

11/93  
جمهورية الجزائر الديمقراطية  
REpubLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE  
ET POPULAIRE

وزارة التربية  
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONAL

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
BIBLIOTHEQUE - المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT : HYDRAULIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDE

THEME

SIMULATION NUMERIQUE ET  
ANALYSE DE PROBLEMES  
NON STATIONNAIRES AVEC  
DISCONTINUITES

PROPOSE PAR: Mr: O.BELHADJ

ETUDIE PAR: Mr: M.LÉCHAA

DIRIGÉ PAR : Mr: O.BELHADJ

PROMOTION

1993

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

---

« وَجَعَلْنَا مِنَ الْمَاءِ كُلَّ شَيْءٍ حَيٍّ ... »

سورة الانبياء . الآية 30

« وَنَزَّلْنَا مِنَ السَّمَاءِ مَاءً مُبْرَكًا ... »

سورة ق . الآية 9

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمُ

---

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE  
ET POPULAIRE

وزارة التربية  
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONAL

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
المكتبة - BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT : HYDRAULIQUE

**PROJET DE FIN D'ETUDE**

**THEME**

**SIMULATION NUMERIQUE ET  
ANALYSE DE PROBLEMES  
NON STATIONNAIRES AVEC  
DISCONTINUITES**

PROPOSE PAR: Mr: O.BELHADJ

ETUDIE PAR: Mr: M.LECHAA

DIRIGE PAR : M<sup>r</sup>: O.BELHADJ

PROMOTION

1993



# DEDICACES



*Je dedie ce modeste travail à tout ceux qui ont soufférés pour m'élever et surtout :*

*-A Oukhiti (Hafida), yama (aziza), Baba (Aziouis)*

*-A Snail , Azzadinne et ouafia*

*-A ma soeur Djanila et mon frère Ali*

*-A tous mes ami(e) de la 3<sup>eme</sup> NT*

*-A kamel et khaled*

*-Et a tout ceux qui mon aimer*

*H. Lechaa*

### REMERCIEMENTS

*Je remercie tout ceux et celles qui ont contribué à ma formation et surtout M<sup>ene</sup> LAICHAOUI (F.OUADI), M<sup>r</sup> DEFORGE, M<sup>r</sup> OUADJAOUT, M<sup>r</sup> DJELOULI et M<sup>r</sup> KACHER.*

*Je tiens aussi à remercier tout les enseignants du département d'hydraulique et surtout M<sup>elle</sup> BENMAMAR pour ses précieux conseils et pour les informations scientifiques qu'elle m'a apporté.*

*Je remercie également toute l'équipe de la bibliothèque de l'E.N.P. ,SALAH ,KARIM,KRIMO etc...*

	Page
<b>Chapitre I</b>	
-INTRODUCTION	1
<b>Chapitre II</b>	
- <b>FORMULATION MATHEMATIQUE GENERALE</b>	
1-Equation mathématiques de l'écoulement non permanent dans un canal découvert	3
-Problème posé	3
1-1 Hypothèses de pose	4
1-2 Relations intégrales	6
-Conservation de la masse	8
-Conservation de la quantité de mouvement	8
2-3-Forme différentielle des relations intégrales	15
2-4-Conclusion	17
<b>Chapitre III</b>	
- <b>TRAITEMENT DES CONDITIONS AUX LIMITES</b>	
-Introduction	18
3-1 Notions générales	18
3-2 Mise sous forme caractéristique	21
3-3 Conditions nécessaires	26
3-4 Conclusion	30
<b>Chapitre IV</b>	
- <b>MODELISATION DES PROBLEMES DISCONTINUS</b>	
-Introduction	31
4-1 Modélisation de discontinuités mobiles	32
4-1-1 Propagation d'ondes raides	34
4-1-2 Equations différentielles modélisant une discontinuité	41

4-2 Discontinuité locales	44
Conclusion	46

## Chapitre V

### -MODELISATION NUMERIQUE

Introduction	47
5-1 Les différentes méthodes numériques	48
5-1-1 Méthodes des caractéristiques	48
5-1-2 Méthodes des différences finies	53
-Méthodes explicites	54
-Méthodes implicites	57
5-2 Choix de la méthode de résolution	58
5-3 Discrétisation des conditions aux limites	58
Conclusion	65

## Chapitre IV

### -LE MODELE NUMERIQUE ET SES APPLICATIONS

1-Déscription du modèle numérique	66
1-1 Description du programme	67
2-Applications du modèle	71
2-1 Etude d'onde simple	71
2-2 Propagation-réflexion d'une onde de choc	78
2-3 Etude de propagation d'un double choc	80
2-4 Etude de la jonction de deux canaux	82
Conclusion	86

CONCLUSION	87
------------	----

ANNEXES	89
---------	----

### REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

**TABLE DES FIGURES**

Numéro	TITRE	Page
Fig 2-1	a)Volume de controle	
	b)Section droite _____	6
	c)Forces de pressions _____	7
Fig 3-1	Propagation de la perturbation _____	19
Fig 3-2	Structure des caractéristiques _____	21
Fig 3-3	Illustration des conditions nécessaires pour l'écoulement non permanat _____	26
Fig 3-4	Conditions aux limites nécessaires _____	29
Fig 4-1	Structure des caractéristiques pour le cas non linéaire _____	33
Fig 4-2	Ecoulement uniforme rapidement varié _____	34
Fig 4-3	Chemin de propagation d'une discontinuité _____	36
Fig 4-4	Chemin de propagation d'une discontinuité entre deux régions continues _____	37
Fig 4-5	Illustration du cas ou la forme divergente doit être utilisée _____	40
Fig 4-6	Jonction de trois canaux _____	45
Fig 5-1	Base de la méthode des caractéristiques _____	49
Fig 5-2	Grille de méthode de Hartree _____	52

Fig 5-3	Grille de discrétisation	54
Fig 5-4	Points de calcul utilisés pour le calcul du pas de temps aux limites pour le cas fluvial	59
Fig 6-1	Vue de dessus du canal	72
Fig 6-2	Directions possibles de propagations	73
Fig 6-3	Propagation d'une onde simple	76
Fig 6-4	Propagation d'une onde de choc Profils successifs	77
Fig 6-5	Propagation et réflexion d'une onde de choc	79
Fig 6-6	Propagations de deux ondes différentes	81
Fig 6-7	Système de deux canaux en prallèles	82
Fig 6-8	Propagation de l'onde avant passage de la jonction	84
Fig 6-9	Propagation de l'onde de choc après passage de la jonction	85

## ملخص

إستعملنا طريقتان مباشرتان للفروق المتناهية (أحادية وثنائية المرحلة) مع تحليل للشروط النهائية بطريقة الخطوط المميزة لتطوير نموذج أحادي الأبعاد يمكن من حل معادلات "St-Venant" للجريان غير المستقر، داخل مجاري ذات سطح حر حيث أخذنا بعين الاعتبار الشروط النهائية الداخلية والخارجية. أخيرا، نقدم بعض الحالات المصوّرة لإظهار فعالية هذه الطريقة عن تحليل هذه الجريانات الهامة في مجاري التصاميم الهندسية.

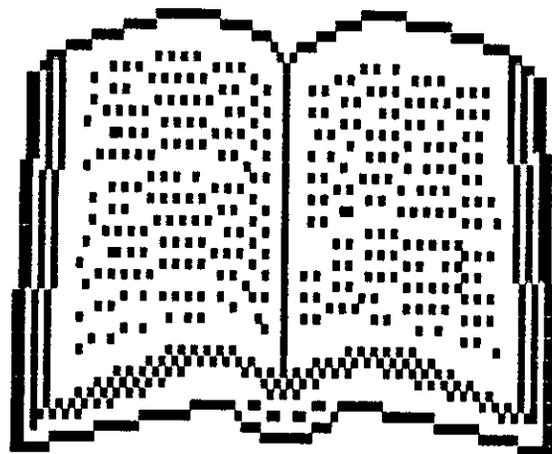
## ABSTRACT

Two explicit finite differences schemes (single & two steps) are used with a treatment of boundary conditions by the method of characteristics, in development of a one dimensional simulation model that solve the St-Venant equations of unsteady open channel flow. External and internal boundaries are considered. Various illustrative cases are presented to show the efficiency of this technique in the analysis of the important flow in hydraulic design channels.

## RÉSUMÉ

Deux méthodes explicites aux différences finies (à une et à deux étapes) sont utilisées, avec le traitement des conditions aux limites par la méthode des caractéristiques, pour le développement d'une modélisation unidimensionnelle qui sert à résoudre les équations de St-Venant pour des écoulements non permanents dans des canaux à surface libre. On considère des conditions aux limites intérieures et extérieures. On présente quelques cas illustratifs pour montrer l'efficacité de cette méthode dans l'analyse de ces écoulements importants dans les canaux d'aménagements hydrauliques.

# chapitre 1



## INTRODUCTION

*"Dans notre monde relatif  
toute certitude est un  
mensonge"*

H.Poincaré

L'utilisation de modèles mathématiques, pour la simulation des divers phénomènes hydrauliques, est devenue un outil très important pour les prédictions et les évaluations des travaux d'engineering.

La modélisation mathématique des écoulements dans les canaux et rivières, est une simulation des conditions d'écoulement, basé sur la formulation et la résolution des relations mathématiques qui expriment les principes physiques de base appliquer à l'hydraulique.

Dans le présent travail, nous nous intéressons à la modélisation d'écoulements non-permanents brusquement variés, qui sont appelés, généralement, choc en mécanique des fluides et "bore" ou "surge" dans le langage Anglo-Saxon.

De tels phénomènes peuvent être créés, dans des canaux usiniers, de restitution, de stations hydro-électriques, ou dans les canaux d'irrigation, et ce par une manipulation (ouverture ou fermeture) brusque ou rapides de vannes ou de turbines. Les chocs ainsi créés peuvent avoir des effets catastrophiques sur les structures hydrauliques.

Pour pallier à ces effets une étude de fonctionnement des canaux en régimes non permanent s'avère très utile lors de l'élaboration d'un projet de tels aménagements.

Le but de cette thèse est de développer un modèle mathématique pouvant simuler de telles situations, et de reproduire le plus fidèlement possible les caractéristiques des phénomènes ayant lieu.

Nous établirons d'abord les relations mathématiques, modélisant l'écoulement non-permanent dans les canaux découverts. Par la suite nous définirons les conditions physiques nécessaires selon l'état de l'écoulement (subcritique ou supercritique). Nous établirons en suite les lois supplémentaires à introduire dans des cas où cette formulation mathématique n'est plus valable (discontinuité locale ou mobile). En fin nous appliquerons le modèle construit à certains cas d'écoulements pouvant surgir dans les canaux d'aménagements hydrauliques.

# Chapitre II



**FORMULATION**

**MATHEMATIQUE**

**GENERALE**

## 1-EQUATIONS DE L'ÉCOULEMENT NON PERMANENT DANS

### DANS UN CANAL DÉCOUVERT

#### PROBLÈME POSÉ

Les notions fondamentales et les hypothèses utilisées dans la modélisation mathématique des rivières sont formalisées dans les équations de l'écoulement non permanent à surface libre.

Ces équations sont un simple modèle de phénomènes extrêmement complexes. Elles incorporent seulement les grandeurs importantes influençant réellement l'écoulement, en laissant de côté les grandeurs qui sont d'une importance secondaire. Ayant affaire à de telles équations, on doit prêter une attention particulière aux phénomènes physiques qui sont pris en compte et ceux qui ne le sont pas. Une fois ces équations mises au point, les traitements mathématiques et numériques qui leur sont appliqués n'influencent pas les principes, du point de vue physique sur lesquels elles sont basées.

Nous commençons par préciser les hypothèses sur lesquelles on se base dans ce travail qui sont celles de Barre de Saint Venant (3) (1871):

### 1-1 HYPOTHÈSES DE BASE

1/ L'écoulement est uni-dimensionnel, donc la vitesse est uniforme dans une section droite et le niveau de l'eau est horizontal dans la section

2/ La courbure des lignes de courants est très petite et ainsi l'accélération verticale est négligeable: donc la pression est hydrostatique.

3/ Les effets de turbulences et de frottements sont pris en compte par analogie avec leur formulation en écoulement permanent.

4/ Le canal est de pente faible.

5/ Fluide incompressible.

Notons que la section droite du canal transportant un tel écoulement est de forme quelconque et peut changer le long de l'axe du canal, mais cette variation est limitée par l'hypothèse numéro 2.

Ainsi l'écoulement unidimensionnel non permanent dans un canal à surface libre, peut être décrit par deux variables dépendantes: par exemple la profondeur d'eau  $y$  et le débit  $Q$  dans une section donnée, et ceci en supposant une densité constante.

Ces variables dépendantes, définissant l'état du mouvement le long du canal et dans le temps sont fonctions de deux variables à savoir l'espace  $x$  et le temps  $t$ :

$$y = y(x,t)$$

$$Q = Q(x,t)$$

Il est à remarquer aussi, selon la nature du problème, qu'on peut définir une autre paire de variables; par exemple: La vitesse et la hauteur d'eau; les équations vont changer pour chaque paire mais les considérations physiques restent inchangées. (3,8)

Du moment que deux variables sont suffisantes pour décrire le phénomène, on n'en a besoin que de deux équations dont chacune doit représenter une loi physique.

Cependant, tel qu'il est couramment connu pour la modélisation d'un problème d'écoulement quelconque, on doit formuler trois lois physiques qui sont :

- La conservation de la masse
- La conservation de la quantité de mouvement
- La conservation de l'énergie

Comme pour tout problème, à variable discontinue (ressaut hydraulique, discontinuité de niveau d'eau: 'bore'), deux représentations sont possibles:

- Conservation de la masse et celle de la quantité de mouvement.
- Conservation de la masse et de l'énergie

Ces deux représentations ne sont pas équivalentes, et seule l'une d'entre elles, est correcte. Par contre si les variables d'écoulement, sont continues, chacune des deux représentations peut être utilisées et elles sont équivalentes. (3)

Le couple masse-quantité de mouvement est valable dans les deux situations (continue et discontinue). Nous baserons donc notre dérivation des équations du mouvement sur ce couple de conservation

### 1-2 RELATIONS INTÉGRALES

Soit un volume de contrôle ( $V_c$ ) dans le plan  $(x,t)$  entre deux sections  $x=x_1$  et  $x=x_2$  et entre deux instants  $t=t_1$  et  $t=t_2$  (voir FIG 2-1)

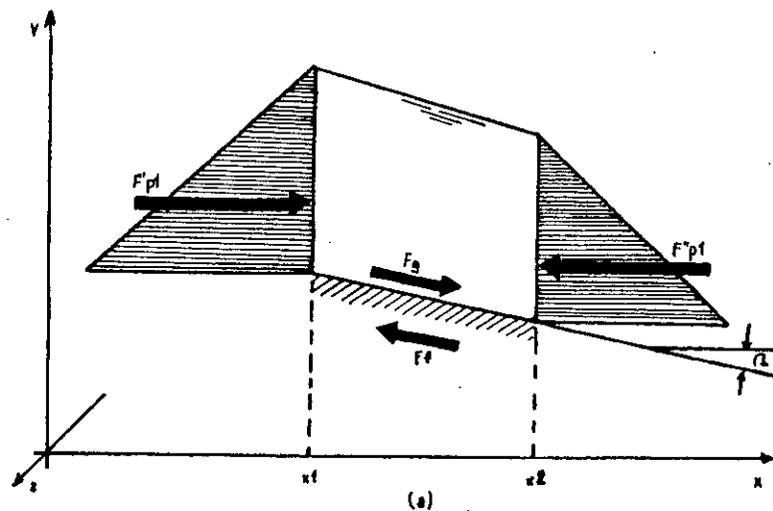


FIG 2-1 a) volume de contrôle

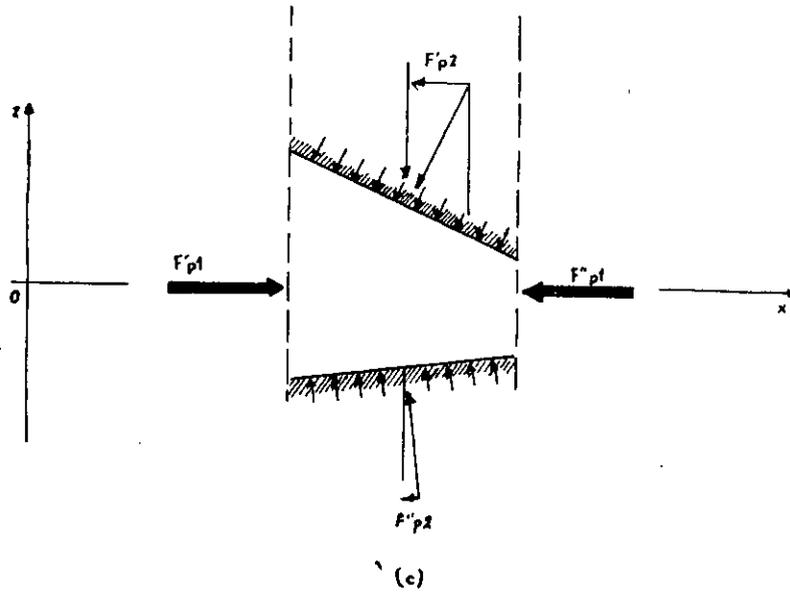
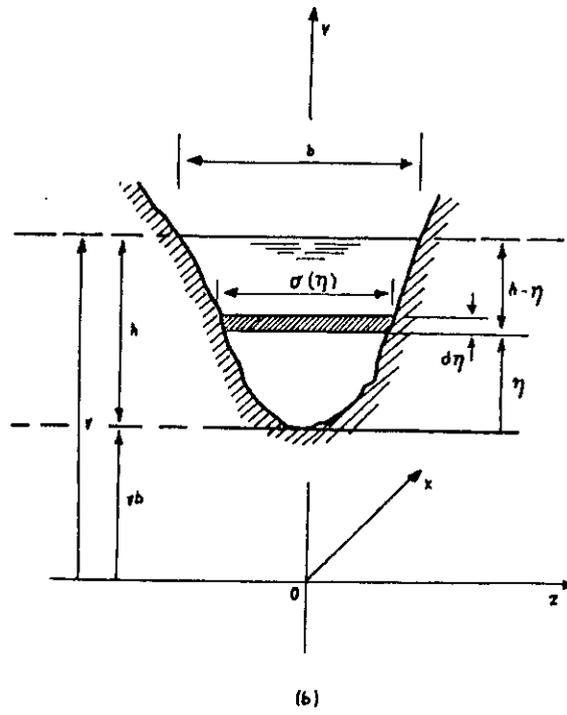


Fig 2-1 b-section droite  
 c-forces de pression .  
 Vue en plan

Nous allons rappeler les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour le volume de contrôle ( $V_c$ ) en supposant valide toute les hypothèses de Saint Venant.

**\*) Conservation de la masse :**

Entre les deux instants  $t_1$  et  $t_2$ , le débit entrant est définie par l'intégrale de la différence entre la masse rentrante  $(\rho u A)_{x_1}$  et celle sortant  $(\rho u A)_{x_2}$

$$\int_{t_1}^{t_2} ((\rho u A)_{x_1} - (\rho u A)_{x_2}) dt \quad (2.1)$$

Cette variation doit être égale au changement de stock dans le volume de contrôle pendant l'intervalle ét1, t2.

$$\int_{x_1}^{x_2} ((\rho A)_{t_2} - (\rho A)_{t_1}) dx \quad (2.2)$$

$\rho$  : la densité de l'eau

$u(x, t)$ : vitesse uniforme dans une section

$A(x, t)$ : section mouillée

En résumé, et après simplification, la relation intégrale de continuité de la masse est:

$$\int_{x_1}^{x_2} ((A)_{t_2} - (A)_{t_1}) dx + \int_{t_1}^{t_2} ((Q_{x_2}) - (Q_{x_1})) dt = 0 \quad (2.3)$$

où

$$Q = u \cdot A$$

\*) Conservation de la quantité de mouvement

Les "variations de la quantité de mouvement dans le volume de contrôle entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  doit être égale à la somme de l'accroissement de la quantité mouvement et la somme des forces extérieures appliquées sur le volume de contrôle dans le même intervalle de temps".

