

وزارة التعليم و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT :

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique
Hydraulique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

E tude numerique d'un
Probleme hyperbolique
Application aux barrages
rigides

Proposé par :

M^{lle} F. Z Zerfa
M^r O. Belhadj

Etudié par :

M^{lle} Elgholia
Filali

Dirigé par :

M^{lle} Zerfa
M^r Belhadj

PROMOTION 1992

المدرسة الوطنية للتكنولوجيا
المستقلة —
BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

مركز الأبحاث

المديرية الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

DEDICACES

A LA MEMOIRE DE MON PERE

A MA MERE

A MES FRERES, SOEURS , BELLES SOEURS ET COUSINES

je dédie ce travail

E. G. FILALI

REMERCIEMENTS

En premier lieu, je tiens à remercier mon frère Djamel qui m'a soutenue tout au long de mes études .

Je remercie ensuite Mr O. BELHADJ qui n'a ménagé ni son effort, ni son temps pour me conseiller et diriger.

Je remercie également Melle ZERFA pour la serviabilité et la gentillesse qu'elle m'a toujours manifesté ainsi que pour ces conseils judicieux.

Qu'il me soit permis de remercier tous les enseignants qui ont contribué à ma formation.

Mes remerciements vont ensuite à Melle LAKROUM Malika pour l'impression de cette these , ainsi que Melle Djamila du centre de calcul pour son aide de considérable.

Mes derniers remerciements vont à mes amis(es) de la promotion, *sans oublier M^{me} GHAZEL . Redha*

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : HYDRAULIQUE

PROMOTEURS : F. Z. ZERFA ET O. BELHADJ

ELEVE INGENIEUR : E. G. FILALI

الملخص

الموضوع: تحليل القوى الهيدروليكية المؤثرة على سد ثقلي
والناجمة عن زلزال أفقي بطريقة الفروقات المتناهية.
الملخص: الغرض من هذه الدراسة يتمثل في تكوين
برنامج آلي يستعمل طريقة الفروقات المتناهية
وهذا البرنامج يسمح لنا بمعرفة شكل، مقدار، والتغيرات
مع الزمن للقوى الهيدروليكية الناجمة عن زلزال أفقي
ذو سرعة ثابتة
فرضيات الدراسة هي:
- مسائل غير لزج
-
- حركات سريعة وذات

Objet : Analyse des forces hydrodynamiques dûes à un séisme sur un barrage poids, par la méthode des différences finies.

Résumé : L'objet de cette étude consiste en l'élaboration d'un programme de calcul utilisant la méthode des différences finies.

Ce programme nous permet de déterminer la forme, la grandeur et les variations en fonction du temps des pressions hydrodynamiques, dûes à un séisme horizontal, agissant sur le parament amont d'un barrage poids.

Les hypothèses prises en compte étant :

- fluide non visqueux
- structure rigide
- Mouvements rapides et de faibles amplitude.

Objet : Analysis of the strength, caused by an earthquake under a gravity dam, by the finite difference method.

Abstract : The aim of the present research is to develop a computer program (or software) using finite difference method.

With this program we can estimate the shape, the value and the variability in time, of the strengths caused by an horizontal earthquake under the up facing of a gravity dam.

Considerations analysis are :

- non viscous fluid
- Rigid structure
- Quick movement with weak Amplitud.

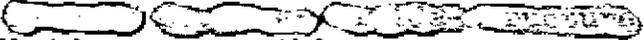
المدسة الوطنفة المفعدة الففنفاف
BIBLIOTHEQUE — المكنفة
Ecole Nationale Polytechnique

SOMMAIRE

I/ Introduction	- 4 -
II/ Notions sommaires de sismologie et problèmes spécifiques aux Barrages Poids	- 3 -
II-1/ Introduction	- 3 -
II-2/ Origine des séismes	- 3 -
II-3/ Mécanisme general de production des séismes	- 3 -
II-4/ Paramètres descriptifs des séismes	- 5 -
II-5/ Caractéristiques des séismes	- 9 -
II-6/ Type de ruptures des Barrages Poids	- 9 -
II-7/ Modélisation du comportement dynamique des Barrages Poids	- 10 -
III/ Dynamique des structures	- 12 -
III-1/ introduction	- 12 -
III-2/ Methode Pseudo-Statique	- 12 -
III-2-1/ Principe de la méthode	- 12 -
III-2-2/ Critique de la méthode	- 13 -
III-3/ Analyse de la réponse dynamique de l'ouvrage	- 14 -
III-3-1/ Formulation des équations du mouvement	- 14 -
III-3-2/ Formulation matricielle	- 15 -
III-3-3/ Résolution numérique	- 16 -
IV/ Dynamique des fluides "HYDRODYNAMIQUE"	- 19 -
IV-1/ Introduction	- 19 -
IV-2/ Equations de base	- 20 -
IV-2-1/ Lois de conservation de masse- Equation de continuité	- 20 -
IV-2-2/ Bilan de quantite de mouvement et équations de l'hydrodynamique	- 21 -
IV-2-3/ Equation d'état du fluide	- 21 -
IV-3/ Hypotheses simplificatrices	- 22 -
IV-4/ Lois de fluctuation de pression:équations du mouvement	- 23 -
IV-4-1/ Fluide compressible	- 25 -
IV-4-2/ Fluide incompressible	- 25 -

SOMMAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
 المكتبة — BIBLIOTHEQUE
 Ecole Nationale Polytechnique

IV-5/ Conditions initiales et aux limites	- 27 -
IV-5-1/ Conditions initiales	- 27 -
IV-5-2/ Conditions aux limites	- 28 -
IV-6/ Méthodes d'approche	- 29 -
A/ Fluide incompressible	- 29 -
IV-6-1/ Solution de WESTERGAARD	- 29 -
IV-6-2/ Inclinaison du parement amont	- 32 -
IV-6-3/ Ordre de grandeur des forces hydrodynamiques	- 34 -
	
B/Fluide compressible	- 35 -
V/ Présentation de la methode des DIFFERENCES-FINIES et application a l'équation d'onde	
V-1/ Introduction	- 36 -
V-2/ Approximation par DIFFERENCES-FINIES	- 37 -
V-3/ Ordre d'approximation	- 39 -
V-4/ Cas d'une approximation a deux dimensions	- 41 -
V-5/ Analyse de l'approximation	- 43 -
V-5-1/ Source d'erreur	- 43 -
V-5-2/ Conditions de convergence	- 45 -
V-6/ Résolution de l'équation d'onde	- 46 -
V-6-1/ Maillage	- 47 -
V-6-2/ Discrétisation de l'équation d'onde	- 48 -
V-6-3/ Discrétisation des conditions aux limites	- 50 -
V-6-3-1/ Cas d'une condition de DIRICHLET	- 50 -
V-6-3-2/ Cas d'une condition de NEWMAN	- 50 -
V-7/ Classification des systèmes physiques	- 52 -
V-8/ Etude du système obtenu par discrétisation	- 53 -
V-9/ Résolution du système obtenu par discrétisation	- 59 -

SOMMAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

VI/ Principe de resolution	- 68 -
a/ Approximation par differences finies	- 72 -
b/ Approximation par differences finies-NEWMARK	- 80 -
VII/ Resultats et critiques	- 84 -
IIX/ Conclusion	- 95 -
IX/ Bibliographie	- 96 -

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION

INTRODUCTION

Si la survenance des séismes est encore, pour une grande part, un phénomène imprevisible on ne considère plus depuis quelques années comme une inéluctable fatalité, les catastrophes (destruction des ouvrages, nombreuses pertes de vie humaines) qu'ils sont susceptibles de provoquer.

Les barrages, fruit d'une technique spécifique dont le développement actuel coïncide avec l'accroissement des besoins, sont l'un des éléments importants parmi les différents projets de construction. En conséquence, et notamment du fait que les grands barrages font peser sur les avaliers un risque potentiel fort grand, dû à l'énergie accumulée dans les réservoirs, tous les grands barrages devraient être projetés en tenant dûment compte des effets provoqués par les séismes, pour cela une étude hydrodynamique devient indispensable.

L'hydrodynamique étudie le mouvement des liquides en tenant compte des forces qui lui donnent naissance. Dans le cas présent, les forces mises en jeu sont des forces de pression de la masse d'eau, générées par les mouvements très rapides de la structure.

L'objet du présent ouvrage consiste en l'analyse de ces forces hydrodynamique agissant sur un écran vertical limitant un réservoir semi-infini de profondeur constante dans l'hypothèse d'un mouvement horizontal harmonique de l'écran, d'une structure rigide se déplaçant avec le fond de la retenue. Cette analyse sera effectuée par l'une des méthodes numériques qui est la méthode des différences finies.

Pour ce faire, on a modélisé le réservoir comme étant un milieu continu, isotrope et compressible, et on a ainsi formé un domaine d'étude, dont l'extension suivant la longueur n'est pas définie de façon définitive.

CHAPITRE I

NOTIONS SOMMAIRES DE SISMOLOGIE ET PROBLEMES SPECIFIQUES AUX BARRAGES POIDS

1/ Notions sommaires de sismologie et problèmes spécifiques aux barrages poids

I/ - INTRODUCTION

Les tremblements de terre sont des phénomènes naturels complexes et dangereux qui se produisent surtout dans des zones connues comme sismiques. Toutefois on doit considérer que des tremblements de terre sévères se sont aussi produits en dehors de ces zones, dans des régions considérées comme géologiquement stables.

