

1/92

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
DEPARTEMENT HYDRAULIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

En vue d'obtention d'un diplôme

D'INGENIEUR D'ETAT

THEME

**ANALYSE D'UN ECOULEMENT
INSTATIONNAIRE
"DAM-BREAK"**

Proposé et dirigé par :

Mr Omar BELHADJ

Etudié par :

Mr. Hocine BENATSOU

Mr. Mustapha Kamel BOUZID

PROMOTION 1992

E.N.P. 10 Avenue Hacene Badi (Ex Pasteur) EL HARRACH ALGER

DEDICACES

Je dedie ce modeste travail en signe de respect et de reconnaissance :

- A mes parents pour leurs sacrifices consentis à mon égard
- A mes soeurs pour leurs aides et leur soutien moral
- A mes petits neveux et petites nièces
- A tous mes amis(es).

Mustapha Kamel

DEDICACES

*Je dedie cette modeste thèse en signe de respect
et de reconnaissance :*

A mes parents pour leurs sacrifices consentis à mon égard .

A mes frères

A mes soeurs

A toute ma famille .

A tous mes amis

HOCINE

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, nous tenons à exprimer notre profonde reconnaissance à monsieur *BELHADJ OMAR* qui a pris l'initiative de nous encadrer et de contribuer à l'élaboration de ce travail .

Nos remerciements vont également aux membres du jury qui nous ont fait l'honneur de bien vouloir accepter d'examiner notre thèse .

Nous tenons aussi à remercier :

- Le personnel de la bibliothèque en particulier

M^r *GUERRAK Salah*

M^r *BAZIZ Karim*

M^r *CHETTOUK A/ krim .*

هدف هذه الأطروحة هو دراسة سيلان ذو سطح حر، غير دائم سريع التغير ناتج عن انهيار تام و انسي لسد في مجرى مستطيل عريض و في مجاري ذات مقاطع عرضية مختلفة الاشكال .

استعملت طريقة الفروق المتناهية و شكل "ما 5 كورما 5" لحل معادلات "سانت فونو" و قورنت النتائج المحصل عليها مع النتائج التجريبية < الحسابية لباحثين اخرين .

Abstract :

The complete hydrodynamic equations of the shallow - water theory in one dimension are employed to compute the flood wave resulting from the total and instantaneous collapse of a dam in broad rectangular channel and in channels of arbitrary cross-sectional shapes.

The MAC-CORMACK numerical scheme is employed to solve the system of flow equations in a conservation - law form.

The results obtained are compared with computational and experimental data obtained by other investigators.

Resume :

Le but de cette these est d'etudier l'ecoulement transitoire, a surface libre, rapidement varie, resultant d'une rupture totale et instantanee d'un barrage (DAM-BREAK) dans un canal rectangulaire large et dans des canaux ayant des sections transversales de formes differentes. La resolution des equations de SAINT-VENANT par le schema MAC-CORMACK est utilise pour calculer la profondeur et la vitesse de l'onde.

Les resultats obtenus sont compares aux resultats experimentaux et numeriques d'autres chercheurs.

V- ESSAIS NUERIQUES

35

1- Introduction

2- Etude de cas

3- Conclusions

VI- CONCLUSION GENERALE

62

VII- ANNEXES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

تاريخ

HISTORIQUE

GENERAL

*Chapitre 0***HISTORIQUE GENERAL**

L'hydraulique est une science aussi ancienne que la civilisation humaine puisqu'elle commande toutes les utilisations de l'eau.

L'hydraulique de l'antiquité fut surtout un art sans aucune base scientifique, en dehors du principe d'approximation successive vers le but cherché.

On doit tout de même admirer l'oeuvre de ces anciens constructeurs qui ont permis à leurs successeurs d'entreprendre le développement de la science de l'hydraulique.

Après les inventions et les découvertes faites par les ingénieurs Grèques et Romains, l'hydraulique comme toutes les autres branches de la science passa par une période de transition. Le progrès de la science fut lent et laborieux.

Pendant la renaissance l'hydraulique qui porte encore la marque distinctive de ces origines empiriques, fut nécessairement retardée dans son développement jusqu'au moment où la méthode expérimentale fit son apparition dans le domaine de la mécanique.

Le développement ultérieur de l'hydraulique repose essentiellement sur l'amélioration des outils mathématiques et sur les notions mécaniques qui prirent un très large essor au 17^{ème} siècle.

De très nombreux savants contribuèrent aux cours de ces trois derniers siècles au développement de l'hydraulique nous ne citerons que les principaux.

Bernouilli-Euler-Lagrange-Laplace-Mariotte: 18^{ème} siècle ; Poiseuille-Weisbach-Dupuit-Darcy: 19^{ème} siècle ; Remenieras-Von Karman-Prandtl-Buckingham: 20^{ème} siècle .

Actuellement l'hydraulique moderne étend ses frontières au delà de son domaine traditionnel. La solution des problèmes qui se pose maintenant aux chercheurs ne dépend que pour une faible part des simples procédés de mesures et c'est ces problèmes que les chercheurs actuels et futurs devront chercher à dominer.

Chapitre I

INTRODUCTION GENERALE

1 INTRODUCTION

Notre travail est consacré à la modélisation mathématique du problème de propagation de l'onde résultante d'une rupture totale et instantanée d'un barrage ou d'une ouverture brusque d'une vanne.

Ce problème représente actuellement un axe dans la recherche hydraulique mondiale (U.S.A., BELGIQUE, CANADA, FRANCE, GRECE,...) et PIONNIER en ALGERIE.

La rupture d'un barrage peut être classée parmi les accidents catastrophiques qui peuvent toucher l'homme et son environnement au même titre qu'un tremblement de terre .

Bien qu'actuellement la probabilité de rupture d'un barrage soit globalement très faible, l'ampleur d'un tel accident nous invite à prendre le problème de prévention et de sécurité très au sérieux .

La rupture d'un barrage en service provoque une onde de submersion , par libération de l'eau de la retenue qui se propage vers l'aval de l'ouvrage . On peut alors imaginer l'ampleur de ce phénomène lorsqu'il s'agit de plusieurs dizaines de mètres de hauteur et de millions de mètres cube de retenue .

Vu le caractère accidentel, aléatoire et donc imprévu de la rupture, il est nécessaire d'élaborer des modèles numériques permettant la prédiction de l'évolution dans le temps de l'onde de submersion à l'aval de l'ouvrage .

Historiquement, ce n'est qu'à la fin des années soixante, début de la construction des centrales nucléaires à l'aval des barrages, que les chercheurs ont commencé à penser au problème de modélisation de l'onde de rupture des barrages plus connu sous le nom de DAM-BREAK .

Dans notre cas, il s'agit d'abord de modéliser le phénomène hydraulique et ensuite le traiter par une méthode numérique qui puisse rendre compte de manière satisfaisante les caractéristiques de ce phénomène.

Le système d'équations de SAINT-VENANT décrit le phénomène physique avec des conditions initiales et aux limites appropriées.

La méthode numérique aux différences finies par formulation explicite de MAC-CORMACK nous a permis de résoudre ce problème.

2- CLASSIFICATION DES ECOULEMENTS :

2.1 Classification générale :

En général les écoulements peuvent être classés selon le schéma suivant :

- La variation du temps :
 - écoulement stationnaire →
 - écoulement instationnaire (transitoire) .

- Les limites :
 - écoulement en charge .
 - écoulement à surface libre .

- La variation de distance :
 - écoulement uniforme .
 - écoulement non uniforme ou varié,
 - écoulement graduellement varié ,
 - écoulement rapidement varié .

- L'effet de gravité sur l'écoulement à surface libre :
 - écoulement supercritique.
 - écoulement subcritique.

- L'effet de la viscosité :
 - écoulement laminaire,
 - écoulement turbulent.

1.2- Ecoulements transitoires :

Les écoulements transitoires sont des écoulements pour lesquels les paramètres physiques et géométriques sont variables dans le temps (Mathématiquement ceci s'exprime par leurs dérivées par rapport au temps sont non nulles).

Les écoulements transitoires, en général, peuvent être rencontrés dans les écoulements en charge comme dans les écoulements à surface libre .

Les écoulements transitoires à surface libre peuvent être classés en deux catégories :

- écoulements transitoire graduellement varié .
- écoulement transitoire rapidement varié .

Ces derniers sont caractérisés par la propagation d'onde à front très raide .

La variation de la profondeur avec le temps et l'espace (x , t) est rapide .

En général une atténuation de la profondeur maximale est observée à chaque station en aval le long de la direction de l'écoulement .

Cet effet est illustré dans la figure (1) . où l'hydrographe est formé d'une série d'ondes incrémentées possédant chacune une profondeur et une vitesse de propagation c qui augmente avec la profondeur .

attenuation du profile d'onde

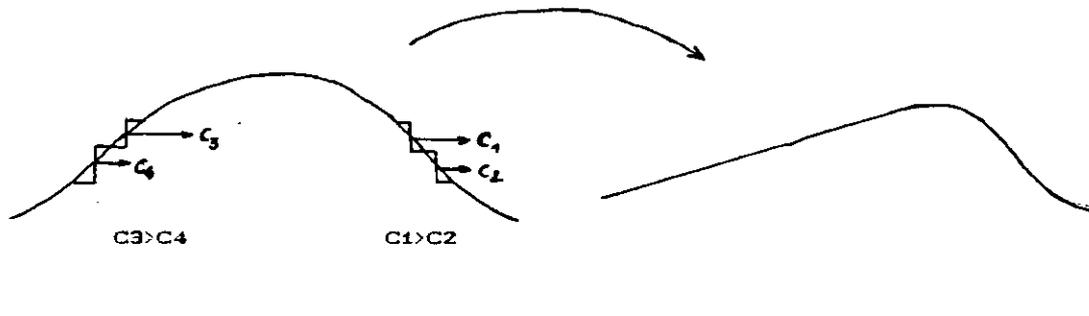


FIG (1)

Les exemples d'écoulements instationnaires rapidement variés à surface libre sont nombreux citons entre autres :

- Manoeuvres rapides des vannes dans les canaux d'irrigation
- lâcher dans les problèmes de reservoirs .
- Ruptures accidentelles d'ouvrages de retenue (barrages) .
- La formation et la propagation des ondes et intumescences diverses (houle, crue, marées...).

CHAPITRE 2

MODELISATION

MATHEMATIQUE

Chapitre II

MODELISATION MATHEMATIQUE

1- INTRODUCTION

Un modèle mathématique est une schématisation de la réalité permettant le calcul des grandeurs intéressant l'ingénieur. La notion de modèle, au sens large inclut donc les formules globales souvent empiriques de l'hydraulique classique. A ce titre la modélisation mathématique a sûrement précéder l'emploi des modèles physiques.

Les divers éléments constitutifs d'un modèle mathématique sont les suivants:

- Un domaine de l'espace où l'on va calculer les caractéristiques des écoulements et une représentation de la topographie des fonds.

- Un système d'équations à résoudre dans ce domaine accompagné de conditions aux limites qui représentent l'interaction entre domaine modélisé et extérieur à ce domaine (amont-aval).

- Pour un écoulement transitoire il faut préciser l'intervalle de temps du calcul et ajouter des conditions initiales.

- Une discrétisation et une méthode de résolution .

Il existe plusieurs sortes de modèles mathématiques fluviaux correspondant aux degrés plus ou moins grand de schématisation des équations.

Le modèle le plus complexe s'appuie sur les équations de NAVIER-STOCKES à trois dimensions (les trois coordonnées spatiales) ou les inconnues sont la pression, les trois composantes de la vitesse et la cote de la surface libre.

Dans ce chapitre nous allons établir les équations qui définissent le problème physique en unidimensionnel (1-D).

Nous nous sommes donc placés dans le plan moyen reliant les centres de gravité des canaux à section prismatique

2- HYPOTHESES :

Dans le but de formuler un tel problème physique nous avons émis les hypothèses suivantes :

1- L'écoulement se fait en filets liquides parallèles comme dans le cas d'un écoulement permanent, cela nous permet de considérer la distribution de pression comme étant hydrostatique sur la section transversale .

2- La distribution de la vitesse est uniforme sur la section transversale

3- Canal prismatique à faible pente ✓

4- Le fluide est incompressible .

5- Les pertes de charges par unité de longueur en régime transitoire sont les mêmes que pour un régime permanent .

6- Une rupture totale est instantanée d'un barrage .

3- EQUATIONS DE BASE :

Nous avons appliqué les deux équations mécaniques essentielles sur un segment court d'un liquide qui coule dans un canal , pour obtenir les équations différentielles :

- l'équation de continuité ;
- L'équation de quantité de mouvement .

3.1 Equation de continuité :

L'équation de continuité est basée sur la loi de conservation de masse .

DEFINITION :

Quelque soit le domaine D de fluide que l'on suit dans son mouvement, sa masse $m = \iiint_D \rho(M,T) d\omega$ reste constante .

L'application de ce principe sur un volume isolé du liquide comme dans la figure (2-a) donne :

$$\rho AV - \left(\rho AV + \frac{\delta(\rho AV)}{\delta x} dx \right) = \delta(\rho A dx) / \delta t \quad \dots(1)$$

où ρ est la masse volumique du liquide est considérée constante selon l'hypothèse (4) .

$$d'où : - \frac{\rho(\delta AV)}{\delta x} dx = \delta(\rho A dx) / \delta t$$

$$\text{ou } \delta A / \delta t + A \delta V / \delta x + V \delta A / \delta x = 0 \quad \dots(2)$$

pour une petite variation de hauteur dH on admet que $dA = L dH$ figure (2-b) .

En remplaçant dans (2) , on obtient l'équation de continuité :

$$\delta H / \delta t + V \delta H / \delta x + A / L \delta v / \delta x = 0 \quad \dots(3)$$

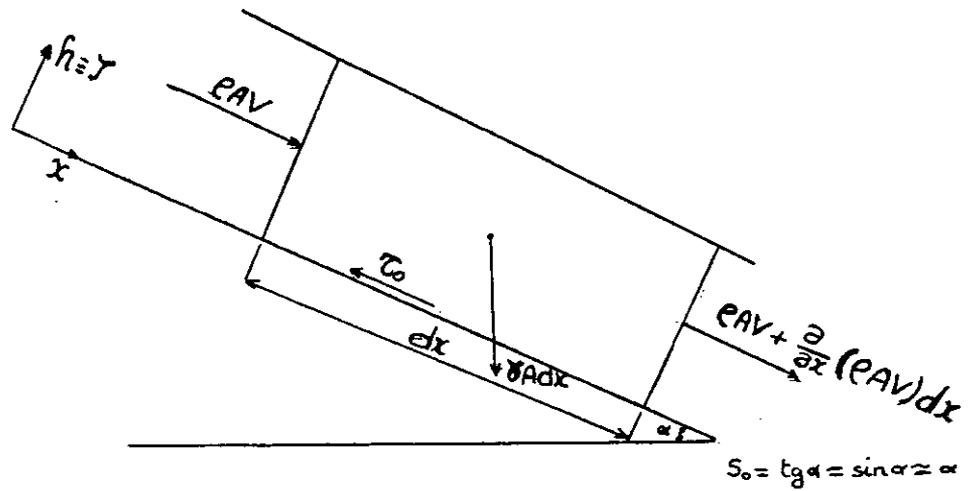


FIG (2 - a)

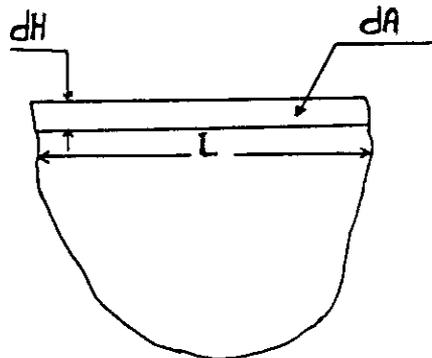


FIG (2-b)

3.2 L'équation de quantite de mouvement :

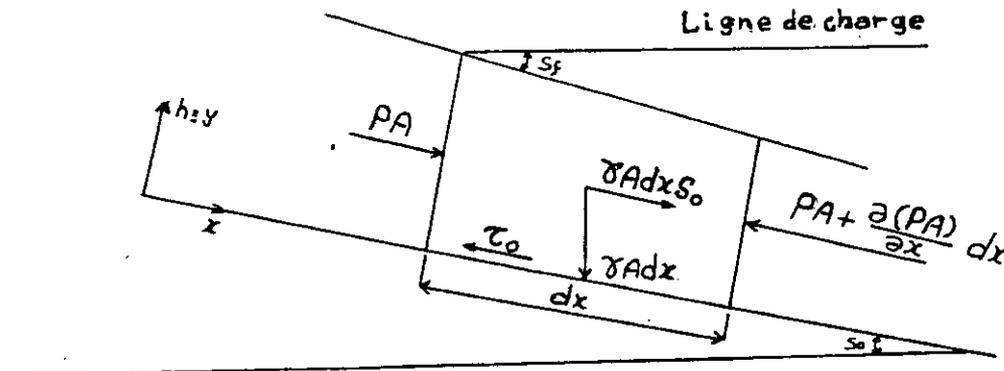
L'équation de quantité de mouvement est basée sur l'équation des moments de Newton :

$$\Sigma \bar{F} = d(\overline{mv})/dt \quad \dots\dots(4)$$

où $\Sigma \bar{F}$: la somme des forces appliquées sur le volume de contrôle .

- La resultante des pressions à l'amont et à l'aval .
- Le poids propre
- La resultante des frottements .

et $d(\overline{mv})/dt$: variation de la quantité de mouvement .



niveau de référence

FIG (3)

Par projection sur l'axe de l'écoulement

$$\Sigma F = - \rho g A dH + \rho g A dx S_o - \tau_o Pr dx$$

Or $\tau_o Pr dx = \rho g A dx Sf$

Donc $\Sigma F = - \rho g A dH + \rho g A (S_o - Sf)$

la variation de quantité de mouvement vaut :

$$d(mv)/dt = \rho A dx [\delta v / \delta t + V \delta v / \delta x]$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation (4) on obtient l'équation de quantité de mouvement :

$$\delta v / \delta t + V \delta v / \delta x + g \delta H / \delta x + g (S_f - S_o) = 0 \dots(5)$$

L'équation de continuité (3) et l'équation de quantité de mouvement (5) forment le système d'équations de SAINT-VENANT (système non linéaire de type hyperbolique).

$$\delta H / \delta t + V \delta H / \delta x + A / L \delta v / \delta x = 0 \dots\dots\dots(3)$$

$$\delta V / \delta t + V \delta v / \delta x + g \delta H / \delta x + g (S_f - S_o) = 0 \dots\dots\dots(5)$$

Dans ces équations :

x : coordonnée d'espace , positive dans le sens de l'écoulement ;

t : le temps

A[H(x,t)] : L'aire de la section transversale

V(x,t) = Q/A : La vitesse moyenne de l'écoulement dans la section transversale considérée .

H(x,t) : La profondeur de l'eau dans la section transversale considérée .

L[H(x,t)] : La largeur de la section transversale .

g : L'accélération de la pesanteur .

S₀ : La pente du fond .

S_f : La pente hydraulique .