Sachant que:

-La quantité de mouvement ( $M_f$ ) est le produit de la masse par la vitesse

-Le flux de quantité de mouvement à travers la section d'écoulement est le produit de la masse du taux écoulé par la vitesse.

Soit alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{flux de quantité} \\ \text{de mouvement} \end{array} \right\} = \rho u A \cdot u = \rho u^2 A \quad (2.4)$$

L'augmentation de la quantité de mouvement dans le volume est celle entrant par la section  $x=x_1$  moins celle sortant par la section  $x=x_2$  soit:

$$(\rho u^2 A)_{x_1} - (\rho u^2 A)_{x_2}$$

Pour l'intervalle de temps ( $t_1, t_2$ ) l'augmentation est:

$$M_f = \int_{t_1}^{t_2} ((\rho u^2 A)_{x_1} - (\rho u^2 A)_{x_2}) dt \quad (2.5)$$

*variation.*

La quantité de mouvement contenue dans le volume de contrôle  $V_c$ , à tout instant est : *de la masse*  $\rho$  —

$$\int_{x_1}^{x_2} (\rho u A) dx$$

et la variation entre  $t_1$  et  $t_2$  :

$$\Delta H = \int_{x_1}^{x_2} ((\rho u A)_{t_2} - (\rho u A)_{t_1}) dx \quad (2.6)$$

D'autre part et en supposant que les principales forces agissant sur notre volume de contrôle sont :

- a/ Forces de pression
- b/ Force de gravité
- c/ Forces de frottements

a/ Forces de pression :

La force de pression appliquée est la différence entre celle appliquée en  $x_1$  et celle en  $x_2$ ,  $F'_{p1}$  et  $F'_{p2}$ . Comme, le montre la figure (2.1b) à une section  $x$  avec une élévation de la surface libre  $y(x)$ , l'expression de la force de pression, sous l'hypothèse de distribution hydrostatique de pression, est :

$$F'_{p1} = g \int_0^{h(x)} \rho (h(x) - \eta) \sigma(x, \eta) d\eta \quad (2.7)$$

$$\sigma(x, \frac{\eta}{\sigma}) = b(x)$$

$\eta$  : "variable profondeur " d'intégration

La variation de la force appliquée pendant l'intervalle  $(t_1, t_2)$  est :

$$\int_{t_1}^{t_2} F_{p1} dt = \int_{t_1}^{t_2} (F'_{p1} - F''_{p1}) dt$$

$$= g \int_{t_1}^{t_2} ((\rho I_1)_{x1} - (\rho I_1)_{x2}) dt$$

où on a posé :

$$I_1 = \int_0^{h(x)} \rho g (h(x) - \eta) d\sigma(x, \eta) d\eta$$

Une autre force de pression est appliquée au fluide, due à la variation de la largeur du canal (fig 2-1 c). Pour un infiniment petit  $dx$  : l'accroissement de cette force de pression est due à la variation de la section mouillée  $d\sigma \cdot d\eta$  pour  $h$  constant ( $h=h_0$ ).

Comme la distance du centre de gravité à la surface libre étant  $h(x) - \eta$ , on peut donc écrire :

$$((\partial\sigma/\partial x) dx \cdot d\eta)_{h=h_0} = d\sigma$$

d'où la force élémentaire :

$$dF = \rho g \int_{h=h_0} \rho g (\partial\sigma/\partial x) dx \cdot d\eta \cdot (h(x) - \eta)$$

Cette expression doit être intégrée entre  $\eta=0$  et  $\eta=h(x)$  pour une section donnée et de  $x_1$  à  $x_2$  pour l'action totale sur le volume de contrôle.

L'intégration totale le long du contour de  $V_c$  et pour l'intervalle de temps considéré donne:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho g \int_0^{h(x)} (h(x)-\eta) \left( \frac{\partial \sigma(x,\eta)}{\partial x} \right)_{h_0} d\eta dx dt$$

Nous pouvons écrire aussi :

$$\int_{t_1}^{t_2} F_{pz} dt = g \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho I_2 dx \quad (2.9)$$

$$\text{où } I_2 = \int_0^{h(x)} (h-\eta) \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)_{h=h_0} d\eta \quad (2.10)$$

L'équation (2.9) n'est pas valable pour une brusque variation de section entre  $x_1$  et  $x_2$ . Dans un tel cas des forces supplémentaires agiront sur le volume de contrôle et doivent être prises en compte. Dans cette situation la courbure des lignes de courants devient non négligeable et une des hypothèses adoptées devient non valide.

#### b/Force de résistance: (F<sub>r</sub>)

Cette force est appliquée au volume de contrôle par une contrainte le long du lit du canal et des deux rives; droite et gauche .

En prenant en considération l'hypothèse n°3 ie que l'effet de frottement est pris comme celui en écoulement permanent .

On a

$$Q = A c \sqrt{RSf}$$

Q: débit d'écoulement

R: rayon hydraulique

Sf: pente hydraulique

C: coefficient de Chezy

A: Section mouillée

On adoptera pour le calcul du coefficient de Chezy la formule de MANNING et donc on a:

$$Sf = \frac{Q |Q| n^2}{A^2 R^{4/3}}$$

n: coefficient de rugosité

D'où on peut écrire :

$$\int_{t1}^{t2} Fr dt = \int_{x1}^{x2} \int_{t1}^{t2} \rho g A S_f dx dt \quad (2.11)$$

c/Force de gravite : (Fg)

La composante du poids le long de l'axe du canal est évaluée en supposant que la pente du canal est positive

$$S_o = -\partial y_b / \partial x = \operatorname{tg} \alpha$$

D'où on peut écrire

$$\int_{t_1}^{t_2} F_g dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho g A S_0 dx dt \quad (2.12)$$

Enfinement, l'écriture du principe de conservation de quantité de mouvement est:

$$\Delta M = M_f + \int_{t_1}^{t_2} F_{p1} dt + \int_{t_1}^{t_2} F_{p2} dt + \int_{t_1}^{t_2} F_g dt - \int_{t_1}^{t_2} F_f dt$$

Soit pour  $\rho = \text{constante}$

$$\int_{x_1}^{x_2} ((uA)_{t_2} - (uA)_{t_1}) dx = \int_{t_1}^{t_2} ((u^2 A)_{x_1} - (u^2 A)_{x_2}) dt +$$

$$g \int_{t_1}^{t_2} ((I1)_{x_1} - (I2)_{x_2}) dt - g \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho I_2 dx dt +$$

$$g \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} A(S_0 - S_f) dx dt \quad (2.14)$$

L'équation (2.14) est la forme intégrale du principe de conservation de la quantité de mouvement pour un écoulement uni-dimensionnel dans un canal naturel avec une section de forme quelconque.

Les relations (2.3) et (2.14) constituent le système de relations intégrales modélisant mathématiquement le phénomène de l'écoulement non-permanent à surface libre, basée sur les hypothèses de Barre Saint-Venant.

### 2-3 FORME DIFFÉRENTIELLE DES RELATIONS INTÉGRALES

Les relations (2.3) et (2.14) sont les relations intégrales établies sans la condition de continuité ou différentiabilité des variables d'écoulement  $A, Q, y, u, \text{etc.}$  Les équations différentielles peuvent être obtenues à partir des relations intégrales, en rajoutant l'hypothèse que les variables indépendantes sont continues et que les fonctions ( $y$  et  $Q$ ) de ces variables sont différentiables.

On peut donc écrire le système des équations aux dérivés partielles quasi-linéaires, hyperboliques, du premier ordre (Annexe I)

L'équation de continuité est:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.15)$$

L'équation de quantité de mouvement est:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} + gI1 \right) = gA(S_0 - S_f) + gI2 \quad (2.16)$$

Les équations (2.15) et (2.16) sont écrites dans une forme spéciale, souvent appelée forme 'divergente' des équations aux dérivés partielles. (3,4)

En faisant des manipulations algébriques, on peut établir d'autres formes des équations différentielles (Voir annexe n° I).

L'importance des différentes expressions des équations du modèle d'ordre pratique, puisque certaines techniques numériques sont mieux adaptées à certaines formes.

Les caractéristiques physiques, d'un canal ou un cours d'eau peuvent nous laisser choisir la forme adéquate. Par exemple, si la rivière est de pente raide et la variation de sa section droite est petite, l'utilisation de  $h(x,t)$  au lieu de  $y(x,t)$  comme variable dépendante est recommandé, puisque  $h$  et  $(\partial A / \partial h)_{h=c}$  varient légèrement d'une section à l'autre et inversement une faible pente et une large variation de section favorisent l'utilisation de la variable  $y(x,t)$ .

Dans le présent travail, on s'intéressera plutôt aux mouvements non permanents brusquement variés; la propagation de choc : "bore propagation ou surge". On cherchera une solution où l'une des variables dépendantes est discontinue. La nature du phénomène nous obligera à choisir la forme conservative que nous présenterons plus loin dans ce travail.

## 2-4 CONCLUSION

Pour conclure, nous pouvons dire que cette modélisation mathématique ne peut être appliquée que si le phénomène physique étudié vérifie toutes les hypothèses, la solution des relations intégrales ou des expressions différentielles, ne peut exprimer un résultat physique correct que si les conditions aux limites prises pour compléter le modèle, soient valables physiquement.

Pour cela nous présentons le traitement des conditions aux limites au chapitre suivant.

# Chapitre III



## TRAITEMENT DES CONDITIONS AUX LIMITES

## INTRODUCTION

Nous avons déjà décrit au <sup>chapitre précédent.</sup>  $\sqrt{\text{précédemment}}$  les équations gouvernant l'écoulement non-permanent dans un canal à surface libre.

Si nous suivent l'évolution de l'écoulement dans le temps, les conditions d'écoulement peuvent changer. Le modèle mathématique doit être capable de ressortir automatiquement un tel changement, et prendre ainsi pour chaque condition d'écoulement les conditions aux limites appropriées.

Cependant, la méthode des caractéristiques, reste selon les références disponibles, la seule technique générale pour traiter les conditions aux limites (9,3).

### 3-1 NOTIONS GÉNÉRALES

Soit une perturbation qui a lieu à l'instant  $t=0$  dans un canal, Cette perturbation pourra se propager dans le temps dans deux directions possibles: vers l'amont et/ou vers l'aval. Ainsi la perturbation au point Q de la fig 3.1a influencera la zone hachurée, limitée par les courbes  $C^+$  et  $C^-$  qui représentent

le chemin de propagation de la perturbation (voir annexe II). Inversement au point P à l'instant t, toute perturbation à l'extérieur de la zone hachurée n'influencera pas l'état d'écoulement dans ce point.(3,9)

Si la perturbation est une onde de faible amplitude, les lignes formant les limites de ces zones sont appelées "Caractéristique". On peut les définir, physiquement, comme des courbes du plan  $(x,t)$  sur lesquelles la perturbation se propage.(1,10)

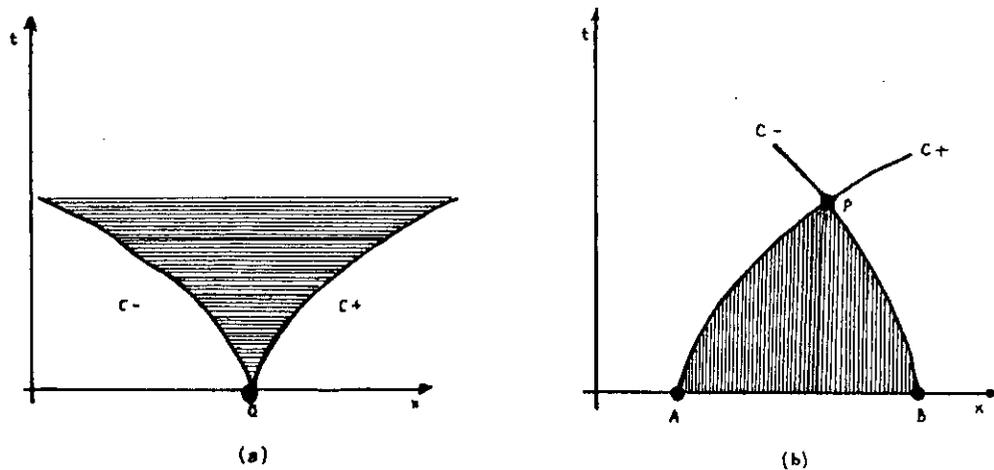


Figure 3.1 : Propagation de la perturbation  
 (a) domaine d'influence de Q  
 (b) // de dépendance de P

Mathématiquement, une perturbation est définie comme étant une discontinuité de l'une des dérivés successives des variables dépendantes ou d'un paramètre physique qui apparaît dans les équations d'écoulement. Ainsi une discontinuité dans la pente de la surface de l'eau  $\partial y/\partial x$  ou du gradient de vitesse se propagera le long de la ligne caractéristique définie par:

$$\frac{dx}{dt} = u \pm \left( g \frac{A}{b} \right)^{1/2}$$

Ce n'est pas le cas lors de la discontinuité des variables dépendantes. L'équation ci-dessus ne peut être appliquée à la propagation du ressaut mobile qui est une discontinuité entre deux hauteurs d'eau .

Selon la direction des caractéristiques , on peut distinguer trois états d'écoulement :

\*) L'écoulement subcritique :

Dans lequel la célérité  $(gA/b)^{1/2}$  est plus petite que  $|u|$ . Les deux familles de caractéristiques ( $C^+$  et  $C^-$ ) ont des signes opposés, et donc l'écoulement est influencé aussi bien de l'amont que de l'aval. (fig 3.2a)

\*) L'écoulement critique :  $|u| = (gA/b)^{1/2}$

La vitesse de propagation sur l'une des caractéristiques devient nulle; cette courbe est verticale pour  $x_p$  fixé. (fig 3.2b)

\*) L'écoulement supercritique :  $|u| > (gA/b)^{1/2}$

Les deux familles de caractéristique ( $C^+$  et  $C^-$ ) ont le même signe.

Dans les deux derniers cas l'état d'écoulement au point P ne dépend pas des conditions d'écoulement à l'aval .

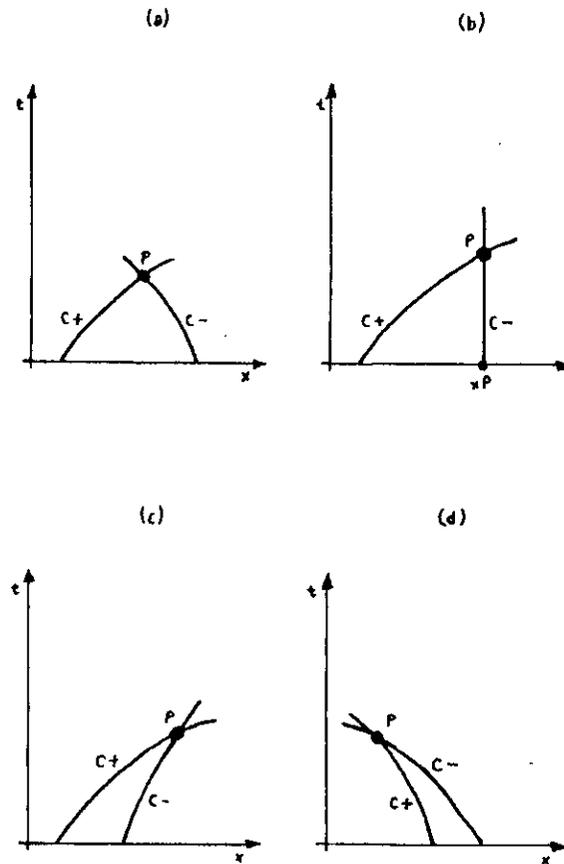


Figure 3.2 : structure des caractéristiques et leurs relations avec l'état du point P.

(a) écoulement subcritique

(b) // critique

(c) // supercritique (signe positif)

(d) // supercritique (signe négatif)

### 3-2 MISE SOUS FORME CARACTÉRISTIQUE

Historiquement parlant, l'application de la méthode des caractéristiques à l'hydraulique est due à Massau (1889) et son développement à Craya (1946) (3,10).

Nous présentons, dans cette partie la relation des caractéristiques avec les équations d'écoulement et par la suite, les conséquences des considérations théoriques.

Pour ce faire considérons un canal dont la forme de la section droite est constante ainsi que la pente (ie un canal prismatique), et dans lequel l'écoulement est décrit par le système suivant (voir annexe n. I):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{A}{b} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g(S_f - S_0) = 0$$

Transformons ce système et ceci en posant:

$$c = \left( g \frac{A}{b} \right)^{1/2} ; A = A(h) \quad (3.2)$$

$$\text{et } E = g(S_0 - S_f)$$

et en faisant la différentielle de  $c^2$  par rapport à  $x$  et  $t$  puis en notons que  $\partial A / \partial h = b$  on trouve :

$$2c \frac{\partial c}{\partial x} = g \frac{\partial h}{\partial x} ; \quad 2c \frac{\partial c}{\partial t} = g \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.3)$$

La substitution de (3.3) dans le système (3.1) donne le système des deux équations suivant:

$$2 \frac{\partial c}{\partial t} + 2u \frac{\partial c}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

(3.4)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2c \frac{\partial c}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + E = 0$$

Après transformations des deux dernières équations, nous obtenons la paire d'équations appelées 'forme caractéristique' des équations d'écoulement.

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial}{\partial x} \right] (u+2c) + E = 0$$

(3.5)

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial}{\partial x} \right] (u-2c) + E = 0$$

Nous remarquons que  $u+c=N+$  est une vitesse, de même que  $u-c=N-$ . Dans les équations (3.5), les fonctions  $u$  et  $c$  sont différenciées le long des courbes du plan  $(x, t)$ , qui satisfont l'équation différentielle  $dx/dt=u+c$ . L'opérateur différentiel le long de ces courbes n'est autre que la dérivé totale.

$$\frac{D_+}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + N_+ \frac{\partial}{\partial x} ; \quad \frac{D_-}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + N_- \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.6)$$

Par conséquent on peut écrire:

$$\frac{D_+}{Dt}(u+2c)=-R \quad (3.7a)$$

$$\frac{D_-}{Dt}(u-2c)=-R \quad (3.7b)$$

Ainsi, la relation (3.7a) est valable pour tout point du fluide se mouvant à la vitesse  $u \pm c$ , où la caractéristique  $C_+$ , défini par:

$$\frac{dx}{dt}=u+c \quad (3.8)$$

La relation (3.7b) est valable le long de la caractéristique  $C_-$ , défini par:

$$\frac{dx}{dt}=u-c \quad (3.9)$$

Il est clair que les équations (3.5), (3.7), (3.8) et (3.9) sont complètement équivalentes au système (3.1). Avec le système des équations (3.7)-(3.8) et (3.9) on peut trouver les quatre dérivés des variables dépendantes ( $\partial h/\partial t, \partial h/\partial x, \partial u/\partial t, \partial u/\partial x$ ) autour d'un élément dans le plan  $(x, t)$ .

Si le canal est horizontal et sans frottement (ie.  $R=0$ ). Les équations (3.7) deviennent:

$$u+2c = \text{constante} = J_+$$

$$u-2c = \text{constante} = J_-$$

Les constantes  $J+$  et  $J-$  sont appelés les invariants de Riemann dont les valeurs varient d'une section à une autre .