II/- ORIGINE DES TREMBLEMENTS DE TERRE

Les séismes correspondent à une vibration du sol provoquée par une libération soudaine de l'énergie de déformation accumulée dans la croûte terrestre, et qui peut être provoquée par :

- des glissements le long de failles géologiques (et ce sont les plus importants),
- Un changement de phase dans les roches (changements de volume dues à des changements de pression),
- des activités volcaniques produisant des séismes d'intensité relativement faible, au voisinage immédiat du volcan .
- D'autres raisons, comme des explosions ou la sismicité induite par certains grands réservoirs.

III/- MECANISME GENERAL DE PRODUCTION DES SEISMES

Un séisme est la conséquence des lentes déformations qui affectent les régions supérieures du globe terrestre, et au cours desquelles des quantités considérables d'énergie s'accumulent dans les matériaux constitutifs sous forme d'énergie de déformation. Lorsqu'en un point moins résistant ou plus sollicité que les autres, un équilibre limite est dépassé, il se produit une rupture qui s'étend très rapidement de proche en proche aux régions voisines.

1/ Notions sommaires de sismologie et problèmes
spécifiques aux barrages poids

On passe donc d'un premier état d'équilibre correspondant à des contraintes importantes, à un second état où après rupture, ces contraintes ont disparu partiellement ou en totalité.

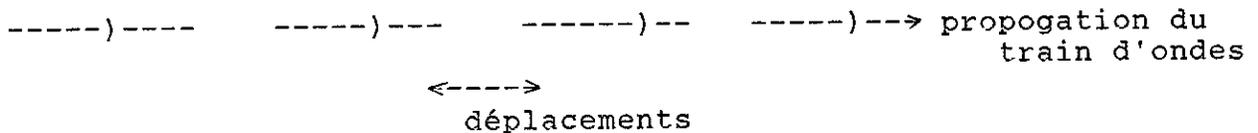
Cette rupture s'accompagne d'une brusque libération de l'énergie potentielle accumulée dans la déformation et donne naissance à un ébranlement qui se propage au loin sous forme d'ondes sismiques, qui, compte tenu de l'hétérogénéité du sol, engendrent en surface un mouvement complexe difficilement prédictible en un site donné.

On distingue les deux types d'ondes suivants

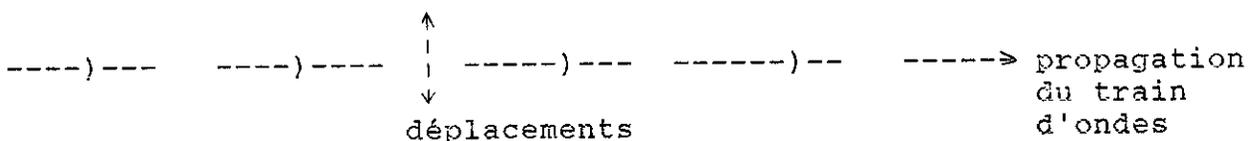
- Ondes internes ou ondes de volume :

Prendent naissance dans le foyer et se propagent à l'intérieur de la terre sous deux formes :

* ondes S ou ondes longitudinales : elles se propagent avec une vitesse de 7 à 8 km/s et s'accompagnent d'un changement de volume (compression et dilation alternées) produisant ainsi des déplacements dans le sens de la propagation du train d'ondes.



* ondes ou ondes transversales : elles se déplacent avec une vitesse de 4 à 5 km/s et s'accompagnent d'une distorsion dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation provoquant un cisaillement sans changement de volume.



1/ Notions sommaires de sismologie et problèmes spécifiques aux barrages poids

A la différence des ondes longitudinales, les ondes transversales ne peuvent se propager dans les milieux fluides, en raison de l'inaptitude de ces milieux de transmettre les efforts de cisaillement .

- Ondes de surface :

Les ondes de volume qui arrivent à la surface de la terre produisent des ondes de surface, ces ondes voyagent le long de la frontière entre deux milieux et à la surface de la terre (ondes de Rayleigh).

Les ondes superficielles ne contribuent pas tellement à l'accélération du terrain, sauf dans le cas de structures flexibles.

En génie parasismique, on étudie surtout l'effet des ondes internes P et S .

III/- PARAMETRES DESCRIPTIFS DES SEISMES

1- Foyer ou hypocentre :

C'est l'endroit où se produit la perturbation qui provoque le mouvement, sa détermination s'effectue par recoupement des différents enregistrements de sismographe.

2- Epicentre:

C'est le point de la surface du sol directement au dessus de l'hypocentre.

3- Distances focales, distances à l'épicentre:

Ce sont les distances de la station d'enregistrement respectivement au foyer et à l'épicentre (fig 1.1)

1/ Notions sommaires de sismologie et problèmes spécifiques aux barrages poids

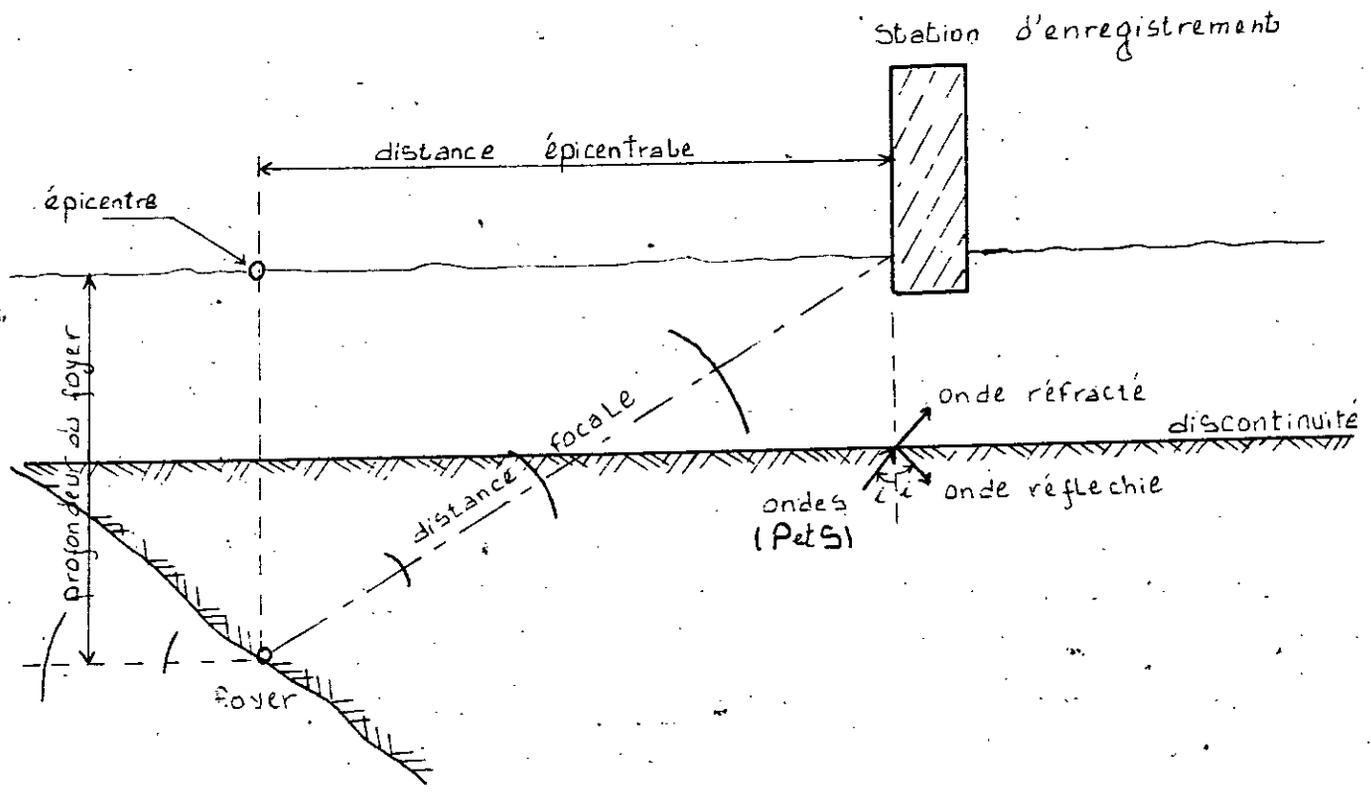


FIG (1.1)

1/ Notions sommaires de sismologie et problèmes spécifiques aux barrages poids

4- Intensité :

L'intensité mesure l'importance d'un séisme en un lieu donné, selon les manifestations ressenties par la population et les dégâts qu'il a provoqué.

Pour un séisme donné, l'intensité dépend de la distance à l'épicentre, elle décroît généralement quand cette distance augmente, mais des anomalies locales, dues à des conditions géologiques particulières, peuvent apparaître.

5- Magnitude :

La magnitude M d'un tremblement de terre se détermine à partir d'un sismogramme selon la définition donnée par Richter qui représente une mesure indirecte de l'énergie libérée par le séisme.

Entre l'énergie libérée et la magnitude a été établie la relation suivante :

$$E = 10^{1,8 + 1,5 M} \quad (\text{k Joules})$$

Un tremblement de terre aura donc une seule magnitude alors que son intensité pourra varier d'un site à un autre.