Pour le calcul de la pente hydraulique S_f les formules de Chezy, Manning , Bazin ... peuvent être utilisées .

nous avons choisit la formule de Manning en raison de sa forme monôme :

$$\text{soit donc : } Q = (1/n) A R_h^{2/3} S_f^{1/2}$$

où n : coefficient de Manning

R_h : Le rayon hydraulique qui représente le rapport de l'aire mouillée A au périmètre mouillé Pr de la section transversale

En remplaçant Q par AV :

$$S_f = \frac{n^2 (AV)^2}{A^2 R_h^{4/3}} \quad \dots\dots(6)$$

4- Conditions initiales et aux limites :

Nous associons les deux équations précédentes de SAINT-VENANT aux conditions initiales et aux limites suivantes :

Conditions initiales :

à $t = 0$; $H(X,0) = H_0(X)$
 $V(X,0) = V_0(X)$

Ces deux conditions sont applicables tout le long du champ d'écoulement et au temps $t = 0$, cependant nous rajoutons une conditions au site du barrage.

pour $X = X_D$: $H(X_D, 0) = H_0(X_D)$
 $V(X_D, 0) = V_0(X_D)$

tel que X_D : l'abscisse du site de barrage.

Conditions aux limites :

à l'entrée $H(X_e, t) = H_t(X_e)$, $V(X_e, t) = V_t(X_e)$
à la sortie $H(X_s, t) = H_t(X_s)$, $V(X_s, t) = V_t(X_s)$

tel que :

X_e : l'abscisse de l'extrémité amont du champ d'écoulement ou l'entrée.

X_s : l'abscisse de l'extrémité aval du champ d'écoulement ou la sortie.

Chapitre III

**RESOLUTION PAR LA METHODE
AUX DIFFERENCES FINIES**

1- INTRODUCTION :

Parmi les méthodes numériques qui peuvent être utilisées pour résoudre ce problème :

- Méthode des éléments finies(M.E.F)
- Méthode des caractéristiques
- Méthode des éléments intégrales aux frontières(M.E.I.F)
- Méthode aux différences finies(M.D.F).

Un des principes fondamentaux des méthodes numériques est la réduction d'une équation différentielle à une approximation en terme d'équation algébrique.

La méthode des différences finies est un moyen par lequel cette réduction peut être faite.

Les grandes lignes de cette méthode sont de procéder d'abord par l'identification d'un nombre fini de points discrets dans le domaine espace temps considéré.

Les points sont appelés noeuds et c'est en ces points que les approximations de la solution réelle seront calculées. La distance entre noeuds est appelée pas de discrétisation.

Le nombre des mailles et des noeuds conditionne directement, d'une part le temps et l'espace mémoire requis pour le calcul sur ordinateur mais, d'autre part, la précision des résultats.

Les dérivées qui apparaissent dans l'équation différentielle de base sont remplacées par des approximations aux différences discrètes.

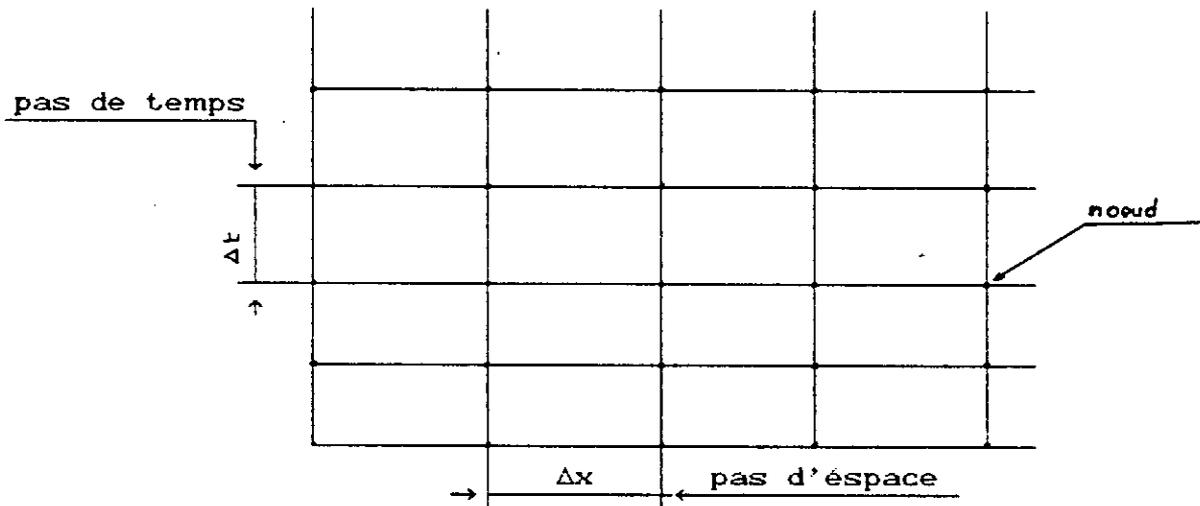


FIG (4)

Approximation de la dérivée d'une fonction :

Soit f une fonction régulière d'une variable réelle .Par définition sa dérivée en un point x_0 est donnée par :

$$\frac{\delta f}{\delta x}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)]}{\Delta x}$$

Elle peut être approchée de différentes façons : introduisons les opérateurs aux différences finies définies par :

différence décentrée à droite:

$$D^+ f(x_0, \Delta x) = \frac{[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)]}{\Delta x}$$

différence décentrée à gauche:

$$D^- f(x_0, \Delta x) = \frac{[f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)]}{\Delta x}$$

différence centrée:

$$D^0 f(x_0, \Delta x) = \frac{[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)]}{\Delta x}$$

$D^+ f(x_0)$, $D^- f(x_0)$, $D^0 f(x_0)$ constituent des approximations de $f'(x_0)$

Remarques :

1/ Ces estimations sont obtenues en écrivant la formule de Taylor à l'ordre nécessaire.

2/ Les différences finies décentrées sont d'ordre 1 alors que la différence finie centrée est d'ordre 2.

2- Choix du schéma numérique :

Plusieurs schémas numériques aux différences finies sont utilisés

dans le traitement des problèmes d'évolution . Dans le but de résoudre notre problème , nous adoptons le schéma de MAC-CORMACK (schéma développé par MAC-CORMACK en 1969).

Ce schéma appartient à la classe des schémas de type prédicteur - correcteur .

Toutefois l'introduction de ce type de schémas n'est possible que lorsque le système d'équations est écrit sous forme conservative .

2.1- Forme conservative du système d'équations de SAINT-VENANT

On dit qu'une équation est sous forme conservative si elle est sous la forme :

$$\delta \bar{u} / \delta t + \delta \bar{F}(u) / \delta x = \bar{D}(u) \dots\dots\dots(1)$$

où \bar{u} , $\bar{F}(u)$, $\bar{D}(u)$ sont des vecteurs au sens mathématique .

Les équations de SAINT-VENANT traduites par le système :

$$\delta H / \delta t + V \delta H / \delta x + A/L \delta V / \delta x = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$dV / \delta t + \delta V / \delta x + g \delta H / \delta x = g (S_0 - S_f) \dots\dots\dots(3)$$

peuvent être transformé sous la forme conservative de la manière suivante :

a-Transformation de l'équation de continuité:

En multipliant l'équation (2) par L on obtient

$$L \delta H / \delta t + LV \delta H / \delta x + LA / L \delta V / \delta x = 0$$

or $dA = LdH$ et $Q = AV$

il vient :

$$\delta A / \delta t + V \delta A / \delta x + A \delta V / \delta x = 0$$

$$\delta A / \delta t + \delta(AV) / \delta x = 0$$

et finalement $\delta A / \delta t + \delta Q / \delta x = 0$ (4)

c'est la forme conservative de l'équation de continuité ;

b-Transformation de l'équation de quantité de mouvement:

en multipliant l'équation (4) par V et l'équation (3) par A on obtient :

$$V \delta A / \delta t + V \delta Q / \delta x = 0$$

et

$$A dV / \delta t + AV \delta V / \delta x + A g \delta H / \delta x = g (S_o - S_f)$$

en remplaçant AV par Q on aura :

$$V \delta A / \delta t + V \delta Q / \delta x = 0$$
(5)

$$A dV / \delta t + Q \delta V / \delta x + A g \delta H / \delta x = gA(S_o - S_f)$$
(6)

La somme de (5) et (6) donne

$$A \delta V / \delta t + V \delta A / \delta t + Q \delta V / \delta x + V \delta Q / \delta x + gA \delta H / \delta x = gA(S_o - S_f)$$

or :

$$A \delta V / \delta t + V \delta A / \delta t = \delta(AV) / \delta t = \delta Q / \delta t$$

et

$$Q \delta V / \delta x + V \delta Q / \delta x = \delta(QV) / \delta x$$

d'où l'équation :

$$\delta Q / \delta t + \delta(QV) / \delta x + gA \delta H / \delta x = gA (S_o - S_f)$$
(7)

En tenant compte de l'hypothèse (1) : distribution de pression est

hydrostatique :

la force de pression à travers une section transversale figure (10) est donnée par l'expression :

$$F_h = \bar{\omega} \int_0^H (H - a) L(a) da$$

avec $\bar{\omega} = \rho g$

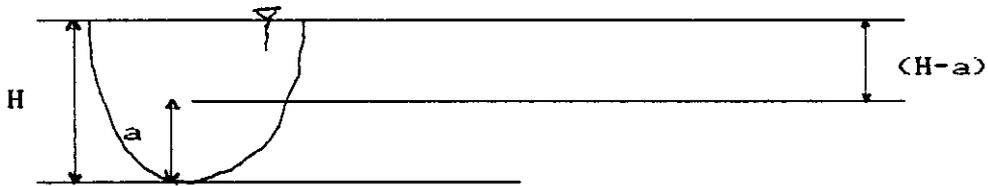


FIG (5)

$$\delta F_h / \delta x = \bar{\omega} a \delta H / \delta x \quad \text{d'où} \quad \delta H / \delta x = (1 / \bar{\omega} a) \delta F_h / \delta x$$

en remplaçant l'expression de $\delta H / \delta x$ dans l'équation (7) on obtient

$$\delta Q / \delta t + \frac{\delta}{\delta x} (VQ + F_h / \rho) = gA (S_o - S_f) \quad \dots\dots(8)$$

qui est la forme conservative de l'équation de quantité de mouvement .

Ainsi nous avons transformé le système d'équation de SAINT-VENANT sous la forme conservative :

$$\delta A / \delta t + \delta Q / \delta x = 0$$

$$\delta Q / \delta t + \frac{\delta}{\delta x} (VQ + F_h / \rho) = gA (S_o - S_f)$$

les vecteurs \bar{u} , $\bar{F}(u)$ et $\bar{D}(u)$ sont donc respectivement :

$$\begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Q \\ VQ + F_h / \rho \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ gA(S_o - S_f) \end{bmatrix} \quad \dots\dots(9)$$

C'est ces vecteurs que nous allons utiliser dans la résolution pour le cas d'un canal prismatique de section transversale quelconque.

Pour le cas d'un canal rectangulaire large les vecteurs u , $\bar{F}(u)$ et $\bar{D}(u)$ se réduisent aux vecteurs :

$$\begin{bmatrix} H \\ HV \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} H \\ HV^2 + gH^2/2 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 0 \\ g H (S_0 - S_f) \end{bmatrix} \quad \dots (10)$$

2.4- Description generale des schemas du type
predicteur-correcteur :

Les schémas de ce type sont explicites précis à l'ordre deux et conditionnellement stable.

Si on considère un système de la forme :

$$\left. \begin{aligned} \delta U / \delta t + \delta F(U) / \delta x &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ U(X, 0) &= U_0(X), \quad X \in \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

où $U = (U_1, U_2, \dots, U_p)$

et si on pose $\lambda = \Delta t / \Delta x$

$$x = j \cdot \Delta x \quad j \in \mathbb{R}$$

$$t = n \cdot \Delta t \quad n \in \mathbb{N}$$

Alors l'approximation du système (11) par le schéma prédictor-correcteur est de la forme suivante :

$$U_{j+1/2}^{n+1/2} = (1-\beta) + \beta U_{j+1}^n - \alpha \lambda [F(U_{j+1}^n) - F(U_j^n)] \quad \dots (12)$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n + (\lambda/2\alpha) [(\alpha - \beta) F(U_{j+1}^n) + (2\beta - 1) F(U_j^n) + (1 - \alpha - \beta) F(U_j^n) + F(U_{j+1/2}^{n+1/2}) - F(U_{j-1/2}^{n+1/2})] \quad (13)$$

où α et β sont des paramètres réels compris entre 0 et 1, ce sont les paramètres du schéma dont le rôle intervient au niveau de la stabilité et la consistance du schéma.

$U_{j+1/2}^{n+1/2}$ c'est une valeur "fictive" ou prédictee

Engénéral elle est notée $U_{j+\beta}^{n+\alpha}$ ou $(U_{j+\beta}^{n+\alpha})_p$; et peut être considérée

comme une approximation de $U(x_{j+\beta}, t^{n+\alpha})$ avec :

$$x_{j+\beta} = x + \beta \cdot \Delta x$$

et

$$t^{n+\alpha} = t + \alpha \cdot \Delta t$$

Pour obtenir la valeur approchée de $U(x_j, t^{n+1})$ On corrige par l'équation (13).

2.3- Schema de MAC-CORMACK :

Le schéma de Mac-Cormack cas particulier du schéma de type prédicteur-correcteur est obtenu en remplaçant α par 1 et β par 0 dans les équations algebriques précédentes.

2.3.1- Proprietes du schema :

1/ Il est à deux niveaux en temps car il ne fait intervenir que les

temps t^n et t^{n+1} .

2/ Il est explicite car les valeurs approchées de la variable à l'instant t^{n+1} sont données explicitement en fonction des valeurs à l'instant t^n .

3/ C'est un schéma à deux étapes, prédiction-correction et l'application du cycle complet des deux étapes avance la solution d'un seul pas du temps Δt .

2.3.2- Application de schéma de Mac-Cormack aux équations de SAINT-VENANT :

En général, le schéma de Mac-Cormack appliqué à l'équation (1) a la forme suivante :

$$\tilde{U}_j^{n+1} = U_j^n - \lambda [F_{j+1}^n - F_j^n] + \Delta t D_j^n \dots\dots\dots(14)$$

$$U_j^{n+1} = 1/2 [U_j^n + \tilde{U}_j^{n+1} - \lambda (\tilde{F}_j^{n+1} - \tilde{F}_{j-1}^{n+1}) + \Delta t \tilde{D}_j^{n+1}] \dots\dots\dots(15)$$

où :

- Δt : pas de temps
- Δx : pas d'espace
- $\lambda = \Delta t / \Delta x$

j et n : indiquant respectivement les valeurs des variables au point (j,n) dans le plan $x-t$ avec les coordonnées x_j, t_n .

où $x_j = (j - 1) \Delta X$ $j = 1, 2, \dots$
 et $t_n = (n - 1) \Delta t$ $n = 1, 2, \dots$

L'indice (\sim) sur U indique l'approximation de la valeur de U dans l'étape n. F et D indiquent les valeurs de F et D correspondantes U, c'est à dire :

$$\tilde{F}_j^{n+1} = F(\tilde{U}_j^{n+1})$$

et
$$\tilde{D}_j^{n+1} = D(\tilde{U}_j^{n+1})$$

En appliquant cet algorithme au système d'équation (9) , on obtien les algorithmes suivants :

Algorithme de prediction :

$$\tilde{A}_j^{n+1} = A_j^n - \lambda [(AV)_{j+1}^n - (AV)_j^n] \quad \dots(16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{(AV)}_j^{n+1} = & (AV)_j^n - \lambda [(AV^2 + F_h/\rho)_{j+1}^n - (AV^2 + F_h/\rho)_j^n] \\ & + g \Delta t [A (S_o - Sf)]_j^n \quad \dots(17) \end{aligned}$$

Algorithme de correction :

$$A_j^{n+1} = 1/2 [A_j^n + \tilde{A}_j^{n+1} - \lambda [\tilde{(AV)}_j^{n+1} - \tilde{(AV)}_{j-1}^{n+1}]] \quad \dots(18)$$

$$\begin{aligned} (AV)_j^{n+1} = & 1/2 [(AV)_j^n + \tilde{(AV)}_j^{n+1} - \lambda [\tilde{(AV^2 + F_h/\rho)}_j^{n+1} - \\ & \tilde{(AV^2 + F_h/\rho)}_{j-1}^{n+1}] + g \Delta t [\tilde{A} (S_o - \tilde{Sf})]_j^{n+1}] \quad \dots(19) \end{aligned}$$

Ces algorithmes sont applicables à un canal prismatique de section transversale quelconque .

Dans le cas d'un canal rectangulaire très large les algorithmes

précédents se réduisent aux algorithmes suivants :

Algorithme de prediction :

$$\tilde{H}_j^{n+1} = H_j^n - \lambda [(HV)_{j+1}^n - (AV)_j^n] \quad \dots(20)$$

$$\begin{aligned} \tilde{(HV)}_j^{n+1} = (HV)_j^n - \lambda [(AV^2 + gH^2/2)_{j+1}^n - (AV^2 + gH^2/2)_j^n] \\ + g\Delta t [H(S_o - S_f)]_j^n \quad \dots(21) \end{aligned}$$

Algorithme de correction :

$$H_j^{n+1} = (1/2) [(H)_j^n + \tilde{H}_j^{n+1} - \lambda [\tilde{\tilde{(HV)}}_j^{n+1} - \tilde{\tilde{(HV)}}_{j-1}^{n+1}] \quad \dots(22)$$

$$\begin{aligned} (HV)_j^{n+1} = (1/2) [(HV)_j^n + \tilde{(HV)}_j^{n+1} - \lambda [\tilde{\tilde{(HV^2 + gH^2/2)}}_j^{n+1} - \tilde{\tilde{(HV^2 + gH^2/2)}}_{j-1}^{n+1}] \\ + g\Delta t [\tilde{H}(S_o - S_f)]_j^{n+1} \quad \dots(23) \end{aligned}$$

Après avoir calculé la valeur de H de la première ^{équation} de chaque pair d'équation, la valeur de V est déterminée directement de la deuxième équation de chaque paire.

Dans le cas d'un canal prismatique de section transversale quelconque le calcul des hauteurs s'effectue après avoir calculer

l'aire des sections.

2.4- Conditions initiales :

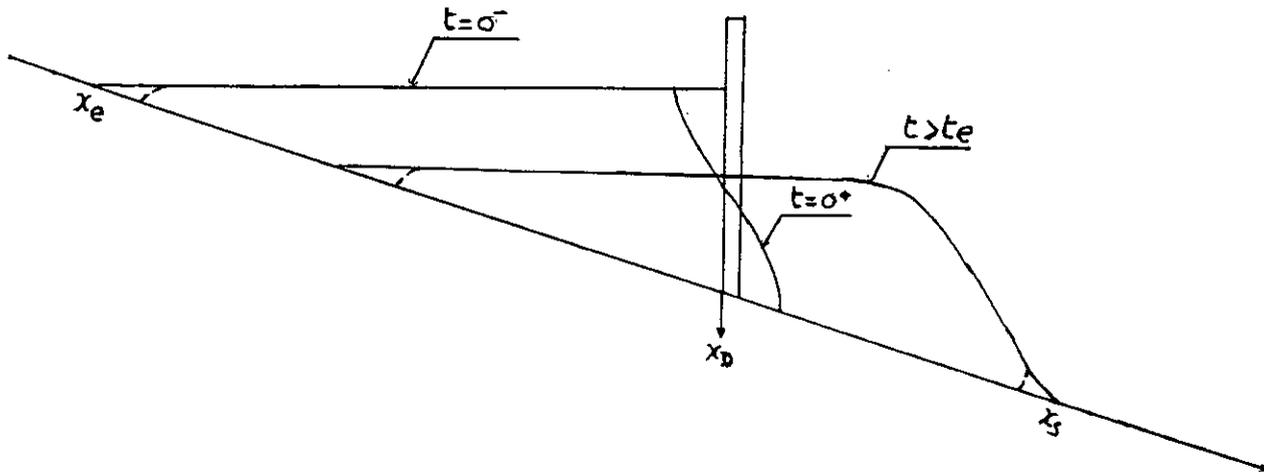


FIG (6)

On suppose qu'à $t=0^-$ il n'ya pas d'écoulement; l'eau en amont du barrage est statique .