Pour un canal prismatique avec frottement ( $S_f \neq 0$ ), l'expression entre deux points 1 et 2 le long de  $C+$  peut être obtenue par intégration entre ces deux points de l'équation (3.7a):

$$\left[ u + 2(gA/b)^{1/2} \right]_1^2 = g \int_{t_1}^{t_2} (S_0 - S_f) dt \quad (3.10)$$

et le long de la caractéristique  $C-$  on a de (3.7.b)

$$\left[ u - 2(gA/b)^{1/2} \right]_1^2 = g \int_{t_1}^{t_2} (S_0 - S_f) dt \quad (3.11)$$

Le premier membre des équations (3.10) et (3.11) est appelé: quasi invariant de Riemann .Cependant le deuxième terme est suffisamment petit et ceci par un bon choix de  $(t_2 - t_1)$ .

On remarque que dans les équations (3.9) et (3.8), la célérité  $W$  n'est pas directement liée à la pente du lit , au frottement ou une autre force extérieure qui peuvent être introduit dans le terme  $E$ .

### 3-3 CONDITIONS NÉCESSAIRES

Soit un élément de ligne  $x(t)$  dans le plan  $(x,t)$ , dans le domaine de solution des équations d'écoulement. Pour simplifier le traitement nous supposons que  $E=0$  et donc on est en présence des invariants de Riemann.

Il est clair que si toute la ligne considérée est une caractéristique, seule une des fonctions  $u$  ou  $h$  peut être donnée indépendamment, l'autre fonction doit vérifier l'invariant de Riemann le long de la caractéristique. Si par contre l'élément de courbe et la caractéristique n'ont en commun qu'un seul point (point A de la ligne  $x_0, x_1$  de la fig 3.3

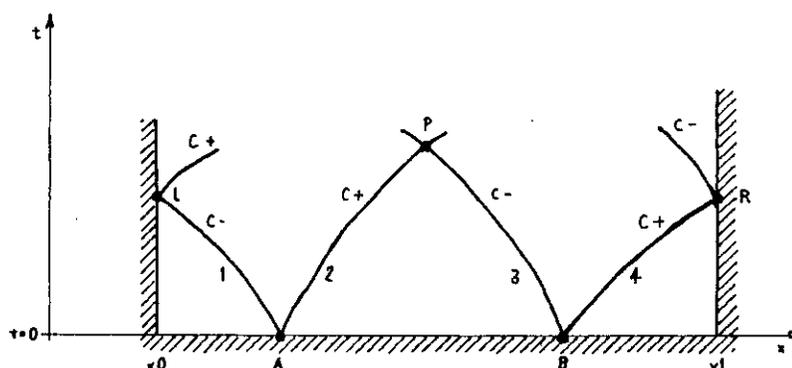


Figure 3.3 : illustration des conditions nécessaires pour l'écoulement non permanent.

Les valeurs des fonctions  $u$  et  $h$  connues au point A, permettent de calculer les invariants de Riemann le long de la caractéristique considérée.

Imaginons que le plan est couvert d'une infinité de courbes caractéristiques  $C^+$  et  $C^-$ . En chaque point  $P$ , on a une intersection de deux caractéristiques et la solution (ie.  $u$  et  $h$ ) en ce point est définie par les deux invariants de Riemann  $J^+$  et  $J^-$  qui dérivent des valeurs de  $u$  et  $h$  données au temps  $t=0$  tel que les point A et B sur la figure (FIG 3.3).

Nous nous intéresserons aux écoulements dans les canaux donc le domaine du plan  $(x,t)$  est limité en espace.

Prenons donc l'élément de ligne composé de

$$\begin{aligned} t=0 & \text{ pour } x \geq x_0 \\ \text{et } x=x_0 & \text{ pour } t \geq 0 \end{aligned}$$

On remarque que cet élément est coupé par une même caractéristique en A et L. Quand  $u$  et  $h$  sont données au point A, au point L,  $u$  et  $h$  ne peuvent être données indépendamment; ils doivent vérifier la condition de compatibilité  $J^-$ , calculé par les données au point A. La solution au point L est entièrement défini, si une des valeurs de  $u$  ou  $h$  ou une relation entre les deux est connue indépendamment de  $J^-$ . Ceci est vraie pour tout point de  $x=x_0$ , et avec l'autre famille des caractéristiques le même raisonnement peut être suivi pour le point R sur  $x=x_1$ .

Nous pouvons conclure de ce qui précède que, deux données le long de  $(t=0, x_0 \leq x \leq x_1)$  et une donnée le long de  $(x=x_0, t \geq 0)$  et  $(x=x_1, t \geq 0)$  sont nécessaires pour définir la solution dans le domaine considéré pour une telle structure des caractéristiques. Ces données sont suffisantes tant qu'il n'y a pas de discontinuité dans le domaine de solution.

A présent la question qui se pose : Est ce qu'on peut donnée deux conditions le long de  $x=x_1$  et une autre le long de  $t=0$  et

$x=x_0$ ? Ceci peut correspondre à une situation physique dans laquelle on connaît le débit à  $t=0$  et la variation de la hauteur à l'amont; et on veut calculer la hauteur initiale ainsi que la variation du débit à l'amont, qui est nécessaire pour fournir le débit à l'aval et la hauteur d'eau.

On peut procéder à ce calcul en arrière dans le temps, ce qui est faisable s'il n'y a pas de pertes d'énergies ( $R=0$ ).

Physiquement, cette supposition ne peut être satisfaite, et ce calcul inverse devient donc pratiquement impossible.

Physiquement parlant, l'effet d'une perturbation locale diminuera dans le temps et ceci grâce aux effets de pertes d'énergie, un calcul en avant dans le temps peut modéliser cette situation.

De cette irréversibilité on conclue que: les données en un point P à l'instant t ne peuvent être transférées en arrière dans le temps le long d'une caractéristique.

On peut donc tirer la règle suivante: "Chaque donnée aux limites du plan  $(x,t)$ , ne peut être donnée que sur une caractéristique entrant dans le domaine de solution."

Ceci est illustré dans la fig 3.4 ou on considère le cas de l'écoulement subcritique et supercritique.

*\*) Cas supercritique: (Fig 3.4.a)*

Dans la direction positive des x, deux caractéristique entrant dans le domaine par  $x=x_0$  à l'amont, deux autres à travers  $t=t_0$  et  $x=x_1$  à l'aval.

Par conséquent, pour un écoulement supercritique on a besoin de deux données à l'amont et de deux autres au temps  $t=t_0$ .

**\*) Cas subcritique: (Fig 3.4.b)**

On a deux caractéristiques qui entrent en tout point A de  $t=t_0$ , une caractéristique qui entre par  $x=x_0$  (point L), une autre par  $x=x_1$  (point R).

Par conséquent on aura besoin de deux conditions à  $t=t_0$  et d'une condition à l'amont et d'une autre à l'aval.

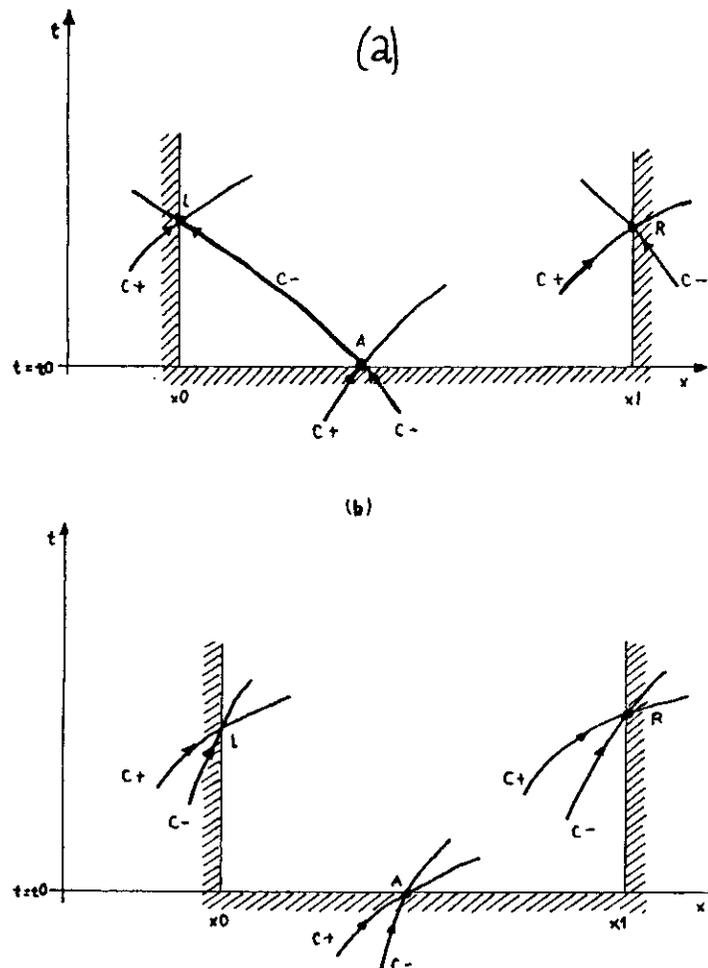


FIG 3.4 : conditions aux limites nécessaires

(a) cas supercritique

(b) cas subcritique

Les conditions aux limites peuvent être des fonctions entre les variables dépendantes et leurs dérivées par rapport au temps ou l'espace. Ceci est accepté tant que ces fonctions donnent de nouvelles informations à celle déjà existantes, ie. elles doivent être indépendantes de celle déjà en notre possession.

### 3-4 CONCLUSION

Nous pouvons déduire que, pour chaque cas les conditions nécessaires à connaître, pour compléter le modèle, les restrictions suivantes doivent être respectées:

(i) Toute les données doivent être indépendantes les unes des autres lorsque deux conditions sont nécessaires. Par exemple on ne peut donner  $u$  et  $\partial u/\partial x$  indépendamment.

(ii) Elles doivent être indépendantes des équations de base. Par exemple une relation entre  $\partial h/\partial t$  et  $\partial(uh)/\partial x$  qui ressemble à celle de l'équation de conservation de la masse.

(iii) Dans le cas où une seule donnée est nécessaire, elle doit être indépendante de l'invariant de Riemann.

# Chapitre IV



## MODELISATION DES PROBLEMES DISCONTINUES

## INTRODUCTION

Jusqu' à présent , nous avons supposé implicitement l'existence d'une solution aux équations différentielles modélisant l'écoulement considéré. Cette solution peut être entièrement trouvée, dans le plan  $(x, t)$  ( $t > 0$ ), en rajoutant les conditions initiales et aux limites propres à chaque cas.

Ces équations ne peuvent pas être appliquées à toute les situations physiques. Les limites de leurs applications sont définies par les hypothèses de base.

Dans ce chapitre, nous décrivons comment modéliser de telles situations physiques et nous prendrons deux cas rencontrés, le plus souvent lors de l'étude de situations réelles :

-Propagation d'ondes raides (discontinues) dans les canaux usiniers. (Discontinuité mobile)

-Le cas de la jonction de deux canaux , où on a une violation locale des hypothèses de bases. (Discontinuité locale)

Nous verrons quelle type d'équations, doit on utiliser et ce pour trouver la solution adéquate aux problèmes posés.

#### 4-1 MODÉLISATION DE DISCONTINUITÉ MOBILE

Soit l'écriture des équations de base sous la forme condensée suivante:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + A \frac{\partial f}{\partial x} + B = 0 \quad (4.1)$$

\*) Cas d'équations linéaires:

Si la matrice A et le vecteur B sont seulement fonction de x et de t et satisfont certaines régularités, l'équation (4.1) est une équation linéaire. Si les conditions aux limites et initiales présentent une discontinuités, elle se propagera le long de la caractéristique. Donc la solution est elle aussi discontinue.

Si par contre, les conditions aux limites sont continues, la solution dans le domaine considéré existe et est unique. ie: pour tout point (x,t) il y'a seulement une seule valeur associée a f. Vu que A et B sont des fonctions régulières de x et t, dans le plan (x,t), pour un point P, deux caractéristiques de la même famille, ne peuvent s'intérsepter .

\*) Cas d'équations non-linéaires:

L'équation (4.1) est non-linéaire si la matrice A et/ou le vecteur B sont fonctions de l'inconnue elle même.

$$A=A(x, t, f) \quad \text{et/ou} \quad B=B(x, t, f)$$

La pente de la caractéristique dépend de la solution elle même en tout point  $(x,t)$ . Donc deux caractéristiques de la même famille, peuvent s'intercepter comme le montre la figure (4.1).

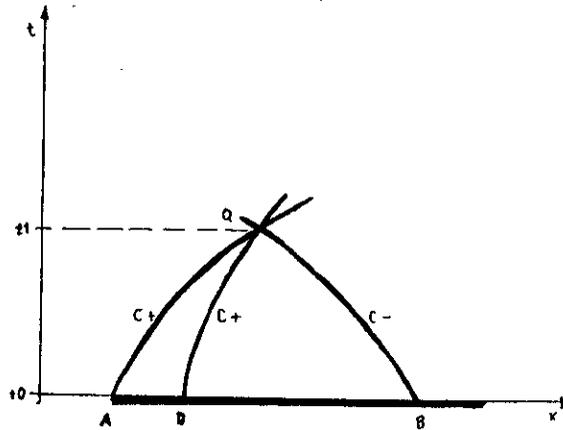


FIG 4.1 : Structure des caractéristiques pour le cas non-linéaire

Ainsi pour le point  $Q$  de la Fig 4.2, on peut trouver deux valeurs pour la fonction inconnue  $f$  ; une résultant de la caractéristique  $AQ, BQ$ , l'autre de  $DQ, BQ$ . La solution devient multiple et donc au-delà de l'instant  $t=t_1$  la solution ne dépend pas complètement de la valeur de  $f$  à l'instant  $t=t_0$ .

Physiquement parlant; en considérant le système d'équations non-linéaire de Saint Venant pour un écoulement non-permanent rapidement varié correspondant, par exemple, à un choc ou à un ressaut en mouvement; il est évident que les hypothèses de base, au voisinage de la discontinuité ne sont plus valables. Les lignes de courants ont une courbure très forte, la vitesse verticale n'est plus négligeable et la distribution de pression hydrostatique n'est plus une hypothèse correcte.

#### 4-1-1 PROPAGATION D'ONDES RAIDES :

C'est le cas de la discontinuité de la hauteur de l'eau, entre deux sections distantes d'une longueur infinésimale. Ce phénomène peut être créé par une ouverture brusque d'une vanne à l'entrée d'un canal par exemple.

Pour modéliser cette partie de l'écoulement étudié, on utilise les équations du ressaut mobile tel que présentées ci-dessous.

Appliquons le principe de continuité et de conservation de la masse au volume de contrôle limité par les sections 1-1 et 2-2 de la FIG 4.2, qui schématise le cas de l'ouverture brusque d'une vanne dans un canal.

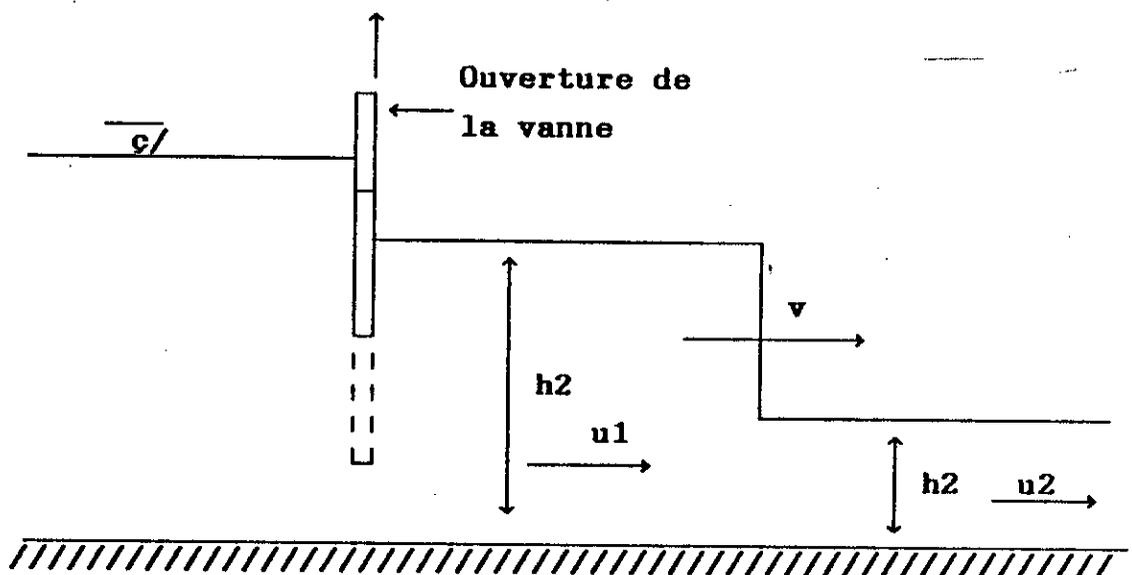


FIG 4.2 : Ecoulement uniforme rapidement varié.

\*)Equation de continuité:

$$A_1(u_1+v) = A_2(u_2+v) \quad (4.2)$$

$$\Rightarrow v = \frac{A_2 u_2 - A_1 v_1}{A_1 - A_2}$$

$$\Rightarrow v = \frac{A_2 u_2 - A_1 v_1 + A_1 u_2 - A_1 u_2}{A_1 - A_2}$$

$$\Rightarrow v = \frac{A_1(u_1 - u_2)}{A_1 - A_2} + u_2 \quad (4.3)$$

\*)Equation de quantité de mouvement:

$$\rho(u_1+v)A_1(u_1+v) - \rho(u_2+v)A_2(u_2+v) = \sum F_{ext}$$

En négligeant les forces de frottement et en considérons un canal horizontal, la seule force extérieure est la force de pression:

$$F_p = \rho g \eta_1 A_1 - \rho g \eta_2 A_2$$

$\eta_1$  et  $\eta_2$  : distance de la surface libre au centre de gravité de la section

D'où :

$$\rho(u_1+v)^2 A_1 - \rho(u_2+v)^2 A_2 = \rho g (A_2 \eta_2 - A_1 \eta_1) \quad (4.4)$$

En remplaçant dans (4.4) la valeur de  $(v+u_1)$ , tirée de l'équation (4.2), on obtient la vitesse de propagation:

$$v = u_2 + \frac{A_2 (A_1 \eta_1 - A_2 \eta_2)}{A_1 (A_1 - A_2)} \quad (4.5)$$

Pour un canal rectangulaire:  $\eta_i = h_i / 2$  et  $A_i = b h_i$

et

$$v = u_2 + \left[ \frac{h_1}{h_2} \frac{h_1 - h_2}{2} \right]^{1/2} \quad (4.6)$$

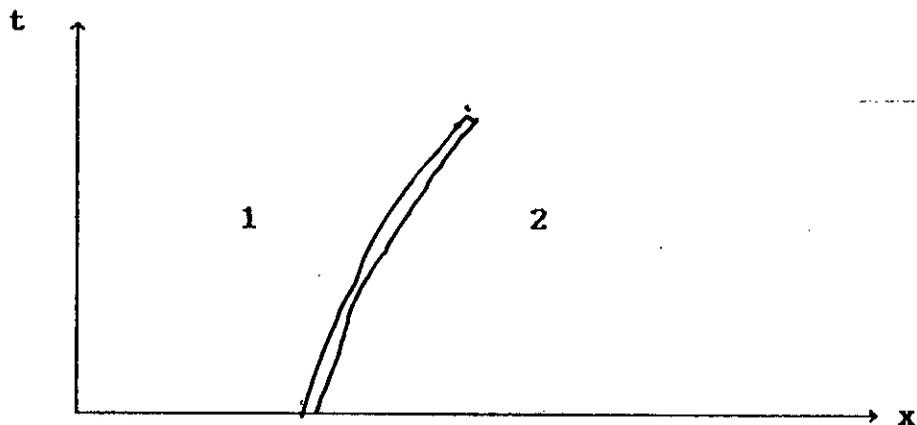


Fig 4.3 : Chemin de propagation d'une discontinuité

Le chemin de propagation de la discontinuité dans le plan  $(x, t)$ , séparant deux régions d'écoulement continue 1 et 2 (Fig 4.3). Ce chemin est la solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = v \tag{4.7}$$

Les équations (4.3) et (4.5) sont valables quoi qu'il se passe à l'intérieur de l'onde. Elles sont semblables aux relations de Rankine-Hugoniot pour les chocs dans les gaz.