6- Sismographe :

C'est l'appareil de base qui mesure les mouvements de la terre lors d'un séisme.

1/ Notions sommaires de sismologie et problèmes
spécifiques aux barrages poids

7- Relation d'atténuation:

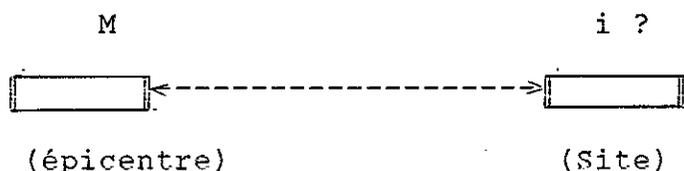
Entre la magnitude à la source et l'intensité en un site donné, il existe certaines relations empiriques, fonction de la distance à l'épicentre comme par exemple :

$$i = 2,95 + 1,5 M - 1,87 \ln (D+15)$$

D : distance à l'épicentre

M : Magnitude

i : intensité au niveau du site



Bien entendu, ces relations peuvent être modifiées par des effets particuliers au site.

IV/- CARACTERISTIQUES DES SEISMES

Les secousses provoquées par un séisme se composent de vibrations horizontales et verticales du même ordre de grandeur.

Les barrages poids doivent être étudiés sous l'effet des vibrations horizontales, parallèles et perpendiculaires à l'axe du barrage, et des vibrations verticales. Mais il est souvent admis que les pics d'accélération horizontaux et verticaux ne sont pas simultanés.

D'après les expériences faites à ce jour, on a constaté qu'il n'y a pas de direction horizontale privilégiée. Les mouvements suivant les trois directions de l'espace sont indépendants, c'est à dire que le mouvement dans une direction donnée ne peut déduire du mouvement suivant les deux autres directions.

Les mouvements du sol enregistrés lors d'un séisme se mettent principalement sous la forme d'un accélérogramme qui représente la variation de l'accélération dans une direction donnée, en fonction du temps, on peut de même enregistrer la vitesse ou le déplacement.

V/- TYPE DE RUPTURES DES BARRAGES POIDS

Les sollicitations vibratoires du séisme peuvent engendrer, dans un barrage poids :

- le glissement du barrage sur sa fondation
- l'ouverture de joints ou de fissures telle qu'une perte d'eau incontrôlable se produise ou que le barrage puisse se rompre, notamment du fait du jeu d'une faille active.
- le déplacement par cisaillement ou basculements de Plots ou de sections de la partie supérieure.
 - Rupture totale du barrage et onde de crue à l'aval; due à la naissance de pressions hydrodynamiques dans le réservoir.
- Rupture des versants avec glissement dans le réservoir; déplacement d'un volume d'eau important provoquant la rupture du barrage ou de l'évacuateur de crue.

1/ Notions sommaires de sismologie et problemes specifiques aux barrages poids

Le séisme n'intervient pas seulement par ces sollicitations vibratoires .

Il peut être la source de déplacements permanents dûs à la mise en mouvement irréversible de failles actives. De tels déplacements peuvent être engendrés même par des séismes de faible intensité dans la mesure où ces déplacements sont irréversibles, les mouvements successifs s'additionnent et peuvent devenir importants.

Si la faille traverse la fondation du barrage, celui ci subit des déplacements verticaux et horizontaux générés par ceux des lèvres de la faille ce qui peut entraîner d'une part des ruptures des organes d'étanchéité, d'évacuation des crues, de vidange etc... et d'autre part, diminuer la revanche d'une partie du barrage.

Dans le cas où la faille traverse le reservoir, le barrage peut dans son ensemble perdre sa revanche si le fond de la retenue se soit surelevé par rapport à la fondation du barrage, même si la faille ne traverse pas le reservoir , son rejet lors d'un séisme peut entraîner un phénomène de séiche dans la retenue , accompagné d'un éventuel deversement sur le barrage si la revanche est insuffisante.

Enfin , la constitution d'une retenue importante cree le risque d'un séisme induit , dû à la fois à l'effet du poids de la retenue et à la pénétration de l'eau dans les fissures du massif rocheux.

V/- MODELISATION DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES BARRAGES POIDS

A la lumière de ce qui a été développé sur les séismes, et les dommages qu'ils peuvent occasionner dans les barrages poids, on a constaté qu'il est nécessaire pour avoir un bon projet parasismique, de tenir compte des particularités que présente la réponse dynamique d'un barrage poids lors d'un séisme.

L'analyse du comportement dynamique des barrages poids présente un certain nombre de traits spécifiques.

1/ Notions sommaires de sismologie et problèmes spécifiques aux barrages poids

Tout d'abord, le comportement d'un barrage dépend du champ d'accélération auquel il est soumis, et pour connaître ce champ d'accélération, il faut analyser la réponse dynamique du barrage au séisme, laquelle dépend d'une part du séisme par son accélérogramme (ou son spectre, son accélération de pic et sa durée) et d'autre part du barrage par sa forme, sa hauteur et les matériaux qui le composent. Mais comme on a déjà vu, il dépend aussi des propriétés de sa fondation. Il en résulte systématiquement, lors d'un séisme, un couplage dynamique entre le barrage et sa fondation se traduisant par une interaction entre le sol ou le rocher) et l'ouvrage proprement dit.

La deuxième particularité des barrages poids est de contenir un réservoir. Ici encore, il est impératif de prendre en compte l'interaction dynamique entre l'eau du réservoir et le barrage. Ce phénomène étant particulièrement significatif pour les barrages en béton, mais généralement négligeable pour l'étude des barrages en remblais.

CHAPITRE 2

DYNAMIQUE DES STRUCTURES

I/ - INTRODUCTION

Le comportement structural de barrages et de leurs fondations pendant les séismes est très complexe, la complexité résulte de la nature des matériaux dont les propriétés mécaniques incluant l'élasticité, la viscosité et la plasticité sont diversement combinées. Cette complexité résulte aussi du fait que pendant les séismes quelques ruptures ou fissures modifient les réactions du barrage.

Afin d'aborder ces problèmes, différentes méthodes ont été établies pour les différents types de barrages.

Dans le cas de barrage poids de hauteur modérée, on a accepté la méthode de calcul pseudo-statique du fait de la grande rigidité qu'ils tiennent de leur forme et des matériaux de construction. Cependant, lorsque ces barrages sont de grande hauteur, l'effet combiné des vibrations, de cisaillement et de flexion devient appréciable et rend nécessaire un calcul dynamique.

Dans ce qui suit, on présentera brièvement, le principe de ces méthodes.

II/ - METHODE PSEUDO-STATIQUE

1/- Principe de la méthode

La méthode pseudo-statique a constitué dans le trente dernières années, la principale approche du problème de la stabilité dynamique des barrages.

Elle consiste à schématiser l'action dynamique du séisme sur un élément du barrage par une répartition de forces d'inertie égale à une fraction de la force de pesanteur agissant sur cet élément.

La sollicitation sismique est de cette façon prise en compte sous la forme d'un chargement statique particulier.

Ce changement statique est alors introduit dans un calcul de stabilité ou de contrainte, et les conditions qui en découlent en ce qui concerne le renversement, le glissement et les contraintes doivent impérativement satisfaire les conditions limites préétablies.

2/- Critique de la méthode :

Le procédé d'étude pseudo-statique est connu pour être empirique . Il se fonde sur des précédents plutôt que sur une base rationnelle.

La critique principale que l'on peut formuler à l'encontre de la méthode pseudo-statique est qu'elle masque l'aspect dynamique du problème. Le tremblement de terre exerce sur l'ouvrage et sa fondation une action variable dans le temps, caractérisée par une sollicitation très intense appliquée pendant une durée très courte , relativement aux autres charges supportées par l'ouvrage.

Or, l'effet de la secousse sur l'ouvrage est le produit de l'intensité de l'action par sa durée. Cet aspect du problème n'est pris en compte par la méthode pseudo-statique .

Un deuxième point de réflexion concerne la valeur de l'accélération pseudo-statique à prendre en compte.

L'utilisation la plus simple et la plus répandue de la méthode pseudo-statique, consiste à choisir le coefficient sismique, rapport entre l'accélération maximale pendant le séisme et l'accélération de la pesanteur, en fonction de la plus ou moins forte séismicité de la région où se trouve l'ouvrage mais sans références à l'ouvrage lui-même et à ses conditions particulières de fondation, c'est là négliger un aspect fondamental qui est la réponse dynamique de l'ouvrage au séisme.

Une approche rationnelle de la méthode pseudo-statique consiste donc à évaluer le coefficient sismique en tenant compte de la réponse dynamique de l'ouvrage . Ainsi, par exemple , le coefficient sismique pourra être plus élevé en partie haute de l'ouvrage qu'en partie basse.

III/- ANALYSE DE LA REPONSE DYNAMIQUE DE L'OUVRAGE:

Dans certains cas , on a estimé que la méthode classique n'était pas suffisante et on a procédé à l'analyse dynamique pour évaluer la sécurité.

Lorsqu'on connaissait la nature des tremblements de terre au barrage et quand leurs caractéristiques ont pu être introduites dans les calculs dynamiques , il a été possible de mieux comprendre le comportement sismique du barrage et de fixer les dispositions d'un projet en rapport avec les caractéristiques vibratoires de l'ouvrage.