Le lit du canal en aval du barrage est sec .

nous obtenons les hauteurs d'eau avant la rupture par :

$$H(x,0)= \begin{cases} H_0(x - x_e)/L & \text{pour } x < x_D \\ 0 & \text{pour } x > x_D \end{cases} \dots\dots\dots(27)$$

et les vitesses par $V(x,0) = 0 \dots\dots\dots(28)$

où H_0 : la profondeur initiale au côté amont du barrage .

L : $x_D - x_e$: longueur du reservoir

A $t=0$ le barrage est complètement detruit.

Pour les premiers petits instants au debut de l'écoulement (temps $t = 0^+$), on considère qu'au site du barrage la solution de Ritter est applicable .(voir annexe2)

Soit pour $x = x_D$:

$$H(x_D, 0) = (4/9) H_0 \quad \dots(29)$$

Sur la base de l'hypothèse d'une rupture totale et instantanée à partir de ce moment-là, aucune condition au limite interne n'est nécessaire .

2.5- Conditions aux limites :

En ce qui concerne les conditions aux limites instantanées, nous considérons la profondeur d'écoulement se réduit à zero aux deux extrimités amont et aval du champ de l'écoulement :

$$\begin{aligned} H(x_s) &= 0 \\ H(x_e) &= 0 \end{aligned} \quad \dots(30)$$

Les équations d'écoulement sont appliquées a travers le domaine de calcul y compris, non seulement le champ d'écoulement réel (le champ dans lequel les profondeurs sont non nulles) , mais aussi l'espace situé en amont et en aval où l'écoulement réel n'existe pas à ce moment. A cet effet et dans le but de faciliter et d'économiser dans l'application de l'algorithme de calcul , le champ d'écoulement à n'importe quel moment donné est considéré comme incluant deux noeuds supplémentaires (avec une profondeur égal à zero) de chaque cote au delà du champ réel voir figure (6) .

Il est également entendu que lorsque $H=0$ et $V=0$ la pente hydraulique S_f est prise égal à zero .Autrement, sa valeur normale est calculée par la formule de Manning .

2.6- Condition de stabilite :

Le schéma de MAC-CORMACK qui appartient aux schémas de type prédicteur-correcteur est stable sous la condition de COURANT-FRIEDRICHS-LEWY (C.F.L).

Pour les schémas explicites, cette dernière s'énonce de la façon suivante :

Le pas de temps Δt doit être tel qu'une onde se propageant à la vitesse c , ne parcourt pas plus d'un pas d'espace en un pas de temps .

Cette condition se traduit par :

$$\Delta t = C \frac{\Delta X}{\max(|V|+c)} \quad \dots\dots(31)$$

où C : la valeur du nombre de courant .

Avec les expériences numériques référencées en littérature il a été trouvé que les meilleurs résultats ont été obtenus avec la valeur de C = 0.8 valeur que nous avons adoptée.

et c : la célérité d'onde définie par $c = \sqrt{g A/L}$
pour une grille fixe en espace ($\Delta x = \text{constante}$)

La valeur minimale de Δt qui satisfait l'équation (31) est déterminée à la fin de calcul pour une étape de temps donnée, cette valeur est utilisée comme un pas de temps dans les calculs de la prochaine étape .

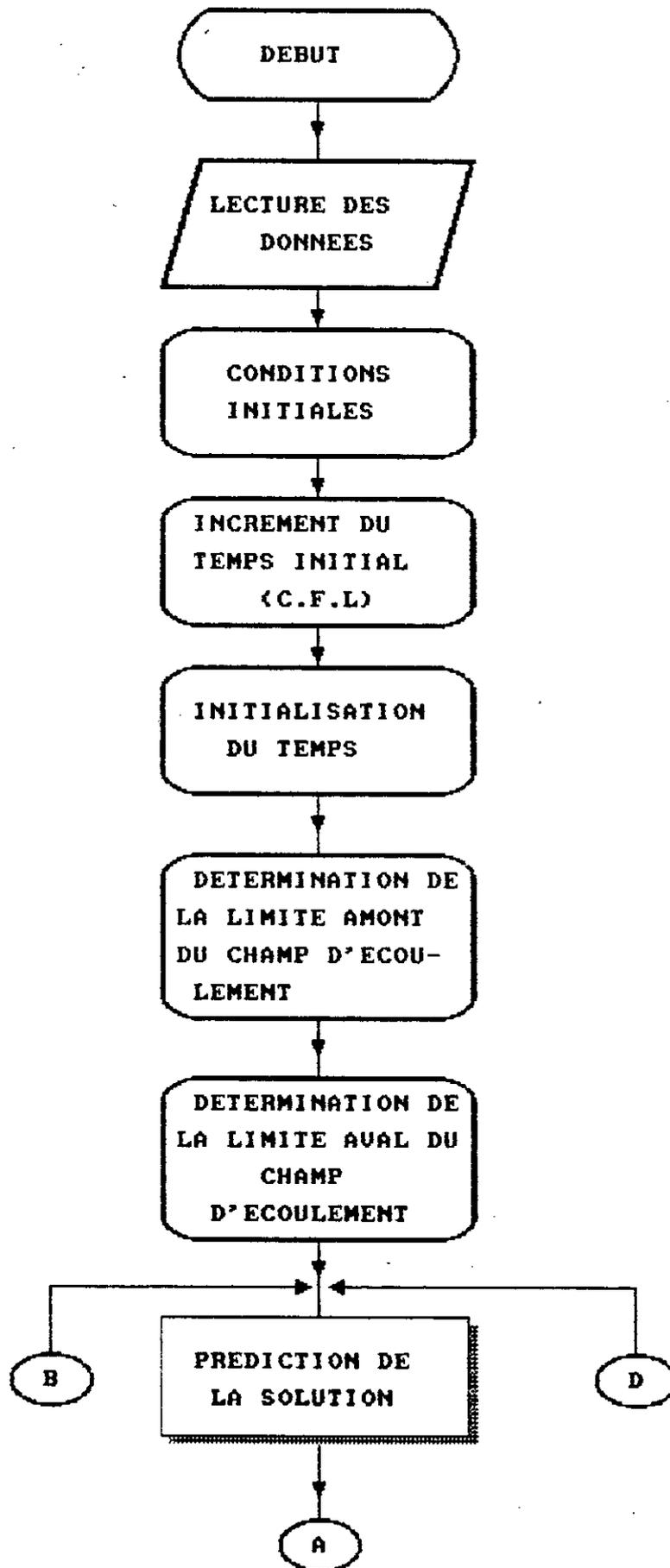
Notons qu'il est possible d'accroître la précision de la solution en choisissant un pas de discrétisation en temps et en espace plus petit. Mais il est moins pénalisant si on diminue seulement le pas de temps :

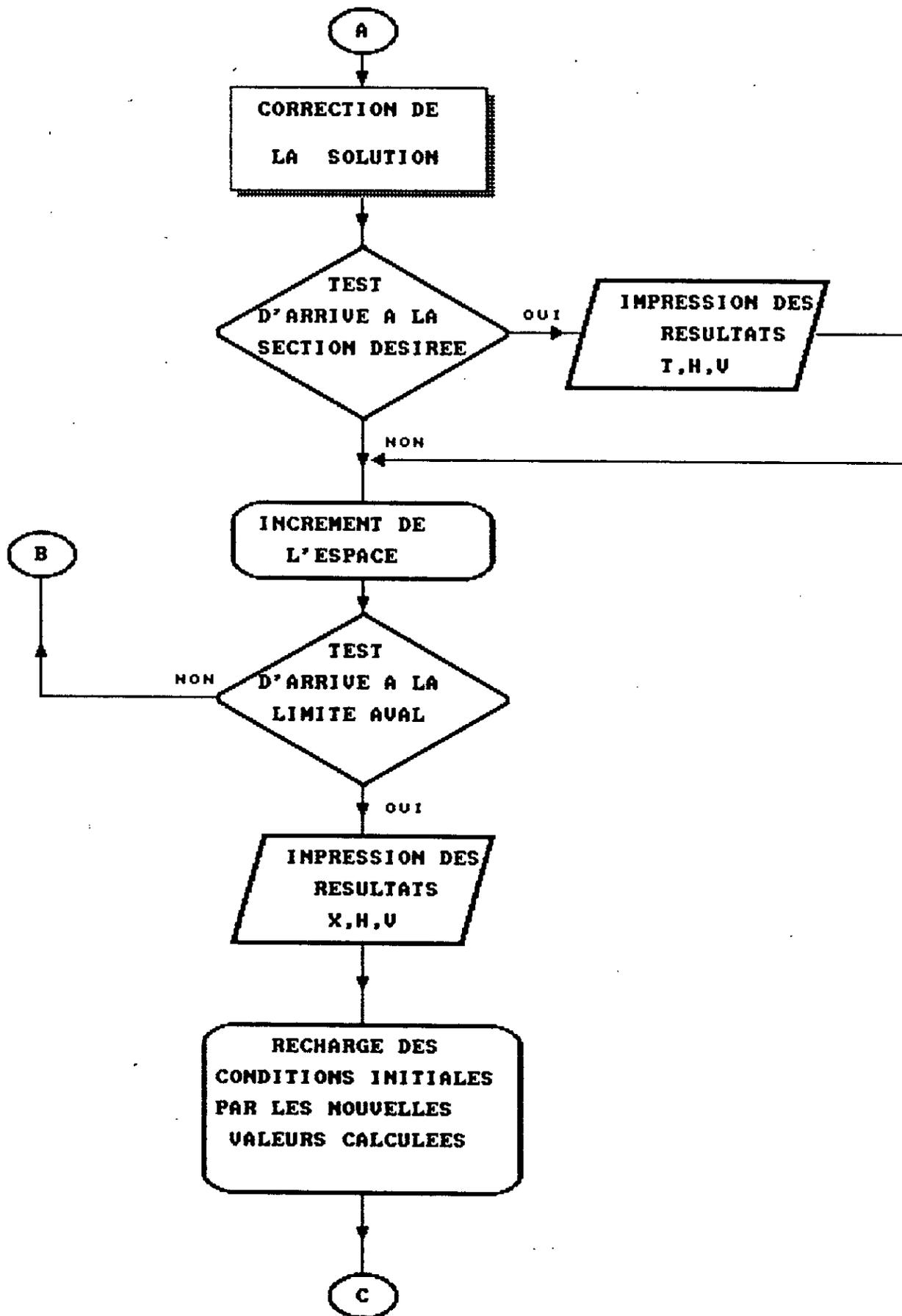
En effet, si diviser le pas de temps Δt par deux entraîne le

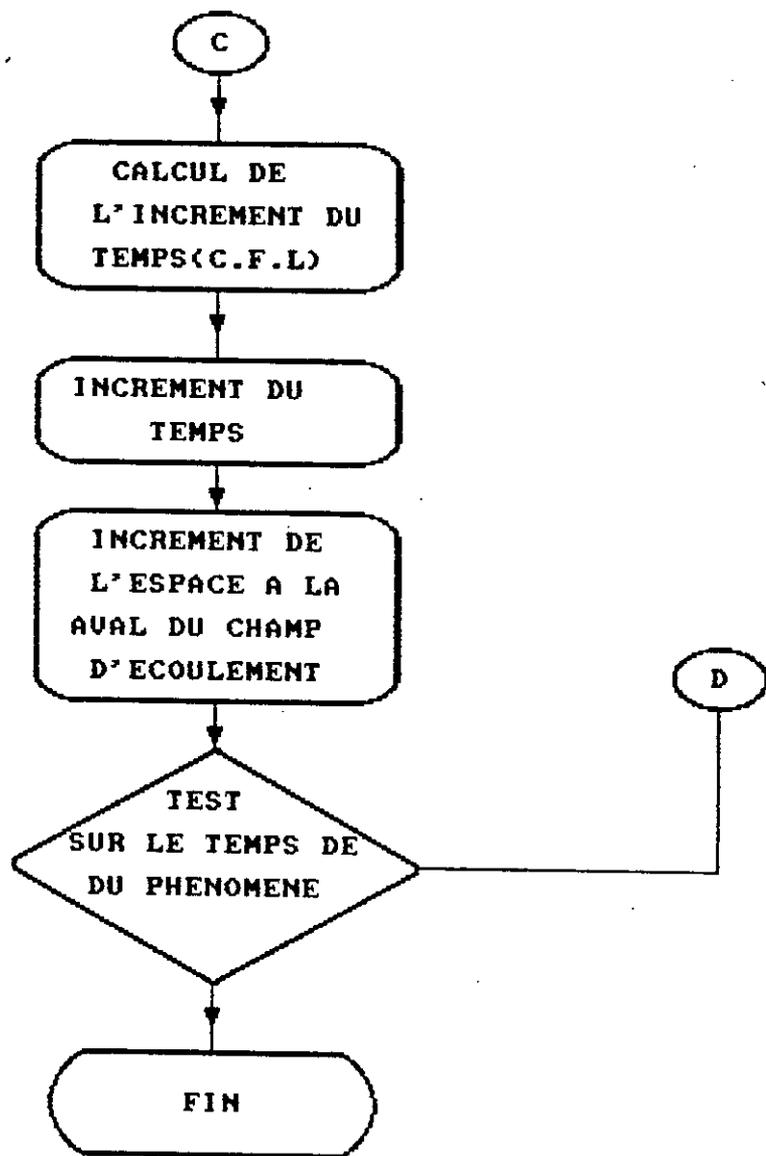
doublement du volume de calculs , alors que diviser le pas d'espace ΔX par deux, oblige, lorsqu'on utilise un schéma explicite, à diviser Δt par deux , donc à quadrupler le volume de calculs pour un problème unidimensionnel .

En règle générale , les calculs sont faits avec un pas de temps variable évalué selon le critère de COURANT -FREIDRICHS-LEWY de telle sorte que la précision temporelle peut toujours être atteinte

2.7-Organigramme







UNIVERSITÉ

TECHNIQUES DE
PROGRAMMATION
UTILISEES

Chapitre IV

TECHNIQUES DE PROGRAMMATION UTILISEES

Nous consacrons ce chapitre aux techniques de programmation utilisées lors de la mise en oeuvre de notre simulation .

Nous avons adopté le TURBO-PASCAL version 5 comme langage pour les raisons suivantes :

- 1- Un programme écrit en Turbo-pascal est plus structuré .
- 2- Compilation et linkage rapides .
- 3- La possibilité d'utiliser les modules de graphisme inexistants dans les compilateurs Fortran actuels .

1- PROGRAMMATION MODULAIRE :

La programmation modulaire consiste à subdiviser le programme en plusieurs sous-programmes .

Ce procédé permet :

- D'éviter la répétition d'un bloc d'instruction en plusieurs endroits du programme .
- De rajouter, d'enlever ou de modifier dans le programme sans que celui-ci ne soit détruit .
- D'économiser dans l'espace mémoire : le système réserve de l'espace mémoire aux variables locales d'un bloc pour la durée d'exécution de celui-ci seulement . De plus, plusieurs procédures exécutées à la suite se partagent le même espace mémoire pour leurs variables locales [variables de procédures] .

Cette technique que nous avons adopté est appelée programmation modulaire ou structurée .

2- GRAPHISME :

L'introduction d'une procédure graphique dans le programme nous

a permis d'une part d'analyser rapidement nos résultats et d'autres part d'utiliser nos fichiers de résultats directement sans recourir aux logiciels existants (tel que GRAPHER...) .

Certe, l'utilisation des logiciels existant serait plus facile que de construire une procédure graphique , mais nous avons introduit cette dernière dans un but didactique .

En effet nous avons appris à :

- gérer l'écran
- Créer les axes et les graduer
- Choisir les échelles et les modifier
- Mettre les indications nécessaires sur les graphes.

Dans notre programme, la même procédure nous permet de présenter les résultats de deux façons :

- La hauteur en fonction du temps à une section choisi du champs d'écoulements .
- Les hauteurs en fonction de la distance tout le long du champs d'écoulement .

3- MENU :

Nous avons réalisé un menu de gestion des procédures de cas permettant une élasticité de travail .

Les cas à choisir dans le menu sont :

- La forme de la section transversale
- Le type de représentation des résultats : $H=f(t)$ pour x donnée
 $H=f(X)$ pour t donnée
- Le choix des valeurs numériques des variables (la pente du canal, la hauteur initiale , le coefficient de Manning, les dimensions de la section transversale du canal ,...).

CHAPITRE

ESSAIS NUMERIQUES

Chapitre V

ESSAIS NUMERIQUES

1- INTRODUCTION :

Dans le but de valider nos essais numeriques , nous avons choisi le cas d'un canal rectangulaire large .

Pour ce type de section , l'algorithme utilisé nous permet d'obtenir directement la profondeur H et la vitesse V en toute section et à tout instant .

Puis nous nous sommes interessés au cas de section trapézoidal (avec cas particulier rectangulaire, triangulaire) et au cas d'une section rectangulaire non uniforme . Dans ce cas le calcul de la hauteur H s'effectue de manière implicite en fonction de l'aire A (Voir Annexe) .

Enfin , pour enrichir notre étude , nous avons étudié plusieurs paramètres (pente du fond , hauteur initiale, pente hydraulique ...).

Nous présentons dans ce qui suit les différents cas avec les résultats obtenus .

2- ETUDE DE CAS :

1- Validation : Etude de l'effet de la rugosité du fond :

Nous avons comparé nos résultats à ceux obtenus numériquement par G.SAKKAS et V.BELLOS ainsi qu'aux résultats expérimentaux de Water Ways Experiment Station W.E.S (U.S.A.).

