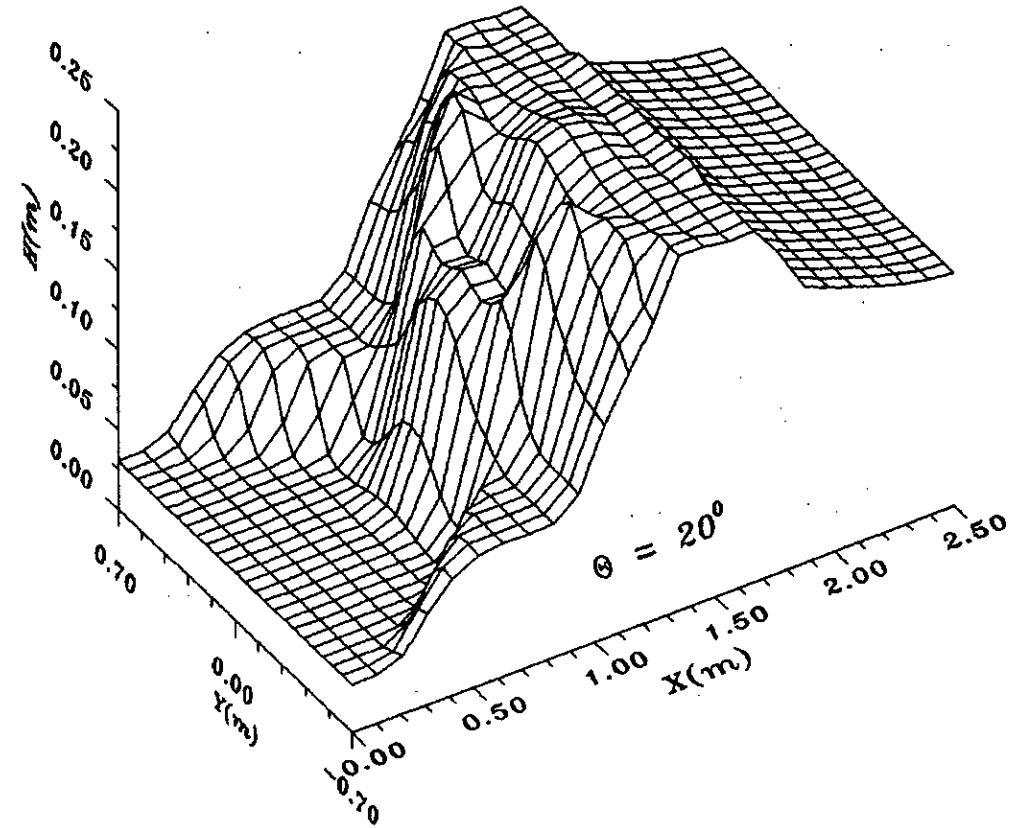
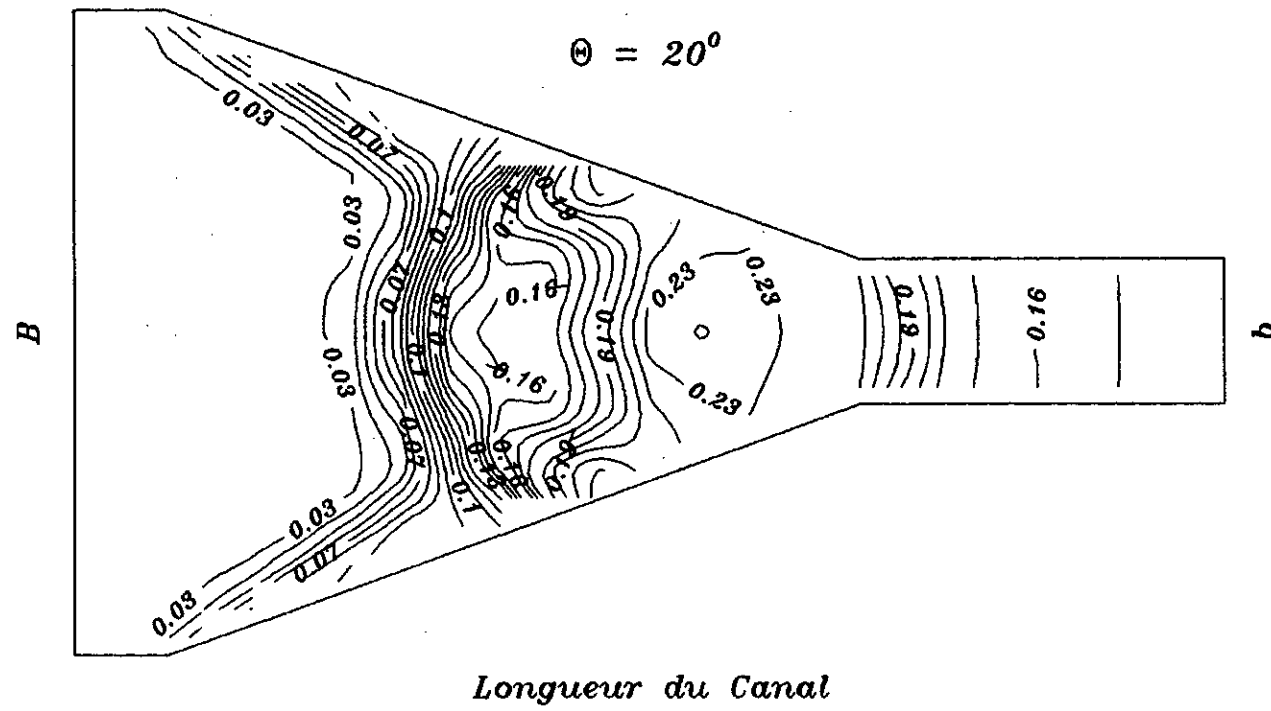
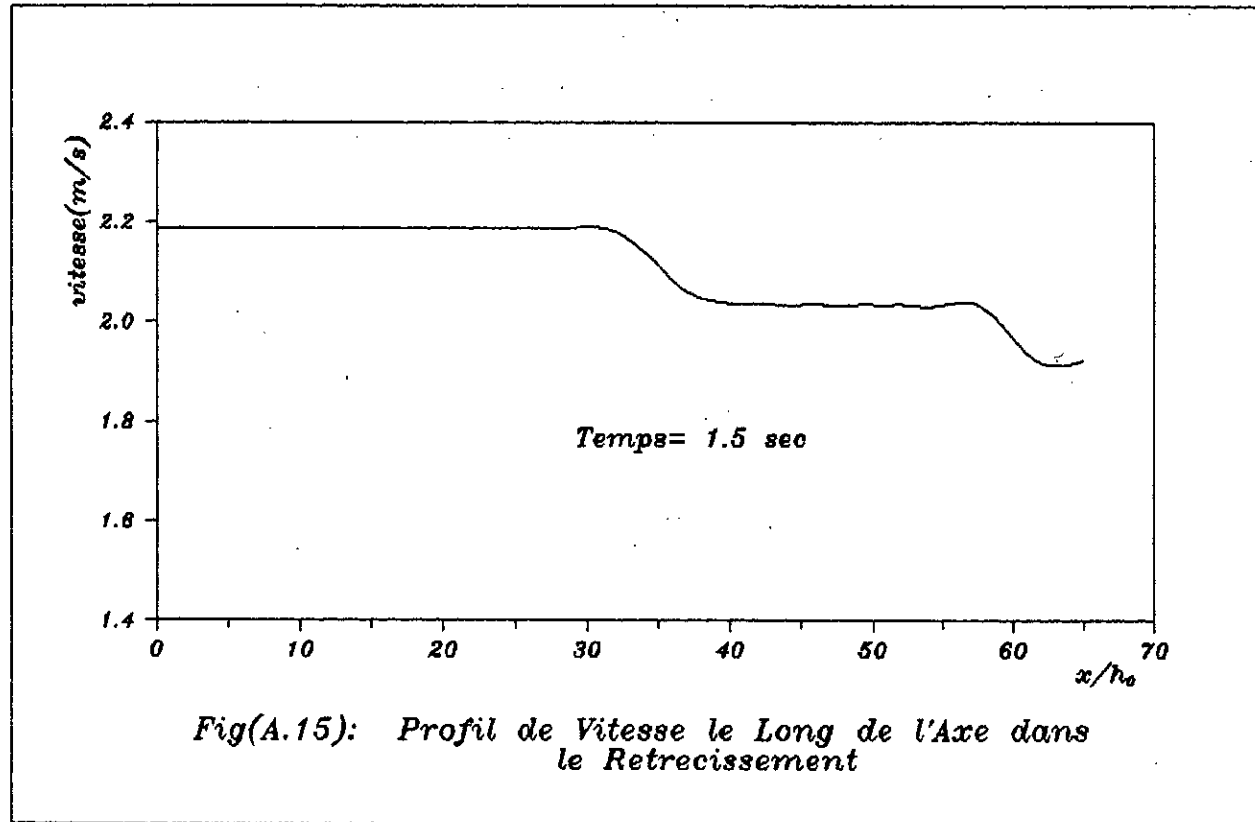