1/- Formulation des équations du mouvement:

La loi fondamentale de la dynamique reliant les forces aux accélérations s'écrit :

$$\sum \vec{F} \text{ appliquées} = M \vec{a} \quad (2.1)$$

Les forces appliquées sont :

F1 : force de rigidité élastique interne s'opposant aux déplacements.

$$F1 = - K U$$

F2 : force d'amortissement s'oposant aux vitesses

$$F2 = - C \dot{U}$$

F3 : force extérieur (du séisme)

$$F3 = F (t)$$

L'équation du mouvement s'écrit alors

$$F1 + F2 + F3 = M\ddot{U} \quad (2.3)$$

ou encore :

$$- K U - C \dot{U} + F(t) = M \ddot{U} \quad (2.4)$$

c'est à dire :

$$M \ddot{U} + C \dot{U} + K U = F(t) \quad (2.5)$$

\ddot{U} : accélération de la masse

\dot{U} : vitesse de la masse

U : déplacement de la masse

2/- Formulation matricielle

L'équation (2.5) peut s'écrire sous la forme matricielle, relative à la structure totale comme suit :

$$[M] \{ \ddot{U} \} + [C] \{ \dot{U} \} + [K] \{ U \} = \{ F(t) \} \quad (2.6)$$

avec

[M] : Matrice masse

[C] : matrice d'amortissement

[K] : matrice de rigidité

{ U } : Vecteur global des déplacements nodaux

{ \dot{U} } : Vecteur global de la première dérivée de U par rapport au temps

{ \ddot{U} } : vecteur global de la seconde dérivée de U par rapport au temps

{F(t)}: vecteur global des sollicitations (séisme)

3/- Résolution numérique

Compte tenu de la nature aléatoire de l'excitation $F(t)$ provoquée par le séisme, l'étude de la réponse du barrage en fonction du temps exige une intégration numérique des équations du mouvement.

On peut procéder pour la résolution du système d'équations par plusieurs méthodes (différences finies centrales, méthode incrémentale ou pas à pas, méthodes de Newmark et de Wilson, ..., ainsi que la méthode de superposition modale), du fait de l'accessibilité de la méthode des différences finies et de sa grande souplesse, on a choisi de présenter son principe de résolution sans en faire le calcul.

- Intégration par différences finies centrales :

Rappelons l'expression du système du second ordre :

$$[M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} + \{F(t)\} \quad t > t_0. \quad (2.6)$$

$\{U\}$ et $\{\dot{U}\}$ étant données pour $t = t_0$.

La méthode des différences finies centrales est une méthode explicite qui utilise l'expression du système précédent à l'instant t , ainsi que les approximations des dérivées par différences finies centrées suivantes :

$$\{\ddot{U} t\} \approx \frac{1}{(\Delta t)^2} (\{U(t+\Delta t)\} - 2 \{U t\} + \{U(t-\Delta t)\}) \quad (2.7)$$

$$\{\dot{U} t\} \approx \frac{1}{2 \Delta t} (\{U(t+\Delta t)\} - \{U(t-\Delta t)\}) \quad (2.8)$$

Le système (2.6) s'écrit alors :

$$[M] \frac{(\{U(t+\Delta t)\} - 2 \{U t\} + \{U(t-\Delta t)\})}{(\Delta t)^2} + [C] \frac{(\{U(t+\Delta t)\} - \{U(t-\Delta t)\})}{2 \Delta t} + [K] \{U t\} = \{F(t)\} \quad (2.9)$$

où encore :

$$\left(\frac{[M]}{(\Delta t)^2} + \frac{[C]}{2 \Delta t} \right) \{U(t + \Delta t)\} + \left([K] - \frac{2[M]}{(\Delta t)^2} \right) \{U(t)\} + \left(\frac{[M]}{(\Delta t)^2} - \frac{[C]}{2 \Delta t} \right) \{U(t - \Delta t)\} = F(t)$$

(2.10)

posons :

$$A1 = \frac{[M]}{(\Delta t)^2} + \frac{[C]}{2 \Delta t}$$

$$A2 = [K] - \frac{2[M]}{(\Delta t)^2}$$

$$A3 = \frac{[M]}{(\Delta t)^2} - \frac{[C]}{2 \Delta t}$$

A1, A2 et A3 étant des constantes.

pour $t = t_0$ et $\Delta t = 1$, nous aurons :

$$\{U(t_0+1)\} [A1] + \{U(t_0)\} [A2] + \{U(t_0-1)\} [A3] = F(t)$$

pour	$t = 1$	Δt	U_2	$A1$	$+$	U_1	$A2$	$=$	$F(1)$			
"	$t = 2$	Δt	U_3	$A1$	$+$	U_2	$A1$	$+$	U_1	$A3$	$=$	$F(2)$
"	$t = 3$	Δt	U_4	$A1$	$+$	U_3	$A2$	$+$	U_2	$A3$	$=$	$F(3)$

U_1 étant connu .

On obtient alors des équations linéaires simultanées qui forment une matrice tridiagonale facilement résolvable par la méthode de gauss.

U2	U3	U4	U5	U6				
A1	0	0	0	0	U2	F(1)-U1	A2
A2	A1	0	0	0	U3	F(2)-U1	A3
A3	A2	A1	0	0	U4	F(3)	
0	A3	A2	A1	0	x U5	=	F(4)
0	0	A3	A2	A1
.
.
.

CHAPITRE 3

DYNAMIQUE DES FLUIDES

" HYDRODYNAMIQUE "

I/- INTRODUCTION

Les caractéristiques vibratoires (fréquences de résonnances, modes propres ...) d'une structure sont généralement très modifiées quand cette dernière est plongée dans un fluide .

Aussi, une étude des particularités de ces fluides est nécessaire pour la compréhension et l'établissement des équations qui régissent le mouvement du fluide qui relève du domaine de l'hydrodynamique.

Dans le cadre de la dynamique des fluides les phénomènes d'écoulement des liquides sont en général traités du point de vue macroscopique , en utilisant les lois de la mécanique de Newton. Le fait qu'un fluide soit composé de molécules est négligé en premier lieu et les mouvements des molécules individuelles ne sont pas pris en compte dans le cadre de cette étude. Le milieu d'écoulement est donc considéré comme continu. Dans ce contexte on étudie le mouvement d'un petit volume du milieu dit particule de fluide , celui-ci est composé d'un grand nombre de molécules, de sorte que les variations statistiques des propriétés de la particule sont négligeables.

C'est sur cette base là , que seront établis les équations du mouvement et que sera effectué l'étude.

II/- EQUATIONS DE BASE :

Les mouvements des parois qui limitent le fluide étant petits, les mouvements du fluide sont également petits et sont donc décrits par les équations dynamiques du fluide qui se résument en :

- L'équation de continuité qui exige la conservation de la masse de la particule.

- L'équation de la quantité de mouvement qui traduit la loi de Newton appliquée à des particules de fluide et qui est exprimée sous la forme.

$$\frac{d}{dt} (m \vec{V}) = \Sigma \vec{F} \text{ extérieures}$$

-L'équation d'état thermodynamique (ou équation constitutive) qui donne une relation entre les variables d'état.

1/- Lois de conservations de Masse - Equation de continuité

Cette loi fondamentale de la mécanique classique, s'énonce come suit : la masse d'un système matériel que l'on suit dans son mouvement reste constante quand le temps varie .

Elle est traduite par la relation :

$$\frac{\delta (\rho u)}{\delta x} + \frac{\delta (\rho v)}{\delta y} + \frac{\delta (\rho w)}{\delta z} = - \frac{\delta \rho}{\delta t}$$

où

x, y, z sont les coordonnées du point considéré.

t : variable temps

(U, v, w) les composantes de la vitesse \vec{V} dans le repère (i, j, k)

v et ρ les fluctuations de vitesse et de masse volumique.

3/ Dynamique des fluides

2/- Bilan de quantité de mouvement et équations de l'hydrodynamique :

La loi fondamentale de la dynamique des fluides ou équation de Navier-stokes , est traduite par la relation :

$$\int \frac{\vec{dV}}{dt} = \int \vec{F} - \text{grad } P + \mu \Delta \vec{V} + \frac{1}{3} \mu \text{grad } (\text{div } \vec{V}) \quad (3.2)$$

\vec{F} : forces de volumes
 $-\frac{1}{3} \int \text{grad } P$: forces de pression (surfaces)
 $\mu \Delta \vec{V} + \frac{1}{3} \mu \text{grad } (\text{div } \vec{V})$: forces de résistance visqueuse
 $\frac{\vec{dV}}{dt}$: forces d'inertie.

3/- Equation d'état du fluide:

Les variables d'état privilégiées pour étudier un système donné , sont la pression P , le volume V et la température T . On qualifie souvent ces systèmes , de systèmes 'P,V,T' . L'expérience montre que le degré de liberté d'un système 'P,V,T' est égal à 2, cela signifie qu'il faut et qu'il suffit de deux variables d'état indépendantes pour décrire le système 'P,V,T': En conséquence , il existe une relation de la forme : $f(P,V,T) = 0$ (3.3) pour chaque système. Cette équation s'appelle équation d'état ou équation caractéristique .