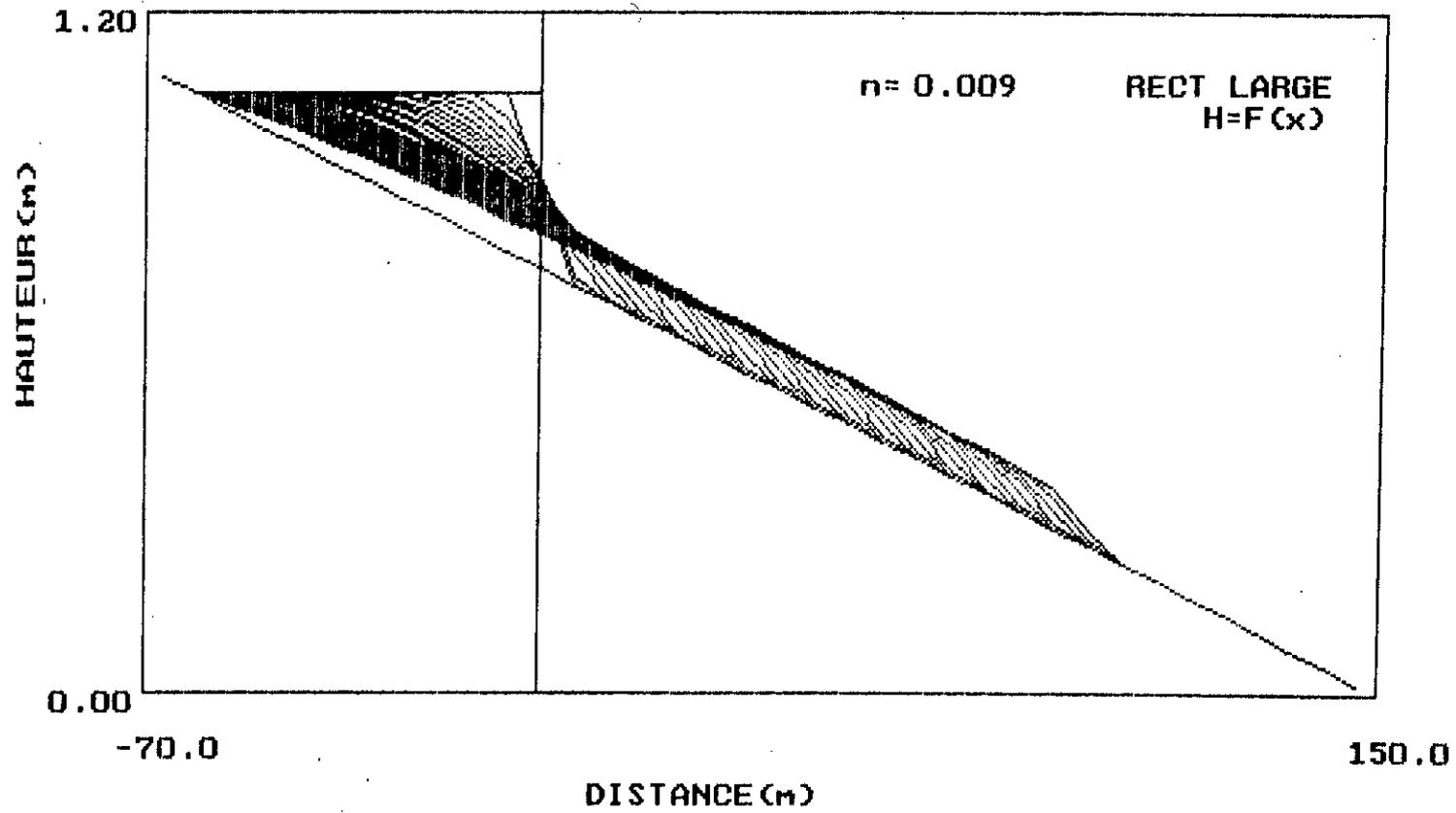
Pour une hauteur d'eau initiale au site du barrage $h_0 = 0,305m$ et une pente du fond $S_0 = 0,005$, on a effectué des essais pour deux valeurs du coefficient de Manning ,soit :

$n = 0,05$: fond comportant des irrégularités importantes .

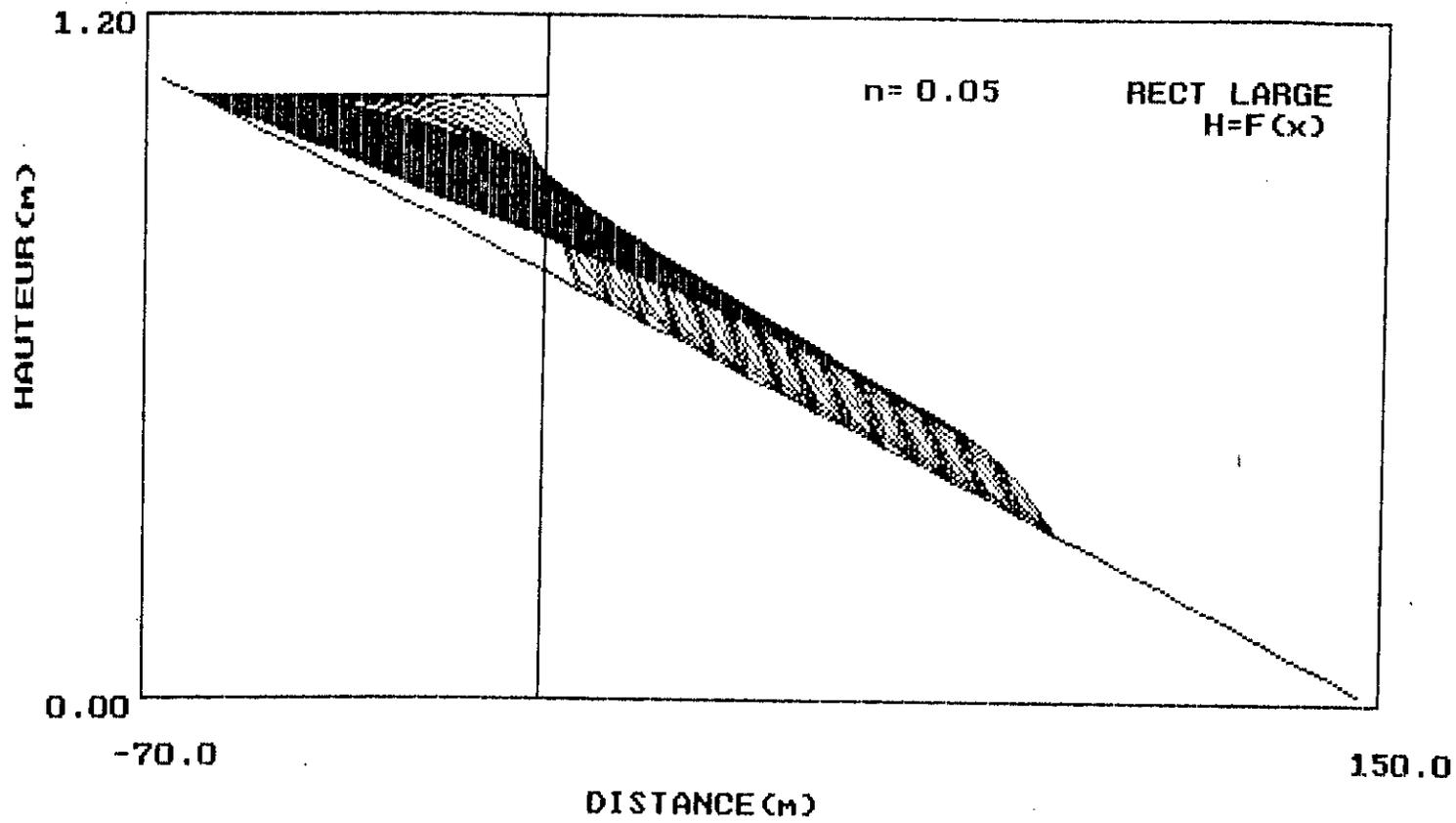
$n = 0,009$: fond comportant de légères irrégularités