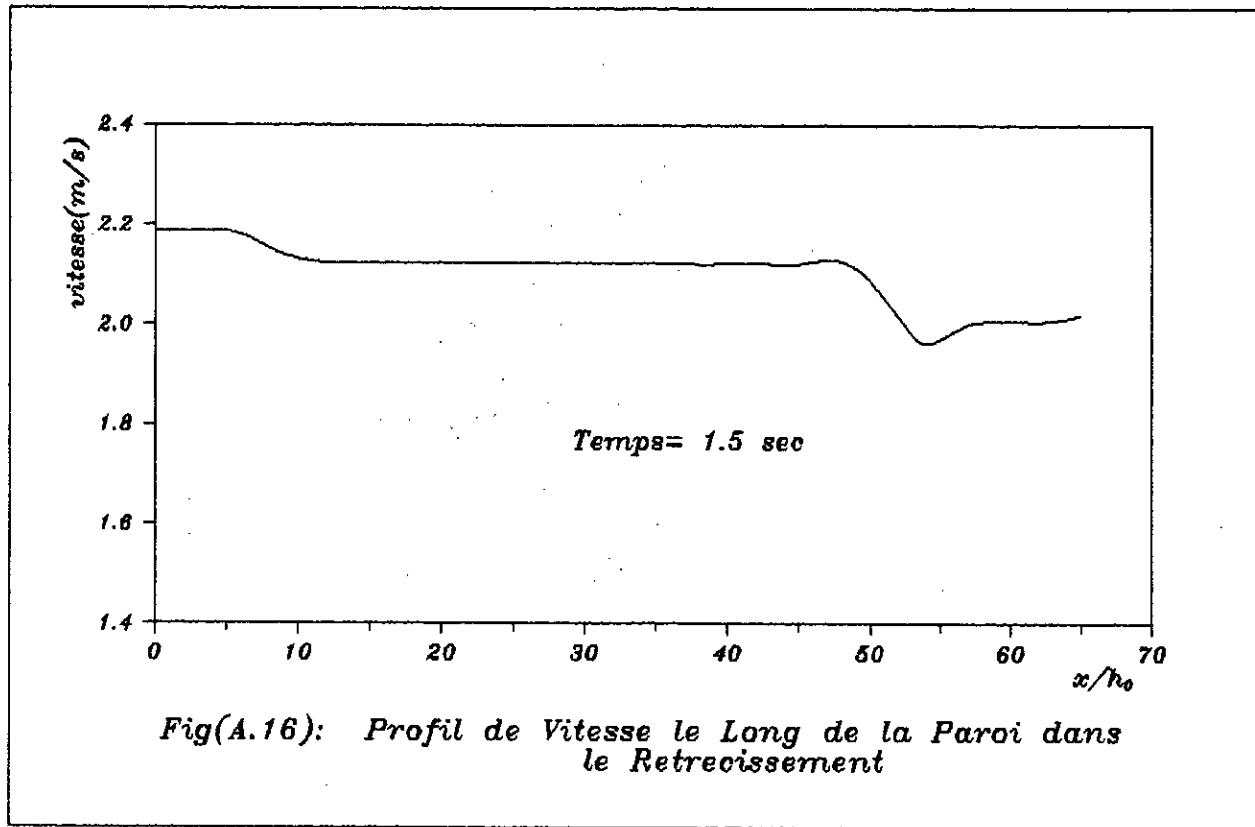
Fig (A14) :
Courbes Iso-Hauteurs de l'Écoulement
dans le Retrecissement



Resultats & Critiques



Resultats & Critiques



Fig(A.16): Profil de Vitesse le Long de la Paroi dans le Retrecissement

Fig (A17) :
Distribution des Modules de Vitesse
dans le Retrecissement

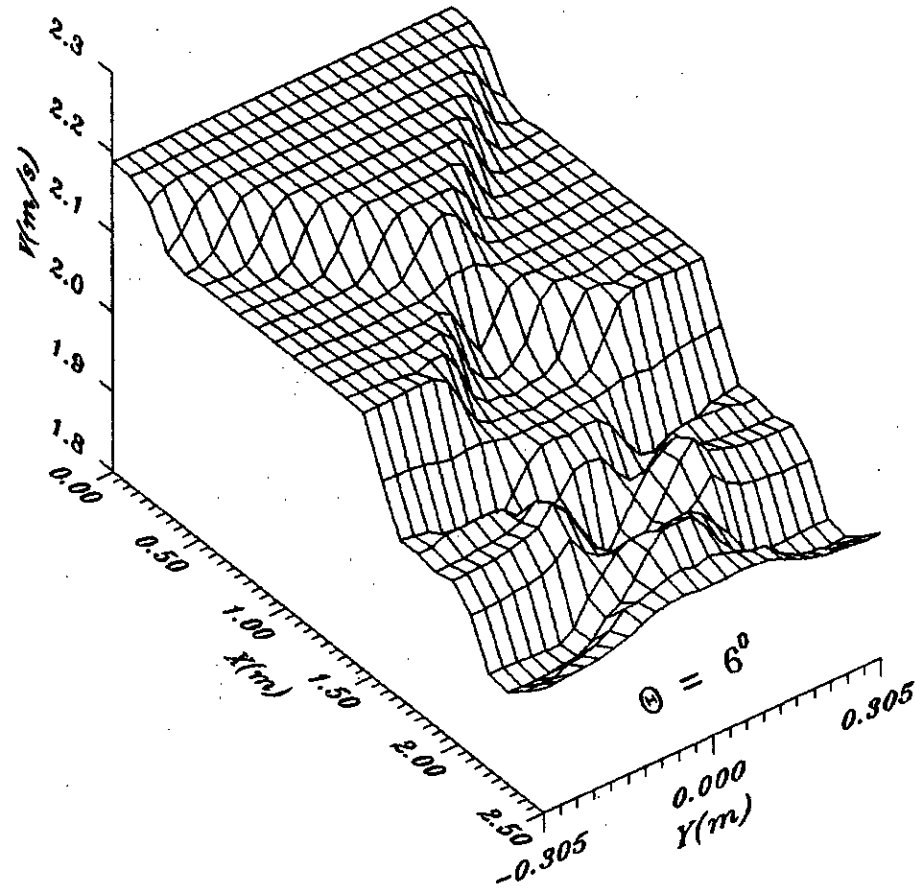
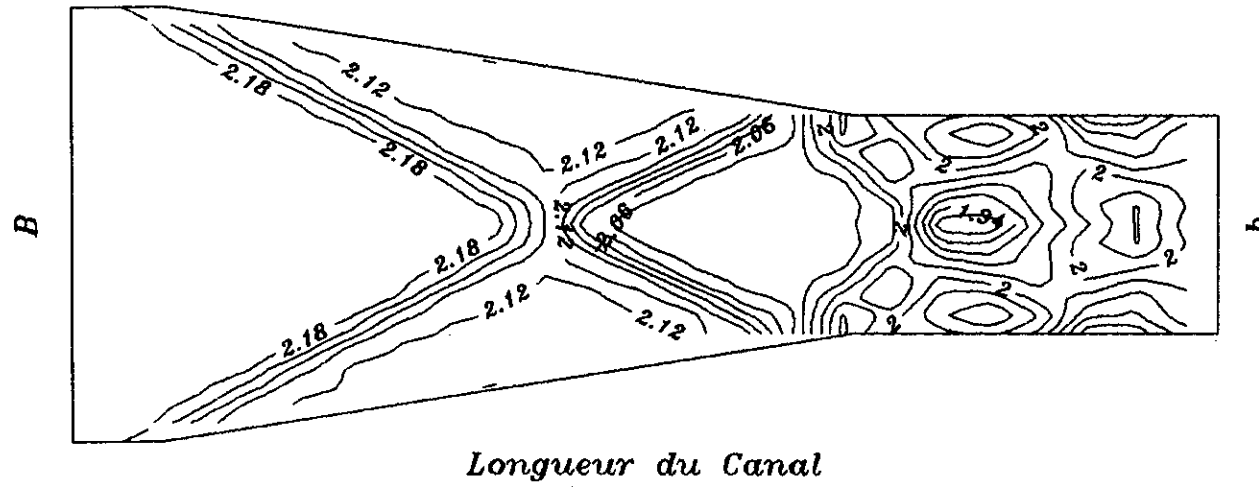


Fig (A18) :
*Courbes Iso-Vitesses de l'Écoulement
dans le Retrecissement*

$$\theta = 6^\circ$$



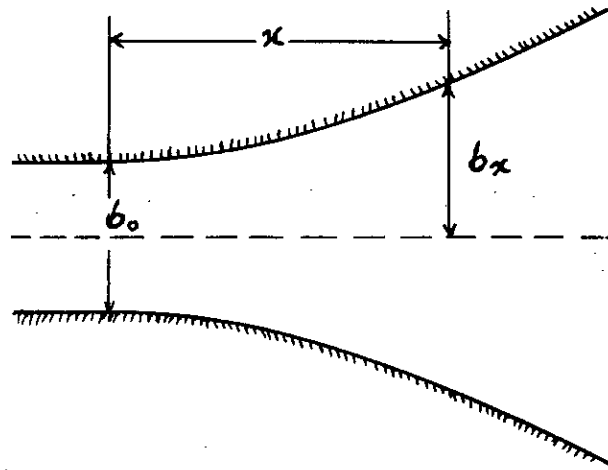
V.B 2^{ème} APPLICATION : ANALYSE DE L'ÉCOULEMENT SUPERCRITIQUE DANS UN ÉLARGISSEMENT PROGRESSIF SYMÉTRIQUE

V.B.1 Déroulement des Calculs

Dans cette 2^{ème} application, nous analysons un écoulement supercritique dans un élargissement progressif à section transversale rectangulaire dont les dimensions sont données dans la figure B.