On définit alors une équation d'état , comme étant une fonction d'état qui décrit une propriété liée à l'état du système à l'aide des variables d'états indépendantes.

III/- HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES

Dans la pratique , la résolution totale d'un problème de mécanique des fluides, nécessite l'introduction d'hypothèses simplificatrices dont l'intérêt est étroitement lié à la possibilité de résolution de ces équations.

Il est donc possible de résoudre le système d'équations posé, moyennant certaines hypothèses à savoir :

- Les forces de volume , qui , dans le cas d'un écoulement à surface libre sont dûes essentiellement aux forces de pesanteur, sont négligées à cause de la courte durée de l'onde sismique , ceci exprime le fait que l'effet de la gravité durant un séisme n'est pas prépondérant.

- les forces de résistance visqueuses sont négligées : écoulement à surface libre.

- l'effet principal, dans le cas de fluides denses, est l'effet d'inertie, or les mouvements vibratoires étant petits, et de faible amplitude , le terme $\frac{dV}{dt}$ se réduit à $\frac{\delta V}{\delta t}$

- en supposant un processus isothermique $T = \text{constante}$, c'est à dire qu'il n'ya pas de variation de température dans le fluide, l'équation d'état (3.3) peut être formulée comme suit :

$$P = \rho c^2 \quad (3.4)$$

c étant la céléritée du son dans le fluide.

IV/- LOIS DE FLUCTUATION DES PRESSIONS : EQUATIONS DU MOUVEMENT

Les hypothèses nécessaires étant posés, l'équation (3.1) développée donne :

$$(3.I) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \frac{1}{\rho} \text{grad } P = \frac{\delta V}{\delta T} \quad (3.5) \\ \rho \text{ div } \vec{V} = - \frac{\delta \rho}{\delta t} \quad (3.6) \\ P = \rho c^2 \end{array} \right.$$

après transformation , le système (3.I) se réduit à :

$$\frac{\delta^2 P}{(\delta x)^2} + \frac{\delta^2 P}{(\delta y)^2} + \frac{\delta^2 P}{(\delta z)^2} = \frac{\delta^2 \rho}{(\delta t)^2} \quad (3.7)$$

Le premier terme de l'équation (3.7) est défini comme étant le laplacien de P , et qu'on notera en utilisant l'opérateur de laplace

$$\nabla^2 = \Delta : \Delta P$$

d'où :

$$\Delta P = \frac{\delta^2 \rho}{(\delta t)^2} \quad (3.8)$$

à l'équation (3.8) sont associées diverses conditions aux limites :

- vitesse des parois vibrantes
- condition de surface libre
- condition de non réflexion à l'infini

La résolution de l'équation (3.8) munie de ces conditions aux limites permet en particulier d'obtenir le champ des pressions fluctuantes aux parois et donc le champ de forces fluctuantes excitant les structures.

Ceci peut se faire de deux manières différentes, selon que le fluide est :

- incompressible
- compressible

1/- Fluide incompressible :

Les écoulements de fluides incompressibles , sont caractérisés par la dérivée particulière nulle de leur densité ,

soit
$$\frac{d \rho}{d t} = 0 .$$

La conception d'un écoulement incompressible, équivaut à l'hypothèse d'une vitesse infinie de propagation des perturbations de pression dans l'écoulement.

Du point de vue dynamique ces écoulements sont entièrement déterminés par les équations de continuité et de quantité de mouvement, pour autant que soient définies les conditions aux limites et initiales correspondantes.

L'équation d'état devient alors :

$$\rho = \text{constante} \quad (3.9)$$

donne : L'équation d'état (3.9) combinée à l'équation (3.8)

$$\frac{\delta^2 P}{(\delta x)^2} + \frac{\delta^2 P}{(\delta y)^2} + \frac{\delta^2 P}{(\delta z)^2} = 0 \quad (3.10)$$

ou encore :

$$\Delta P = 0 \quad (3.11)$$

L'équation (3.11) , dite équation de Laplace, est l'une des équation fondamentales de la physique , de la mécanique et des mathématiques appliquées. C'est le prototype des équations "elliptiques", linéaires et homogènes.

2/- Fluide compressible

Considérons maintenant l'écoulement d'un fluide compressible et les phénomènes encore plus variés qui se produisent quand il faut tenir compte de la compressibilité du fluide. Pour la description de ces écoulements une équation est encore nécessaire puisque la densité intervient dans l'analyse comme variable d'état.

Un fluide est donc compressible si $\frac{d\rho}{dt} \neq 0$ et l'équation d'état est explicitée par la relation (3.4).

L'équation du mouvement est de la forme :

$$\frac{\delta^2 P}{(\delta x)^2} + \frac{\delta^2 P}{(\delta y)^2} + \frac{\delta^2 P}{(\delta z)^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\delta^2 P}{(\delta t)^2} \quad (3.12)$$

où encore :

$$\Delta P = \frac{1}{c^2} \frac{\delta^2 P}{(\delta t)^2} \quad (3.13)$$

L'équation (3.13), dite équation de la propagation d'une onde dans un corps (solide ou liquide) est l'une des équations fondamentales de la physique, c'est le prototype des équations "hyperboliques", linéaires et instationnaires.

V/ - CONDITIONS INITIALES ET AUX LIMITES :

Chacune des équations de Laplacé et de la propagation d'une onde décrit une classe de phénomènes, car elle ne contient aucune information relative à un cas spécifique de la propagation d'une onde sismique dans un fluide baignant une structure vibrante (dans notre cas, c'est un barrage poids). Aussi, pour obtenir parmi cette multitude de solution, celle qui correspond au problème d'intérêt il est nécessaire de fournir des informations supplémentaires qui ne sont pas contenues dans les équations considérées.

1/- Conditions initiales :

Elles comprennent des spécifications sur en tous points à l'intérieur du domaine considéré, à un instant initial noté $t = t_0 = 0$ on écrira :

$$P = F(x, y, z, 0) \quad (3.14)$$

pour tous les points (x, y, z) à l'intérieur du domaine; F est une fonction connue.

2/- Conditions aux limites :

La nature du système d'équation de l'écoulement d'un fluide parfait, ne permet d'écrire qu'une seule condition en un point de la frontière du domaine.

- pour les limites qui sont constitués par des parois solides ou liquides on ne peut tenir compte de l'adhérence du fluide aux parois (fluide non visqueux) et la condition aux limites se réduit à l'imperméabilité de cette paroi ou encore, la condition de non infiltration et de non reflexion, ou de glissement , qui est traduite par :

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \text{grad } P = \frac{\delta P}{\delta n} = 0 \quad (3.15)$$

\vec{n} : étant la normale à la paroi.

c'est une condition du type Newman

- Une surface libre est une surface de séparation entre un liquide et un gaz; cette surface ne peut être traversée par les particules liquides et en ce sens , elle impose la même condition aux limites qu'une paroi, mais en outre elle impose une condition dynamique d'égalité des pressions entre le gaz et le liquide, les variations de pression dans le gaz pouvant souvent être négligées, la pression de la surface libre est généralement prise comme constante.

C'est là une condition du type Diricklet

VI/- METHODES D'APPROCHE

Pendant la secousse sismique, les parois du reservoir (fond de la retenue et parement amont du barrage) sont soumis à des mouvements . Ces mouvements génèrent dans l'eau du reservoir des ondes de pression.

Aussi, différentes approches ont été mises en oeuvre pour le calcul de ces forces de pression , en supposant une structure rigide et se déplaçant avec le fond de la retenue .

A) - FLUIDE INCOMPRESSIBLE :

1/- Solution de Westergaard :

La première approche de ce phénomène a été apportée par Westergaard, qui a calculé la répartition de pression sur un écran vertical limitant un reservoir semi-infini de profondeur constante dans l'hypothèse d'un mouvement horizontal harmonique de l'écran de période T.

Westergaard a montré que les pressions de ce genre étaient les mêmes que si une masse d'eau délimitée par une certaine parabole et le parement amont du barrage était forcée de vibrer avec l'ouvrage (fig.3.1) .

3/ Dynamique des fluides

La solution exacte est donnée sous forme d'un développement en série de sinus :

$$P = \frac{8 \alpha \gamma w h}{\pi^2} \sum_{1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{n^2 C_n} \sin \frac{n \pi y}{2h} \quad (3.16)$$

$$\text{avec } C_n = \left(1 - \frac{16}{n^2} \frac{w \cdot h^2}{gkT^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left[1 - \frac{1}{n^2} \left(\frac{T_0}{T} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.17)$$

où

- P : Pression sur l'écran
- α : Coefficient sismique
- γw : Poids volumique de l'eau
- h : Profondeur du réservoir
- k : module de compressibilité de l'eau
- T : période du mouvement du mur supposé harmonique
- $T_0 = \frac{4h}{c}$: période propre du réservoir
- C : Célérité des ondes de compression de l'eau
(C = 1440m/s)

3/ Dynamique des fluides

Dans le cas où la compressibilité de l'eau peut être légitimement négligée, on peut établir une expression parabolique approchée du résultat, indépendante de la période de vibration de l'écran :

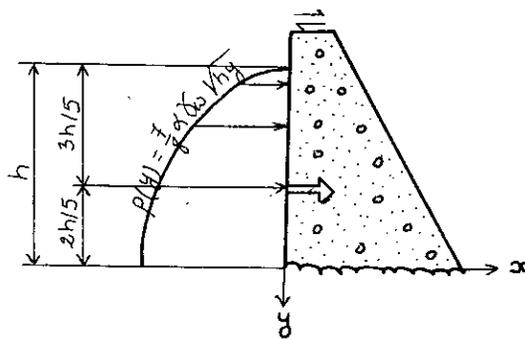
$$P(y) = \frac{7}{8} \alpha \gamma w (h - y)^2 \quad (3.18)$$

La force totale appliquée sur l'écran est égale à :

$$F = \frac{7}{12} \alpha \gamma w h^2 \quad (3.19)$$

Elle s'applique en un point situé au $\frac{2}{5}$ de la hauteur en partant du bas

$$x = - \frac{\alpha g T^2}{4 \pi^2} \cos m \frac{2 \pi t}{T}$$



$$F = \frac{7}{12} \alpha \gamma w h^2$$

(Fig 3.4)

2/- Inclinaison du parement amont :

L'influence du fruit du parement amont a été étudiée par Zangar , par la méthode de l'analogie électrique pour la résolution de l'équation de Laplace régissant l'évolution de la pression dans le réservoir.