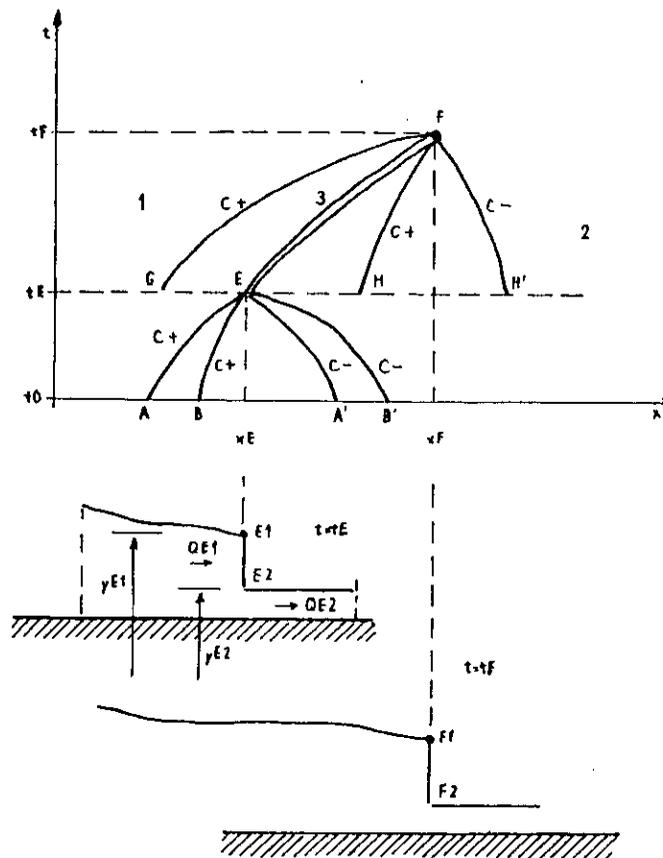


FIG 4.5 :Chemin de propagation de la discontinuité entre deux régions continues

Si on se place au point E, on voit que la solution est doublée ou il y'a deux paires de valeurs  $(y_{E1}, Q_{E1})$  et  $(y_{E2}, Q_{E2})$

correspondant au deux paires de caractéristiques  $(AB, A'E$  et  $BE, B'E)$ . Donc à partir de l'instant  $t_E$  on a une discontinuité mobile dans le système.

Le problème posé est de chercher la solution au point  $F$  à un instant  $t_F > t_E$ , en supposant que l'état d'écoulement est complètement connue à l'instant  $t_E$ .

Comme au point  $E$ , la solution au point  $F$  est doublée et par conséquent on a quatre inconnues:  $y_{F1}, Q_{F1}, y_{F2}, Q_{F2}$ . Dans la fig( 4.5) on remarque que la caractéristique positive  $C^+$  dans la région (1)  $(GF)$  coupe le chemin de la discontinuité au point  $F$ , par contre celle de la région (2) le dépasse. Deux autre caractéristiques arrivent au point  $F$  qui sont  $HF$  et  $H'F$ . La forme des caractéristiques dépend de la solution, car les équations sont non linéaires.

Par conséquent les abscisses  $x_G, x_H, x_{H'}$  sont inconnues puisqu'ils dépendent de la solution au point  $F$ . Une autre inconnue est la localisation dans l'espace représenter par  $x_F$ .

Donc pour déterminer la solution au voisinage de la discontinuité, il faudra trouver huit inconnues à savoir : quatre variables d'écoulement, et quatre abscisses.

La résolution de ce problème est possible, puisque on a à notre disposition, huit équations.:

- Deux équations différentielles correspondant à chaque caractéristique:  $GF, HF, H'F$ , donc au total, six équations.

- Deux équations algébriques (4.3) et (4.5) valable au voisinage de la discontinuité (ressaut mobile).

### CONCLUSION

Pour traiter un cas de propagation d'onde raide il faudra isoler la discontinuité et la traiter indépendamment des régions d'écoulements continues ou les hypothèses de base restent valables.

Cette méthode d'isolement peut être évitée si on utilise les équations intégrales:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial t} \right] dx dt = 0 \quad (4.8)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} + gI1 \right) \right] dt dx = 0 \quad (4.9)$$

Ces relations expriment les lois de continuité et de conservation de la quantité de mouvement, qui nécessitent que les intégrales soient nulles sur un contour du plan (x,t).

S'il existe une ligne de discontinuité des valeurs de Q et A dans (x,t) tel que PP' sur la fig 4.6. la discontinuité se propage le long de PP' avec la vitesse v. les équations (4.8) et (4.9) deviennent:

$$\oint (A dx + Q dt) = 0 \quad (4.10)$$

$$\oint (Qdx + (Q^2/A + gI)dt) = 0 \quad (4.11)$$

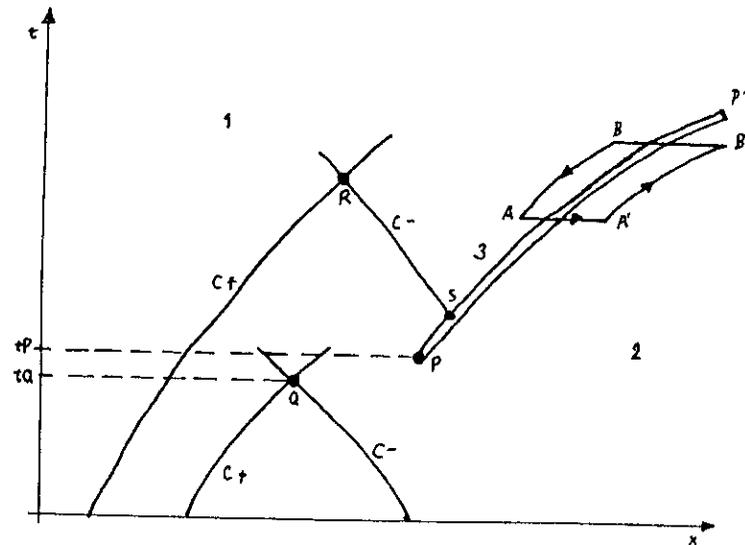


Fig 4.5 : Illustration du cas où la forme divergente doit être utilisée.

Les équations (4.10) et (4.11) peuvent être intégrées le long du contour  $ABB'A'$ . Les fonctions  $A$  et  $Q^2/A$  sont discontinues le long de la ligne définie par  $dx/dt=v$  ; séparant les régions (1) et (2). Donc on doit avoir deux valeurs des fonctions  $(A, Q)$  , une valable dans la région (1) et l'autre dans la région (2).

Une telle solution, des relations intégrales, doit satisfaire les équations de discontinuité (4.3) et (4.5).

#### 4-1-2 EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES MODÉLISANT UNE DISCONTINUITÉ

Considérons les équations différentielles (2.15) et (2.16) obtenues au chapitre II (2.20) et (2.22) écrites sous la forme condensée suivante:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial g(f)}{\partial x} = 0 \quad (4.12)$$

$$f = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix} \quad g(f) = \begin{bmatrix} Q \\ Q^2/A + gI1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

La forme sous laquelle est écrite l'équation (4.12) est appelée forme "divergente".

Si  $f_1$  et  $f_2$  sont deux solutions de l'équation (4.12) sur le domaine considéré ou existe la courbe PP' de pente  $v = dx/dt$ , les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  doivent satisfaire la condition suivante:

$$v \begin{bmatrix} f \\ \end{bmatrix}_1^2 = \begin{bmatrix} g(f) \\ \end{bmatrix}_1^2 \quad (4.14)$$

Une telle solution de (4.12) et qui satisfait la relation (4.14) est appelée solution faible. L'expression (4.14) limite la validité de la solution faible pour certaines formes d'équations d'écoulement.

Nous prenons dans cette étude, un canal rectangulaire lisse de largeur unité :

$$Q=uh \quad \text{et} \quad I1=h^2/2$$

Donc les vecteurs (4.13) s'écrivent sous la forme :

$$f = \begin{bmatrix} h \\ uh \end{bmatrix} \quad g(f) = \begin{bmatrix} uh \\ u^2 h + gh \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

ou encore , en prenons une autre forme des équations différentielles (Voir annexe I):

$$f = \begin{bmatrix} h \\ uh \end{bmatrix} \quad g(f) = \begin{bmatrix} uh \\ u^2/2 + gh \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

La relation (4.14) donne en prenant la formulation (4.15):

$$v = \frac{u_2 h_2 - u_1 h_1}{h_2 - h_1} \quad (4.17)$$

$$v = \frac{(u_2^2 h_2 + g h_2^2 / 2) - (u_1^2 h_1 + g h_1^2 / 2)}{u_2 h_2 - u_1 h_1}$$

En éliminant  $u_1$  entrent les deux expressions de (4.17) , on obtient la formule de célérité identique à celle obtenue en (4.6)

$$v = u_2 + \left[ g \frac{h_1}{h_2} \frac{h_1 + h_2}{2} \right]^{1/2} \quad (4.6)$$

Mais en faisons le même travail en prenant (4.16) on obtient:

$$v = \frac{u_2 h_2 - u_1 h_1}{h_2 - h_1} \quad (4.18)$$

$$v = \frac{(u_2^2/2 + g h_2) - (u_1^2/2 + g h_1)}{u_2 - u_1}$$

et finalement, on a:

$$v = u_2 + \left[ \frac{2 g h_1}{h_1 + h_2} \right]^{1/2} \quad (4.19)$$

Les expressions de la célérité données en (4.19) et (4.6) ne sont pas équivalentes, excepter pour  $h_1 = h_2$ .

Donc pour obtenir une solution discontinue valable, pour les équations différentielles, il faut et il suffit que ces dernières soient écrites sous une forme "divergente".

La solution valable physiquement, qui doit être solution des relations intégrales (4.8) et (4.9), est la même que celle de l'équation différentielle (4.12), si et seulement si la forme de conservation (4.15) est utilisée pour  $f$  et  $g(f)$ .

Si une autre forme divergente est utilisée, telle que celle de (4.16), une autre solution discontinue est obtenue, mais correspondant à un autre système de relations intégrales, et ne représente pas une solution physique.

#### 4-2 DISCONTINUITÉ LOCALE :

Cette discontinuité est définie comme étant un changement brusque dans la géométrie du canal ou d'un paramètre physique de ce canal, c'est le cas par exemple de la jonction de canaux, changement brusque de section, présence d'un déversoir dans le canal etc...

Contrairement à la discontinuité mobile, qui se propage dans le temps, cela est local. Pour modéliser une telle situation on doit rajouter des lois hydrauliques, qui sur une courte partie du canal prennent en considération les incidents ci produits.

Le traitement d'un tel cas est pris en générale comme étant une condition aux limites intérieures.

L'écoulement dans le canal sera modélisé par les équations de Saint Venant en rajoutons les lois hydrauliques tirés du type de la discontinuité interne.

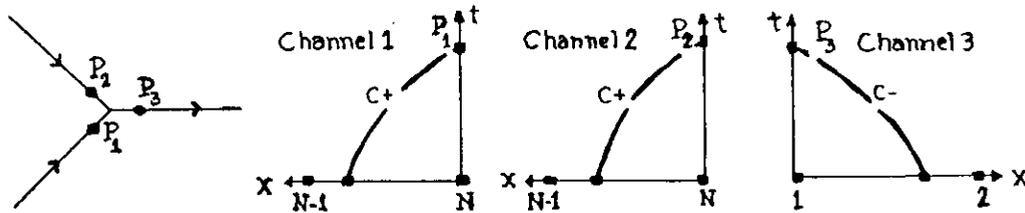


FIG 4.6 : Jonction de trois canaux

Dans cette thèse on traitera le cas de la jonction de deux canaux. On introduira des relations appelées relations de compatibilité qui découleront de considérations physiques et expérimentales, tel que la continuité de débit.

Trouver la solution aux points  $P_1, P_2$  et  $P_3$  (Fig 4.6) revient à trouver six inconnues (trois débits et trois charges). La solution du problème nécessite l'écriture de six équations. Trois d'entre elles proviennent des équations des caractéristiques, il en reste trois autres à écrire.

De la continuité de la masse, on peut écrire :

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 \quad (4.20)$$

Deux autres équations sont obtenues en considérant l'égalité des niveaux d'eau à la jonction :

$$y_1 = y_2 = y_3 \quad (4.21)$$

Notons enfin que les relations (4.20) et (4.21) sont complètement indépendantes des équations de base. Elles seront introduites dans le modèle pour calculer les variables d'écoulement à proximité de la jonction.

### CONCLUSION

On peut dire finalement, que les équations de Barré Saint Venant augmentées d'autres lois; définies par des considérations hydrauliques; modélisant les cas ou les hypothèses de base ne sont pas valables, peuvent permettre de construire un modèle de simulation des phénomènes physiques.

La technique introduite pour leur résolution permet de compléter les informations qu'on doit connaître pour pouvoir construire notre modèle de calcul.

# Chapitre V



**MODELISATION**

**NUMERIQUE**

## INTRODUCTION

Les relations intégrales et différentielles obtenues dans les parties précédentes sont la modélisation mathématique d'un écoulement non-permanent à surface libre. Cette formulation exprime des lois physiques importantes pour le phénomène étudié.

Cependant, elles ne fournissent pas de réponses directes qui intéressent l'ingénieur, tel que le débit en certains points à un instant choisi. Cette réponse est obtenue en résolvant le système d'équation de Saint Venant (2.15) et (2.16), associé aux conditions aux limites adéquates.

La résolution analytique d'un tel système; qui est quasi-linéaire du type hyperbolique et du premier ordre; est très complexe.

Cependant, il existe des techniques numériques permettant à l'ingénieur de les résoudre, et d'en avoir une valeur approchée des paramètres qu'il l'intéresse.

Dans cette partie, nous présentons les principes de base des différentes méthodes numériques de résolution de telle équations et nous en choisissons, sous certains critères, celle qu'on utilisera dans nos applications.

### 5-1 LES DIFFÉRENTES MÉTHODES NUMÉRIQUES

En mathématiques appliquées, il existe en général, trois grandes classes de méthodes pour résoudre les équations aux dérivés partielles:

- La méthode des caractéristiques
- // des différences finies (F.D.M)
- // des éléments finies (F.E.M)

Nous ne présentons pas la méthode des éléments finies, car elle est très complexe et son application ne donne pas des résultats plus exactes que ceux données par les autres méthodes(4).

#### 5-1-1 MÉTHODE DES CARACTÉRISTIQUES

Telle que déjà présentée, la théorie des caractéristiques a une signification physique. Elle nous permet de suivre la perturbation dans le temps.

Le principe de cette méthode est de transformer les équations de base en un système différentiel ordinaire; donc de remplacer les dérivés partielles par des dérivés totales; puis de résoudre ces équations par les méthodes appropriées à de telles équations.

La transformation du système sous forme conservative nous a permis d'avoir quatre équations différentielles du premier ordre :

$$\frac{dx}{dt} = u+c \quad (5.1.a)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial}{\partial x} \right] (u+2c) = -g(Sf-S_0) \quad (5.1.b)$$

$$\frac{dx}{dt} = u-c \quad (5.2.a)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial}{\partial x} \right] (u-2c) = -g(Sf-S_0) \quad (5.2.b)$$

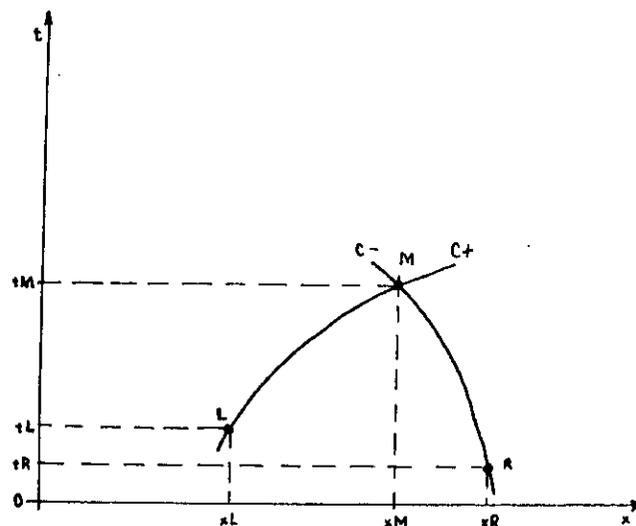


FIG 5.1: Base de la méthode des caractéristiques

Soit le domaine de solution sur le plan  $(x,t)$  tel que sur la figure 5.1. Supposons qu'on connaît l'état d'écoulement aux points L et R (conditions initiales). Les caractéristiques issues de ces deux points, définies par les équations (5.1.a) et (5.1.b) se coupent au point M.

Les coordonnées du point M  $(x_M, t_M)$  ainsi que les valeurs de  $(Q_M$  et  $y_M)$  sont les inconnues du problème, modélisé par les équations (5.1) et (5.2).

Ces relations sont exprimées le long de la ligne caractéristique et. Puisque toutes les variables sont connues aux points L et R, on peut intégrer les équations (5.1) et (5.2), pour obtenir:

$$x_M = x_L + \int_{t_L}^{t_M} (u+c) dt \quad (5.3a)$$

$$u_M + 2c_M = u_L + 2c_L + \int_{t_L}^{t_M} g(S_0 - S_f) dt \quad (5.3b)$$

$$x_M = x_L + \int_{t_L}^{t_M} (u-c) dt \quad (5.4a)$$

$$u_M - 2c_M = u_L - 2c_L + \int_{t_L}^{t_M} g(S_o - S_f) dt \quad (5.4b)$$

Dans les équations (5.3) et (5.4), aucune approximation n'est apparue. Cependant, pour le calcul des intégrales, on approxime numériquement les intégrales figurants dans ces équations. Par exemple, en utilisant la méthode de trapèzes, on a :

$$x_M - x_L = (t_M - t_L) \left( \frac{u_M + c_M}{2} + \frac{u_L + c_L}{2} \right) \quad (5.5a)$$

$$u_M + 2c_M = u_L + 2c_L + g(t_M - t_L) \left( \frac{S_{oM} - S_{fM}}{2} + \frac{S_{oL} - S_{fL}}{2} \right) \quad (5.5b)$$

$$x_M - x_R = (t_M - t_R) \left( \frac{u_M - c_M}{2} + \frac{u_R - c_R}{2} \right) \quad (5.6a)$$

$$u_M - c_M = u_R - 2c_R + g(t_M - t_R) \left( \frac{S_{oM} - S_{fM}}{2} + \frac{S_{oR} - S_{fR}}{2} \right) \quad (5.6b)$$

Les quatre relations (5.5a), (5.5b), (5.6a) et (5.6b) forment un système de quatre équations algébriques non linéaires qui peuvent être résolues par un algorithme itératif.

La précision sur  $x_M$ ,  $t_M$ ,  $u_M$  et  $y_M$  est fonction de la méthode itérative utilisée et l'erreur d'approximation des intégrales.

Si maintenant on discrétise le domaine du plan  $(x,t)$  telle que le montre la fig 5.2

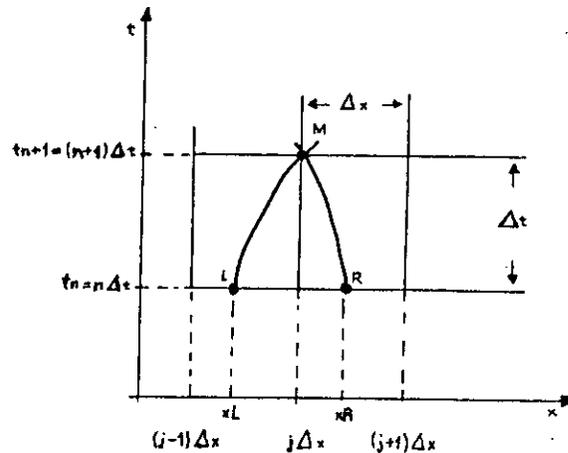


FIG 5.2: grille de la méthode de Hartree

La discrétisation par pas de temps et d'espace constants est appliquée en utilisant une interpolation: C'est la méthode de Hartree (4,8,10).