L'équation donnant la forme de l'élargissement est donnée, comme indiqué dans le chapitre II, par:

$$b_x = \frac{b_o}{2} \left[\frac{x}{b_o F_o} \right]^{1.5} + \frac{b_o}{2}$$



Fig(B)

Les conditions aux limites de l'écoulement dans ce canal sont telles que:

- Le tirant d'eau à l'amont est $h_0 = 0.0305$ m.
- Le nombre de Froude à l'amont est $F_0 = 2$
- La vitesse transversale à l'amont est $v_0 = 0$ m/s
- Le coefficient de MANNING $n = 0.012$
- La pente de fond est supposée nulle.
- Le rapport profondeur-largeur est $h_0/b_0 = 0.25$

Nous utilisons un maillage en prenant les pas d'espace:

$$\Delta X = 0.0305 \text{ m.}$$

$$\Delta Y = 0.0476$$

Pour les problèmes de stabilité et d'oscillation nous avons adopté après des essais numériques les coefficients suivants:

- Le coefficient de dissipation est $\mathcal{X} = 0.3$
- Le nombre de Courant est $C_n = 0.9$

La profondeur $h_0 = 0.0305 \text{ m}$, la vitesse longitudinale $u = 1.094 \text{ m/s}$, et la vitesse transversale $v = 0 \text{ m/s}$ sont adoptées comme conditions initiales et sont spécifiées en tous les points du maillage.

V.B.2 Résultats et Critiques

Les résultats que nous obtenons dans cette deuxième application sont indiqués sur les figures B.1 et B.2; celles-ci nous montrent comme dans l'application précédente, le profil en long de

la surface libre le long de l'axe médian et le long de la paroi du divergent.

Pour cette deuxième application on peut remarquer que:

- Nos résultats concordent suffisamment bien avec les résultats expérimentaux, aussi bien au niveau de l'axe médian qu'au niveau du mur. On peut donc en conclure que l'hypothèse d'une répartition hydrostatique des pressions est cette fois-ci respectée.

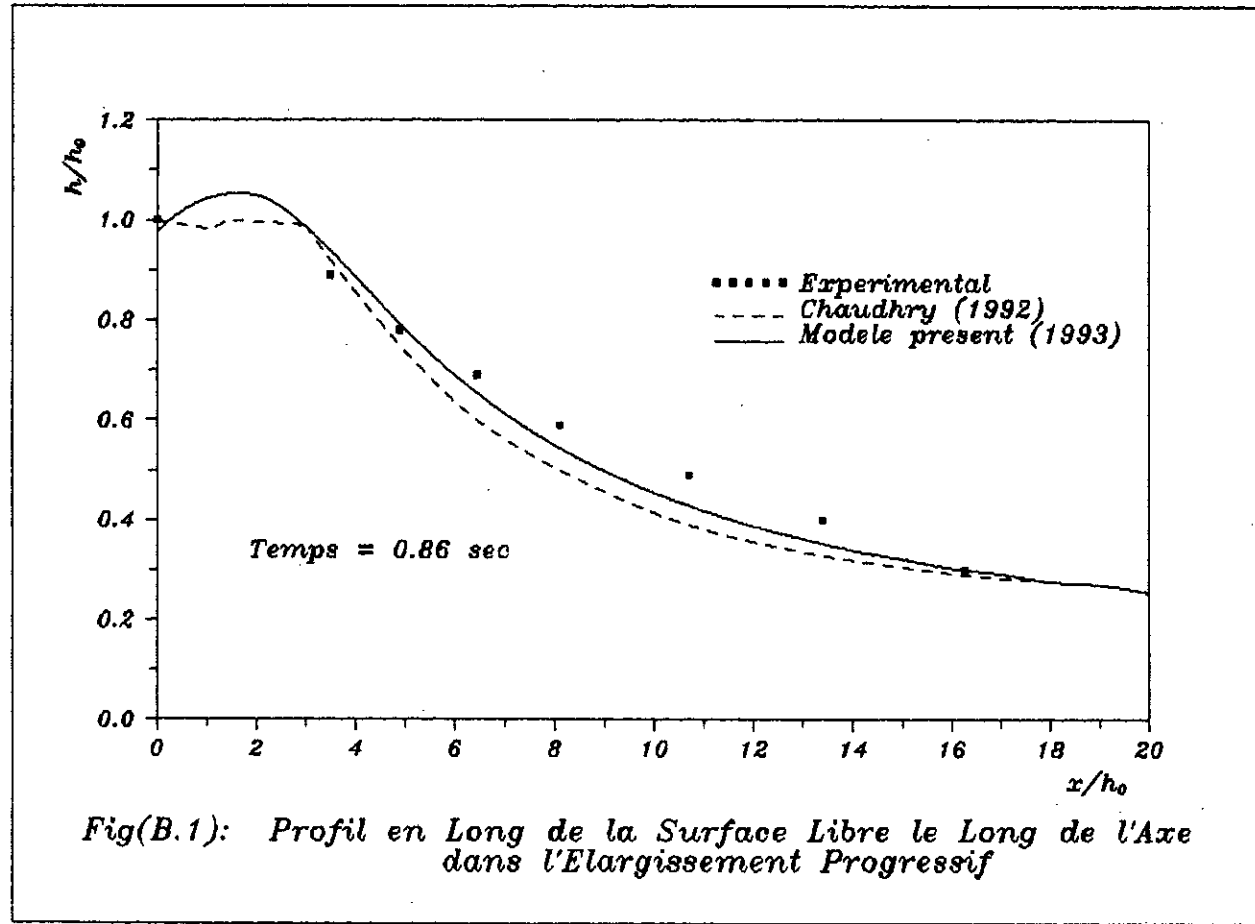
- Comme le montre si bien les figures B.5 et B.6, aucune perturbation (choc) n'est à signaler dans le divergent étudié, ce qui était prévisible.

Nous présentons aussi d'autres résultats intéressants que nous commentons ci-dessous :

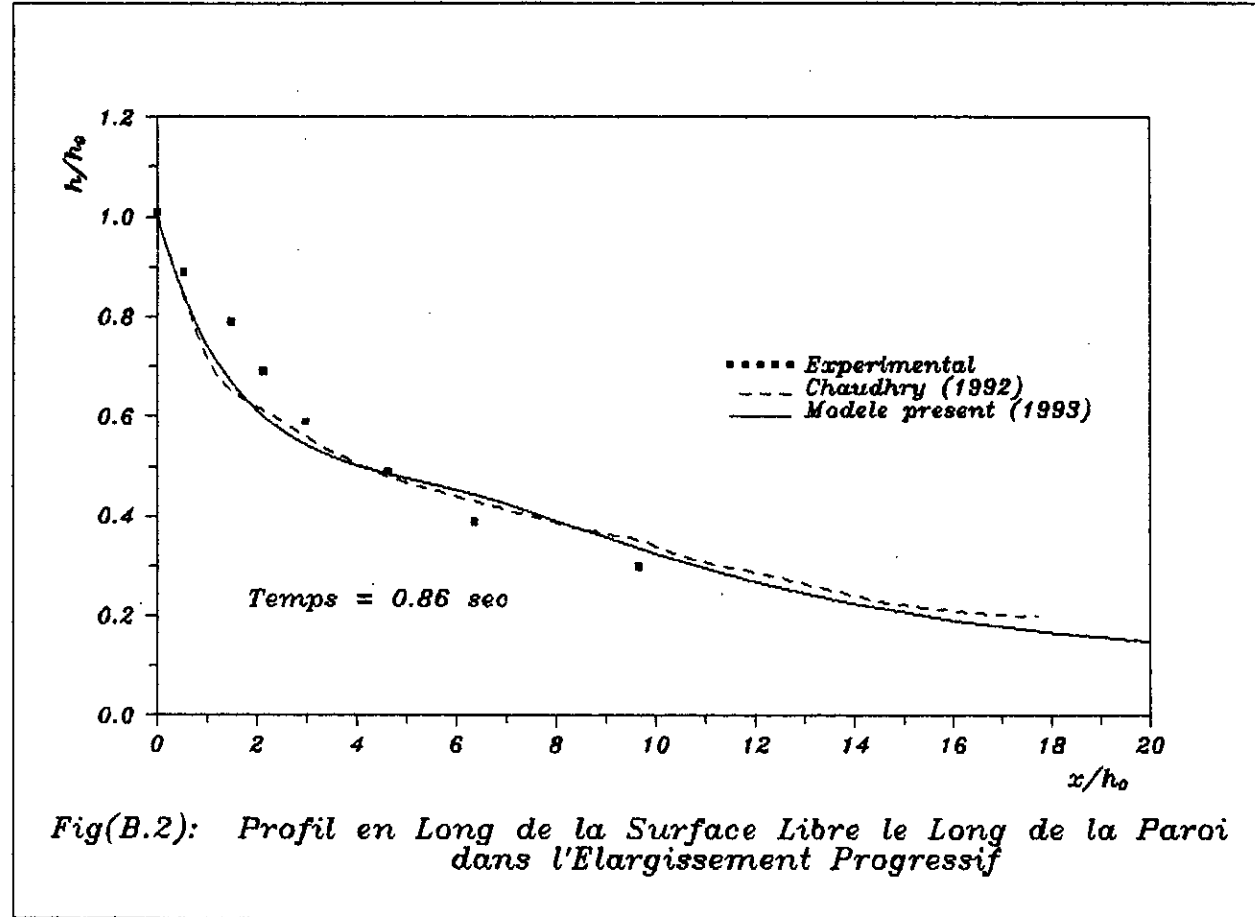
- Les figures B.3, B.4, B.9 et B.10 indiquent respectivement le temps de permanisation du profil de la surface libre et des vitesses.