Les résultats expérimentaux ont fait l'objet d'une formulation analytique approchée, pour permettre un calcul rapide de la force hydrodynamique sur le parement incliné (fig 3.2).

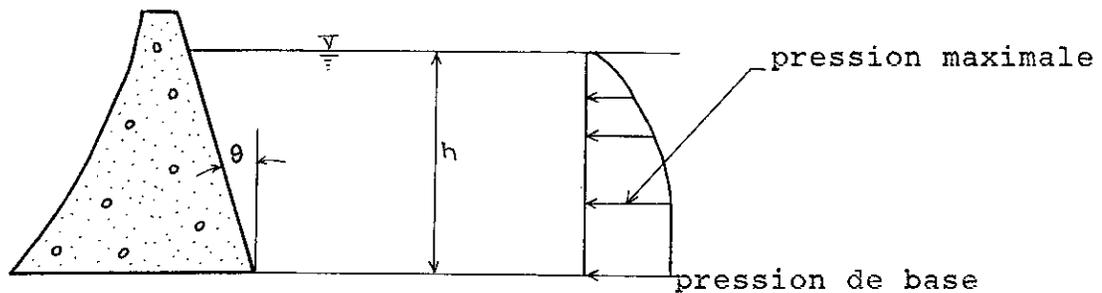


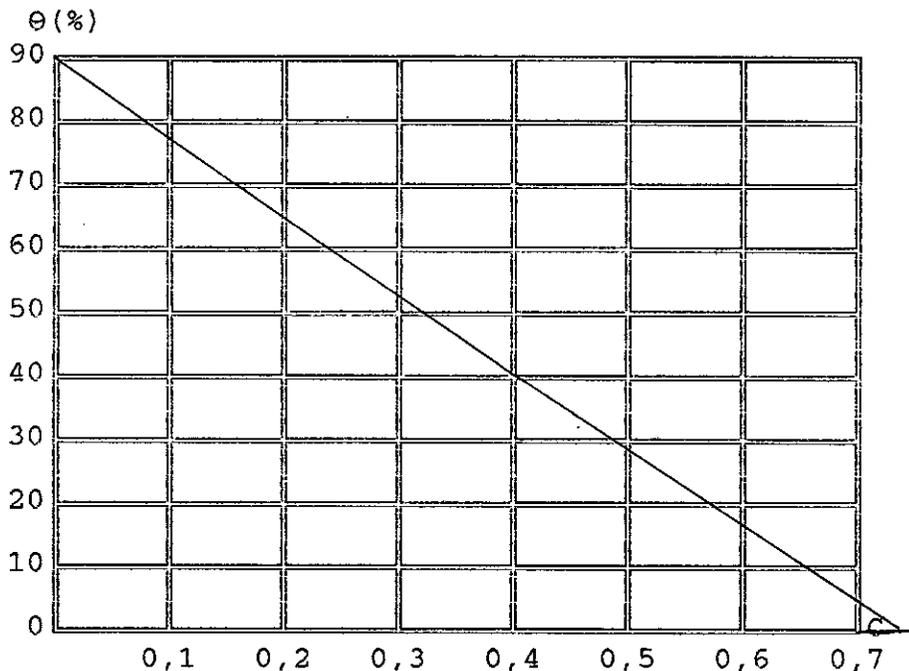
diagramme des pressions

(Fig 3.2)

La pression a une profondeur y est donnée par la formule

$$P(y) = \frac{1}{2} \alpha \gamma_w h C_m \left(\frac{y}{h} \left(2 - \frac{y}{h} \right) + \left(\frac{y}{h} \left(2 - \frac{y}{h} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (3.20)$$

où C_m est une fonction de l'angle du parement amont avec la verticale donnée par la fig (3.3)



Notons que dans la formule de Zangar, la vague qui est produite sur la surface de l'eau par le tremblement de terre est ignorée étant donné son faible effet sur la pression hydrodynamique.

3/- Ordre de grandeur des forces hydrodynamiques

Le rapport β de cette force hydrodynamique évaluée par la méthode de Westergaard pour un parement amont vertical, aux forces d'inertie agissant sur le barrage supposé triangulaire est égal à :

$$\beta = \frac{7}{12} \alpha \gamma_w h^2 / f \quad \frac{h^2}{2} \quad \gamma_b \cdot \alpha = \frac{7}{6f} \quad \frac{\gamma_w}{\gamma_b} \quad (3.21)$$

où f : est la somme des fruits du barrage.

et γ_b : le poids volumique du matériau constitutif du barrage.

Ce résultat permet d'évaluer l'importance relative des forces hydrodynamiques pour les divers types de barrage.

On constate que les forces hydrodynamiques sont importantes pour les barrages-Poids en béton, d'autant plus que le fonctionnement mécanique de ce type d'ouvrage est isostatique et que les marges de sécurité adoptées sont généralement faibles. L'inclinaison du parement amont est doublement favorable : elle diminue le module de la surpression hydrodynamique et cette force est mieux orientée puisqu'elle a une composante vers le bas.

B/ - FLUIDE COMPRESSIBLE :

Vue les différents phénomènes mis en jeu dans le cas de la propagation d'une onde sismique dans un fluide compressible, une étude plus détaillée utilisant des méthodes numériques, comme la méthode des éléments finies, méthode des éléments aux frontières, ainsi que la méthode de différences finies qui fera l'objet de notre étude.

La méthode des différences finies est basée sur la division du domaine d'écoulement en grille, suivie de l'analyse du dit écoulement et la résolution des équations qui le décrivent.

Plus de détails sur la méthode des différences finies seront donnés dans le chapitre suivant .

CHAPITRE 4

PRESENTATION DE LA METHODE
DES DIFFERENCES FINIES ET
APPLICATION A L'EQUATION D'ONDES

4/ Presentation de la methode des differences finis et application à l'équation d'ondes

I /- INTRODUCTION

L'analyse numérique est une science ancienne . De grands mathématiciens tels que El Khawarismi , Gauss, Newton, Fourier, développèrent des algorithmes (que l'on utilise encore de nos jours) adaptés au calcul manuel.

Les équations aux dérivées partielles, constituent l'un des plus rapides développements dans toutes les branches de l'analyse numérique. Le champ d'application des équations aux dérivées partielles augmente d'importance, englobant le domaine de la physique nucléaire, de l'aérodynamique et même de l'hydraulique.

En effet, plusieurs problèmes en hydraulique exigent une solution numérique des équations différentielles, et l'une des méthodes classiques pour approcher cette solution est l'utilisation de la méthode des différences finies.

La méthode consiste à estimer par approximation les valeurs d'une ou de plusieurs fonctions à partir des conditions aux limites . Cette approximation représente une discrétisation du domaine et le remplacement de l'opérateur différentiel par un opérateur aux différences finies.

En d'autres termes, le domaine de variation continu, est remplacé par un ensemble fini de points ou noeuds, délimités par des frontières et formant ainsi un réseau .

Les dérivées figurant dans l'équation différentielle et les conditions aux limites sont remplacées par des combinaisons linéaires de valeurs prises par la fonction en certains noeuds, le problème aux limites de l'équation différentielle se transforme alors en un système d'équations algébriques.

4/ Presentation de la methode des différences finies
 et application à l'équation d'onde

II/- APPROXIMATION PAR DIFFERENCES FINIES

En général , dans la pratique , on ne sait pas déterminer analytiquement la primitive d'une fonction quelconque $F(x)$.

Aussi, une méthode couramment employée est d'approcher cette fonction $F(x)$ par une autre $\tilde{F}(x)$, sur un intervalle $[a,b]$ fini, telle que l'on sache mettre en évidence une primitive de $\tilde{F}(x)$.