Une illustration de la comparaison est donnée en pages 38, 39 et 40

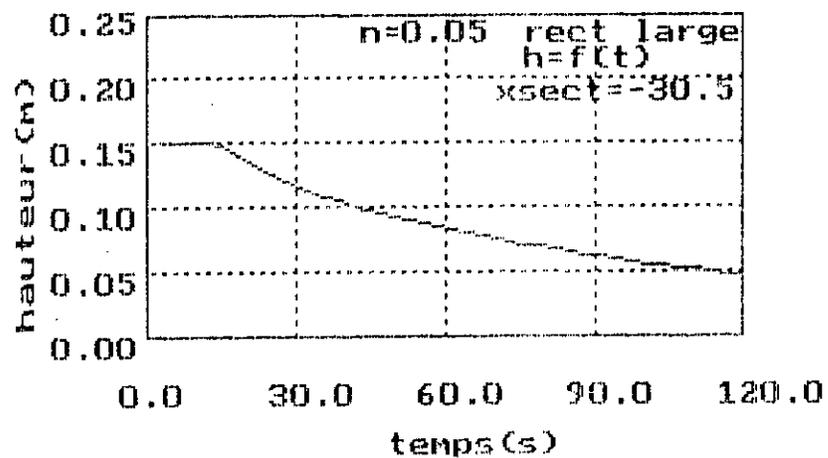
PROPAGATION DE L'ONDE



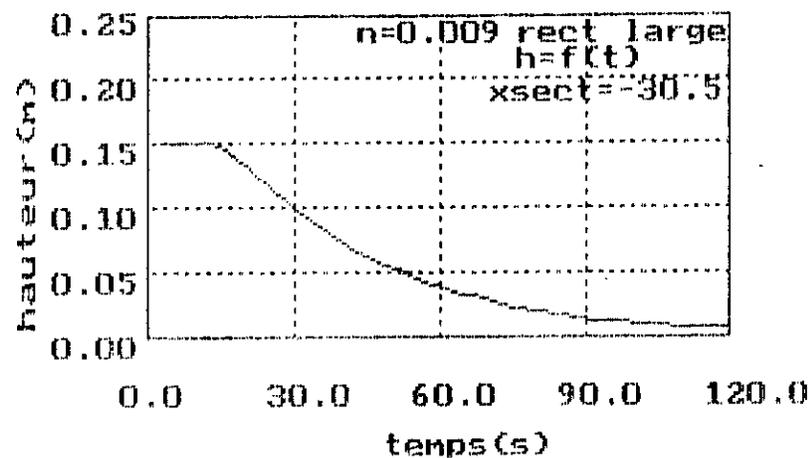
PROPAGATION DE L'ONDE



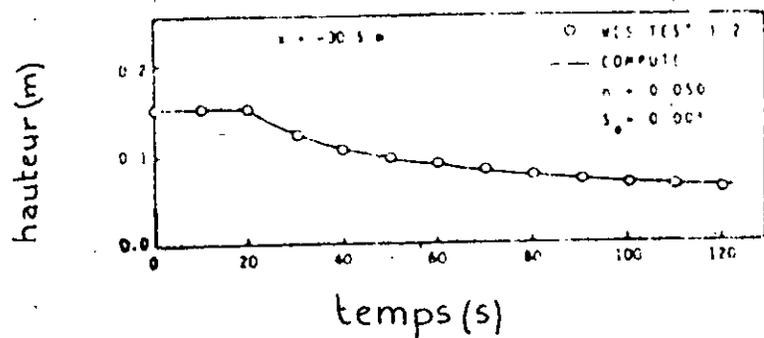
RESULTATS OBTENUS DANS CETTE ETUDE



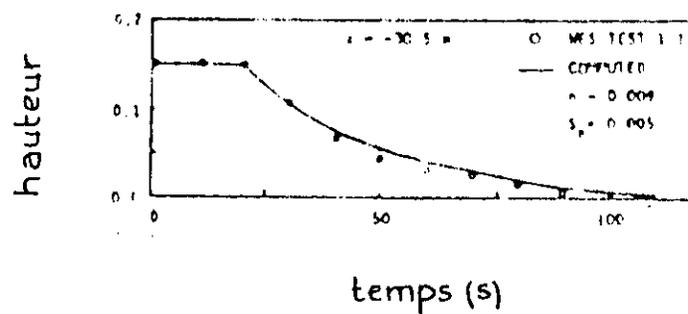
RESULTATS OBTENUS DANS CETTE ETUDE



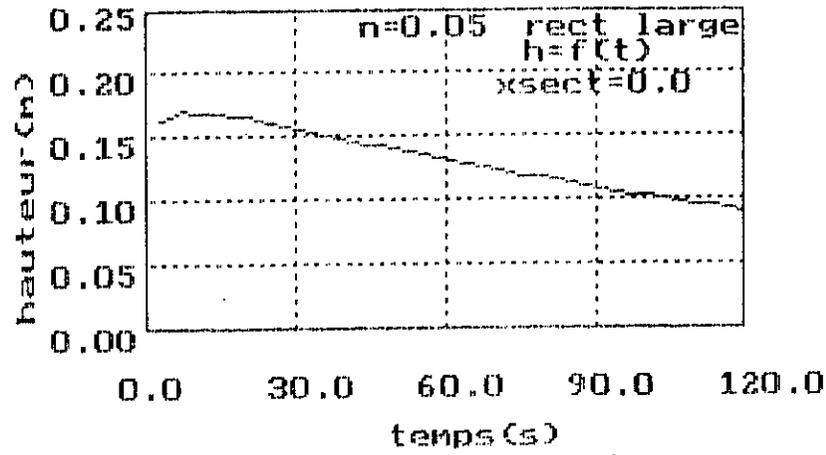
RESULTATS OBTENUS PAR SAKKAS ET W.E.S



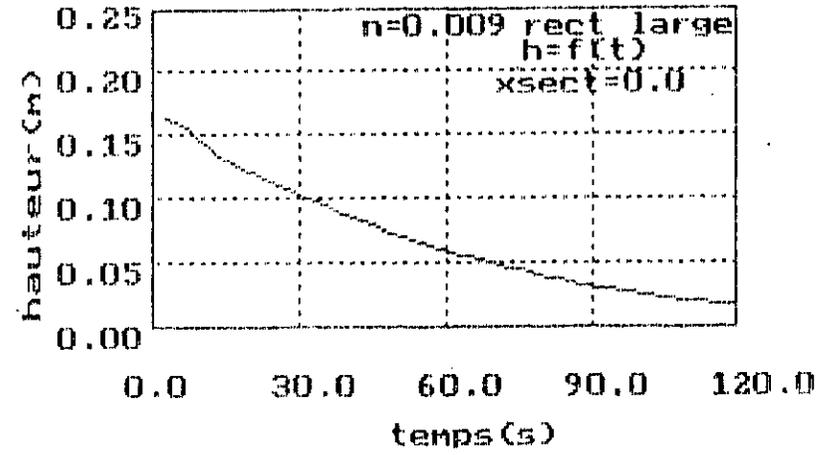
RESULTATS OBTENUS PAR SAKKAS ET W.E.S



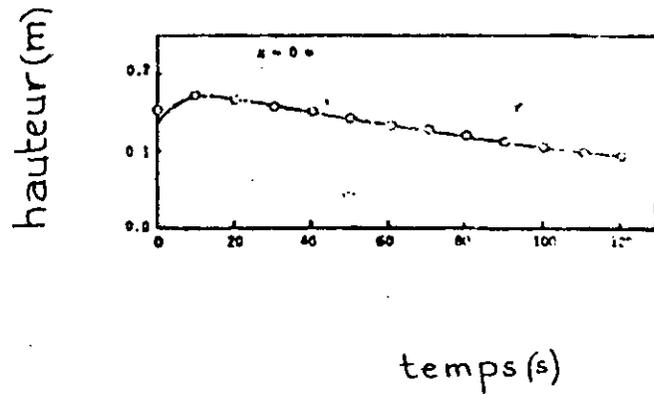
RESULTATS OBTENUS DANS CETTE ETUDE



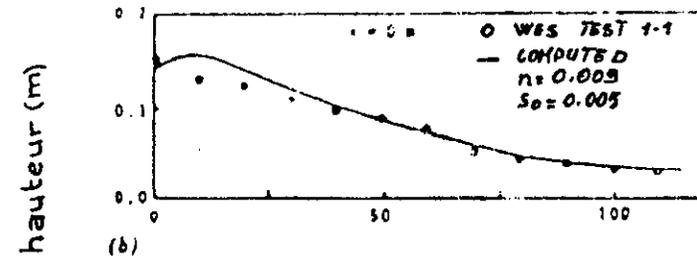
RESULTATS OBTENUS DANS CETTE ETUDE



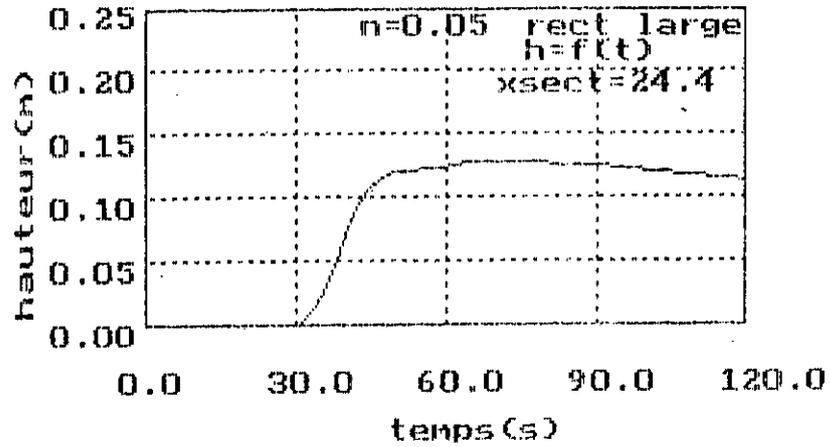
RESULTATS OBTENUS PAR SAKKAS ET W.E.S



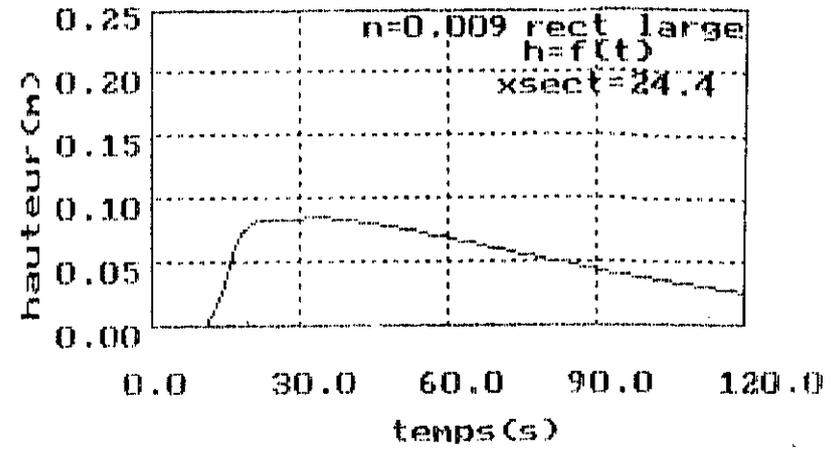
RESULTATS OBTENUS PAR SAKKAS ET W.E.S



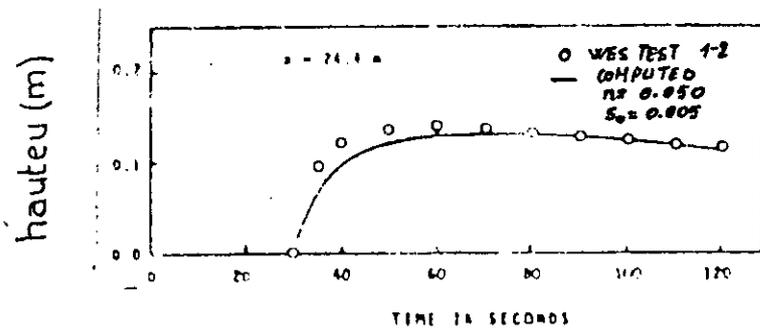
RESULTATS OBTENUS DANS CETTE ETUDE



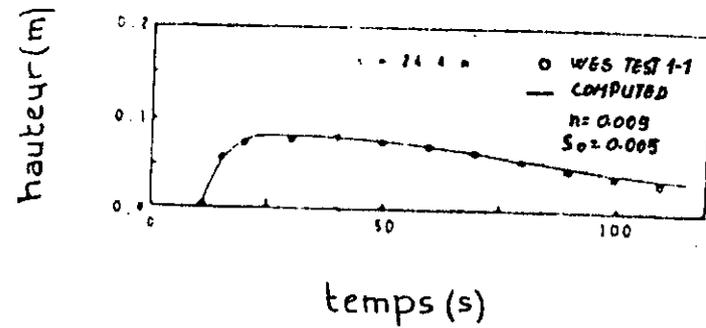
RESULTATS OBTENUS DANS CETTE ETUDE



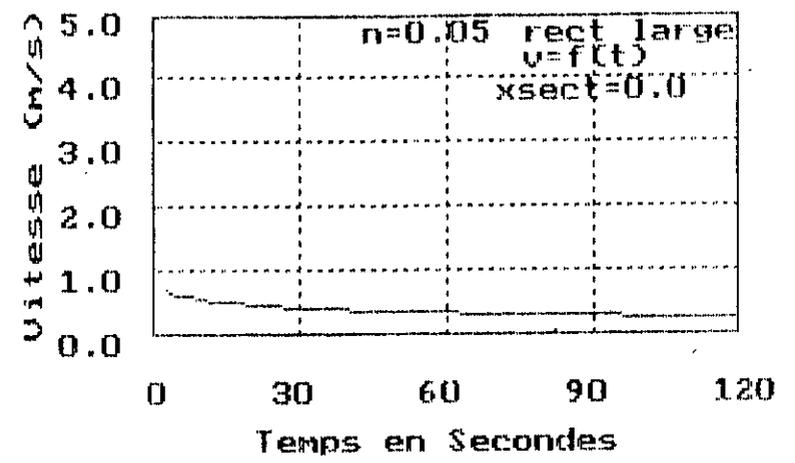
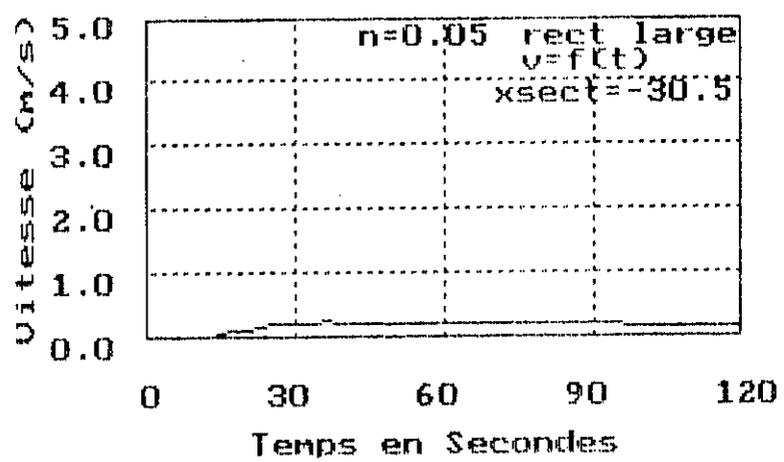
RESULTATS OBTENUS PAR SAKKAS ET W.E.S



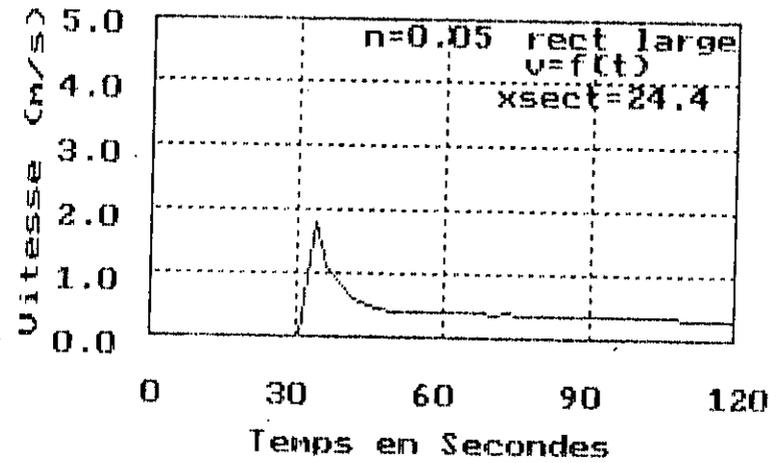
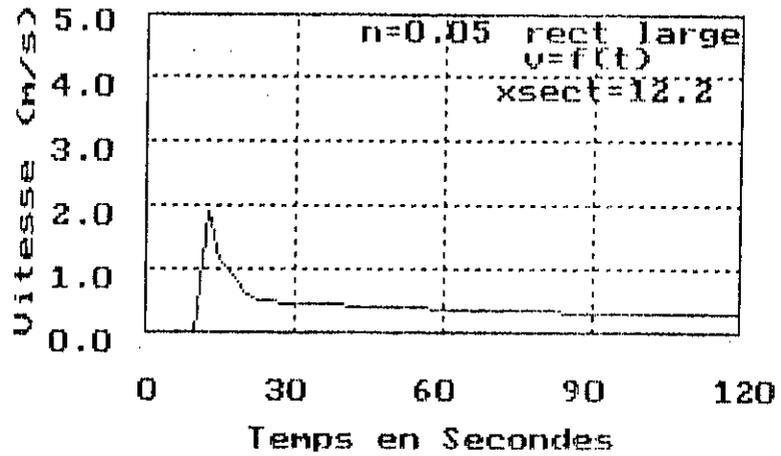
RESULTATS OBTENUS PAR SAKKAS ET W.E.S



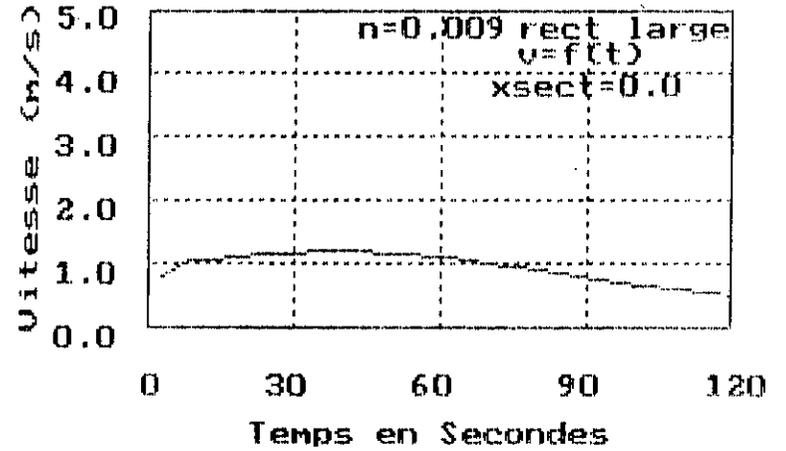
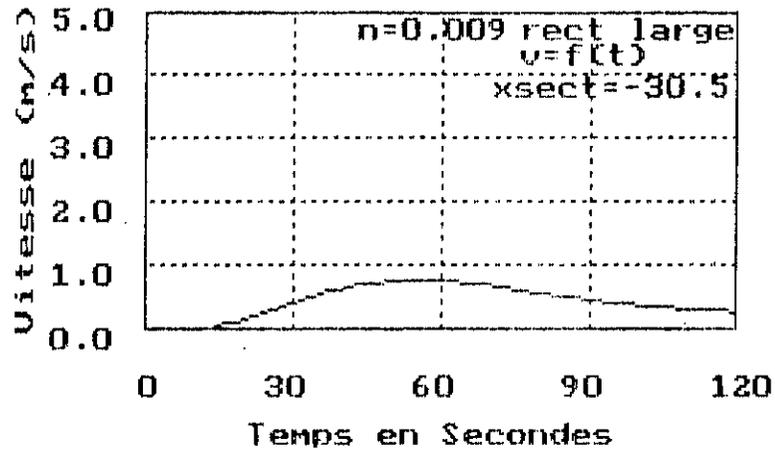
$V=f(t)$ aux différentes sections



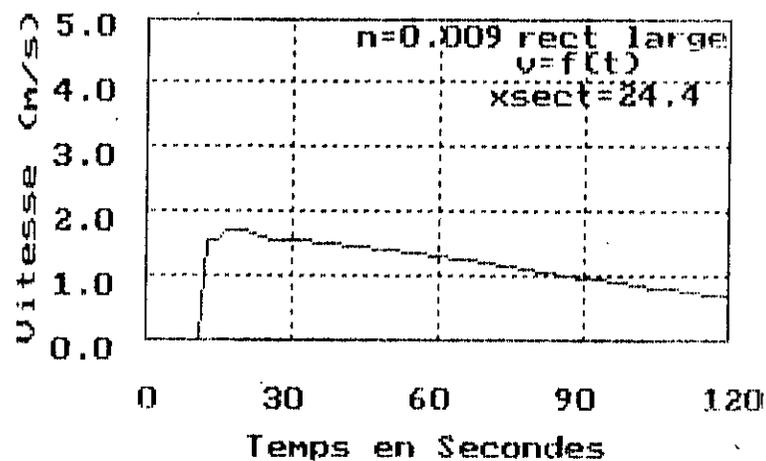
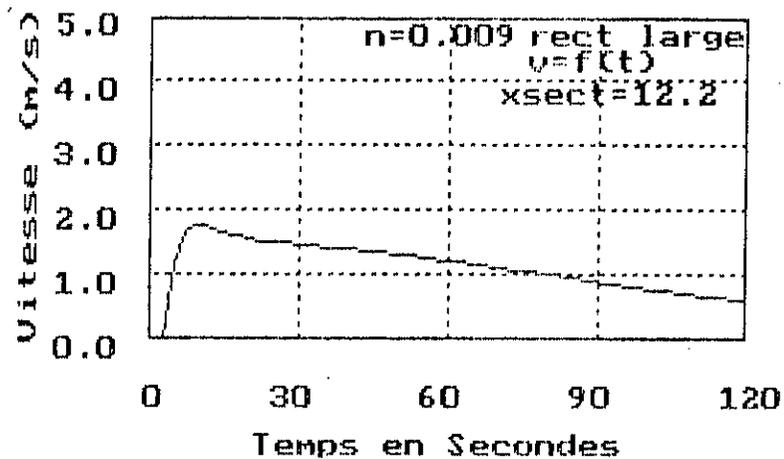
$V=f(t)$ aux différentes sections



$V=f(t)$ aux différentes sections



$V=f(t)$ aux différentes sections



2- Etude de l'effet de la pente du canal :

Dans le but d'étudier l'influence de la pente S_0 on fixe :

la hauteur initiale : $h_0 = 0,30$ m .

la rugosité du fond : $n = 0,05$

la forme du canal : rectangulaire

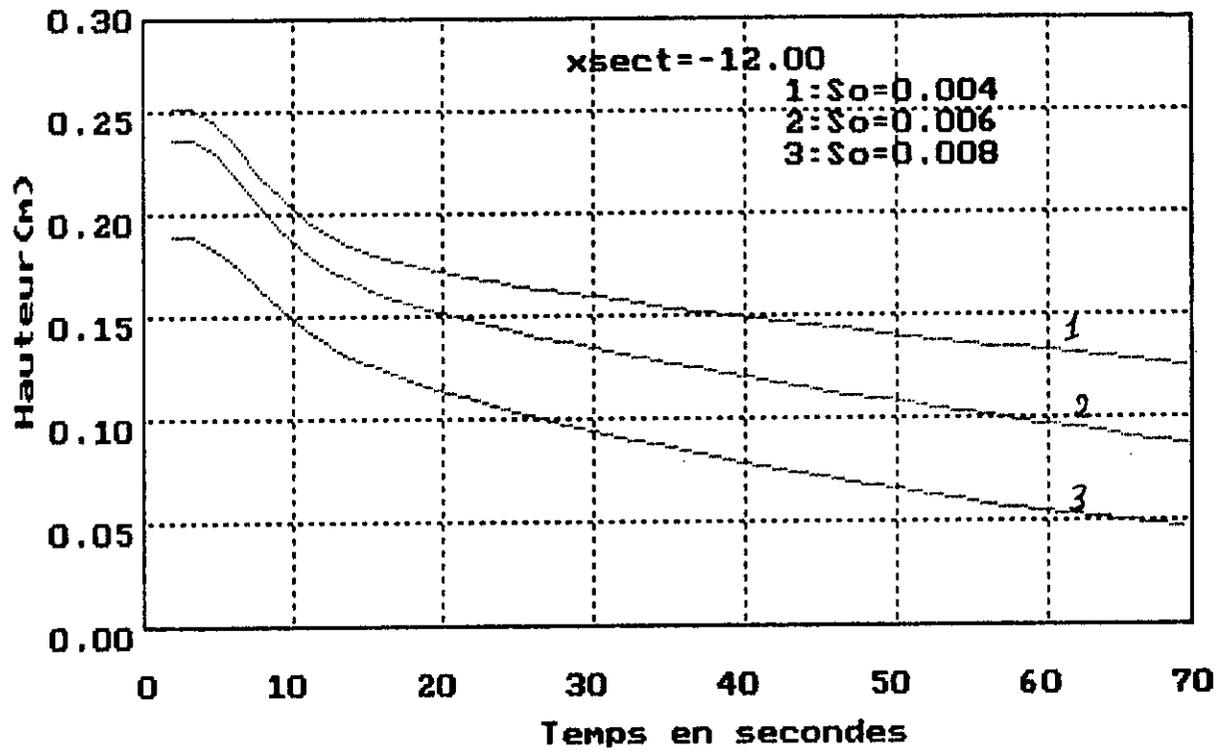
Pour les valeurs suivantes de S_0 [0,004 - 0,006 - 0,008] on étudie la variation de hauteur d'eau par rapport au fond du canal; au cours du temps, dans trois sections choisies du champs d'écoulement

$x = - 12$ m (figure de la page 46)

$x = 0,0$ m (figure de la page 47)

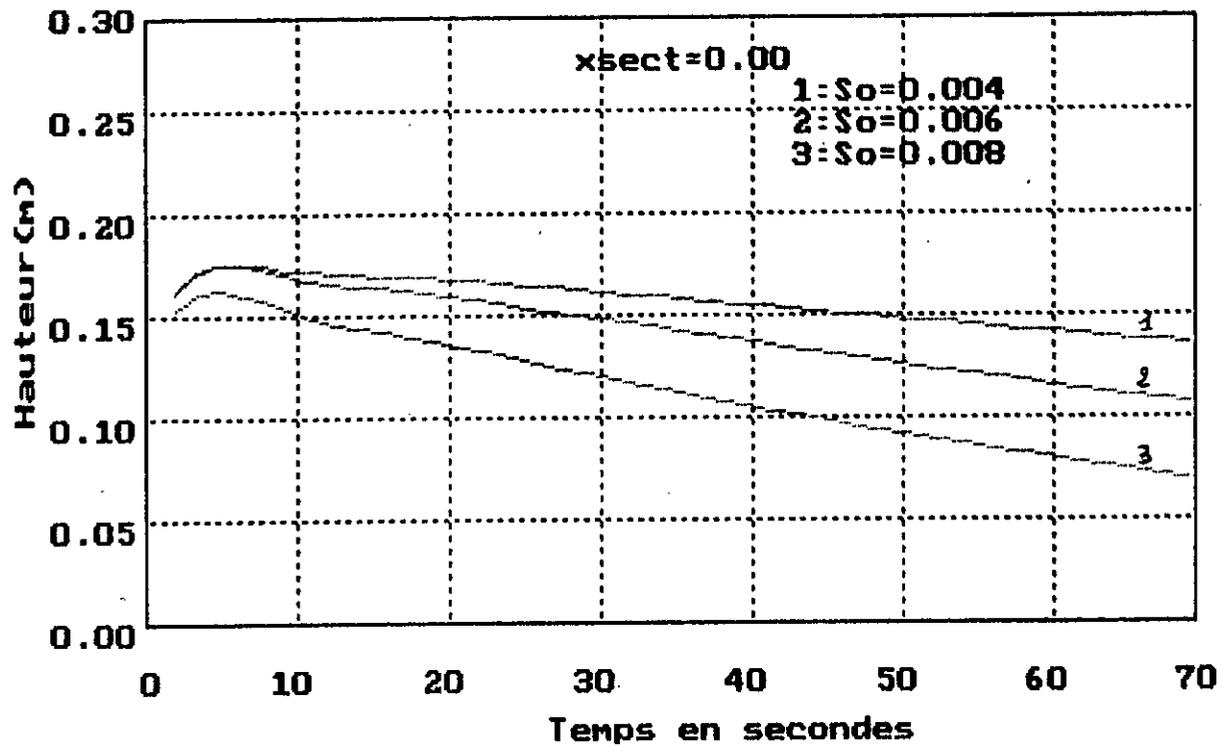
$x = 8$ m (figure de la page 48)

-97-



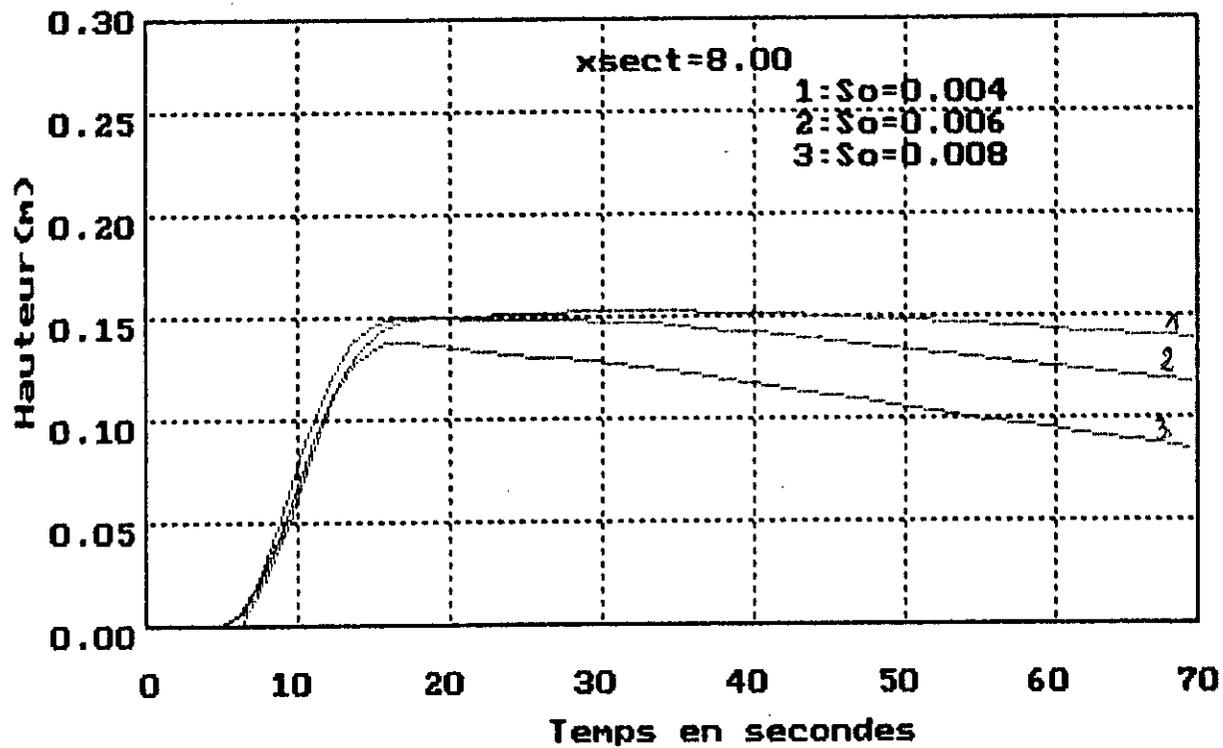
Canal Rectangulaire de Largeur 1m
ho=0.30, n=0.05