- Les figures B.7 et B.8 indiquent respectivement la valeur des vitesses le long de l'axe médian et le long des parois du canal et enfin une représentation tridimensionnelle et plane (figures B.11 et B.12) du profil des vitesses.

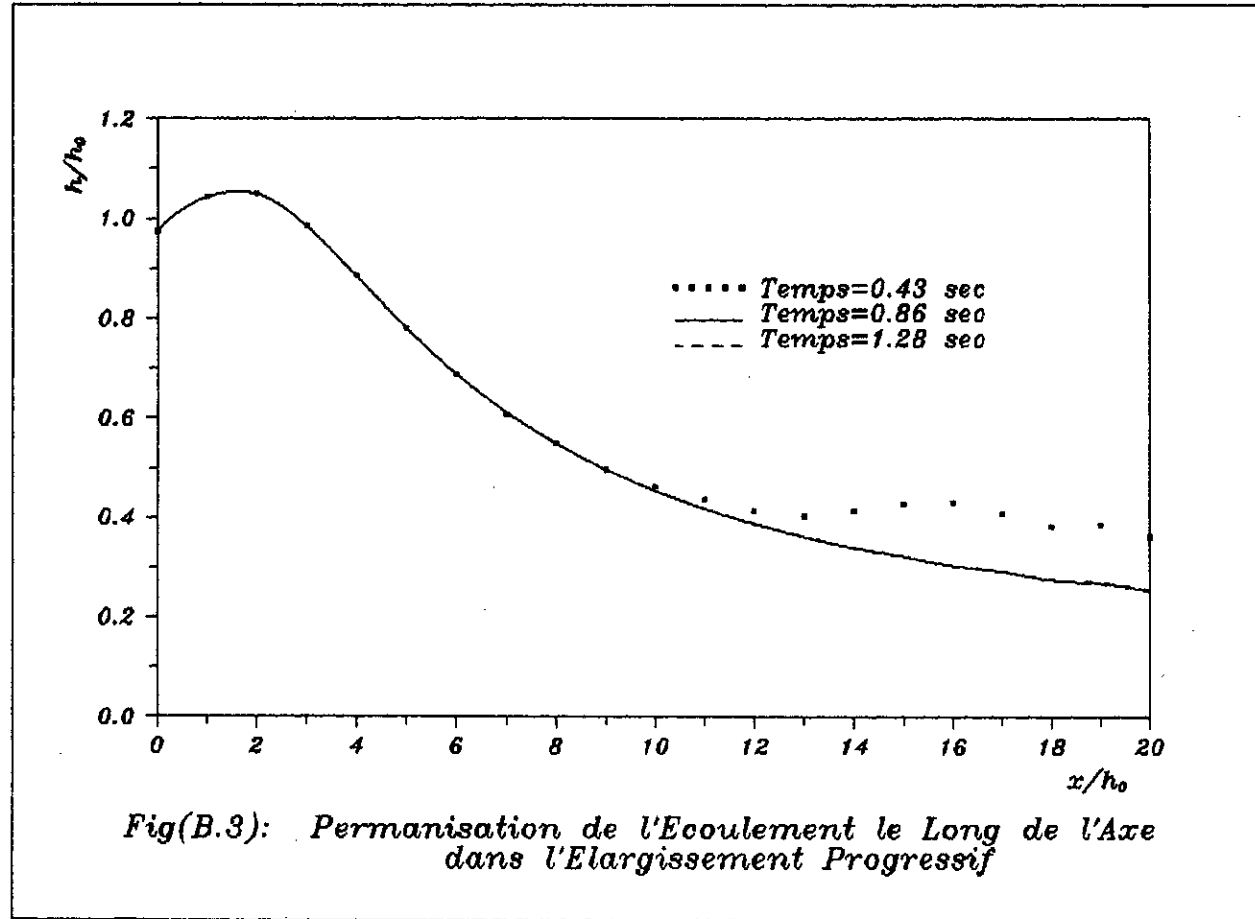
Resultats & Critiques



Resultats & Critiques



Resultats & Critiques



Resultats & Critiques

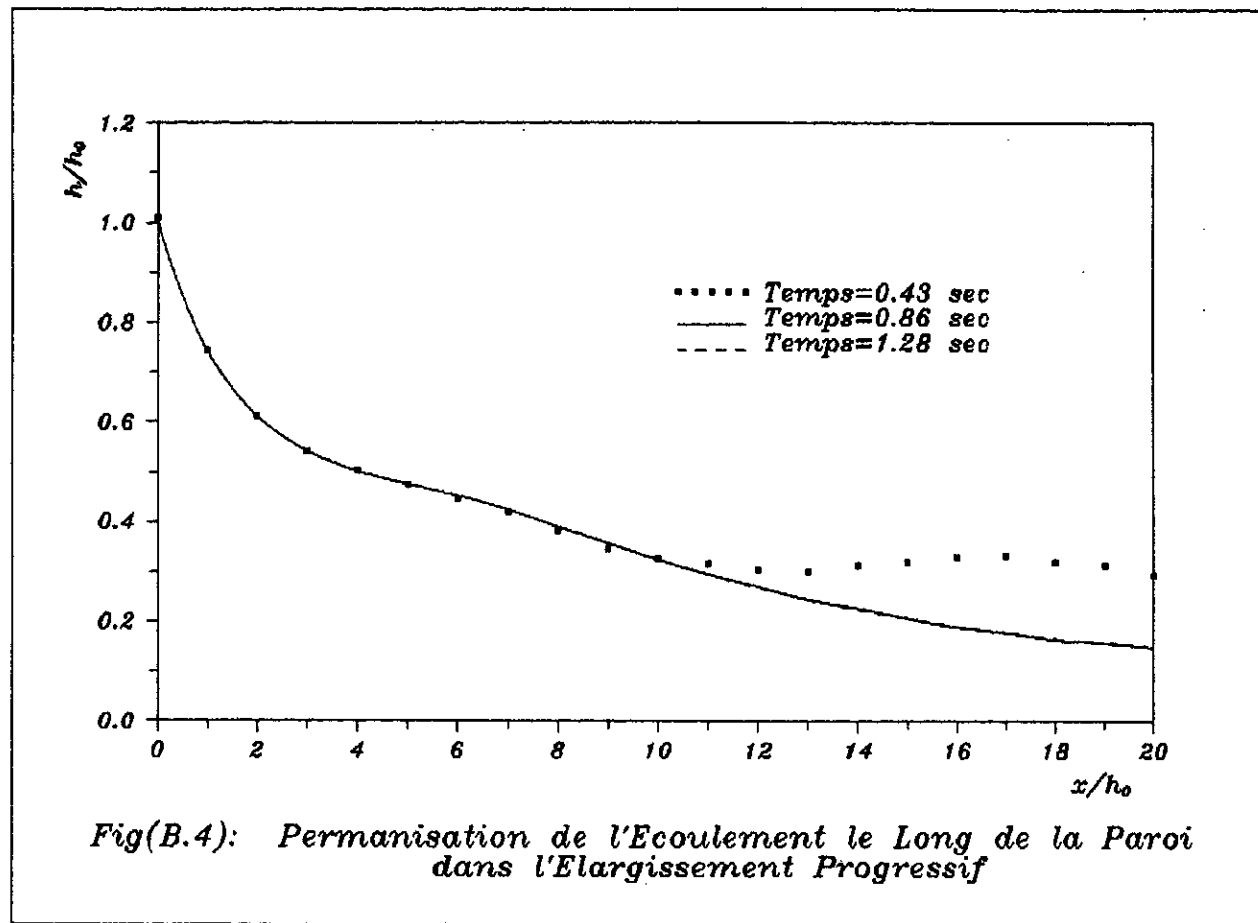


Fig (B5) :
Representation Tridimensionnelle
de la Surface Libre dans
l'Elargissement Progressif