Les deux caractéristiques qui doivent se couper au point  $M(j\Delta x, (n+1)\Delta t)$  seront prolongées en arrière ou elles coupent le niveau de temps  $n\Delta t$  aux points L et R, dont les abscisses sont inconnues, puisque  $x_L$  et  $x_R$  ne coïncident pas avec les points de discrétisation. Leur évaluation nécessite une interpolation entre les points  $((j-1)\Delta x, j\Delta x)$  et  $(j\Delta x, (j+1)\Delta x)$  et ceux-ci pour estimer  $u_L, y_L, u_R$  et  $y_R$ . Une fois ces points estimés on revient aux équations (5.5) et (5.6) pour calculer le point M. (cette méthode sera explicitée lors de la discrétisation des conditions aux limites)

## CONCLUSION

La méthode des caractéristiques n'est pas largement appliquée en modélisation numérique, ceci est due à sa complexité. Elle requiert l'interpolation des données ainsi que la solution final. Cependant, elle reste la meilleure méthode de calcul des conditions aux limites (4,7,8).

## 5-1-2 MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES

Le principe de base de cette méthode est: "Les fonctions continues, qui décrivent l'état d'écoulement sont représentées par des fonctions connues en un nombre fini de points dans le domaine considéré .

Les équations différentielles seront remplacées par des relations algébriques. Les différentes façons avec lesquelles les dérivés sont remplacées par les fonctions discrétisées sont appelées :Schéma aux différences finies.

La discrétisation du plan  $(x,t)$  donne les points en lesquelles on doit chercher la solution tel que le montre la figure 5.3

Dans cette méthode les équations de Saint Venant peuvent être résolues directement ,par une méthode explicite ou implicite.

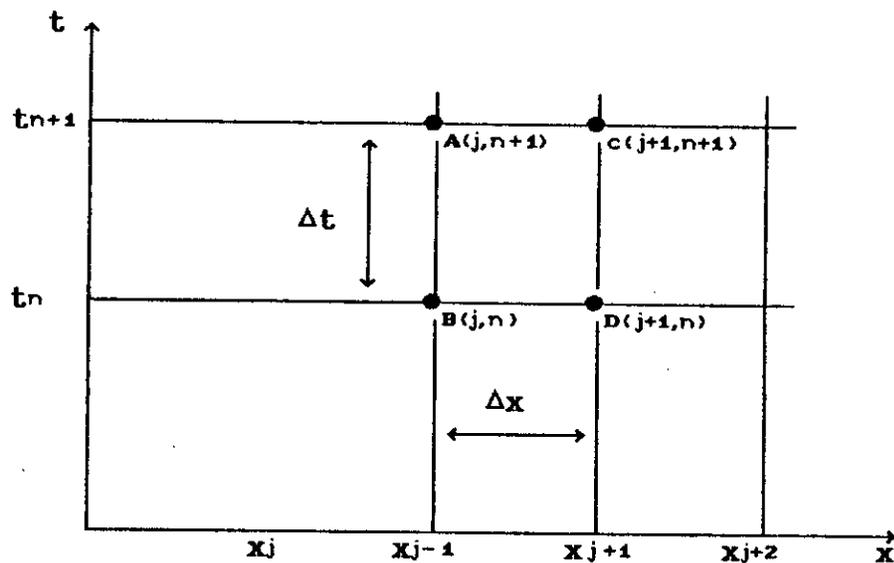


FIG 5.3 :Grille de discrétisation

● Méthodes explicites :

Les schémas de ce type permettent d'arranger les équations dans le but de calculer  $Q_M$  et  $y_M$  point par point. Le point  $M$  sera calculée indépendamment de toute autre point.

Pour ce faire, la discrétisation appropriée serait d'évaluer les dérivés spatiales en terme de conditions connues au temps  $t - \Delta t$  et de faire apparaître les conditions inconnues dans l'évaluation de la dérivés temporelles.

Dans ce travail, nous utiliserons deux schémas numériques. Le premier est à une seule étape, le second est à pas fractionné.

Soit l'écriture condensée des équations de base suivante:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = H(x, t, U) \quad (5.7)$$

●Le schéma simple se présente comme suit:(13,14)

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_j^{n+1} - U_j^{n-1}}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F_{j-1}^n - F_{j+1}^n}{2\Delta x}$$

Puis, on remplace chaque fonction  $f$  ( $U$  et  $F$ ) par l'approximation:

$$f_j^n = \frac{f_{j-1}^n - f_{j+1}^n}{2}$$

Et en remplaçant dans les équations de base on obtient les expressions vectorielles suivantes:

$$U_j^{n+1} = 1/2(U_{j-1}^n - U_{j+1}^n) + \lambda/2(F_{j-1}^n - F_{j+1}^n) + (\Delta t/2)H_j^n \quad (5.8)$$

Cette expression permet de calculer les variables d'écoulement en une seule étape. La précision des résultats est du premier ordre en espace et en temps.

●Schéma de McCormack:(double étape)

McCormack, dans l'étude des équations de Navier-Stokes de fluides compressibles, développe un schéma non-centré à double étape. La base de ce schéma est de remplacer la dérivé spaciales par une différence arrière ou avant. En utilisant l'écriture (5.7) la solution au temps  $t+\Delta t$  est obtenue par application du schéma de McCormack ,écrit sous la forme suivante:

Prédiction:

$$U_j^{(*)n} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ (1-\varepsilon)F_{j+1}^n - (1-2\varepsilon)F_j^n + \varepsilon F_{j-1}^n \right] + \Delta t H_j^n \quad (5.9a)$$

Correction

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2} (U_j^n + U_j^{(*)n}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ \varepsilon F_{j+1}^* + (1-2\varepsilon)F_j^* + (\varepsilon-1)F_{j-1}^* \right] + \frac{\Delta t}{2} H_j^* \quad (5.9b)$$

C'est une forme qui permet le calcul des variables d'écoulement en deux étapes. Elle donne deux possibilités pour remplacer les dérivés spaciales, et donc on a deux versions ( $\varepsilon=0$  et  $\varepsilon=1$ ). Les équations (5.9) montrent qu'on a une précision uniforme du second-ordre en temps et en espace.

●Stabilité:

Pour les équations hyperboliques la zone de dépendance, des variables dépendantes, est enveloppée par les caractéristiques passant par le point M. La méthode explicite doit avoir un domaine numérique qui doit être incluse dans cette zone. (4,13,14)

Ceci est exprimée par la condition de Courant-Friedrich-Lewy (C.F.L). Cette condition limite le pas de discrétisation.

Donc en prenant un pas d'espace constant, la condition C.F.L. doit être vérifiée pour qu'on reste dans la zone de dépendance et avoir par conséquent une stabilité numérique.

$$\Delta t \leq \frac{Cr \Delta x}{\max(|Q/A \pm (gy)^{1/2}|)} \quad (5.10)$$

Où Cr est le nombre de Courant dont la valeur doit être optimisée. Ce nombre est pris en générale égale à 0.8 (4,8,9).

Le dénominateur est évalué en chaque point de la grille, en prenant sa valeur maximale.

●Méthodes implicites:

Les équations sont résolues simultanément pour l'ensemble des points, par pas de temps constants. Donc tout les points d'un même niveau de temps seront calculés simultanément.

Ces méthodes sont inconditionnellement stables, et par conséquent le pas de temps peut être assez grand. Donc si on traite des phénomènes rapidement variés, cette méthode peut ne pas atténuer les variations brusques.

### 5-2 CHOIX DE LA MÉTHODE DE RÉOLUTION:

La méthode explicite est choisie pour la résolution des équations du modèle. Cette méthode permet d'avoir, lors des calculs un pas de temps très faible, ce qui permet de simuler les pointes, de courtes durées.

De plus la programmation de cette méthode est plus simple à mettre en oeuvre (calcul direct des variables d'écoulement). Par contre pour la méthode implicite, après avoir écrit toutes les équations discrétisées, il faudra développer un algorithme de résolution du système linéaire obtenue.

Le temps de calcul par cette méthode est beaucoup plus petit que celui que nécessite la méthode implicite (3,8).

Elle nous permet d'avoir une économie sur la mémoire de l'ordinateur.

Le seul inconvénient de cette méthode est qu'il faut toujours s'assurer de sa stabilité.

### 5-3 DISCRÉTISATION DES CONDITIONS AUX LIMITES

Les schémas explicites peuvent être utilisés en tout point de la grille de calcul sauf aux extrémités (Garcia 1992). Si une variable est donnée en l'une de ces sections limites, on a besoin de calculer la seconde.

La seule technique permettant un tel calcul est la méthode des caractéristiques (Cunge 1980). Tout autre moyen simplifié entraînera des difficultés supplémentaires ainsi que des erreurs. (4,13)

Tel que vue précédemment, le régime d'écoulement détermine les conditions à connaître.

•Cas subcritique:

Dans ce cas, une condition physique doit être donnée, l'autre est calculée en utilisant l'équation caractéristique (Voir annexe II):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \left( \frac{Q}{A} \pm (gy)^{1/2} \right) \frac{\partial Q}{\partial x} + b \left( - \frac{Q}{A} \pm (gy)^{1/2} \right) \left[ \frac{\partial y}{\partial t} + \left( \frac{Q}{A} \pm (gy)^{1/2} \right) \frac{\partial y}{\partial x} \right]$$

La caractéristique  $C^+$  est utilisée à l'aval, et la seconde  $C^-$  en amont. En fixant la grille de calcul, la méthode originale des caractéristiques, n'est pas utilisée. On utilisera la méthode de Hartree.

Dans la fig 5.4 on connaît les valeurs de  $(y, Q)$  aux points 1 et 2, ceux du point R sont estimés en utilisant la technique itérative décrite ci-dessous.

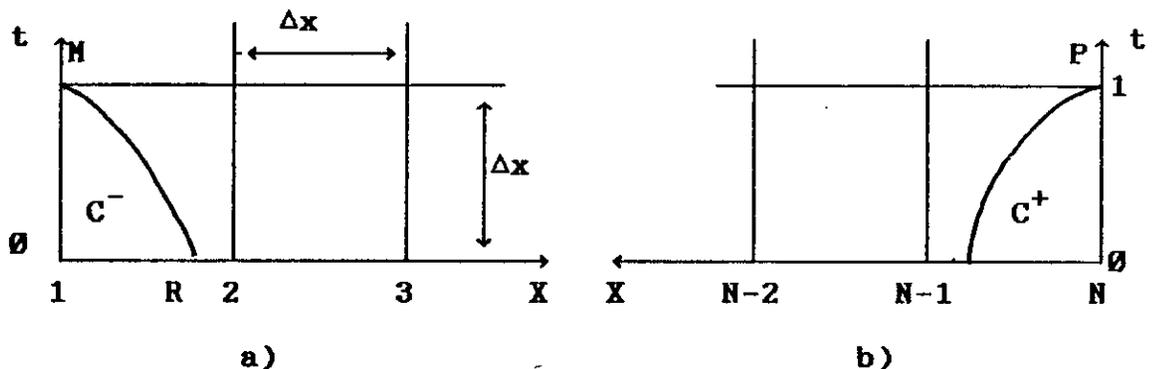


FIG 5.4: Points de calcul utilisés pour le calcul du pas de temps aux limites pour le cas fluvial

1<sup>er</sup> approximation:

- 1- la première valeur de  $x_R$  est calculée en utilisant la pente au point(1,n)

$$x_R = x_M - \left( \frac{Q}{A} - (gy)^{1/2} \right) \Delta t \quad (5.11)$$

- 2- Les valeurs de  $Q$  et  $y$  sont calculées par interpolations linéaires entre les points 1 et 2

$$Q_R = Q_2^n - (Q_2^n - Q_1^n) \frac{(x_2 - x_R)}{\Delta x} \quad (5.12)$$

$$y_R = y_2^n - (y_2^n - y_1^n) \frac{(x_2 - x_R)}{\Delta x} \quad (5.13)$$

L'équation caractéristique est en suite utilisée, pour obtenir la condition au point M ,de la manière suivante:

$$Q_M - Q_R + \left( - \frac{Qb}{A} - b(gy)^{1/2} \right)_R (y_M - y_R) = \Delta t (A(S_o - S_f))_R \quad (5.14)$$

L'expression (5.14) peut être écrite sous la forme linéaire:

$$Q_M = A_1 y_M + B_1 \quad (5.15)$$

où

$$A_1 = \left( \frac{Qb}{A} + b(gy)^{1/2} \right)_R$$

$$B1=Q_R+y_R\left(-\frac{Qb}{A}-b(gy)^{1/2}\right)_R+g\Delta t^{\circ}A(S_o-S_f)\xi_R$$

sont fonctions de quantités connues au temps  $n\Delta t$ .

*2<sup>ème</sup> approximation et suite:* On refait l'étape 1 en utilisant des valeurs moyennes:

$$x_R=x_M-\frac{\Delta t}{2}\left[\left(\frac{Q}{A}-b(gy)^{1/2}\right)_M+\left(\frac{Q}{A}-b(gy)^{1/2}\right)_R\right] \quad (5.16)$$

puis les interpolations (5.13) et (5.12) sont répétées en utilisant la nouvelle valeur de  $x_R$ .

Les variables dépendantes aux point M sont re-calculées par la moyenne des points R et le dernier point calculer.

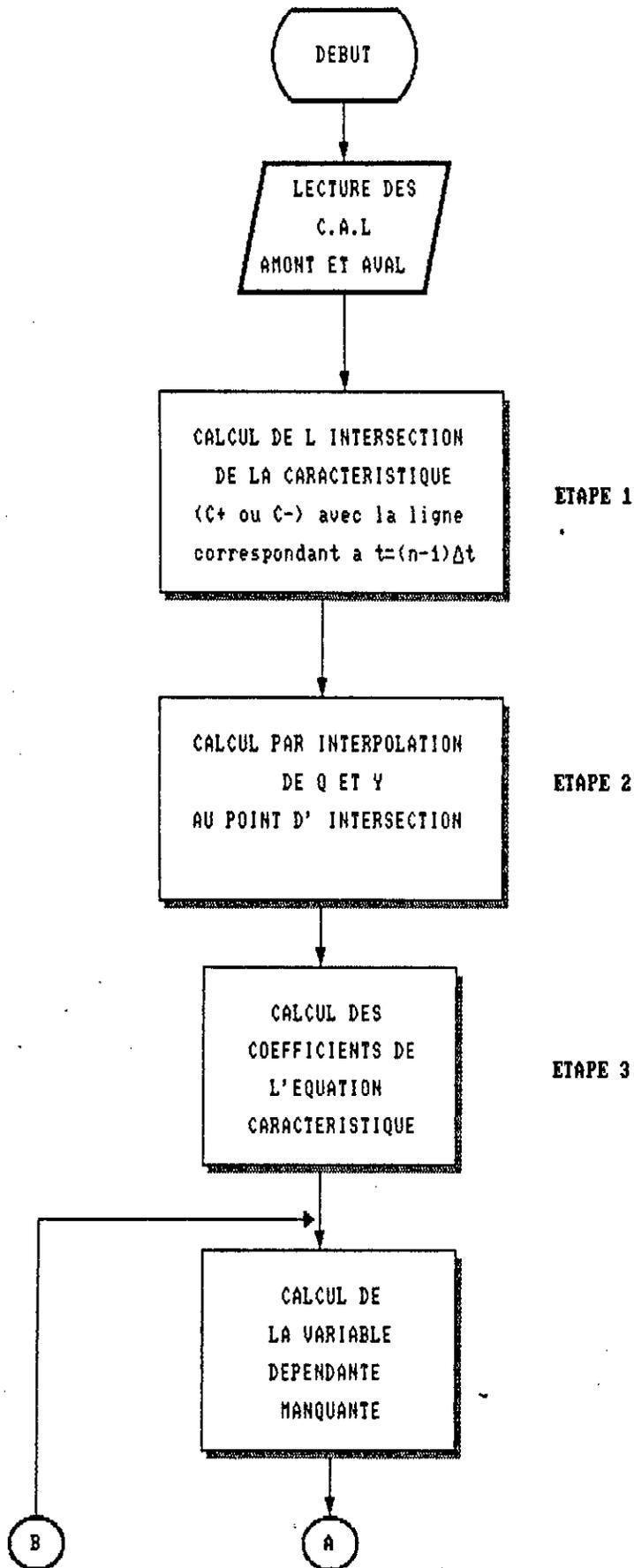
$$Q_M-Q_R+\frac{(y_M-y_R)}{2}\left[\left(-\frac{Qb}{A}-b(gy)^{1/2}\right)_R-\left(-\frac{Qb}{A}-b(gy)^{1/2}\right)_M\right]=\frac{\Delta t}{2}^{\circ}(gA(S_o-S_f))_R+(gA(S_o-S_f))_M\xi \quad (5.17)$$

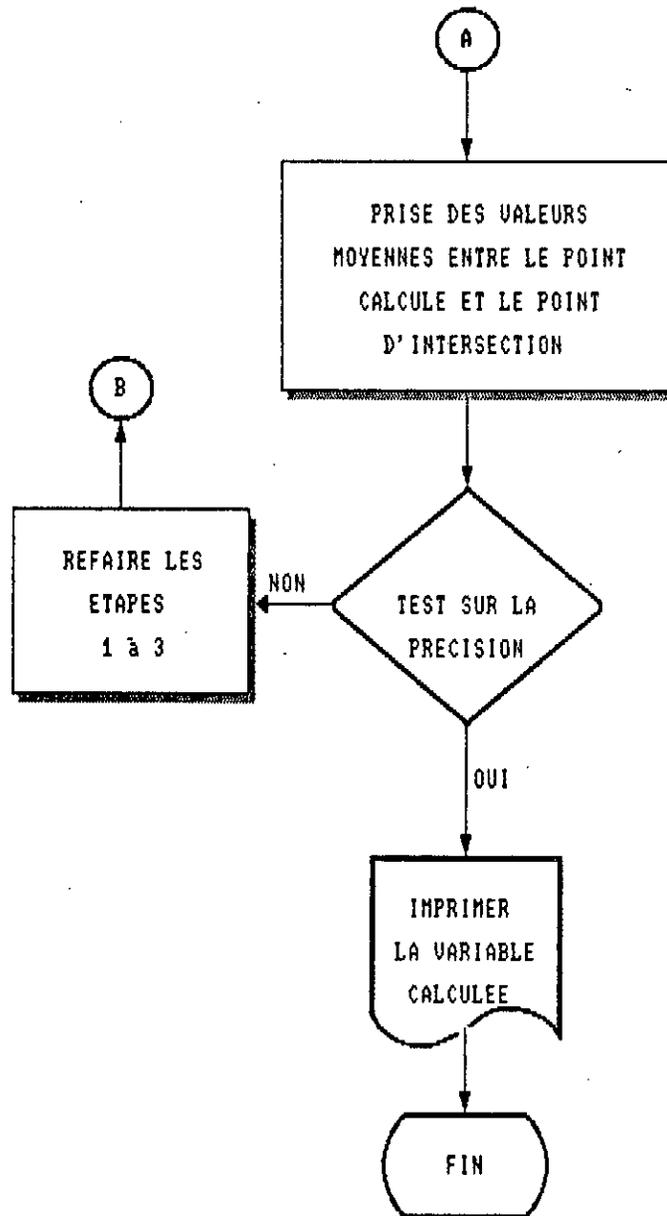
et la relation linéaire (5.15) est réécrite avec les nouveaux coefficients.

Ces différentes étapes sont reprises jusqu'à obtention de la précision voulue.

La même procédure est suivie pour le calcul du point P, elle nous entraînera aux même relations linéaires suivant  $C^+$ .

organigramme de calcul de  
la condition subcritique





•Cas discontinue ou supercritique:

L'algorithme précédant doit être changé si on est en présence d'une discontinuité ou l'écoulement est supercritique.