ETUDE DE L'EFFET DE LA PENTE DU CANAL

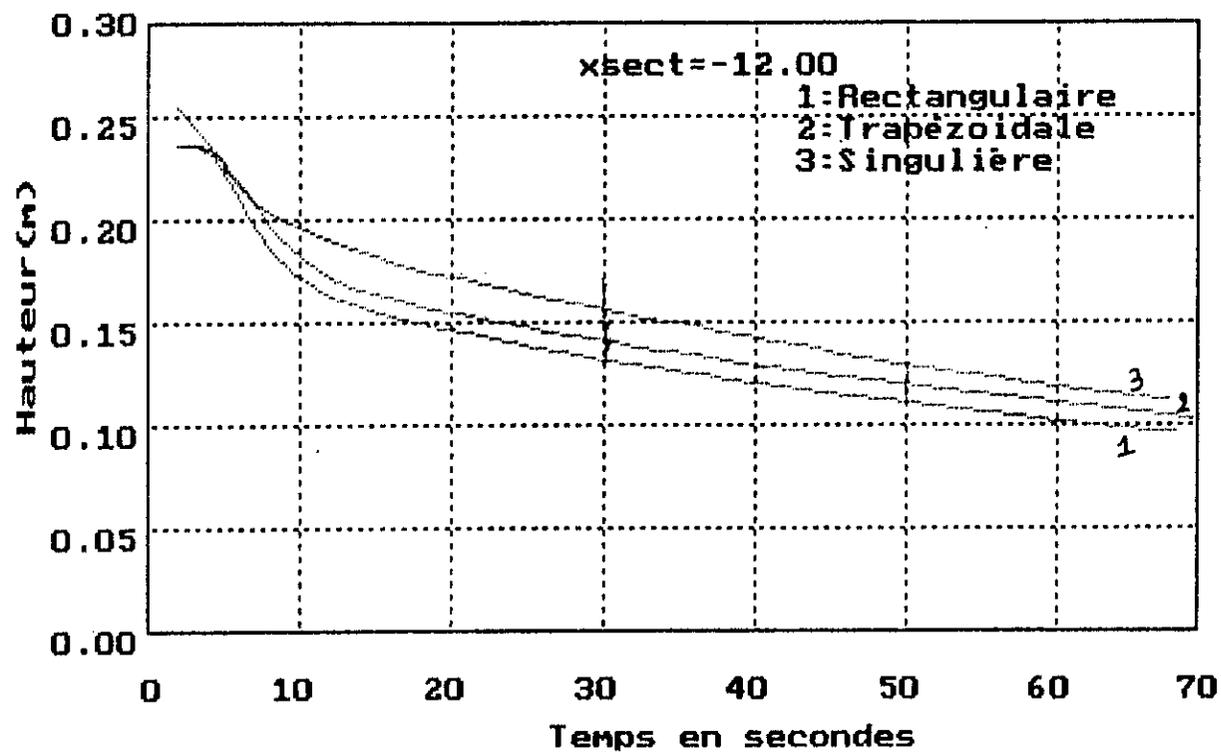


Canal Rectangulaire de Largeur 1m
 $h_o=0.30, n=0.05$

ETUDE DE L'EFFET DE LA PENTE DU CANAL

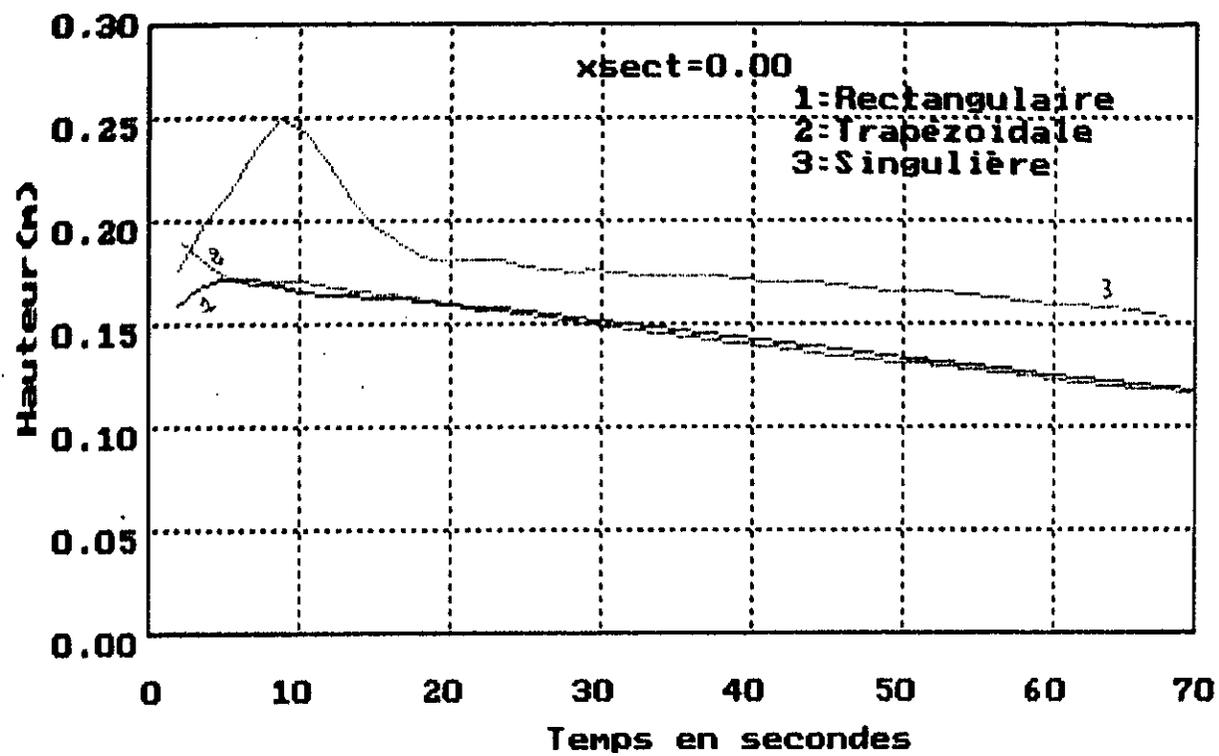


Canal Rectangulaire de Largeur 1m
 $h_o = 0.30, n = 0.05$
 ETUDE DE L'EFFET DE LA PENTE DU CANAL



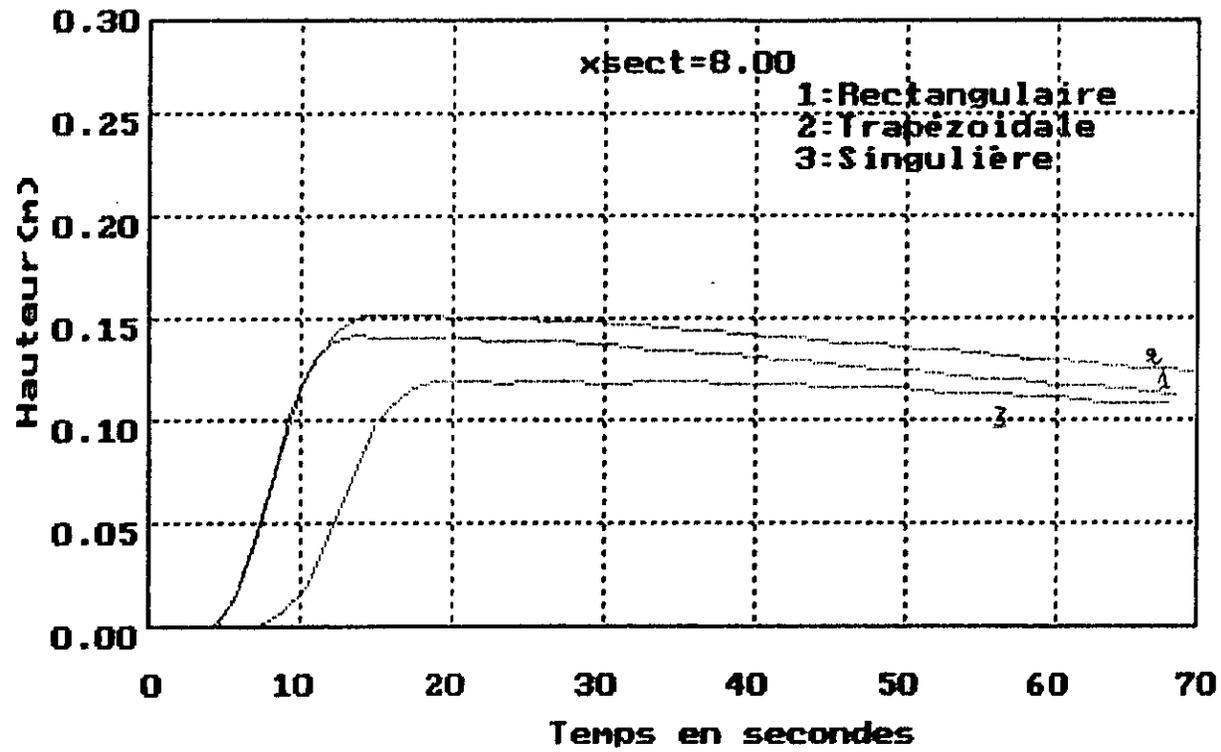
$h_0=0.30, n=0.05, S_0=0.005$

INFLUENCE DE LA FORME DU CANAL



$h_0=0.30, n=0.05, S_0=0.005$

INFLUENCE DE LA FORME DU CANAL



$h_0=0.30, n=0.05, S_0=0.005$

INFLUENCE DE LA FORME DU CANAL

4- Etude de l'influence de hauteur d'eau initiale :

Pour cela : la rugosité $n = 0,05$

la pente du canal $S_0 = 0,005$

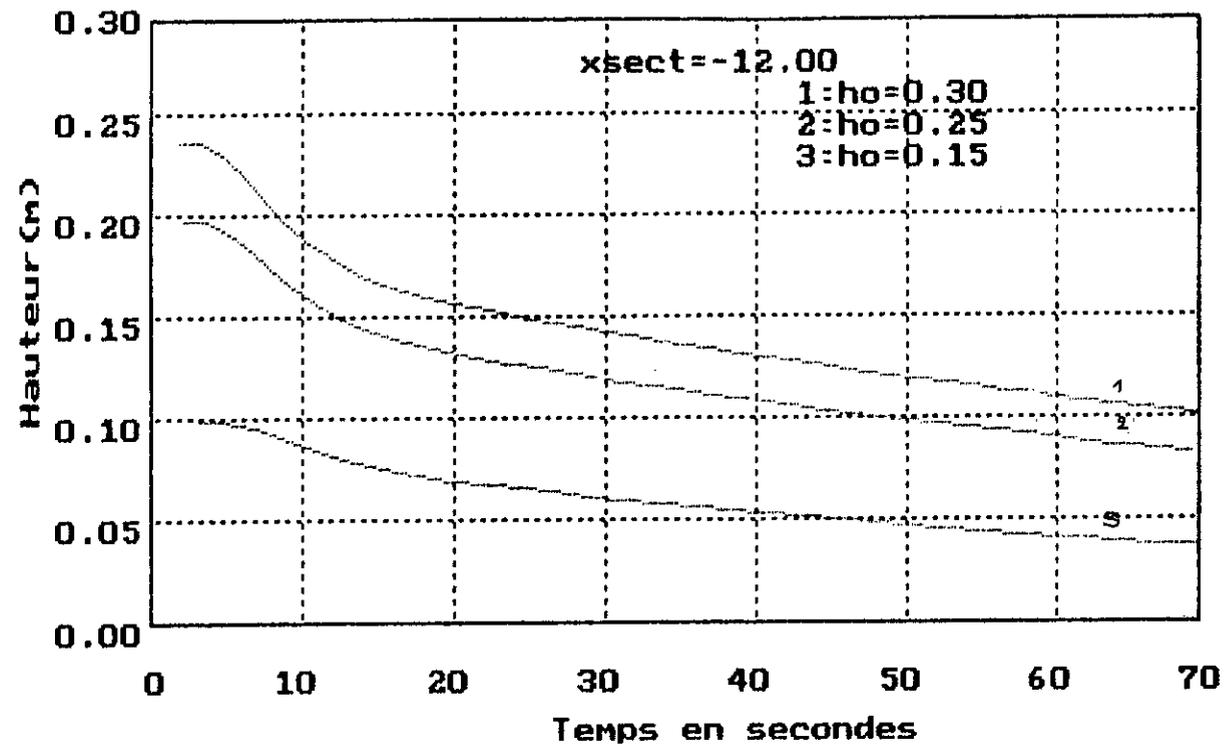
la pente du canal : trapézoïde avec petite base de 1m
pente des rives 1 .

Pour $h_0 = [0,30 - 0,25 - 0,15]$ on représente la variation de la hauteur d'eau en fonction du temps en trois sections :

$x = - 12,5$ m (figure de la page 54)

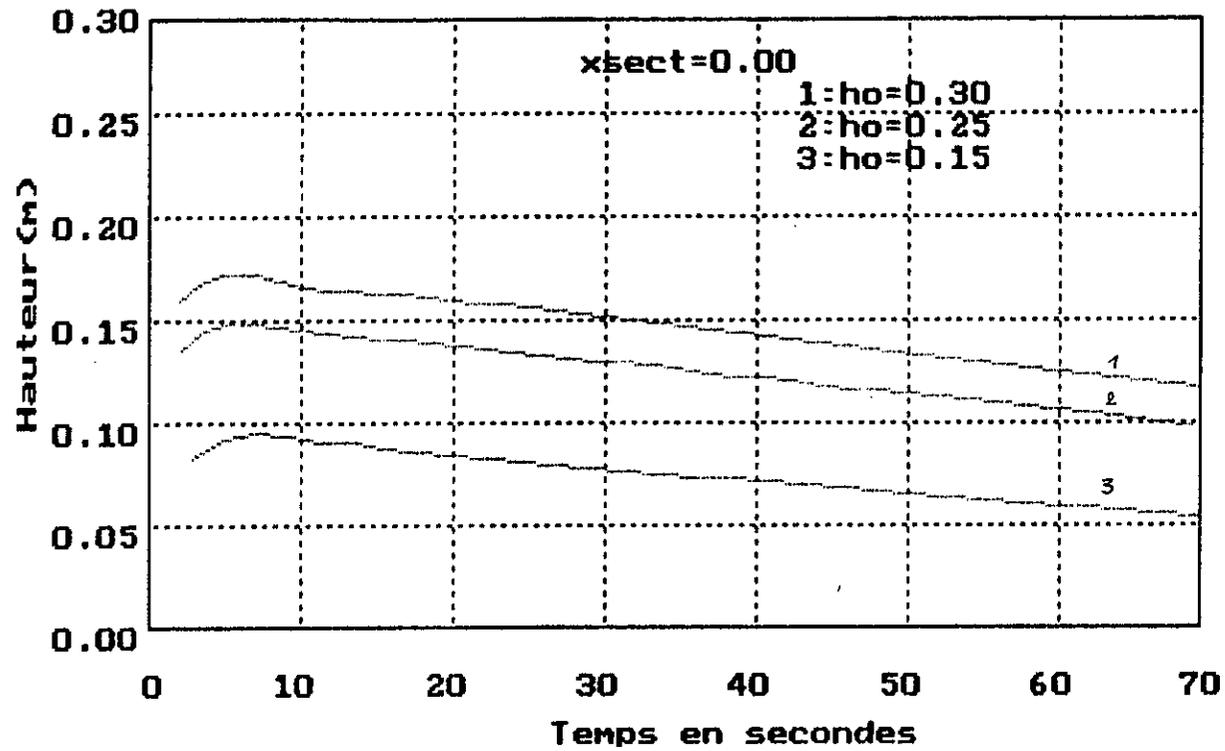
$x = 0,0$ m (figure de la page 55)

$x = 8,5$ m (figure de la page 56)



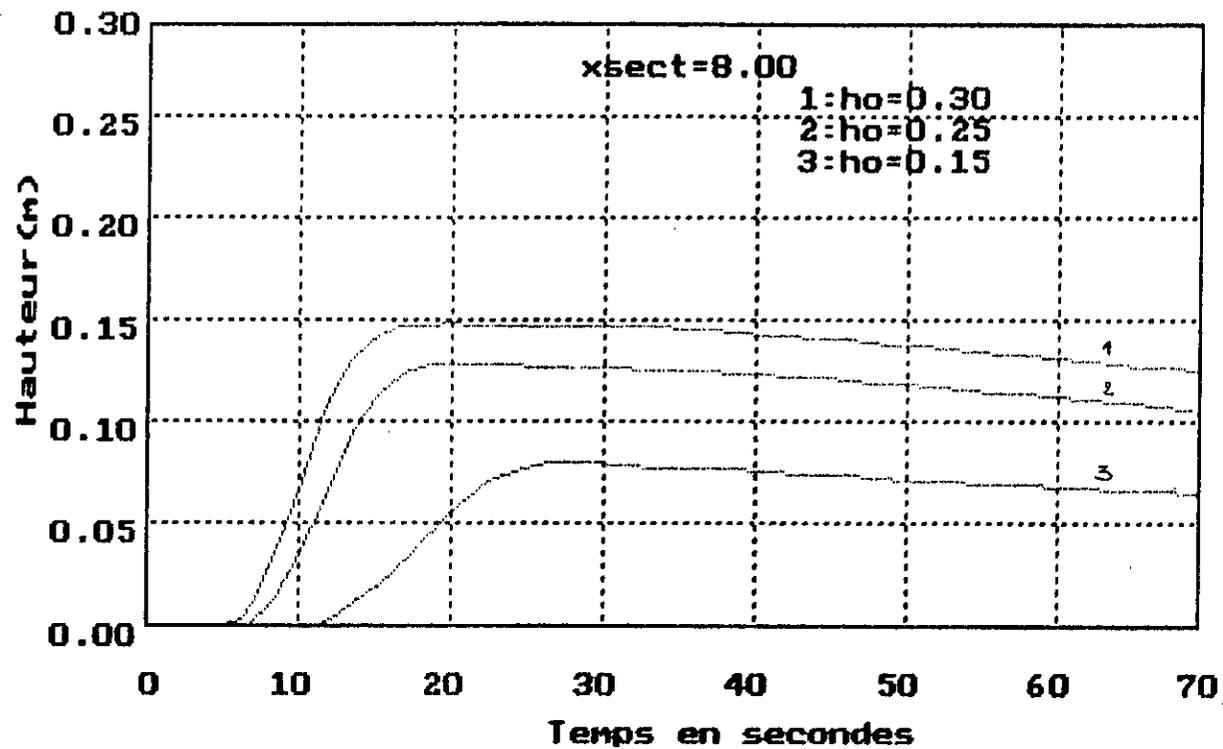
Canal Rectangulaire de Largeur 1m
 n=0.05, So=0.005