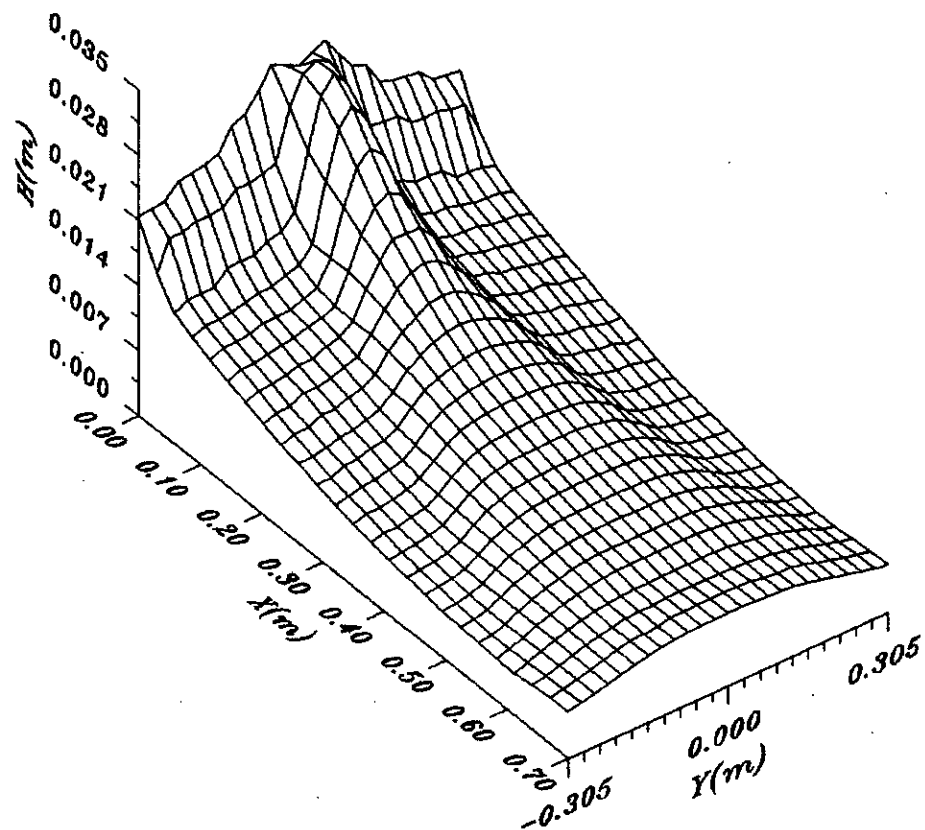
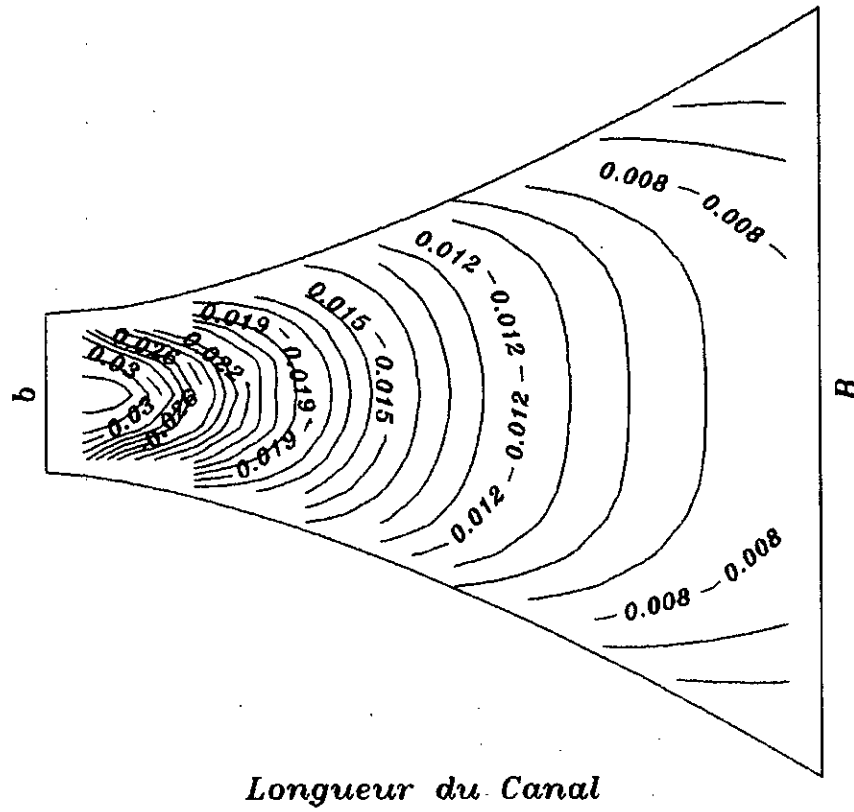
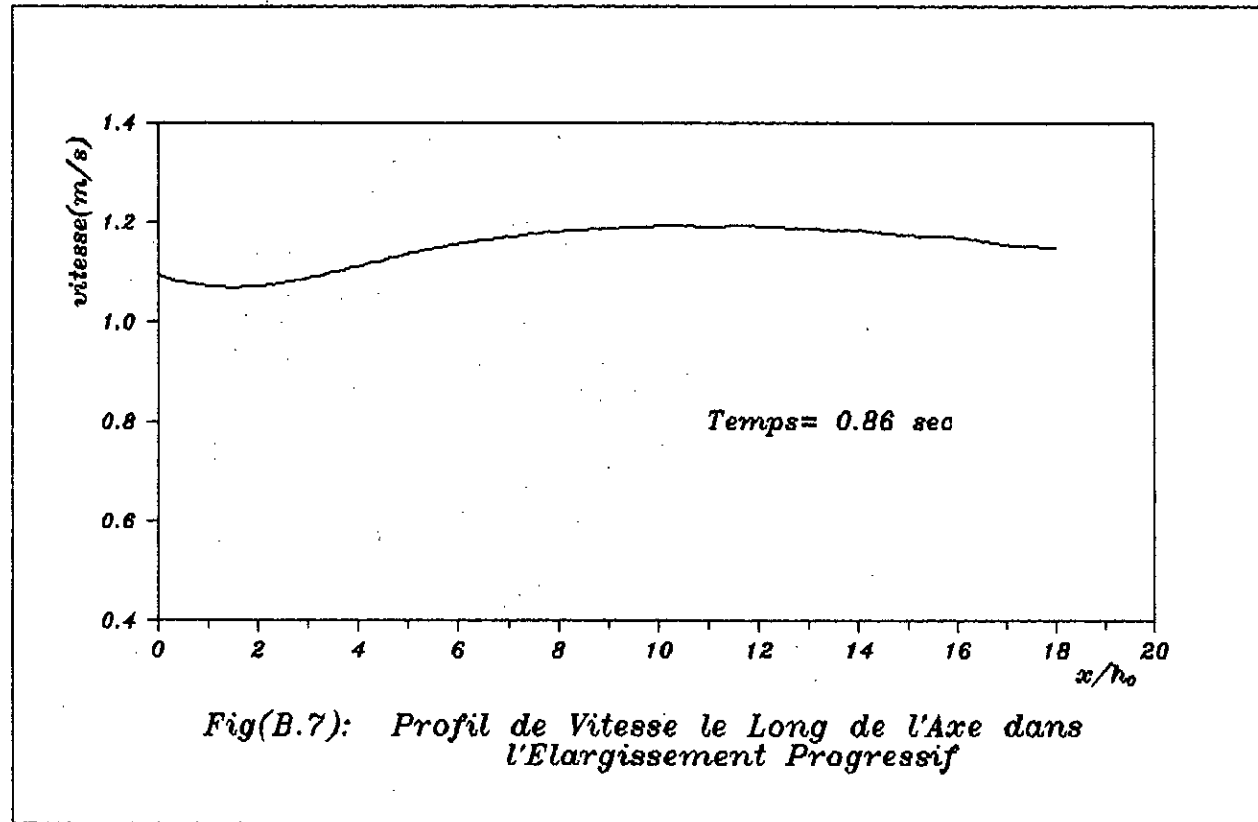