Les dérivées d'une fonction $f(x)$ sont définies comme étant la variation de f ou de ses dérivées par rapport à x et elles sont représentés de la façon suivante :

première dérivée :

$$\frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \quad (4.1)$$

dérivée seconde :

$$\frac{d^2F(x)}{dx^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta}{\Delta x} \left(\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{[F(x+\Delta x) - F(x)]/\Delta x - [F(x) - F(x-\Delta x)]/\Delta x}{\Delta x} \right) \quad (4.2)$$

4/ Presentation de la methode des différences finies
 et application à l'équation d'onde

Le processus de limite n'étant pas pris en compte par l'ordinateur, on peut cependant affecter à x une valeur très petite (mais évidemment différente de zéro), on obtient ainsi l'approximation par l'opérateur différence;

notons $F(x) \equiv F_n$
 $F(x + \Delta x) \equiv F_{n+1}$
 $\Delta x \equiv h$

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)_n \approx \left(\frac{\Delta F}{\Delta x}\right)_n = \frac{F_{n+1} - F_n}{h} \quad \text{ou} \quad \frac{F_n - F_{n-1}}{h} \quad (4.3)$$

$$\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_n \approx \left(\frac{\Delta^2 F}{\Delta x^2}\right)_n = \frac{(F_{n+1} - F_n)/h - (F_n - F_{n-1})/h}{h} = \frac{F_{n+1} - 2F_n + F_{n-1}}{h^2} \quad (4.4)$$

Ainsi donc, la méthode peut être décrite comme étant une substitution de la dérivée par une équation aux différences, et le membre droit de l'équation (4.3) fournit une approximation arithmétique de $\frac{dF}{dx}$ évalué au pt modal x .

4/ Présentation de la méthode des différences finies
et application à l'équation d'onde

III/- ORDRE D'APPROXIMATION

L'ordre d'approximation dans une méthode aux différences finies, se détermine à l'aide du développement de la fonction en série de Taylor :

Soit une fonction $F(x)$ continue et continûment différentiable, le développement en série de Taylor autour du point x s'écrit :

$$\begin{aligned}
 F(x + \Delta x) = & F(x) + \frac{(\Delta x)}{1!} \frac{\delta}{\delta x} F(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\delta^2}{\delta x^2} F(x) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\delta^3}{\delta x^3} F(x) \\
 & + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \frac{\delta^{(n-1)}}{\delta x^{(n-1)}} F(x) + R_n \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

où le reste R_n est de l'ordre de $\|\Delta x\|^m$, ce que l'on note habituellement $R_n = O(\|\Delta x\|^m)$

Ainsi, le développement en série de Taylor à l'ordre 3 (avec $n = 4$) est :

$$F(x + \Delta x) = F(x) + (\Delta x) \frac{\delta F(x)}{\delta x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\delta^2 F(x)}{(\delta x)^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\delta^3 F(x)}{(\delta x)^3} + O((\Delta x)^4) \quad (4.6)$$

$$F(x - \Delta x) = F(x) - (\Delta x) \frac{\delta F(x)}{\delta x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\delta^2 F(x)}{(\delta x)^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\delta^3 F(x)}{(\delta x)^3} + O((\Delta x)^4)$$

4/ Présentation de la méthode des différences finies
et application à l'équation d'onde

de même en développant à l'ordre 1 (avec $n = 2$) on a :

$$F(x + \Delta x) = F(x) + (\Delta x) \frac{\delta F(x)}{\delta x} + o((\Delta x)^2) \quad (4.8)$$

$$F(x - \Delta x) = f(x) - (\Delta x) \frac{\delta F(x)}{\delta x} + o((\Delta x)^2) \quad (4.9)$$

où les dérivées sont évaluées au point x , ce que l'on note communément :

$$\frac{\delta F}{\delta x} \Big|_x \quad , \quad \frac{\delta^2 F}{\delta x^2} \Big|_x$$

en divisant (4.8) par Δx , on obtient

$$\frac{\delta F}{\delta x} \Big|_x = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} + o(\Delta x) \quad (4.10)$$

Si l'on néglige le reste $o(\Delta x)$ dans cette équation, on obtient une approximation de l'opérateur différentiel $\frac{\delta F}{\delta x}$ avant.

Et en divisant (2.9) par Δx , on obtient :

$$\frac{\delta F}{\delta x} \Big|_x = \frac{F(x) - F(x - \Delta x)}{\Delta x} + o(\Delta x) \quad (4.11)$$

4/ Présentation de la méthode des différences finies
 et application à l'équation d'onde

qui correspond à l'approximation par un opérateur aux différences finies arrières, de l'opérateur $\frac{\delta F}{\delta x}$

Finalement, en soustrayant (4.9) de (4.8) et en divisant par $2 \Delta x$, on obtient l'approximation de $\frac{\delta F}{\delta x}$ par un opérateur aux différences finies centrales:

$$\left. \frac{\delta F}{\delta x} \right|_x = \frac{F(x + \Delta x) - F(x - \Delta x)}{2(\Delta x)} + O(\Delta x) \quad (4.12)$$

De la même façon on peut définir l'approximation des dérivées d'ordre supérieur par exemple, une approximation de la dérivée seconde de $F(x)$ peut être déduite comme suit :

l'addition des équations (4.6) et (4.7) fournit

$$\left. \frac{\delta^2 F}{\delta x^2} \right|_x = \frac{F(x + \Delta x) - 2F(x) + F(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} + o((\Delta x)^2) \quad (4.13)$$

Ces différences centrales présentent l'avantage d'être beaucoup plus précises, car elles tiennent compte simultanément de l'environnement amont et aval. Elles seront très employées de préférence aux autres, là où c'est possible (c'est à dire là où les conditions aux limites le permettent).

III/- CAS D'UNE APPROXIMATION A DEUX DIMENSIONS

La méthode des différences finies peut être aisément étendue au cas où la fonction F considérée dépend de deux ou plusieurs variables.

Si, dans le plan Oxy , on trace deux séries de droites parallèles aux axes, les droites déterminent un réseau de points (m,n) auxquels correspondent les ordonnées de la fonction inconnue $F_{m,n}$ (fig 4.1)

4/ Présentation de la méthode des différences finies
et application à l'équation d'onde

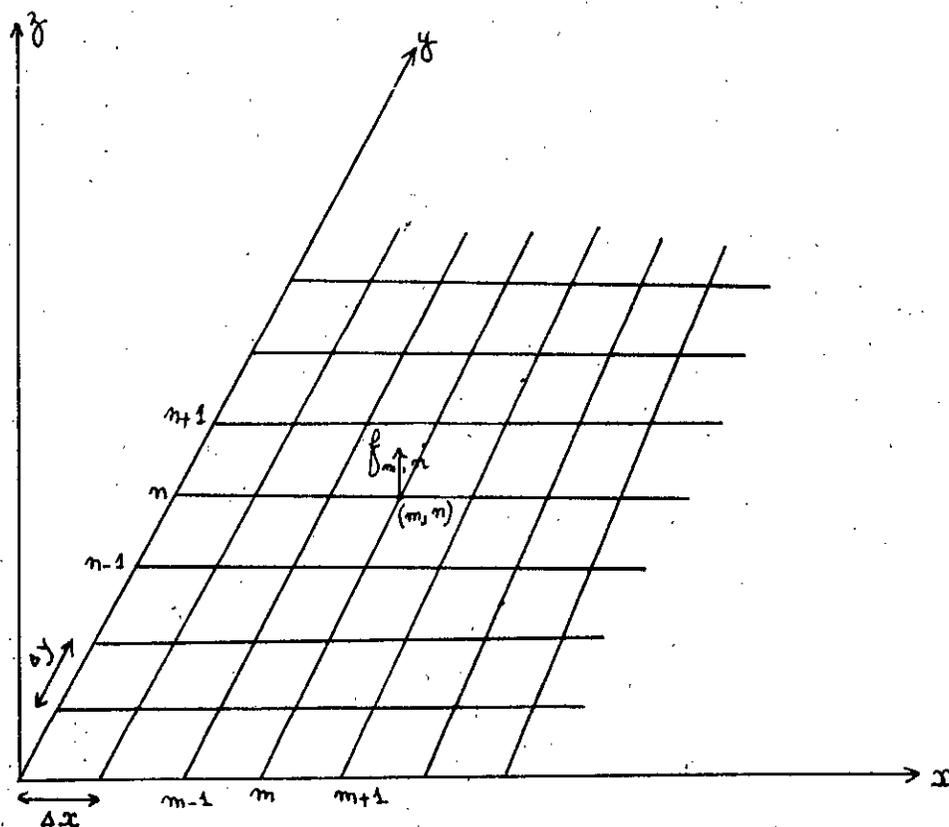


FIG (4.1)

4/ Présentation de la méthode des différences finies
et application à l'équation d'onde

Les dérivées par rapport à une seule variable, x par exemple, s'écrivent comme s'il n'y avait que cette variable x, la seule différence consiste dans le fait que l'on voit apparaître des indices doubles dont l'un reste inchangé. Dans le cas des dérivées mixtes, les deux indices varient.

En notant $F(x,y) \equiv F_{m,n}$ et

En appliquant les formules d'approximation, on obtient

$$\frac{\delta F_{m,n}}{\delta x} = \frac{F_{m+1,n} - F_{m-1,n}}{2 \Delta x} \quad (4.14)$$

et

$$\frac{\delta F_{m,n}}{\delta y} = \frac{F_{m,n+1} - F_{m,n-1}}{2 \Delta y} \quad (4.15)$$

de la même manière, on peut construire les dérivées d'ordre supérieur.

IV/ - ANALYSE DE L'APPROXIMATION

1- SOURCE D'ERREUR

La méthode des différences finies, repose sur le principe d'acceptation d'une série tronquée comme solution, en gros toutes les erreurs ainsi introduites sont appelées erreurs de troncature.