INFLUENCE DE LA HAUTEUR D'EAU INITIALE



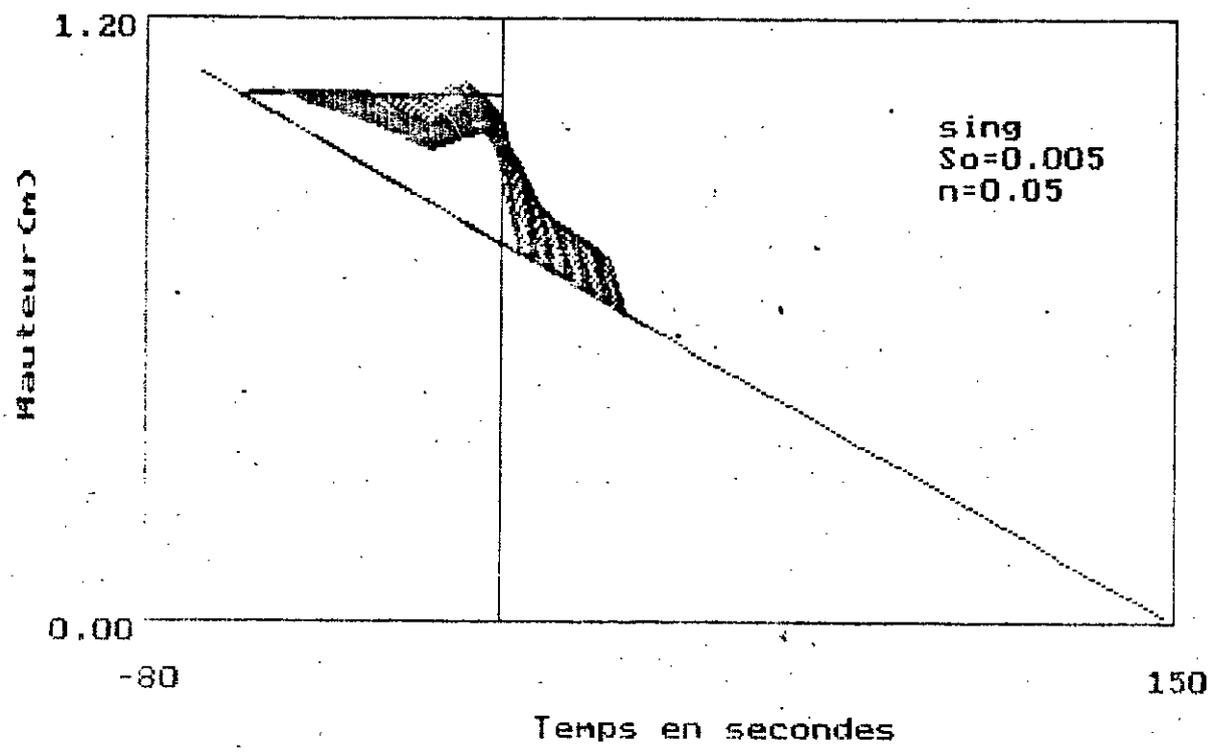
Canal Rectangulaire de Largeur 1m
 $n=0.05, S_o=0.005$

INFLUENCE DE LA HAUTEUR D'EAU INITIALE

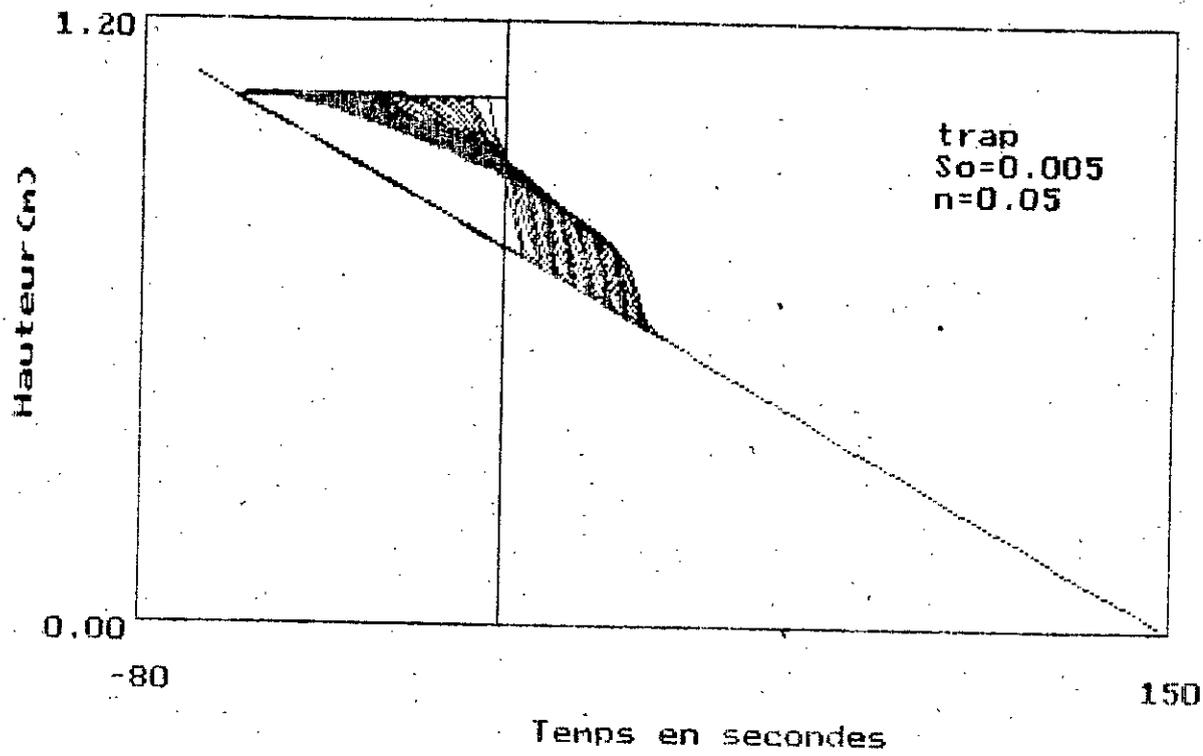


Canal Rectangulaire de Largeur 1m
 $n=0.05, S_o=0.005$

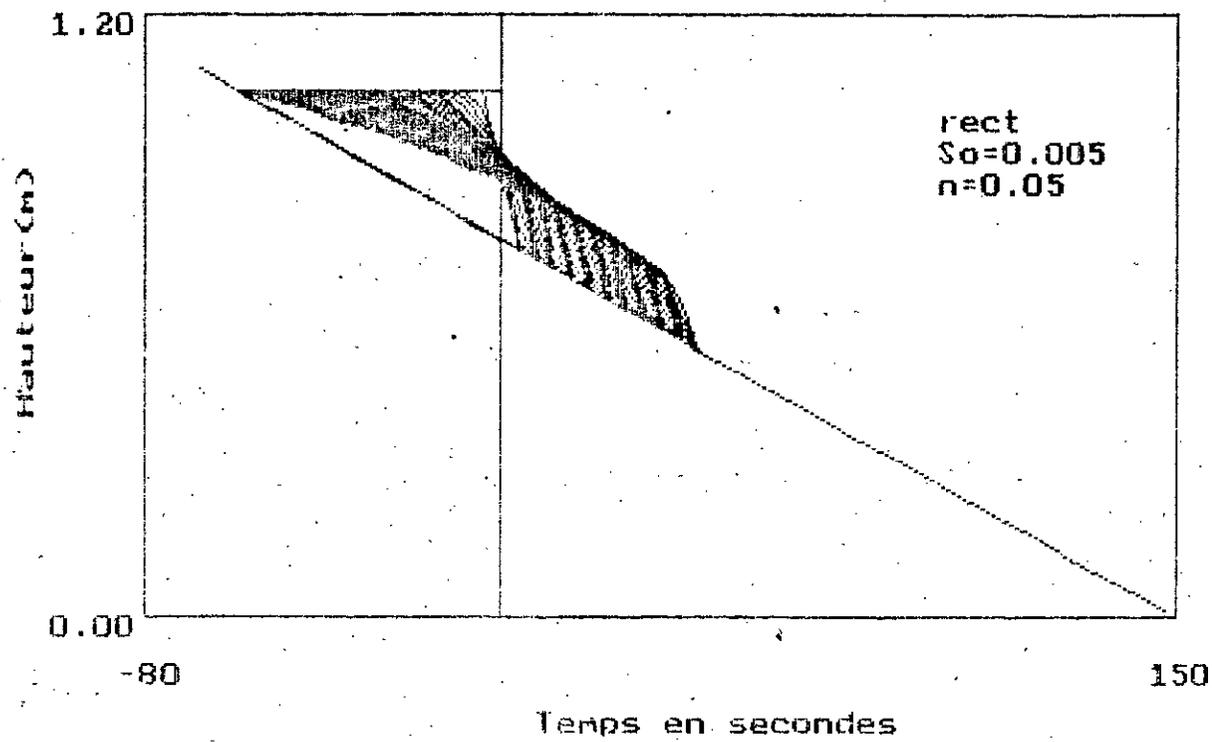
INFLUENCE DE LA HAUTEUR D'EAU INITIALE



Canal Rectangulaire non uniforme



Canal Trapezoidale 1=1,n=1



Canal Rectangulaire de Largeur 1m

Conclusions :

Nous interprétons nos résultats de la manière suivante:

1- Validation - Effets de la rugosité du canal

- Nos résultats sont très proches des résultats obtenus par G. SAKKAS, V. BELLOS et W.E.S .

- Pour les différentes sections transversales la variation de la hauteur d'eau dans le temps est plus rapide pour un coefficient de Manning plus petit .

- Pour les différentes sections transversales la vitesse varie peu en fonction du temps cela est en accord avec la conclusion de RITTER : La vitesse dans une section transversale est indépendante du temps

Le pic observé dans les courbes de variation de la vitesse au cours du temps dans les sections en aval du site du barrage est due à l'arrivée du front d'onde à ces sections, initialement seches $V=0$, avec une vitesse non nulle. Par suite la vitesse varie très lentement.

2- Effets de la pente du canal :

En amont et au site du barrage la diminution de la hauteur d'eau, initialement fixe, est proportionnelle à la pente du canal.

En aval on remarque que l'augmentation de la hauteur d'eau est inversement proportionnelle à la pente du canal et que la diminution de la hauteur d'eau est proportionnelle à la pente du canal.

3- Effets de la forme du canal :

Partant de la meme section mouillée au site du barrage on remarque :

-Pour une section donnée la hauteur varie dans le temps presque de la meme maniere pour un canal rectangulaire et trapezoidal, mais pour un temps donne la hauteur calculee pour un canal rectangulaire est plus grande que celle calculee pour un canal trapezoidal .

- Dans le cas d'un canal rectangulaire non uniforme la variation de la hauteur dans le temps est moins rapide à une section amont et plus rapide à une section aval par rapport aux deux autres formes .

Le site du barrage, le pic observe aux premiers instants est du au retrecissement de la section .

4- Effets de la hauteur initiale :

La variation de la hauteur d'eau en fonction du temps aux differentes sections transversales est independante de la hauteur initiale

CONCLUSION GENERALE

Plusieurs phénomènes hydrauliques sont complexes et parfois la résolution analytique des équations qui régissent ces phénomènes est impossible. Dans ces conditions, la modélisation par ses deux branches physique et mathématique constitue un outil de recherche.

L'utilisation d'ordinateurs de plus en plus puissants permet aujourd'hui de traiter par le calcul les problèmes qui semblaient il y a quelque trente ans, réserves au modèle réduit ou à l'observation in-situ. Les succès obtenus par l'utilisation du modèle mathématique ne doivent pas faire oublier les difficultés réelles rencontrées:

- difficultés d'obtention de données : le modèle mathématique ne saurait suppléer aux imperfections des données
- difficultés du traitement numérique : les schémas d'intégration numérique peuvent fausser sensiblement les résultats; les schémas de calcul franchement instables sont moins dangereux que des schémas stables mais qui introduisent une diffusion artificielle importante
- difficultés de l'ajustement : il y a une tendance assez répandue à pousser l'ajustement au-delà de limites raisonnables. Il ne faut pas perdre de vue que les équations différentielles, qui sont à la base du modèle mathématique, ne tiennent pas compte de tout la complexité des phénomènes.

Les modèles mathématiques liés à l'utilisation des ordinateurs sont apparus récemment, ils permettent déjà de traiter un grand nombre de problèmes, mais l'évolution est loin d'être terminée.

Cette étude que nous avons menée nous a permis d'une part de compléter nos connaissances en hydraulique générale et d'autre part d'apprendre une des méthodes les plus performantes utilisées actuellement pour traiter les problèmes d'évolution.

L'avantage de la technique que nous avons utilisée consiste dans:

- la simplicité d'application des algorithmes développés par l'utilisation du schéma de MAC CORMACK,
- la possibilité d'utiliser ces algorithmes pour des canaux de section transversale quelconque, prismatique ou non prismatique.

Annexe 1

EQUATIONS DE BASE

1> EQUATION DE CONTINUITE :

En considerant la figure (2-a) du chapitre(II)

La quantité de masse qui rentre : ρAV

La quantité de masse qui sort : $[\rho AV + (\delta(\rho AV)/\delta x) dx]$

donc $dm/dt = \rho AV - [\rho AV + (\delta(\rho AV)/\delta x) dx]$

$$\rho AV - [\rho AV + (\delta(\rho AV)/\delta x) dx] = - (\delta(\rho AV)/\delta x) dx \dots\dots(1)$$

$$- \delta(\rho AV)/\delta x = \delta(\rho A)/\delta t$$

comme $\rho =$ constante d'après l'hypothèse (4) , on aura :

$$\delta(AV)/\delta x + \delta(A)/\delta t = 0$$

et finalement :

$$\delta A/\delta t + A \delta V/\delta x + V \delta A/\delta x = 0 \dots\dots(2)$$

or $dA = L dH$, cette equation peut être transformée à :

$$\delta H/\delta t + V \delta H/\delta x + A/L \delta V/\delta x = 0 \dots\dots(3)$$

2> EQUATION DE QUANTITE DE MOUVEMENT :

$$\Sigma \bar{F} = d(\overline{mV})/dt \dots\dots(4)$$

$\Sigma \bar{F}$: la somme des forces extérieures,

$d(\overline{mV})/dt$: variation de quantité de mouvement.

Les forces exterieurs :

1/ les forces de pression.

d'après l'hypothèse (1) la distribution de pression est hydrostatique alors :

- la force de pression à l'amont : $\rho g H_0 A$

- la force de pression à l'aval : $-\rho g [H_0 A + \delta(H_0 A)/\delta x dx]$

$(\delta(H_0 A)/\delta x) dx$: représente la variation du moment statique de la section transversale le long de l'écoulement.

$$\left(\frac{\delta(H_0 A)}{\delta x}\right) dx = dM_s = (H_0 + dH) A + L \cdot dH^2 / 2 - H_0 A$$

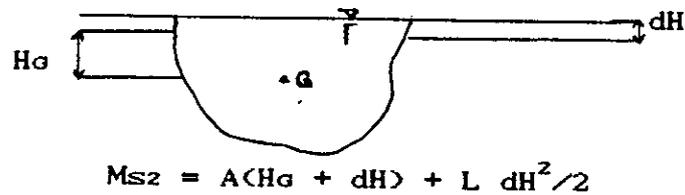
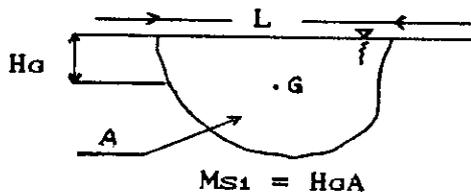


FIG (1)

Le terme $L dH^2 / 2$ est infiniment petit du deuxième ordre donc on le néglige, ce qui donne :

$$\left(\frac{\delta(H_0 A)}{\delta x}\right) dx = A dH$$

donc la force de pression à l'aval devient :

$$= \rho g [H_0 A + A dH]$$

finalement la force de pression vaut :

$$F_p = \rho g H_0 A - \rho g [H_0 A + A dH]$$

$$F_p = - \rho g A dH$$

2/ La force du poids du liquide de volume de contrôle projeté sur une parallèle à la pente du fond vaut :

$$F_g = \rho g A dx S_0$$

- la force de frottement le long de la paroi vaut :

$$F_f = - \tau_0 Pr dx$$

donc $\Sigma F = - \rho g A dH + \rho g A dx S_0 - \tau_0 Pr dx$

où P : la pression hydrostatique

A : la section transversale du liquide.

γ : le poids volumique du liquide

τ_0 : la contrainte du frottement sur les parois

Pr : le périmètre mouillé

$d(mV) / dt$: variation de la quantité de mouvement.

En général , si on considère la figure (2) , telque le système I passe au système II.

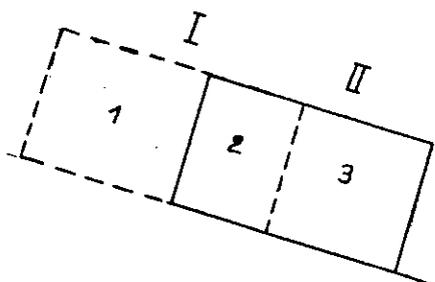


FIGURE (2)

On distingue trois zones :

zone (1) : c'est la zone perdue par le système.

zone (2) : c'est la zone commune aux deux systèmes.

zone (3) : c'est la zone gagné par le système .

Pour une variable N , on peut écrire :

$$\begin{aligned} dM/dt &= (N_2(t+\delta t) + N_3(t+\delta t) - N_1(t) - N_2(t)) / dt \\ &= \delta N_2 / \delta t + N_3(t+\delta t) / \delta t - N_1(t) / \delta t \end{aligned}$$

Dans notre cas la variable N est (mV)

$$\begin{aligned} \frac{d(mV)}{dt} &= \frac{\delta(\rho AV dx)}{\delta t} + \frac{\rho AV dt V + \frac{\delta(\rho AV dt V) dx}{\delta x}}{dt} - \frac{\rho AV dt V}{dt} \\ &= \frac{\delta}{\delta t} (\rho A dx V) + \frac{\delta}{\delta x} (\rho AV^2) dx \\ &= \rho dx [\delta(AV) / \delta t + \delta(AV^2) / \delta x] \\ &= \rho dx [A \delta V / \delta t + V \delta A / \delta t + 2 AV \delta V / \delta x + V^2 \delta A / \delta x] \\ &= \rho dx [V(\delta A / \delta t + V \delta A / \delta x + A \delta V / \delta x) + A \delta V / \delta t + AV \delta V / \delta x] \end{aligned}$$

or : $\delta A / \delta t + V \delta A / \delta x + A \delta V / \delta x = 0$ [équation de continuité]

$$d'où d(mV)/dt = \rho dx [A \delta V/\delta t + AV \delta V/\delta x]$$

En remplaçant ΣF et $d(mV)/dt$ par leurs expressions dans (4) , on obtient :

$$- \rho g A dH + \rho g A dx S_o - \tau_o P r dx = \rho dx A [\delta V/\delta t + V \delta V/\delta x] (**)$$

or $\tau_o = (1/2)\rho f V^2$ ou f : coefficient de frottement

et $V = C \sqrt{RSf}$: formule de Chezy

donc : $\tau_o = (1/2) \rho f C^2 R Sf$

et $C = \sqrt{2g / f}$

donc $\tau_o = \rho R g Sf$, ce qui donne

$$\tau_o A dx = \rho g A dx Sf$$

En remplaçant dans (**), on aura :

$$\rho A dx [\delta V/\delta t + V \delta V/\delta x] = - \rho g A dH + \rho g A dx S_o - \rho g A dx Sf$$

On divise par ρdx :

$$[A \delta V/\delta t + AV \delta V/\delta x] = - g A \delta H/\delta x + g A (S_o - Sf)$$

Finalement l'équation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\delta V/\delta t + V \delta V/\delta x + g \delta H/\delta x = g (Sf - S_o) \quad (4)$$

ANNEXE 2

SOLUTION ANALYTIQUE DE RITTER

Considérons dans un canal horizontal, prismatique à parois lisse, la propagation d'une intumescence due à la manoeuvre (ouverture) d'une vanne à l'extrémité amont figure (1).