Fig (B6) :
Courbes Iso-Hauteurs de l'Écoulement
dans l'Élargissement Progressif

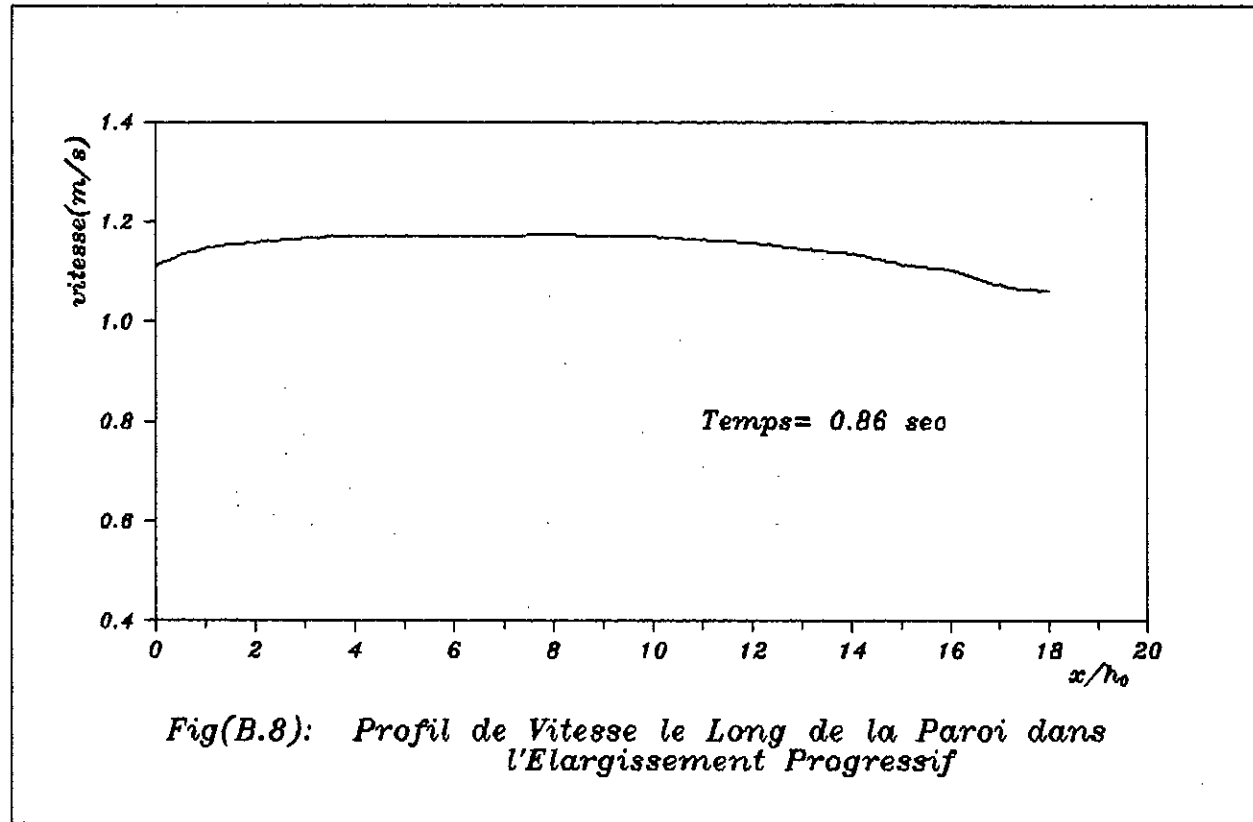


Resultats & Critiques

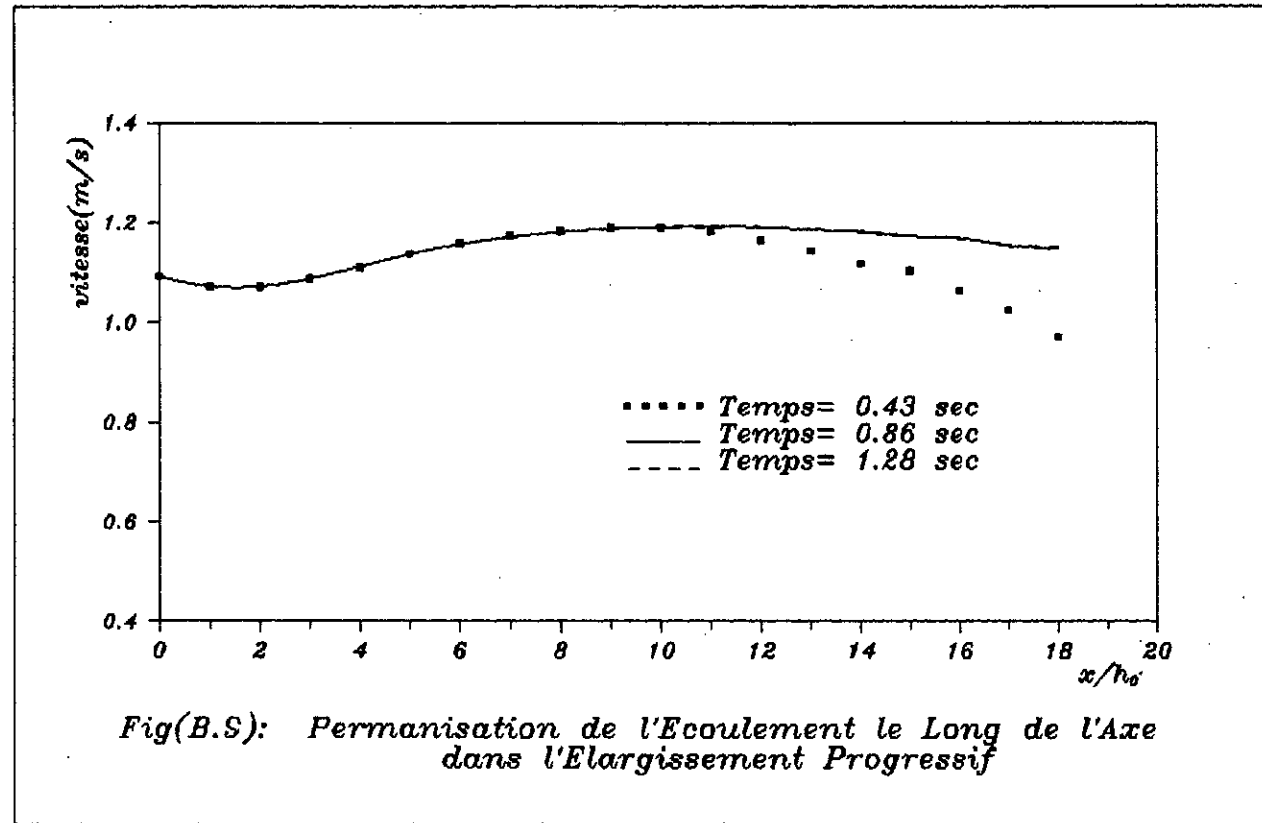


Fig(B.7): Profil de Vitesse le Long de l'axe dans l'Elargissement Progressif

Resultats & Critiques



Resultats & Critiques



Resultats & Critiques

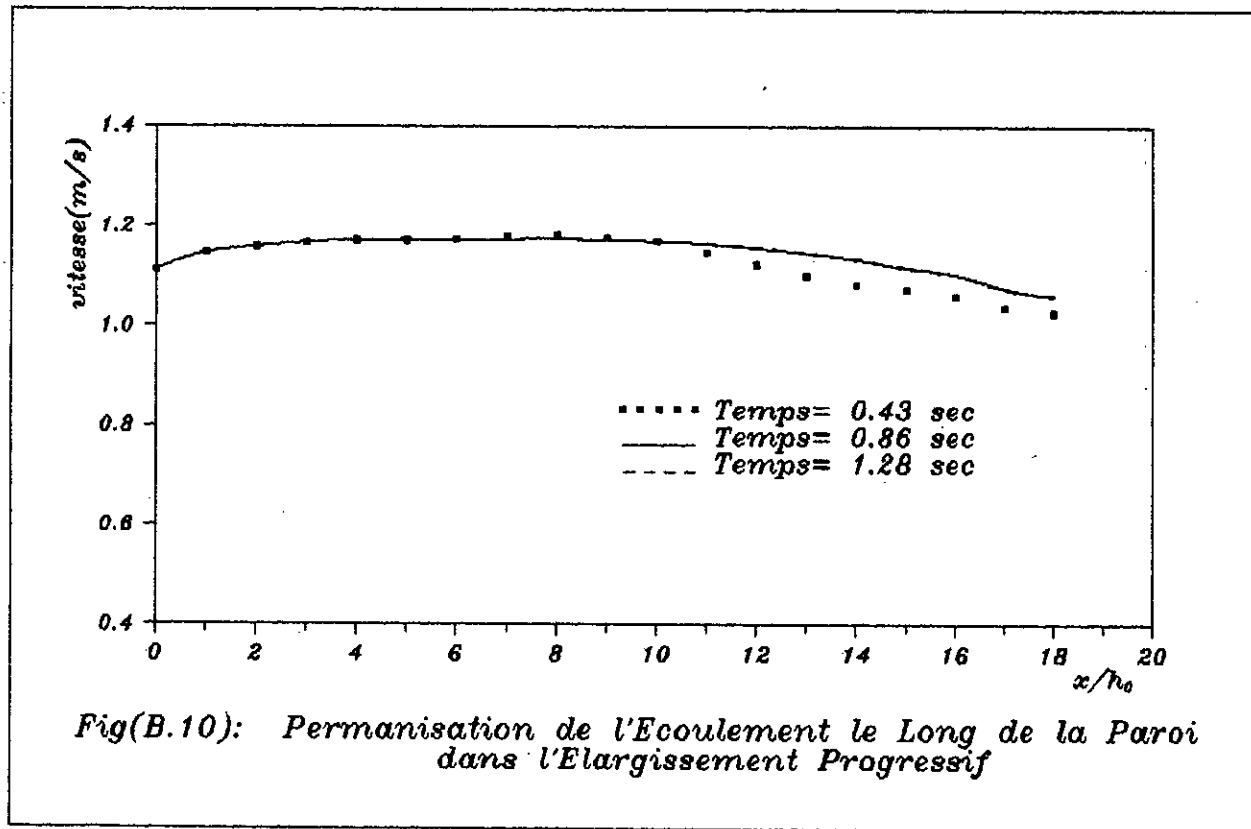


Fig (B.11) :
Distribution des Modules de Vitesse
dans l'Elargissement Progressif

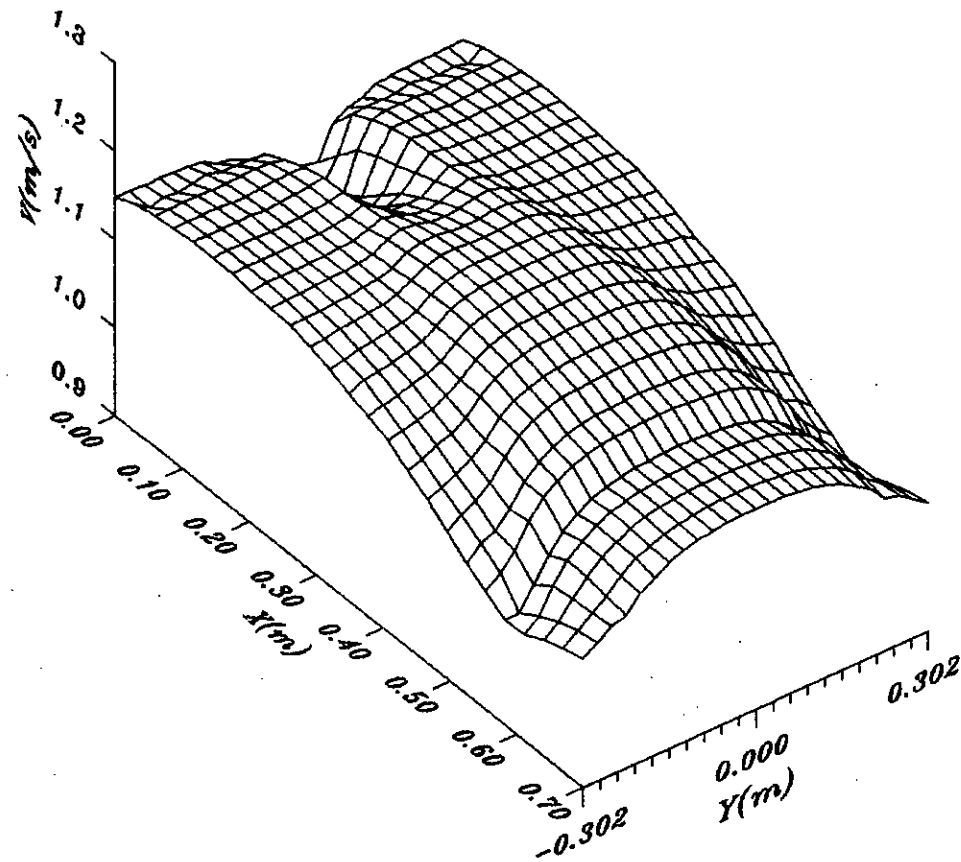
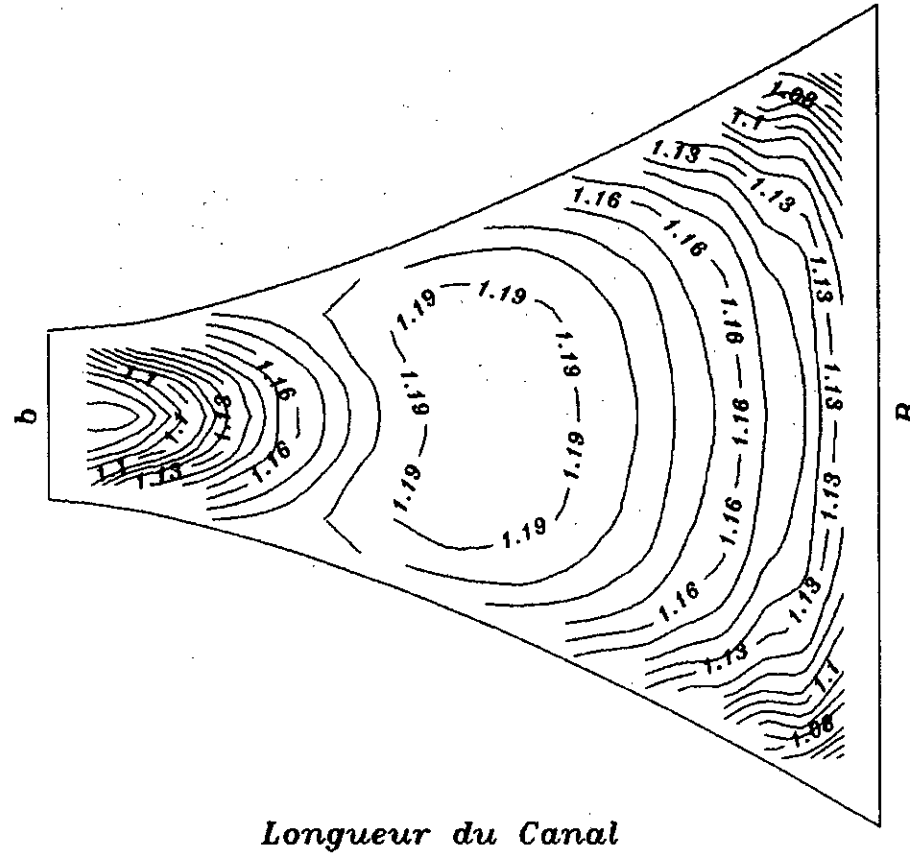


Fig (B.12) :
Courbes Iso-Vitesses de l'Écoulement
dans l'Élargissement Progressif



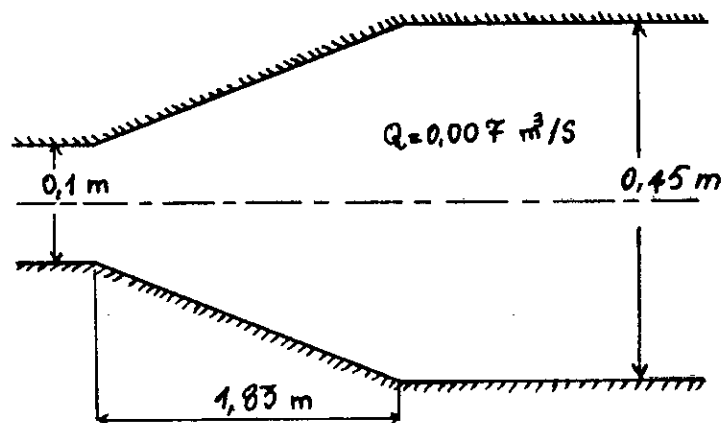
V.C 3^{ème} APPLICATION : RESSAUT HYDRAULIQUE DANS UN ELARGISSEMENT RECTILIGNE

V.C.1 Déroulement des Calculs

Dans cette 3^{ème} application nous montrons la validité de notre modèle à prendre en compte des écoulements mixtes supercritiques et subcritiques.

Nous allons donc analyser la formation d'un ressaut hydraulique dans un élargissement rectiligne