Pour l'écoulement supercritique, deux conditions doivent être données à l'amont et aucune à l'aval.

Dans le cas de la discontinuité au début ou à la fin du canal l'équation caractéristique ne peut être utilisée, car elle n'est valable que pour des fonctions continues.

Les relations modélisant les discontinuités doivent être utilisées

$$(A_2 - A_1)v + Q_1 - Q_2 = 0 \quad (5.18a)$$

$$(Q_2 - Q_1)v + \left( \frac{Q^2}{A} + \frac{gby^2}{2} \right)_1 - \left( \frac{Q^2}{A} + \frac{gby^2}{2} \right)_2 = 0 \quad (5.18b)$$

et en éliminant la vitesse  $v$  entre les deux équations (5.18) on obtient:

$$\frac{Q_2}{A_2} = \frac{Q_1}{A_1} \pm (y_2 - y_1) \left( \frac{g(y_2 + y_1)}{2y_2y_1} \right)^{1/2} \quad (5.19)$$

Si, par exemple, un front discontinue existe au début du canal, ou  $y_2$  et  $Q_2$  sont connues (conditions initiales) et  $Q_1$  est donné par la condition limite. La valeur de  $y_1$  est obtenue en utilisant (5.19) ou on a une seule inconnue.

### CONCLUSION

En définitif, la résolution des équations aux dérivés partielles sous la forme conservative se fera par la méthode de différences finies explicite.

Pour chaque type d'écoulement (subcritique ou supercritique) nous associons l'algorithme de calcul des conditions aux limites appropriés, pour la résolution complète du problème simulé.

# Chapitre VI



## LE MODELE

## NUMERIQUE ET

## SES APPLICATIONS

## INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous décrivons la construction algorithmique du modèle que nous avons établie ainsi que certaines applications qu'on a effectuées dans le but de voir l'efficacité du modèle qui simule les phénomènes de propagation d'ondes raides et des discontinuités.

Nous commençons par l'étude de la propagation d'onde simple et de sa réflexion. Nous étudierons par la suite le cas complexe de la propagation d'ondes multiples dans un même canal. On analysera aussi le cas de propagation d'une onde dans un canal comportant une discontinuité locale (la jonction de deux canaux).

Les résultats numériques obtenues seront comparées à ceux donnés par la théorie, et à certains résultats expérimentaux dans le but de voir la perfection du modèle et son pouvoir de ressortir clairement les phénomènes physiques apparaissant dans les écoulements non permanents brusquement variés.

## 1 DESCRIPTION DU MODELE NUMERIQUE

Le modèle numérique qu'on propose, détermine d'abord le type d'écoulement (subcritique ou supercritique), par le calcul du nombre de Froude.

Une fois la nature de l'écoulement connue, le modèle à des branchement automatique lui permettant d'utiliser l'algorithme approprié pour le calcul des conditions aux limites nécessaires.

Les variables de l'écoulement, à un instant choisi, peuvent être ensuite calculées en utilisant les équations discrétisées.

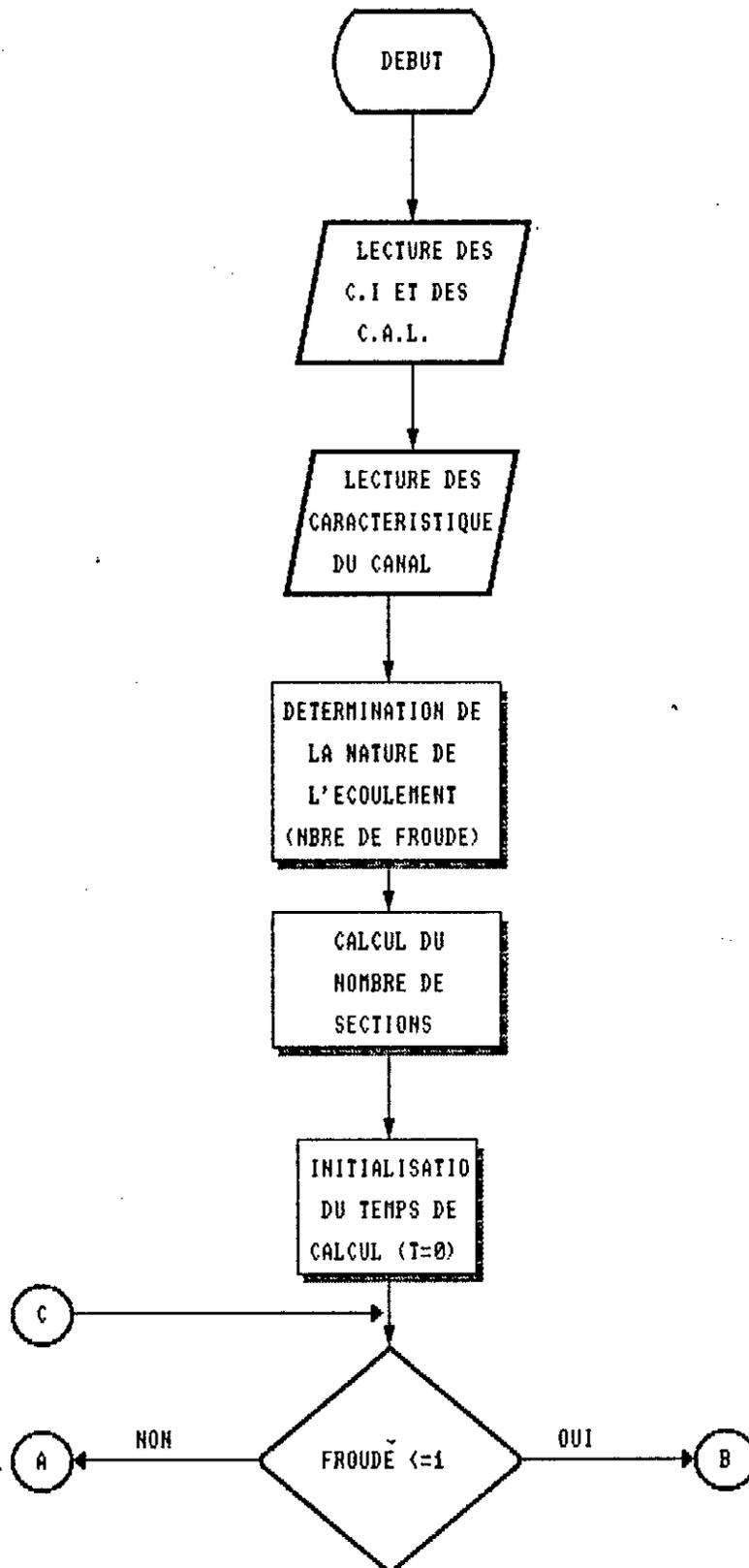
### 1-1 DESCRIPTION DU PROGRAMME

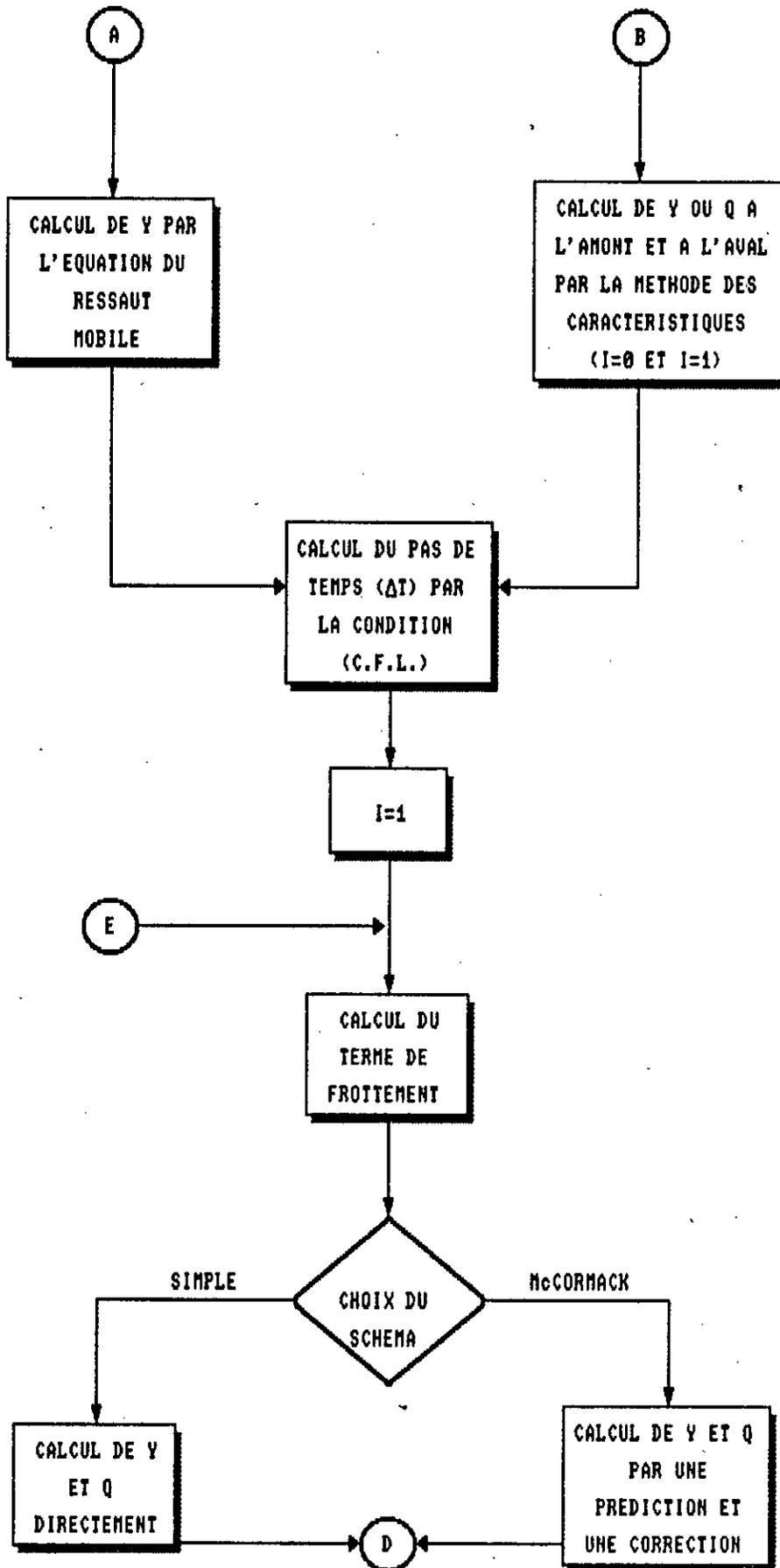
Le langage de programmation choisi, pour la mise en oeuvre de ce modèle est le langage FORTRAN, en raison de sa très grande habilité aux calculs techniques et scientifiques et la simplicité de ses instructions.

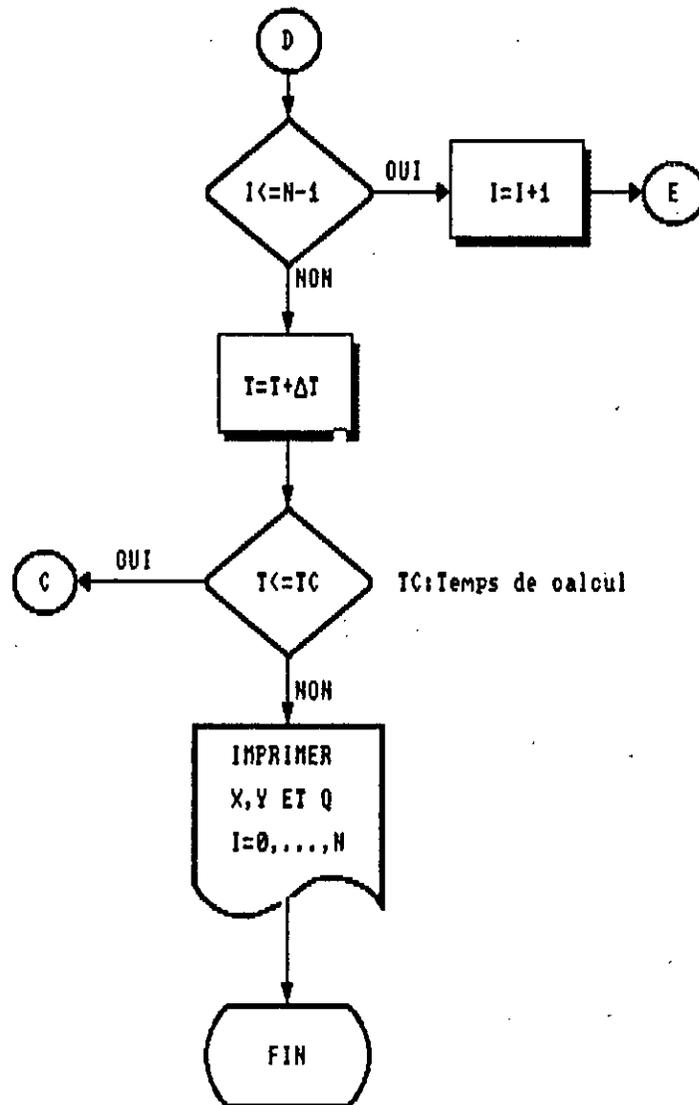
Nous avons utilisés une programmation modulaire, le programme principale ne contient que des tests permettant de faire les calculs par l'algorithme voulu.

La description complète de la construction et la structuration du modèle est résumée dans l'organigramme de base dessiner ci-après

## Organigramme general







## 2 APPLICATIONS DU MODÈLE

### 2-1 ETUDE D'ONDES SIMPLE

Les techniques de modélisation de discontinuité, que nous avons développée dans l'étude théorique, seront utilisées pour trouver la solution dans le cas de l'augmentation brusque de débit dans un canal. Cette augmentation donnera naissance à une onde de choc. La variation brusque du débit peut être créée par une ouverture brusque d'une vanne ou d'une turbine hydraulique.

On fera la modélisation d'un écoulement non-permanent dans un canal horizontal, lisse (la rugosité du canal est nulle) et de section rectangulaire de largeur unité.

Initialement, dans le canal, l'eau est au repos ayant une certaine hauteur. Donc les données initiales sont:

$$Q_0 = 0 \text{ m}^3/\text{s} \quad \text{et} \quad y_0 = 2 \text{ m}$$

On introduit un débit brusque ( $Q = 140 \text{ m}^3/\text{s}$ ) dans le canal, une onde est créée et l'écoulement à l'amont devient supercritique. On a donc besoin de deux conditions amont pour pouvoir résoudre nos équations. Ces conditions sont:

- La variation du débit  $\Delta Q$ .
- La hauteur d'eau correspondant à ce débit.

La première condition est donnée directement par la valeur de la discontinuité du débit. La seconde condition sera déterminée à partir des équations du ressaut mobile .

Les caractéristiques numériques du canal sont données par la figure ci-dessous

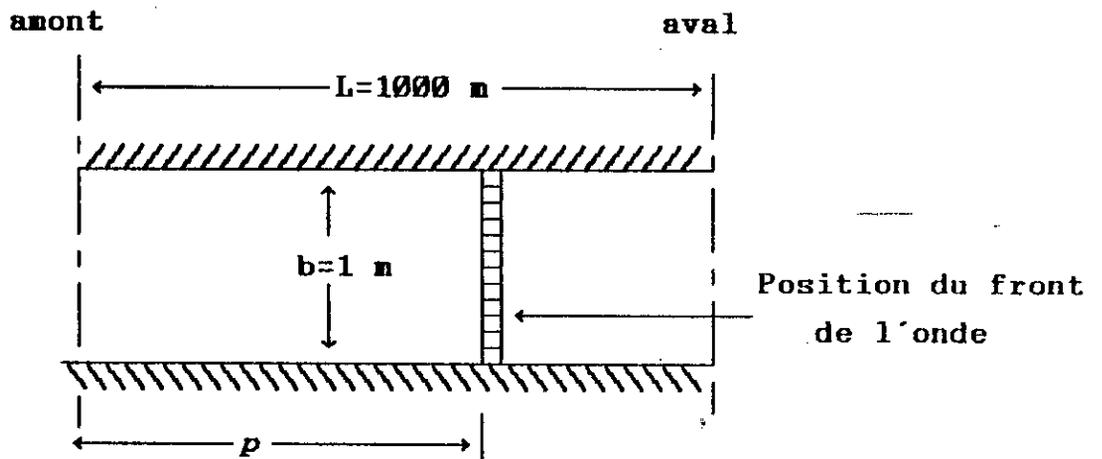


Fig 6.1 Vue de dessus du canal

#### Problème posé:

Le but recherché est de déterminer la position de l'onde ainsi provoquée et la hauteur du front d'onde correspondant.

Théoriquement, cette position peut être établie en déterminant la célérité de l'onde qui est donnée par la relation suivante:

$$v = U_0 \pm (gy_1(y_1 + y_0)/2y_0)^{1/2} \quad (6.1)$$

$v$  = célérité de l'onde

$y_0$  = hauteur initiale

$y_1$  = hauteur du front d'onde

$U_0$  = vitesse initiale

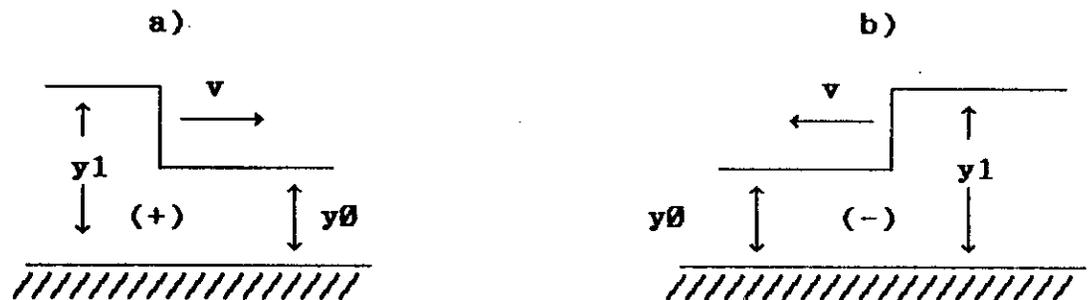


FIG 6.2: Directions possibles de propagation.

a) de l'amont vers l'aval (onde positive)

b) de l'aval vers l'amont (onde négative)

On a une onde positive se propageant sur de l'eau au repos ( $U_0=0$ ), la valeur numérique de cette vitesse est:

$$v = 17.3 \text{ m/s}$$

La position de l'onde notée  $p$ , à l'instant  $t$  est donnée par l'expression suivante:

$$p = v \cdot t \quad (6.2)$$

Connaissant le temps pour lequel on cherche la position de l'onde et la célérité de cette dernière, on a par la relation (6.2) la position théorique de l'onde.

La Figure 6.3 montre les résultats numériques obtenues par le schéma à double étapes de McCormak, pour un pas d'espace de  $\Delta x=10$  m et un incrément de temps donnée par la condition de Courant.

Une autre exécution du programme à été faite pour un canal rectangulaire ,avec frottement ( $n=0.01$ ),un état initial similaire au précédant ,et une variation brusque de débit créant un écoulement subcritique (fig 6.4)

#### Analyse des résultats:

1-La Figure 6.3b (version II  $\epsilon=0$ ) montre qu'au niveau du front d'onde il y a un nuage de points dispersé ,qui n'a pas de signification physique.Ce qui n'est pas le cas si on utilise la version I ( $\epsilon=0$ ,Fig 6.3a).

2-La Figure 6.3c montre le profil de l'eau le long du canal.On remarque la présence d'un ressaut ondulé juste à l'amont du canal. La présence d'un tel phénomène est due à la manipulation faite pour la création d'une telle onde.