Notons pour $i = 1, 2$

V_i : vitesse

A_i : section droite

y_i : profondeur

V_w : vitesse absolue de l'onde

h : hauteur de l'onde

On désigne par \bar{y}_i la profondeur du centre de gravité de la section

i : soit $\bar{y}_i = \frac{1}{A_i} \int y \, dA$

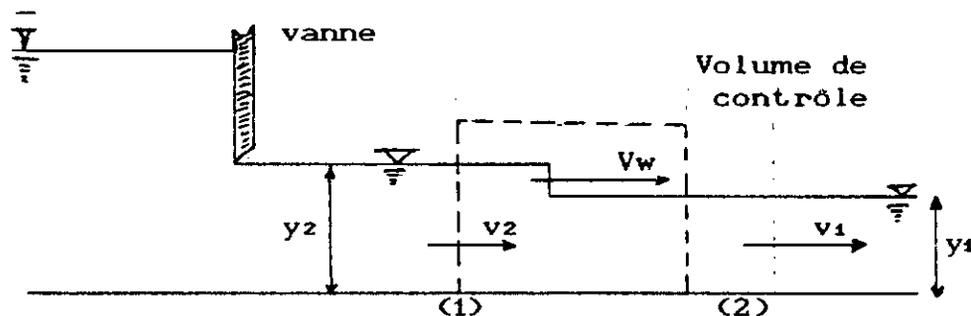


FIGURE (1) ECOULEMENT NON PERMANENT

Pour un observateur lié à la vanne, le phénomène est non permanent. le système peut cependant être remplacé par un écoulement permanent fictif, en liant l'observateur au front d'onde. Par rapport à un référentiel lié au front d'onde, on peut écrire, pour le volume de contrôle :

1- Equation de continuité :

$$A_1 (V_1 - V_w) = A_2 (V_2 - V_w) \quad (1)$$

2- Equation dynamique :

$$\Sigma F_{ext} = \frac{\gamma A_1 (V_1 - V_w)}{g} [(V_1 - V_w) - (V_2 - V_w)]$$

$$= \frac{\gamma A_1 (V_1 - V_w) (V_1 - V_2)}{g}$$

La résultante des forces extérieures appliquées au volume de contrôle, suivant l'axe du canal, se réduit à celle des forces de pression hydrostatique.

$$\Sigma F_{\text{ext}} = \gamma (A_2 \bar{y}_2 - A_1 \bar{y}_1)$$

$$\text{d'où : } \frac{\gamma A_1}{g} (V_1 - V_w) (V_1 - V_2) = \gamma (A_2 \bar{y}_2 - A_1 \bar{y}_1) \quad (2)$$

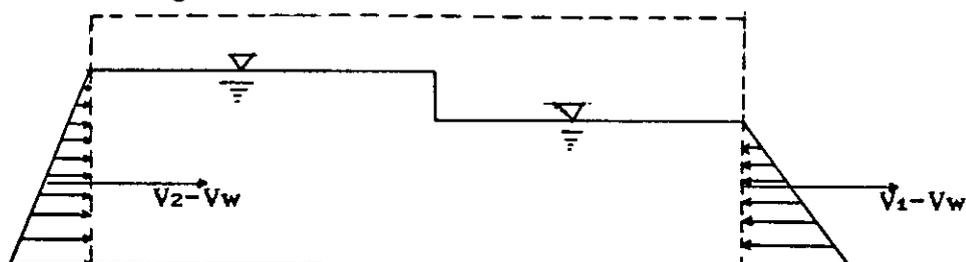


FIGURE (2) ECOULEMENT PERMANENT EQUIVALENT

Eliminon V_2 en utilisant l'équation (1), on obtient :

$$(V_1 - V_w)^2 = \frac{g A_2}{A_1 (A_2 - A_1)} (A_2 \bar{y}_2 - A_1 \bar{y}_1) \quad (3)$$

L'onde se déplace vers l'aval, ceci n'est possible que si sa vitesse est supérieure à la vitesse initiale V_1 , d'où :

$$V_w = V_1 + \left[\frac{g A_2}{A_1 (A_2 - A_1)} (A_2 \bar{y}_2 - A_1 \bar{y}_1) \right]^{1/2} \quad (4)$$

$V_w - V_1$ est la vitesse de l'onde relativement à l'écoulement initial, d'où la célérité d'une onde dans une eau tranquille.

$$C = \pm \left[\frac{g A_2}{A_1 (A_2 - A_1)} (A_2 \bar{y}_2 - A_1 \bar{y}_1) \right]^{1/2} \quad (5)$$

Le signe (+) pour l'onde se propageant dans le sens de l'écoulement.
Le signe (-) pour l'onde se propageant en sens contraire.

En éliminant cette fois-ci V_w entre les équations (1) et (2), on obtient une relation entre les paramètres de l'écoulement à l'amont et à l'aval de front d'onde :

$$A_2 \bar{y}_2 - A_1 \bar{y}_1 = \frac{A_1 A_2}{y(A_2 - A_1)} (V_1 - V_2)^2 \quad (6)$$

la hauteur du front : $h = y_2 - y_1$

l'onde est dite positive si : $h > 0$

l'onde est dite négative si : $h < 0$

Remarques :

1- Les équations (1) - (6) régissant la propagation d'une onde à surface libre fait intervenir cinq variables qui ne sont pas toutes indépendantes.

2- Aucune hypothèse n'est faite sur la forme de la section droite, c'est à dire ces équations sont applicables à n'importe quelle forme de la section droite.

3- Analogie et interprétation :

Appliquons les équations établies ci-dessous à une section droite rectangulaire de largeur B.

on a : $\bar{y}_i = 1/2 y_i$

$$A_i = B y_i \quad i = 1, 2$$

L'équation (5) s'écrit alors :

$$c = \sqrt{g y_2 (y_1 + y_2) / 2 y_1} \quad \dots(7)$$

qui est la formule de Lagrange ,

posons $y_2 = y_1 + \Delta y$

il vient $C = [g y_1 (1 + \Delta y / y_1) (1 + \Delta y / y_2)]^{1/2}$

pour une intumescence infinitésimale , Δy est très faible , comparé à y_1 , ce qui permet d'écrire :

$$C = \sqrt{g y_1} \quad \dots(8)$$

l'équation (6) s'écrit elle aussi dans ce cas :

$$(V_1 - V_2)^2 = \frac{g (y_1 - y_2)}{2 y_1 y_2} (y_1^2 - y_2^2) \quad \dots(9)$$

introduisant $y_2 = y_1 + \Delta y$

$$\begin{aligned} (\Delta V)^2 &= - \frac{g(\Delta y)}{2y_1^2 (1 + \Delta y/y_1)} [y_1^2 - (y_1 + \Delta y)^2] \\ &= \frac{g(\Delta y)}{2 (1 + \Delta y/y_1)} [(1 + \Delta y/y_1)^2 - 1] \end{aligned}$$

pour une intumescence infinitésimale :

$$(\Delta V)^2 \cong g \Delta y / 2 \cdot 2 \Delta y / y_1 = g (\Delta y)^2 / y_1$$

or $C^2 = gy_1$

$$\rightarrow (\Delta y)^2 = \frac{c^2 (\Delta V)^2}{g}$$

$$\text{ou } \Delta y = \pm c \Delta V / g$$

4- EXEMPLES :

Exemple 1 :

Une onde négative se propage dans un canal rectangulaire lisse à l'aval d'une vanne, après fermeture partielle de celle-ci. Déterminons la célérité de l'onde, et la vitesse de l'écoulement juste à l'amont du front d'onde. FIG(3)

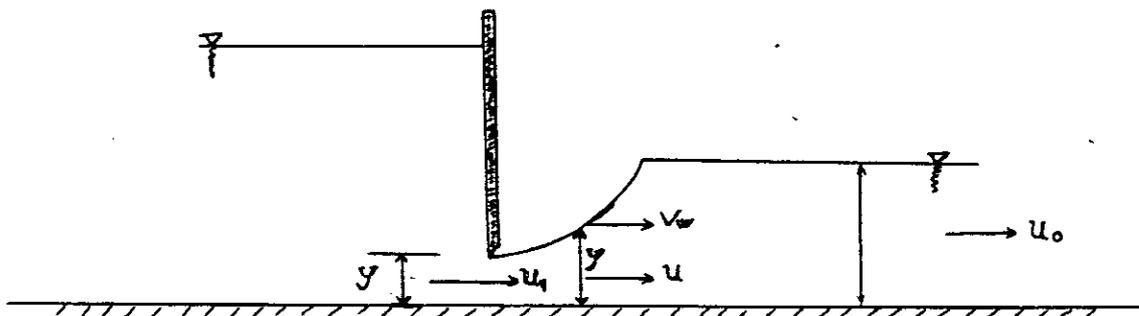


FIG 3

Avant fermeture de la vanne profondeur y_0

Vitesse u_0

Après fermeture de la vanne profondeur y_1

Vitesse u_1

pour Δy faible, on a d'après l'équation (11) :

$$dy = \pm c \, dV/g$$

$$\Rightarrow dV/dy = \pm g/C = \pm g/\sqrt{gy} = \pm \sqrt{gy}$$

l'onde se déplace vers l'aval ($x > 0$) :

$$dV/dy = + \sqrt{gy}$$

$$\Rightarrow \int_{u_0}^u dV = \int_{y_0}^y \sqrt{gy} \, dy$$

$$\text{d'où } u = u_0 - 2\sqrt{g} \left(\sqrt{y_0} - \sqrt{y} \right)$$

$$V_w = u + \sqrt{gy} = u_0 - 2\sqrt{gy_0} + 3\sqrt{gy}$$

si la vanne est abaissée à l'instant $t=0$, la position de l'onde est donnée par :

$$x = V_w \cdot t$$

$$x = \left(u_0 - 2\sqrt{gy_0} + 3\sqrt{gy} \right) t$$

Eliminant y en utilisant l'expression de u ; on trouve :

$$u = u_0/3 + 2/3 \, x/t - 2/3 \sqrt{gy_0}$$

Exemple 2: Rupture de barrage

Les figures (4) et (5) montrant une schématisation de la rupture instantanée d'un barrage de retenue .

C'est un cas particulier de l'exemple précédent avec $u_0 = 0$

$$\text{vitesse } u = -2\sqrt{g} \left(\sqrt{y_0} - \sqrt{y} \right)$$

$$\text{forme de la surface libre : } x = \left(3\sqrt{gy} - 2\sqrt{gy_0} \right) t$$

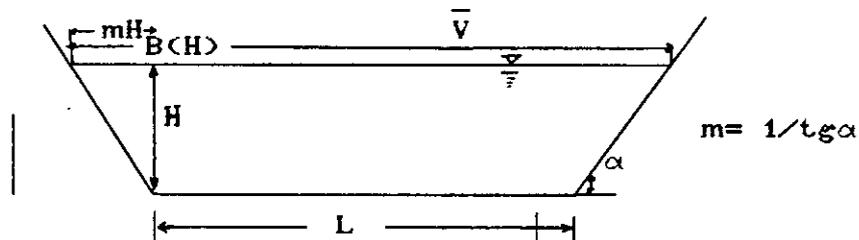
C'est la solution analytique de Ritter, du problème de rupture de barrage en $x = 0$ on a quelque soit t : $y = 4/9 \, y_0$ d'où la vitesse

$$u = -2/3 \sqrt{g \, y_0}$$

qui montre que la vitesse de cet écoulement est indépendante du temps

ANNEXE 3

a- / Section trapezoide:



a-1 : Après avoir calculé A des algorithmes précédents . Le calcul des Hauteurs s'effectue de la manière suivante :

On sait que la surface du trapèze vaut :

$$A = \frac{L + B(H)}{2} \cdot H \quad \dots(1)$$

et $B(H) = L + 2mH$

donc $A = \frac{2L + 2mH}{2} \cdot H = (L + mH) \cdot H$

or $H = \frac{B(H) - L}{2m}$

En remplaçant dans 1 on obtient

$$A = \frac{L + B(H)}{2} \cdot \frac{B(H) - L}{2m} = \frac{1}{4m} [L^2 - B^2(H)]$$

de là on tire

$$B(H) = [L^2 + 4mA]^{1/2}$$

et enfin $H = [(L^2 + 4mA)^{1/2} - L] / 2m \quad \dots(2)$

avec $m \neq 0$

a-2 : Le calcul de la force de pression hydrostatique s'effectue comme suit :

$$F_H = \rho g H_G \cdot A$$

avec $H_G = \frac{2mH + 3L}{6(mH + L)} \cdot H \quad \dots(3)$

Après avoir calculé A on calcul H_g et les deux sont utilisées dans le calcul de F_H .

a-3 Le calcul de S_f s'effectue comme suit :
on calcul le périmètre mouillé

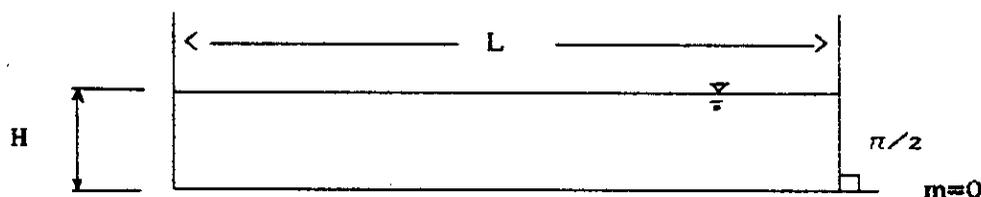
$$P = L + 2H \sqrt{1 + m^2}$$

en remplaçant H par son expression en fonction de A
 $P = L + [(L^2 + 4mA)^{1/2} - L][1 + m^2] / m$; $m \neq 0$

En remplaçant dans la formule de Manning on obtient :

$$S_f = \frac{n^2 (AV)^2 P^{4/3}}{A^{10/3}} \quad \text{.....(4)}$$

b/ Section rectangulaire :



b-1 Il est clair dans ce cas que le calcul des hauteurs s'effectue facilement après la détermination des sections

En effet $H = A/L$

b-2 Il suffit de remplacer m par zéro la formule (3) pour obtenir

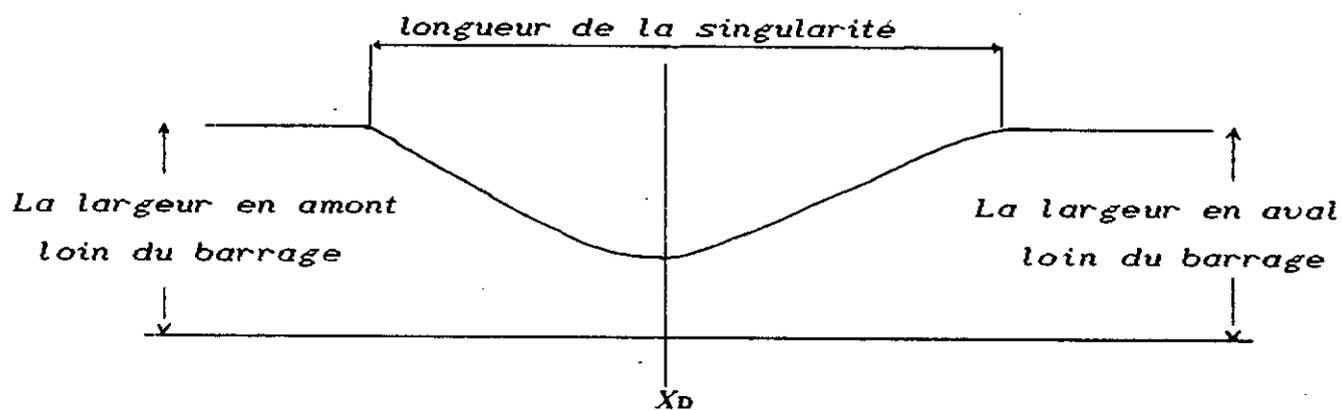
$$H_g = H/2 \quad \text{et} \quad F_H = \rho g H/2 \cdot A$$

b-3 Le périmètre mouillé $P = L + 2H$

Le calcul de S_f s'effectue avec la même formule (4)

c/ Section rectangulaire non uniforme :

C'est une section rectangulaire qui se retrécit et s'élargit des deux côtés du barrage comme l'indique la figure suivante :



- VUE DE DESSUS -

La largeur minimale est mesurée au site du barrage les calculs dans ce cas s'effectues de la même manière qu'un canal rectangulaire en tenant compte que la largeur L est fonction de la distance x .

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1> J.C.ARMICI

" Turbo-pascal" version 4
LI 1986

2> M.CARLIER

"Hydraulique générale et appliquée"
Eyrolles 1980

3> R.COMOLET

"Mecanique expérimentale des fluides" TOME 2
Masson 1982

4> J.F.DOUGLAS

"Fluid mechanics"
Longman scientific & technical 1985

5> G.DHATT ET G.TOUZOT

"Une presentation de la methode des elements finis"
Maloine S.A 1984

6> W.HAGER ET L.SINNIGER

"Construction hydraulique"
Presses polyted . Romandes 1989

7> J.LLIONS ET R.DAUTRAY

"Analyse mathématique et alcul numérique
pour les sciences et les techniques " . TOME 3
"Methodes numeriques pour les problemes d'évolution"
Dunod 1974

-
- 8> R.FENNEMA ET M.CHAUDHRY
"Simulation of one-dimensional dam-break flow"
Journal of Hydraulic research volume 25-1987
- 9> J.G.SAKKAS, CV,BELLOS ET J.V.SOULIS
"Experimental investigation of two-dimensional
dam-break induced flow "
Journal of hydraulic reserch volume 30-1992
- 10> GEORGE. G. O'BRIEN , MORTON. A. HYMAN et SIDNEY KAPLAN
" A study of the numerical solution of partial
differential equations "
- 11> HUNT. B
" An invisid dam-break solution "
Journal of hydraulique research volume 25-1987 .
- 12> R. GARCIA et R. A. KAHAWITA
" Numerical solution of the St-VENANT equations
with the Mac-CORMACK finite-difference scheme "
International journal for numerical methods in
fluids " Volume 6 - 1986
- 13> J. M. TOWNSON et A. H. AL-SALHI
" Models of dam-break flow in R-T space "
Journal of hydraulique Engineering volume 115-1989
- 14> C. V. BELLOS et J. G. SAKKAS
" DAM - BREAK Flood - wave propagation on dry bed "
Journal of Hydraulic Engineering . Volume 113-1987

15> A. PREISSMANN

" Modèles mathématiques hydrauliques "

T - I ,traité construction-1991