Les dimensions du canal sont indiquées sur la figure C ci-dessous:



Fig(C)

Les conditions aux limites de l'écoulement dans ce canal sont les suivantes:

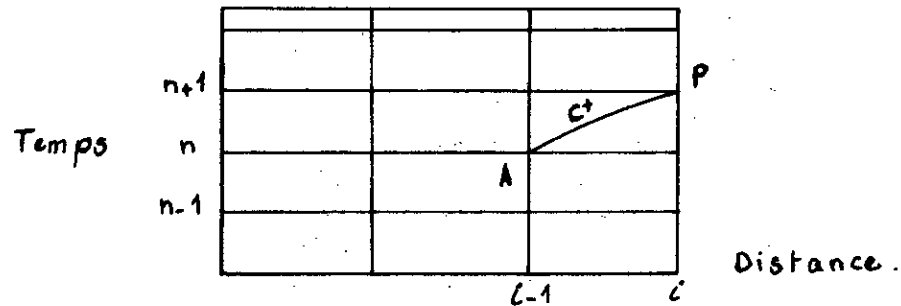
- Le tirant d'eau à l'amont est = 0.06 m
- Le tirant d'eau à l'aval est = 0.07 m
- Un débit $Q = 0.007 \text{ m}^3/\text{s}$
- Un nombre de Froude à l'amont $F = 1.52$
- Une vitesse transversale à l'amont $v = 0 \text{ m/s}$.
- Un nombre de Froude à l'aval $F = 0.268$
- Une pente de fond $S_{ox} = 0.00017$
- Un coefficient de MANNING $n = 0.015$.

On utilisera

- Un maillage avec des pas d'espace $\Delta X = 0.15 \text{ m}$. et $\Delta Y = 0.0476$
- Un coefficient de dissipation $\chi = 0.003$
- Un nombre de Courant $C_n = 0.9$

La profondeur $h = 0.07 \text{ m}$, la vitesse longitudinale $u = 0.222 \text{ m/s}$, et la vitesse transversale $v = 0 \text{ m/s}$ sont adoptées comme conditions initiales et sont spécifiées en tous les points du maillage.