La position de l'onde à l'instant  $t=40.5$  sec est:

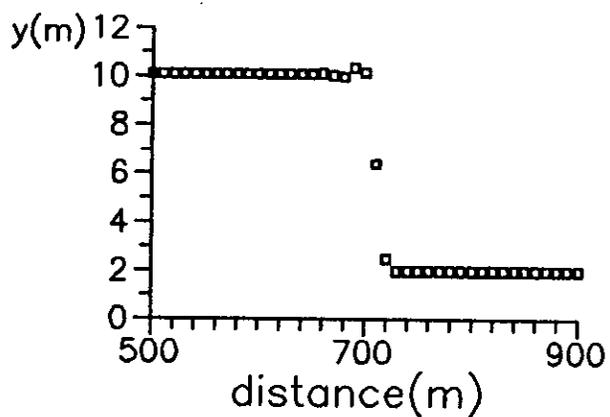
$$p=17.3*40.5=700.65 \text{ m}$$

Donc à l'instant  $t=40.5$  s l'onde devrait se trouver à 700 m de l'amont. Le profil de l'eau calculé numériquement montre que l'onde est à la position 703 m. Le résultat donné par le modèle est très proche du résultat théorique.

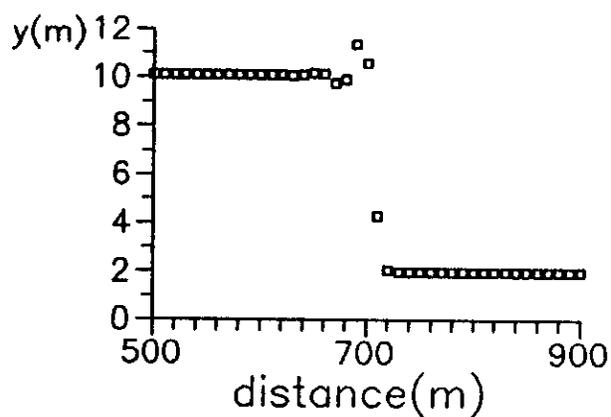
3-Comme le montre la fig 6.4, pour un canal avec frottement, l'onde à une célérité moins faible,car une partie de son énergie

est perdue par l'énergie produite par la contrainte existant entre le fluide et les parois du canal.

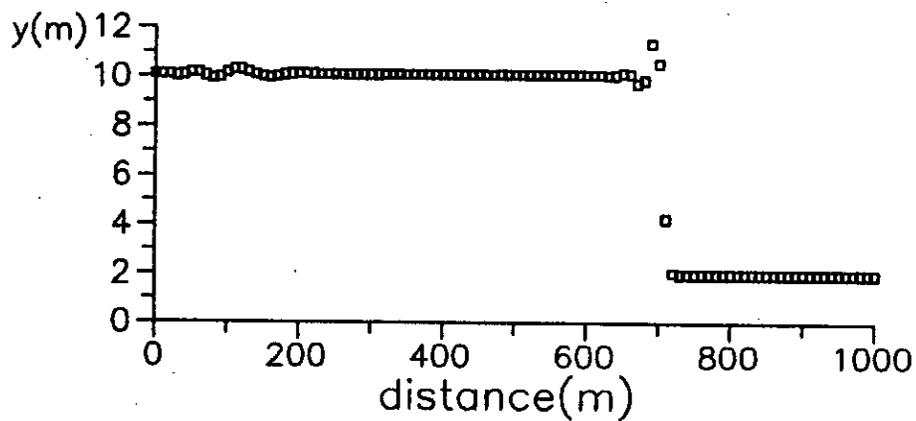
Notre résultat numérique est comparé avec un résultat expérimentale obtenue au laboratoire d'hydraulique du département de science de l'eau de l'université de Californie (15), et il y a une très bonne correspondance des résultats.



a) version 1 (epsilon=0)



b) version 2 (epsilon=1)



c) profil en long

FIG 6.3: PROPAGATION D'UNE ONDE SIMPLE

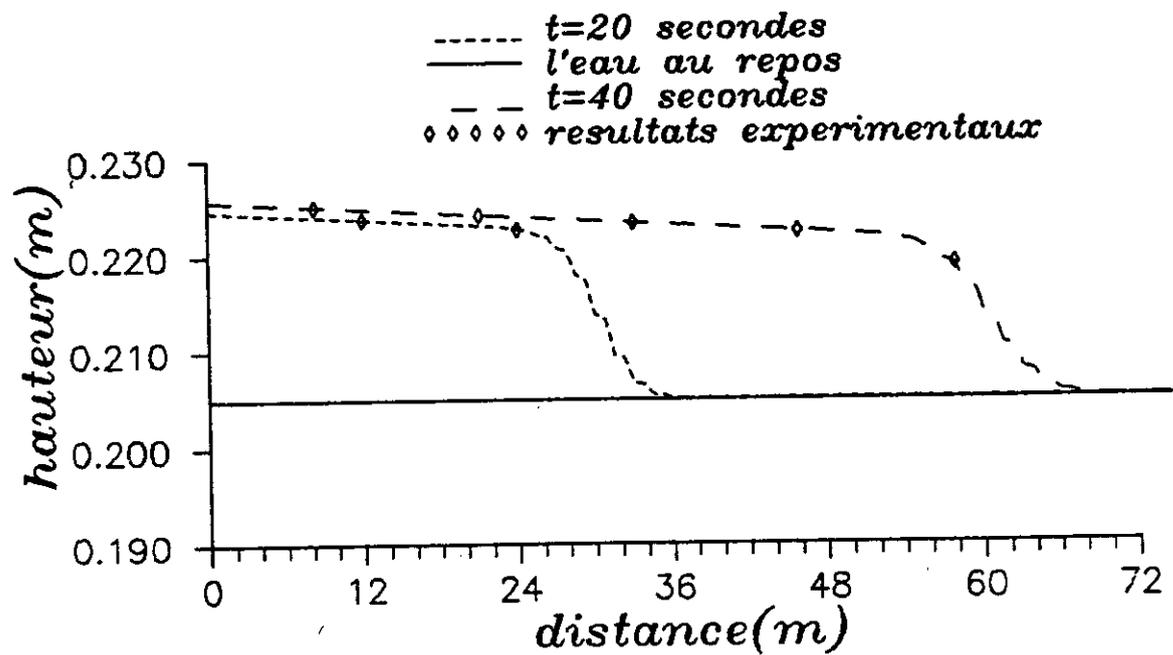


FIG 6.4: PROPAGATION D'ONDE DE CHOC.  
PROFILS SUCCESSIFS

## 2-2 PROPAGATION-RÉFLEXION D'UNE ONDE DE CHOC

Après avoir étudié la propagation de l'onde simple, analysons la réflexion de cette même onde. Pour ceci considérons, une onde supposée avancer sur une eau au repos et dans un canal supposé fermer à son extrémité aval (débit nul au niveau de la section aval).

Le problème posé est de chercher l'évolution de l'onde, après réflexion à l'aval, dans le temps.

### Analyse des résultats:

L'onde se propage initialement de l'amont vers l'aval l'aval (temps  $t_1$  sur la Fig 6.4). A son arrivé à l'aval, où le débit est nulle, une partie de l'énergie cinétique est transformée en énergie potentielle, ce qui donne une augmentation brusque de la hauteur du front d'onde. Il y'aura donc apparition d'une onde négative, qui se propagera de l'aval vers l'amont avec une hauteur plus importante et une célérité réduite, c'est ce que montre la Fig 6.4 au temps  $t_2$ .

L'onde négative ainsi créée, continue de se propagée (temps  $t_3$ ), jusqu'a son arrivée à l'amont ou le débit entrant est constant. Donc dans la section amont on aura un choc entre deux écoulement de sens contraire, et par conséquent une autre partie de l'énergie cinétique est perdue et l'onde se réfléchira une autre fois de l'amont vers l'aval avec une célérité moins importante.

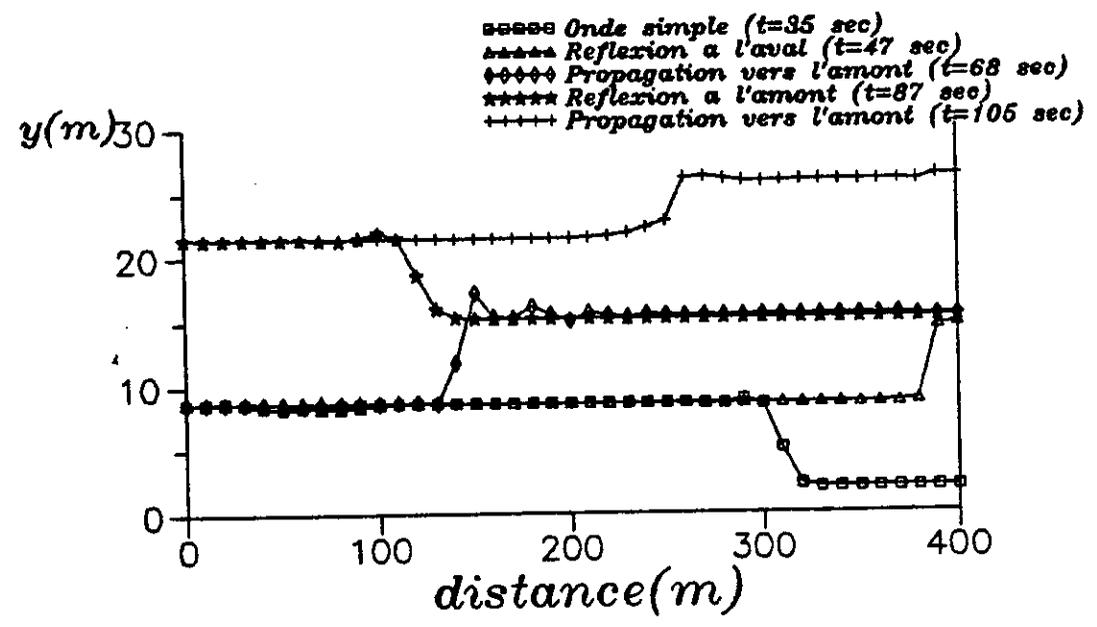


FIG 6.5 :PROPAGATION ET REFLEXIONS D'UNE ONDE DE CHOC

Le phénomène ainsi décrit se répétera jusqu'à ce que l'onde perde toute son énergie cinétique et s'amortira quand on avance dans le temps.

Le cas étudié ci-dessus est très important dans la pratique. En prenant comme exemple les canaux de restitution d'une station hydro-électrique. Dans une telle situation les ingénieurs s'intéressent à :

- L'évolution de l'onde dans le canal.
- Au temps d'amortissement de cette onde et ceci afin de donner les dimensions adéquates au canal pour éviter des débordement et la destruction des installations électro-mécanique que peut contenir un tel canal.

### 2-3 ÉTUDE DE LA PROPAGATION D'UN DOUBLE CHOC

Dans ce cas on considérera le cas de la propagation d'un front d'ondes sur un autre existant initialement dans le canal. Cette situation est créée par de variations brusques de débit séparée par un intervalle de temps réduit.

On reprend le canal de la première application dans la quelle une première augmentation de débit de 0 à  $11.9 \text{ m}^3/\text{s}$ , la hauteur correspondante est  $y=2.7 \text{ m}$ . Après 50 s une autre augmentation de débit ,de  $11.9$  à  $47.62 \text{ m}^3/\text{s}$  ,est supposée avoir lieu.

#### Analyse des résultats

Comme le montre la figure 6.5 ,la première onde se propage vers l'amont de la même manière qu'une onde simple. Après introduction

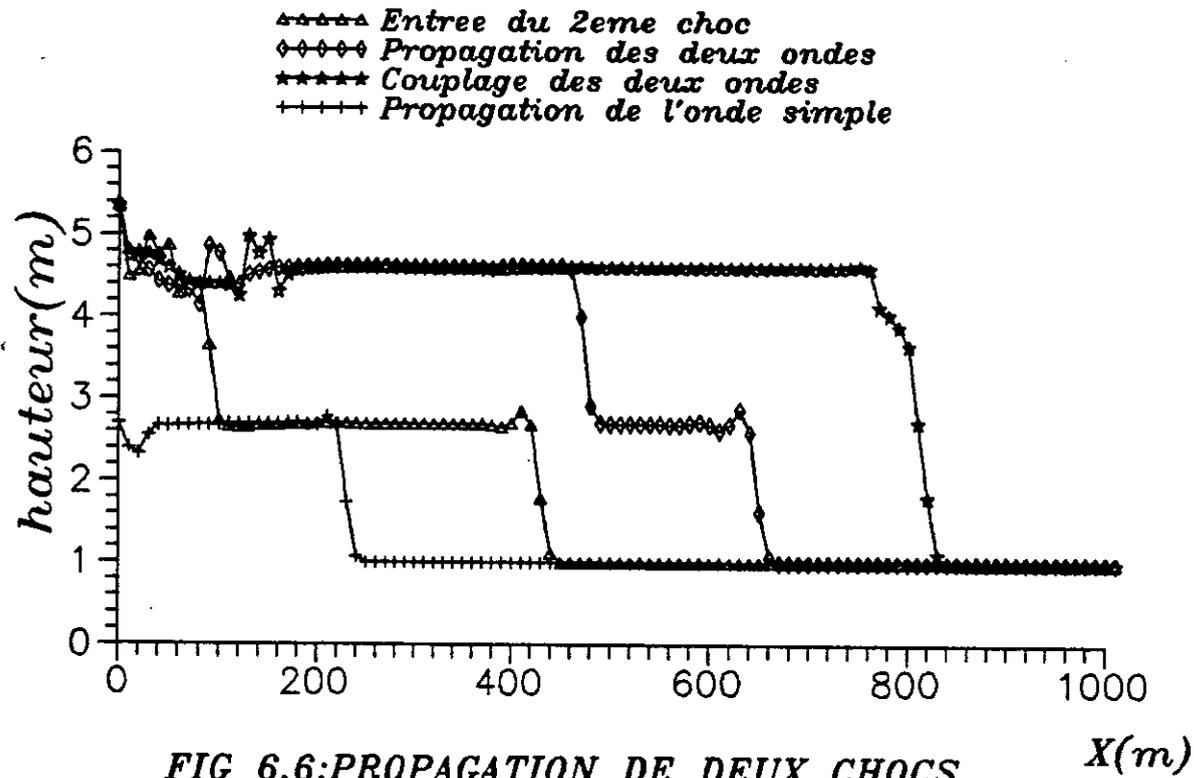


FIG 6.6: PROPAGATION DE DEUX CHOCS DIFFERENTS

de la deuxième discontinuité, on a deux fronts d'ondes superposés qui se propagent de l'amont vers l'aval.

Après un certain temps de propagation ( $t=120$  s), les deux fronts se couplent pour former un seul front dont la hauteur est la somme des deux précédant. Ce front continue de se propager vers l'aval comme une onde simple.

#### 2-4 ETUDE DE LA JONCTION DE DEUX CANAUX

Supposant qu'on ait l'étude de la propagation d'une onde créée dans un canal ayant la structure de ci-dessous

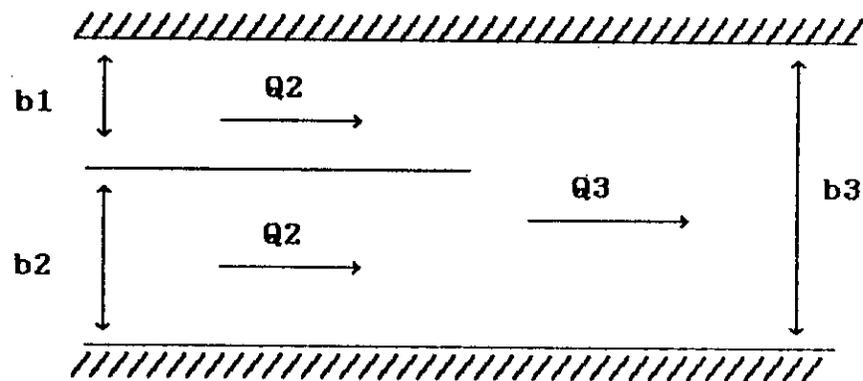


Fig 6.6 Système de deux canaux en parallèle.

Les trois canaux ainsi considérés ont les caractéristiques suivantes:

- La pente du fond est nulle ainsi que les frottements
- Les canaux ont une section rectangulaire uniforme
- L'écoulement est supposé parallèle immédiatement avant et après la jonction
- Les largeurs des canaux vérifient  $b_3 = b_2 + b_1$

### Analyse des résultats

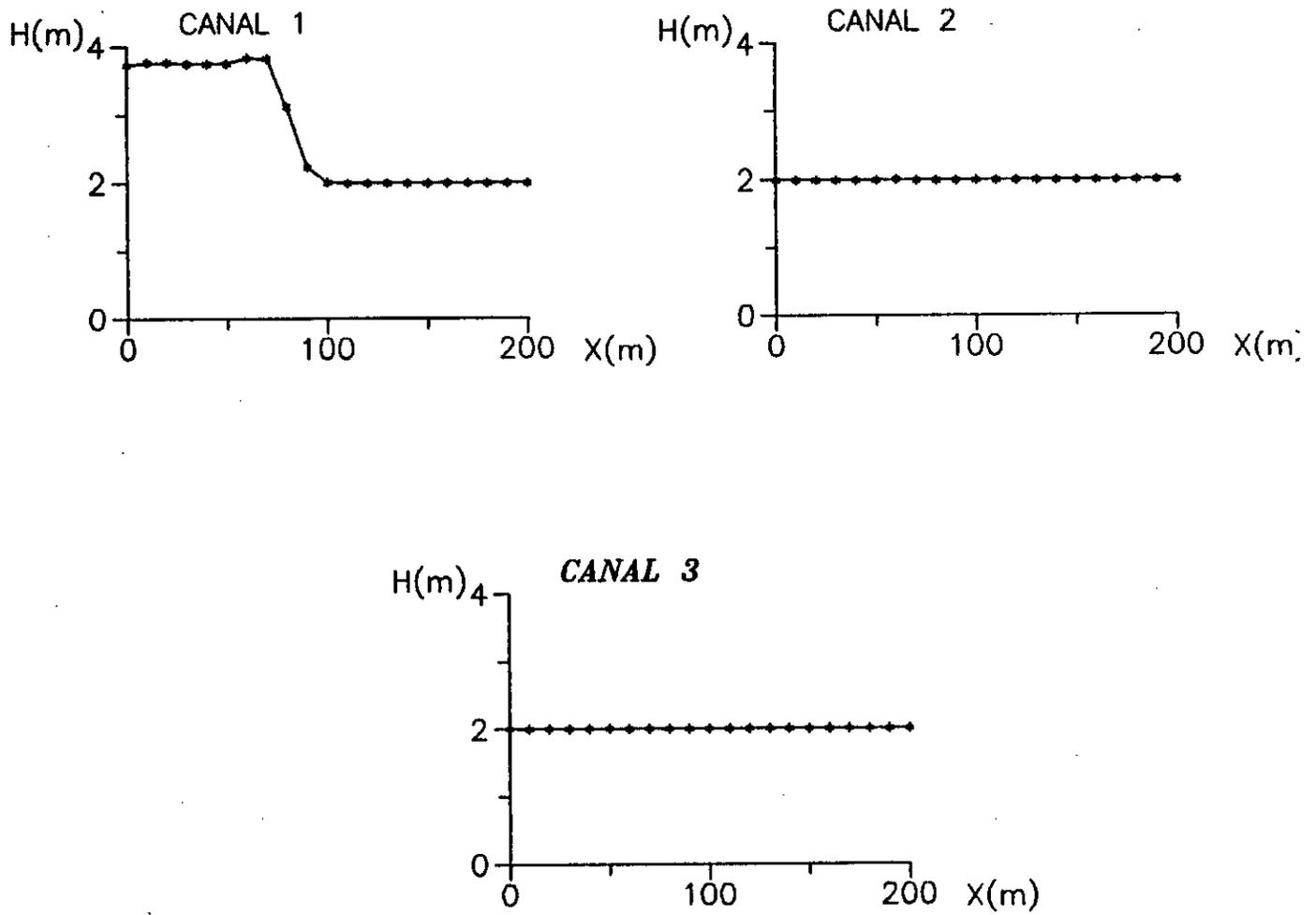
Une introduction brusque de débit dans le canal 1 provoque une onde simple se propageant de l'amont vers l'aval. Cette onde se propage dans le canal 1 sans affecter l'état de l'eau dans les canaux 2 et 3. (fig 6.8)

Après passage de la jonction, deux autres ondes naissent dans les canaux 2 et 3. La fig 6.9a montre l'existence d'une onde négative dans le canal 1, mais d'intensité très faible.

La fig 6.9b montre la propagation de l'onde négative créée dans le canal 2, qui part de l'aval vers l'amont. La hauteur du front d'onde est moins importante que celle du canal 1 ainsi que la célérité.

La fig 6.9c montre l'apparition d'une onde positive se propageant de l'amont vers l'aval et ceci avec une hauteur et une célérité plus faible que ceux de l'onde d'origine.

Cette réduction de célérité et de hauteur du front d'onde est due à l'élargissement brusque de la section dans laquelle se propage cette onde.



**FIG 6.8: PROPAGATION DE L'ONDE AVANT PASSAGE DE LA JONCTION**

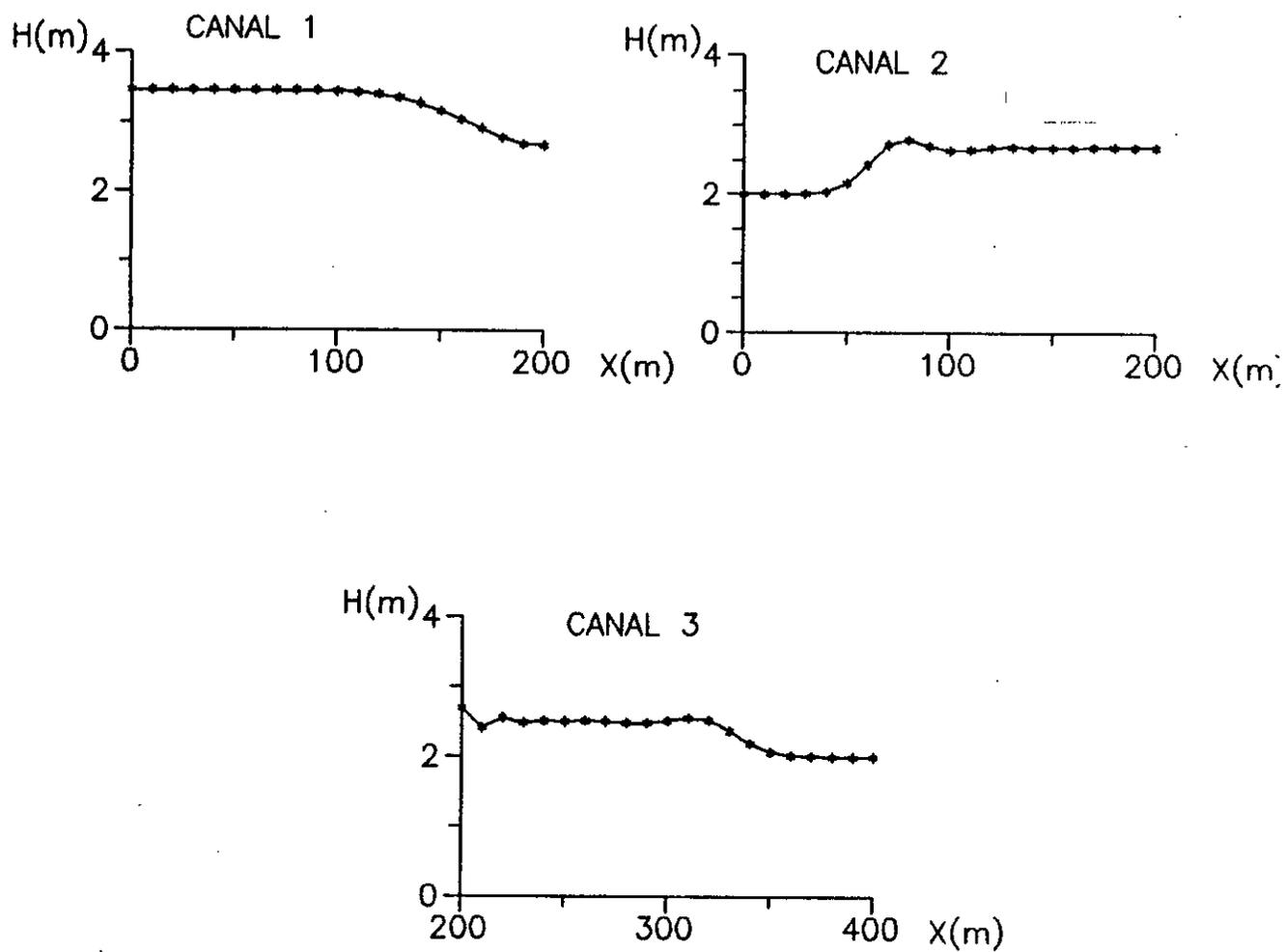
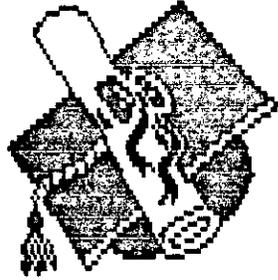


FIG 6.9: PROPAGATION DE L'ONDE APRES PASSAGE DE LA JONCTION

### CONCLUSION

Les résultats obtenus par le modèle que nous avons établie à la base des équations de Barré Saint Venant, écrite sous une forme divergente et en utilisant la méthode des caractéristiques pour simuler les conditions aux limites ,donne des résultats satisfaisant qui correspondent aux réelles conséquences qui peuvent avoir lieu par les écoulements non permanents brusquement variés.



# CONCLUSION

## CONCLUSION

Dans cette thèse, nous avons développés un modèle mathématique de résolution des équations d'écoulements non-permanents uni-dimensionnel .Il est basé sur le schéma explicite de McCormack qui est de plus en plus utilisé pour l'intégration des problèmes de chocs.

Le traitement des conditions extérieures et intérieures à été fait par la méthode des caractéristiques .Cette technique est le seul moyen correct permettant l'introduction, à tout problème d'écoulement non permanent ,des informations physiquement valables.

Ce modèle est capable de simuler les situations où la variation d'un paramètre d'écoulement est relativement rapides.

Nous estimons que la performance du modèle ainsi établi est de bonne qualité,puisque les résultats aux quelles nous avons aboutis sont très satisfaisants.

Nous pouvons dire en plus que,bien que les méthodes numériques aient déjà une quarantaine d'années d'histoire, et que les calculateurs actuels présentent une puissance et des performances remarquables,la mise au point d'un modèle mathématique n'est pas quelque chose d'automatique.

L'ordinateur est une machine rigoureuse qui ne tolère pas la moindre faute comme pourrait le faire un modèle réduit physique. Une cote d'eau mal lissée n'empêchera pas l'eau de couler dans le modèle réduit; cette même erreur peut amener la machine à refuser d'aller plus loin !

Donc ,tout ingénieur ayant la charge d'établir un modèle mathématique devra être très attentifs à l'hydraulique : ce n'est pas l'ordinateur qui "inventera" un contrôle critique s'il apparaît quelque part ! C'est bien là l'avantage d'une telle modélisation : Elle ne pardonne rien et demande à l'ingénieur un effort important de compréhension des phénomènes physiques .

En fin, on espère que ce travail soit repris par d'autres étudiants pour le compléter et d'en rajouter d'autres cas non étudiés dans la présente thèse, et qu'il soit développé pour l'étude de cas bidimensionnels.



# ANNEXES

## ANNEXE I

LES DIFFERENTES FORMES DIFFERENTIELLES  
DES EQUATIONS DE L'ÉCOULEMENT

En supposant que toutes les variables de l'écoulement sont continues et que toutes les fonctions sont différentiables, le développement en série de Taylor nous permet d'écrire:

$$(A)_{t_2} = (A)_{t_1} + \frac{\partial A}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2} + \dots \quad (1)$$

$$(Q)_{x_2} = (Q)_{x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} + \dots$$

En gardant le premier ordre dans les équations (1), et en supposant que  $\Delta t$  et  $\Delta x$  tendent vers zéro, on peut écrire:

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \int_{x_1}^{x_2} [(A)_{t_2} - (A)_{t_1}] dx = \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial A}{\partial t} dt dx$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1} \int_{t_1}^{t_2} [(Q)_{x_2} - (Q)_{x_1}] dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dt$$

Et donc l'équation de continuité (2.3) devient:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right] dt dx = 0 \quad (2)$$

de la même manière on peut écrire :

$$(u^2 A)_{x_2} - (u^2 A)_{x_1} = \frac{\partial (u A)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 (u^2 A)}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} + \dots$$

$$(u A)_{t_2} - (u A)_{t_1} = \frac{\partial Q}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\Delta x^2}{2} + \dots \quad (3)$$

$$(I_1)_{x_1} - (I_2)_{x_2} = \frac{\partial I_1}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} + \dots$$

La substitution des développements (2.18) dans l'équation (2.14) et le passage à la limite ( $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ ) entraîne:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(u^2 A)}{\partial x} \right] dt dx = \quad (4)$$

$$-g \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial I_1}{\partial x} - I_2 - A(S_0 - S_f) \right] dt dx$$

Les relations (2) et (4) sont valables dans tout le plan (x,t), donc elles doivent l'être pour un volume infiniment petit, et on peut écrire deux équations différentielles:

$$\text{Equation de continuité} \quad \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

$$\text{Equation de } q^{t_6} \text{ de } n^{vt} \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(u^2 A)}{\partial x} + g \frac{\partial I_1}{\partial x} = gA(S_0 - S_f) + gI_2 \quad (7)$$

Dans (7) on combine les dérivés par rapport à l'espace et en remplaçant u par Q/A on obtient :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} + gI_1 \right) = gA(S_0 - S_f) + gI_2 \quad (8)$$

Evaluons la dérivés du terme (gI1) de l'équation (8) :

$$\frac{\partial}{\partial x}(gI1) = g \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h(x)} (h(x)-\eta)\sigma(x,\eta)d\eta$$

En utilisons le théorème de Leibniz pour différencier une intégrale on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(gI1) = g \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h(x)} \sigma(x,\eta)d\eta + \\ + \int_0^{h(x)} [h(x)-\eta] \left( \frac{\partial b}{\partial x} \right)_{h=h(x)} dx \end{aligned}$$

avec :  $\sigma(x,h)=b(x)$

et  $\int_0^{h(x)} \sigma d\eta = A$

$$\frac{\partial}{\partial x}(gI1) = gA(x) \frac{\partial h}{\partial x} + gI2 \quad (9)$$

En conséquence l'équation (7) peut être écrite comme suit:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2 A) + gA \frac{\partial h}{\partial x} + gI_2 = gA(S_0 - S_f) + gI_2 \quad (10)$$

ainsi on obtient l'équation de la quantité de mouvement généralement appliquées dans la pratique:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uQ) + gA \left( \frac{\partial h}{\partial x} - S_0 \right) + gAS_f = 0 \quad (11)$$

qui n'a pas une forme divergente. On l'appelle généralement par l'équation dynamique.

Donc selon le choix des variables dépendantes on peut avoir différentes formes des équations de St Venant.

i)  $Q(x,t)$  et  $h(x,t)$

$$\text{on a :} \quad \frac{\partial A(h)}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} = b \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\text{et} \quad u = Q/A$$

En remplaçons dans les équations (6) et (11) on obtient:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{b} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} + gA(S_f - S_0) = 0$$

ii)  $Q(x,t)$  et  $y(x,t)$

on a  $h=y-y_b$  où  $y_b$  est l'évolution du fond.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t}; \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y_b}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} + S_0$$

En remplaçant dans le système (12)

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{b} \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial y}{\partial x} + gASf &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

iii)  $u(x,t)$  et  $h(x,t)$

$$Q = uA(h)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = A \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial A}{\partial x} = A \frac{\partial u}{\partial x} + u \left[ \frac{\partial A}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} + \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)_{h=\text{cst}} \right]$$

Le dernier terme représente le taux de changement de  $A$  quand la profondeur est constante et  $\partial A / \partial x = b$ .

En transformant ainsi les dérivés on a

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial (uA)}{\partial t} = u \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial Q}{\partial x} + A \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) = \frac{2Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x}$$

en remplaçant dans (12) on obtient:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{A}{b} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{u}{b} \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)_{h=cst} = 0$$

(14)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g(Sf - So) = 0$$

Les différentes formes ainsi établies ne sont que le résultat de certaines manipulations algébriques. Mais cette gymnastique mathématique a une importance d'ordre pratique, puisque certaines techniques numériques peuvent être mieux adaptés à certains systèmes des équations que pour d'autre.

## ANNEXE II

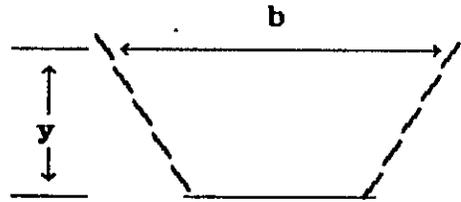
## FORME CARACTERISTIQUES DES EQUATIONS

## DE L'ÉCOULEMENT

Prenons l'écriture sous forme vectorielle des équations de base:

$$A \frac{\partial \vec{R}}{\partial x} + B \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = \vec{C} \quad (1)$$

avec  $\vec{R} = \begin{bmatrix} y \\ Q \end{bmatrix}$



L'écriture sous forme matricielle est:

$$\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gA & \frac{2Q}{A} \end{bmatrix} \frac{\partial \vec{R}}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 \\ gA(S_0 - S_f) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Soit une courbe  $c$  d'équation  $t=f(x)$  dans le plan  $(x,t)$ . Le

long de cette courbe nous pouvons écrire :

$$\vec{R}(x, t) = \vec{R}(x, f(x)) = \vec{R}_0(x)$$

$$\text{Donc: } \frac{\partial \vec{R}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} \frac{dt}{dx} = \frac{d \vec{R}_0}{d x}$$

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial x} = - \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} \frac{dt}{dx} + \frac{d \vec{R}_0}{d x}$$

Le long de cette courbe les équations de St Venant s'écrivent:

$$A \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} + B \frac{d \vec{R}_0}{d x} - B \frac{dt}{dx} \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = C$$

$$\left( A - B \frac{dt}{dx} \right) \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = C - B \frac{d \vec{R}_0}{d x} \quad (3)$$

On cherche les courbes  $t=f(x)$  qui soient les trajectoires des perturbations .Au passage d'une perturbation la dérivée est indéterminée ,ainsi le long de ces trajectoires le système (3) est indéterminé ,ce qui est équivalent à :

$$\det\left(A - B \frac{dt}{dx}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \det(\text{adjoint}) = 0$$

Donc 
$$\left| \begin{array}{cc} b & -dt/dx \\ -gA \frac{dt}{dx} & 1 - \frac{2Q}{A} \frac{dt}{dx} \end{array} \right| = 0$$

d'où 
$$b - \frac{2Qb}{A} \frac{dt}{dx} - gA \left( \frac{dt}{dx} \right)^2 = 0$$

$$\left( \frac{dt}{dx} \right)^2 - \frac{2Q}{A} \frac{dt}{dx} - \frac{gA}{b} = 0 \quad (4)$$

C'est une équation du 2<sup>ème</sup> degré dont le discriminant est:

$$\varepsilon = \frac{gA}{b}$$

toujours positif (système hyperbolique)

posons 
$$C^2 = \frac{gA}{b}$$

Les solutions sont alors :

$$\frac{dx}{dt} = U \pm \varepsilon C \quad \varepsilon = \pm 1$$

C'est l'équation des familles de courbes appelées:

- Caractéristiques positives 
$$\frac{dx}{dt} = U + C$$

- Caractéristique négatives 
$$\frac{dx}{dt} = U - C$$

représentant les trajectoires des ondes. La vitesse des ondes en vitesse relative

$$C = (gA/b)^{1/2}$$

Pour que le système soit indéterminé (et non pas impossible), il faut annuler le déterminant adjoint :

$$\begin{vmatrix} b & -\frac{dQ}{dx} \\ -gA \frac{dt}{dx} & gA(S_o - S_f) - gA \frac{dy}{dx} - \frac{2Q}{A} \frac{dQ}{dx} \end{vmatrix} = 0$$

ce qui revient à résoudre l'équation :

$$b(U - \varepsilon C)dy - dQ + (gA(S_o - S_f))dt = 0 \quad (5)$$

et pour un canal rectangulaire :

$$C = (gy)^{1/2}$$

et donc

$$\frac{dQ}{dt} + b \left( -\frac{Q}{A} \pm (gy)^{1/2} \right) \frac{dy}{dt} = gA(S_f - S_o) \quad (6)$$

*REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES*

- (1) V.T.CHOW  
"OPEN CHANNEL FLOW"  
McGraw Hill Book 1959
- (2) Cours ANACI/ATELER  
"SIMULATION DES ECOULEMENTS A  
SURFACE LIBRE"  
Ecole Mohammadia d'ingénieurs Sep 1988
- (3) COURANT, R.FREIDRICH Hilbert  
"METHODS OF MATHEMATICAL PHYSICS"  
Interscience Publishers, New York 1969
- (4) J.A.CUNGE, F.M.HOLLY, Jr A.VERWEY  
"PRACTICAL ASPECTS OF COMPUTATIONNAL  
RIVER HYDRAULICS"  
Pitman Advanced Publishing 1980
- (5) Robert J.FENNEMSA, M.HANIF CHAUDRY  
"EXPLICIT NUMERICAL SCHEMES FOR UNSTEADY  
FREE SURFACE FLOWS WHITH SHOCS"
- (6) FREAD, D.L,  
"CHANNEL ROUTING", CHAP 14 OF "HYDROLOGICAL  
FRROCASTING"  
Wiley 1985
- (7) P.GARCIA NAVARO J.M.SAVIRON  
"McCORMACK'S METHOD FOR THE NUMERICAL SIMULATION  
OF ONE DIMENSIONAL DISCONTINUOUS FLOW"  
Jour.of hyd Research VOL 30 N 1 1982

- (8) R.GARCIA, R.A.KAHAWITA  
"NUMERICAL SOLUTION OF THE ST-VANANT EQUATIONS  
WITH THE McCORMACK FINITE DIFFERENCES"
- (9) P.GARCIA NAVARO  
"SURGES THOUGH AN OPEN CHANNEL JONCTION"  
Jour of Hyd Research VOL 31 1993
- (10) HENDERSON, F.M."  
"OPEN CHANNEL FLOW"  
McMILLAN Pub Co Inc, New York U.S.A 1969
- (11) Chintu LAI  
"COMPREHENSIVE METHODE OF CHARACTERESTICS  
MODELS FOR FLOW SIMULATION"  
Jour of Hyd engeneering VOL 114 N9 Sep 1988
- (12) C.S.MARTIN, Jerome J.ZOVNE  
"FINITE DIFFERENCE SIMULATION OF BORE  
PROPAGATION"  
Jour of Hyd division ASCE JUILLET 1971
- (13) J.P.MARTIN VIDE J.DOLZ J.DELESTSAI  
"KINEMATICS OF THE MOVING HYDRAULIC JUMP"  
Jour of Hyd Research VOL 31 1993
- (14) G.TERZIDIS ET T.STRELKOFF  
"COMPUTATION OF OPEN CHANNEL SURGES AND SCHOCS"  
Jour of Hyd division dec 1970
- (15) Theodor STRELKOFF  
"NIMERICAL SOLUTION OF ST-VENANT EQUATIONS"  
Jour of Hyd division ASCE Jan 1970
- (16) F.W.WUBS  
"STABILISATION OF EXPLICIT METHODS FOR HYPERBOLIC  
PARTIAL DIFFERRENCIAL EQUATIONS"  
Int Jour of Numerical method in fluid VOL 1986