La profondeur h est déterminée par l'équation caractéristique positive (61).



$$u_P - u_A + (g/c)_A (h_P - h_A) = g(S_o - S_F)_A \Delta t$$

où $c = \sqrt{gh}$

V.C.2 Résultats et Critiques

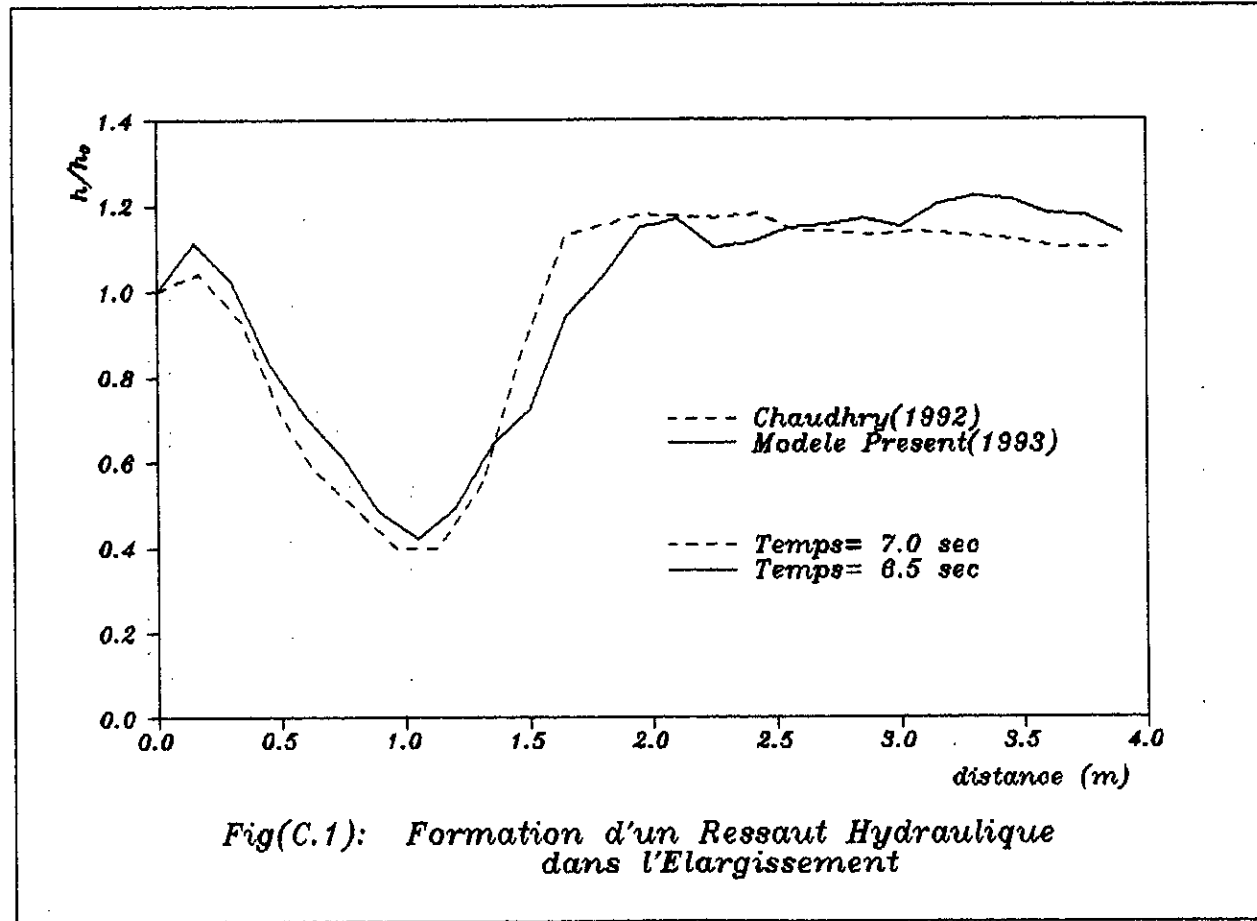
Avec les conditions d'écoulements précédentes nous représentons nos résultats sur la figure C.1.

Cette figure nous montre la formation d'un ressaut hydraulique, ce qui est théoriquement vérifié puisque l'écoulement

passé du régime supercritique au régime subcritique.

A partir des résultats obtenus, nous remarquons aussi que notre modèle approche bien celui de CHAUDHRY₍₇₎.

Resultats & Critiques



Fig(C.1): Formation d'un Ressaut Hydraulique dans l'Elargissement

CONCLUSION

GENERALE

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Dans cette étude nous avons présenté un modèle mathématique bidimensionnel pour simuler et analyser des écoulements dans des zones de transitions.

Nous avons utilisé un modèle en régime non permanent pour obtenir des résultats à l'état permanent.

On peut obtenir des résultats satisfaisants, si la prise en compte des conditions aux limites au niveau des parois est précise. Pour cela il est nécessaire d'utiliser une transformation adéquate qui convertit le domaine physique en un domaine de calcul rectangulaire.

Les résultats que nous avons obtenus à partir des trois applications traitées, prouvent que notre modèle est efficace pour simuler les écoulements à l'état permanent.

Ainsi nous avons remarqué que les chocs, s'ils existent, sont bien pris en compte par le modèle; il nous donne une bonne idée sur

CONCLUSION GENERALE

la position, la direction et la forme du choc.

Le calcul de la ligne d'eau le long des parois du canal convergent (1^{ère} application) donne des résultats satisfaisants bien que ce ne soit pas le cas pour l'axe médian du canal où l'hypothèse d'une distribution hydrostatique des pressions n'est plus valide (présence du choc). Par conséquent le modèle peut être utilisé avec confiance dans la conception des parois du canal.

Les résultats que nous obtenons dans l'étude de l'écoulement supercritique dans le divergent graduelle, sont très satisfaisants aussi bien au niveau de la paroi qu'au niveau de l'axe médian du canal.

Le modèle nous a aussi prouvé qu'il pouvait traiter des écoulements mixtes supercritiques et subcritiques.

Nous pouvons dire alors que nous avons atteint le but que nous nous étions fixé: réaliser un modèle mathématique capable de simuler des écoulements supercritiques et mixtes dans des transitions. Ceci ne veut pas dire que le problème soit clos, il reste en effet beaucoup de travail à effectuer pour rendre ce modèle tout à fait performant, par exemple en prenant en compte l'effet de la

CONCLUSION GENERALE

non distribution hydrostatique des pressions dans le voisinage du choc ou encore une section transversale quelconque. Seulement à ce stade là le modèle pourrait être considéré comme définitif et compétitif.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.C.ARMICI
« Le Turbo-Pascal Version IV »
Ed.Lisa 1986
- [2] H.BENATSOU - M.K.BOUZID
« Analyse d'un Ecoulement Instationnaire -DAM BREAK- »
Thèse d'Ingéniorat d'Etat E.N.P 1992
- [3] M.BOUKEZZATA - M.LEBGAA
« Etude d'un Ressaut Hydraulique dans un Divergent »
Thèse d'Ingéniorat D'Etat E.N.P 1992
- [4] J.BARANGER
« Introduction à l'Analyse Numérique »
Ed.Hermann 1987
- [5] M.CARLIER
« Hydraulique Générale et appliquée »
Ed.Eyrolles 1972
- [6] M.H.CHAUDHRY
« Applied Hydraulic Transients »
Van Nostrand Reinhold Co.,New York,1988

BIBLIOGRAPHIE

[7] M.H.CHAUDHRY and S.M.BHALLAMUDI

« Computation of flows in Open-Channel Transitions »

Jour.of Hydr.Research,Vol.30,No.1, 1992

[8] V.T.CHOW

« Open-Channel Hydraulics »

McGraw-Hill Book Co.,New York, 1959

[9] R.DAUTRAY-J.L.LIONS

« Analyse Mathématique et Calcul Numérique »

Ed.Masson,1988

[10] D.EUVRARD

« Résolution Numérique des Equations aux Dérivées partielles
Différences Finies-Eléments Finies-Méthodes des singularités »

Ed.Masson 1990

[11] R.J.FENNEMA and M.H.CHAUDHRY

« Explicit Numerical Schemes for Insteady Free-surface Flow
With Shocks. »

Water Resources Research,Vol.22,No.13,pp.1923-1930 ,1986

[12] R.J.FENNEMA and M.H.CHAUDHRY

« Numérical Solution of Two-Dimensional Transient
Free-Surface Flow »

Jour.of Hydr.Eng.,Amer.Soc.Civ.Engr,Vol.116,Aug,pp1013-1034, 1990

BIBLIOGRAPHIE

[13] R.GARCIA and R.A.KAHAWITA

« Numerical Solution of the Saint-Venant Equations
With
the MacCormack Finite-Difference scheme »

Int.Jour.Numer.Meth.in Fluids,Vol.6,pp.259-274, 1986

[14]

« Shock Waves in Chutes »

Spillways - Shockwaves and Air Entrainement
Review and Recommendation
C.I.G.B Bulletin n°81, 1992

[15] K.A.HOFFMANN

« Computational Fluid Dynamics for Engineers »

Engineering Education System 1989

[16] M.HUG

« Mecanique des Fluides Appliquée Aux Problèmes
d'Aménagement et d'Energetique »

Ed.Eyrolles 1975

[17] O.F.JIMENEZ and M.H.CHAUDHRY

« Computation of Supercritical Free-Surface Flows »

Jour.of Hydr.Eng.,Amer.Soc.Civ.Engr.,Vol.114,No.4,Apr.,1988

[18] R.W.MacCormack

« Numerical Solution of the Interaction
of a Shock Wave With a Laminar Boundary Layer»

Lectures Notes in Physics,Springer-Verlag,Vol.8, 1971

BIBLIOGRAPHIE

[19] J.P.NOUGIER

« Méthodes de Calcul Numérique »

Ed. Masson 1991

[20] Ch.OBLED

« Analyse Numérique »

Institut National Polytechnique de Grenoble 1989

[21] R.SAKKAL

« Modèle Mathématique d'Ecoulement Transitoire dans une
Conduite Circulaire par la Méthodes des Caractéristiques
Prise en Compte d'un Ressaut »

Thèse d'Obtention du Grade de Maîtrise en Sciences Appliquées
Université Catholique de Louvain 1991

[22] R.O.SINNIGER and W.H.HAGER

« Constuctions Hydrauliques-Ecoulements Stationnaires »

Presses Polytechniques Romandes, Lausanne 1989