Soit, en effet, une fonction $F(x)$ définie sur un domaine D , X_{i+1} et X_i étant des points distincts et appartenant au domaine D . Le développement en série de Taylor au point X_i , donne :

$$\left(\frac{\delta F}{\delta x} \right)_{X_i} = \frac{F(X_{i+1}) - F(X_i)}{X_{i+1} - X_i} = \frac{X_{i+1} - X_i}{2!} \left(\frac{\delta^2 F}{\delta x^2} \right)_{X_i} + \dots (4.16)$$

4/ Présentation de la méthode de différences finies
et application à l'équation d'onde

notons :

$$F(x_{i+1}) \equiv F_{i+1}$$

$$f(x_i) \equiv F_i$$

On obtient :

$$\left(\frac{\delta F}{\delta x}\right)_i = \frac{F_{i+1} - F_i}{\Delta x_i} = \frac{x_i}{2!} \left(\frac{\delta^2 F}{\delta x^2}\right)_{x_i} + \dots \quad (4.17)$$

soustrayant le terme $\frac{\Delta F_i}{\Delta x_i}$ des deux membres de l'équation (4.17), on obtient :

$$\left(\frac{\delta F}{\delta x}\right)_i - \left(\frac{\Delta F}{\Delta x_i}\right) = - \frac{\Delta x}{2!} \left(\frac{\delta^2 F}{(\delta x)^2}\right)_{x_i} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \left(\frac{\delta^3 F}{(\delta x)^3}\right)_{x_i} + \dots \quad (4.17')$$

donc, l'approximation aux différences finies introduit une erreur.

$$E T = - \frac{\Delta x}{2!} \left(\frac{\delta^2 F}{\delta x^2}\right)_{x_i} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \left(\frac{\delta^3 F}{(\delta x)^3}\right)_{x_i} + \dots \quad (4.18)$$

4/ Présentation de la méthode des différences finies et application à l'équation d'onde

Cette erreur dite erreur de troncature, définie encore comme étant la différence entre la dérivée réelle et son approximation aux différences. Elle est due aux termes d'ordre supérieur dans la série de Taylor et qui sont négligés dans l'approximation.

Ainsi donc, quand une équation différentielle est remplacée par une équation aux différences, une erreur locale de troncature s'introduit à chaque étape du passage d'une 'k' à une 'k+1' itération, ces erreurs locales s'ajoutent les unes aux autres d'une manière un peu obscure pour produire l'erreur de troncature totale.

Il faut cependant noter, que les erreurs d'arrondi existent également dans tout algorithme, mais elles sont encore plus fuyantes que l'erreur de troncature et bien peu de résultats ont été obtenus au cours des nombreuses tentatives faites pour étudier ces effets. On admettra alors qu'on pourrait les négliger dans certaines conditions de travail (nombre de chiffres décimal assez important).

2- CONDITIONS DE CONVERGENCE

La convergence vers la solution exacte de l'équation différentielle est bien évidemment un caractère souhaitable dans toute méthode, pour cela, l'algorithme de résolution doit vérifier les trois conditions suivantes :

- Le problème doit être bien posé, c'est à dire que les conditions initiales et aux limites permettent de définir complètement la solution, et la solution est continue par rapport à ces conditions.
- L'opérateur approché (ou numérique) doit être "consistant", cela signifie qu'à mesure que la méthode est affinée (on utilise de plus en plus de termes, ou que l'on introduit des pas h de plus en plus petits entre arguments successifs) la suite de solutions approchées obtenue, doit tendre vers l'opérateur différentiel.

4/ Présentation de la méthode des différences finies et application à l'équation d'onde

Soit D la solution exacte de l'équation différentielle et Δ la solution exacte de l'équation aux différences.

La condition de convergence est définie comme suit:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (D - \Delta) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} ET = 0$$

-Enfin, un opérateur approché doit être "stable", c'est à dire que la solution numérique obtenue, dépend continûment des conditions aux frontières du domaine, ou encore que toute perturbation dans le calcul de la solution numérique en un point s'amortit au voisinage de ce point.

Soit N la solution exacte des équations aux différences

$(\Delta - N)$ est dite erreur numérique, et est due essentiellement aux erreurs d'arrondi. La condition de stabilité est donc de trouver les conditions pour lesquelles $(\Delta - N)$ est petite partout dans la région d'intégration.

Dans notre étude, on s'efforcera de vérifier les deux premières conditions, la troisième étant généralement difficile à satisfaire.

V/ - RESOLUTION DE L'EQUATION D'ONDE

L'équation d'onde établie dans le chapitre III, s'écrit dans le plan bidimensionnel

$$\frac{\delta^2 P}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 P}{\delta y^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\delta^2 P}{\delta t^2} \quad (4.19)$$

L'équation (4.19) est l'équation de la propagation des ondes dans les milieux solides ou liquides. C'est l'une des équations fondamentales de la physique et des mathématiques appliquées, c'est le prototype des équations "hyperboliques", non stationnaires linéaires et homogènes.

La résolution de l'équation (4.19) dans un domaine (D) de frontière Γ , revient à déterminer la fonction $P(x, y, t)$ en chaque point du domaine (D) connaissant les valeurs de $P(x, y, t)$ sur la frontière et aux temps antérieurs.

La procédure de résolution consiste d'abord, à choisir le pas de discrétisation, ensuite une approximation aux différences finies de l'équation (4.19) est écrite en termes de valeurs nodales qu'on notera $P(x_i, y_j, t_k) \equiv P_{i,j,k}$

4/ Présentation de la méthode des différences finies et application à l'équation d'onde

On sait que pour obtenir un problème bien posé, il faut associer à chaque équation une condition aux limites et une seule en chaque point de la frontière du domaine, on adopte généralement une des deux possibilités suivantes :

- Problème de Diricklet où on impose $P = f$ sur la frontière
- problème de Newman où $\frac{\delta p}{\delta n} = g$ est imposé sur la frontière
 f et g étant deux fonctions données.

\vec{n}
et n : la normale à la frontière

Dans le cas présent, pour la résolution du problème considéré, on adoptera un problème mixte Diricklet - Newman, dans lequel

$P = f$ sur Γ_1 ,

et $\frac{\delta P}{\delta n} = g$ sur Γ_2 .

\vec{n}
où n est la normale à la paroi considérée

Γ_1, Γ_2 deux parties régulières du domaine.

1- MAILLAGE :

Le domaine étant fixé, dans le plan (oxy) , on trace deux séries de droites parallèles aux axes, les droites déterminent un réseau de points (m,n) auxquels correspondent dans la direction OZ (direction des temps) une extension définie.

Les intersections du réseau plan, avec les coordonnées Z , formeront les points $M_{i,j,k}$ de coordonnées (x_i, y_j, t_k) . Ces points constituent le maillage dit aussi grille. Donc au lieu de chercher P dans le domaine D vérifiant l'équation d'onde et des conditions aux limites et initiales, on cherchera P dans la parties D du maillage située dans D sur le bord , vérifiant une équation proche de l'équation d'onde et des conditions aux limites et initiales données.

2- DISCRETISATION DE L'EQUATION D'ONDE:

Soit une fonction $p(x,y,t)$ satisfaisant à une équation du type (4.19). En appliquant les différences centrales à la dérivée par rapport à x , on obtient :

$$\frac{\delta^2 P}{\delta x^2} = \frac{P(x+\Delta x, y, t) - 2P(x, y, t) + P(x-\Delta x, y, t)}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2) \quad (4.20)$$

En opérant identiquement suivant la variable y , on obtient :

$$\frac{\delta^2 P}{\delta y^2} = \frac{P(x, y+\Delta y, t) - 2P(x, y, t) + P(x, y-\Delta y, t)}{(\Delta y)^2} + O((\Delta y)^2) \quad (4.21)$$

Le laplacien s'écrit alors, en supposant Δx et Δy des infiniment petits du même ordre :

$$\Delta P(x, y, t) = \frac{\delta^2 P}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 P}{\delta y^2} = \frac{P(x+\Delta x, y, t) - 2P(x, y, t) + P(x-\Delta x, y, t)}{(\Delta x)^2} + \frac{P(x, y+\Delta y, t) - 2P(x, y, t) + P(x, y-\Delta y, t)}{(\Delta y)^2} + O((\Delta x)^2, (\Delta y)^2)$$

de la même manière, on discrétisera l'opérateur différentiel par rapport au temps:

$$\frac{\delta^2 P(x, y, t)}{\delta t^2} = \frac{P(x, y, t+\Delta t) - 2P(x, y, t) + P(x, y, t-\Delta t)}{(\Delta t)^2} + O((\Delta t)^2) \quad (4.22)$$

4/ Présentation de la méthode des différences finies
 et application à l'équation d'onde

En adoptant la notation : $P(x,y,t) \equiv P_{i,j,k}$, l'équation (4.12) devient alors :

$$\frac{P_{i+1,j,k} - 2P_{i,j,k} + P_{i-1,j,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{P_{i,j+1,k} - 2P_{i,j,k} + P_{i,j-1,k}}{(\Delta y)^2}$$

$$+ O((\Delta x)^2, (\Delta y)^2) = \frac{1}{c^2} \frac{P_{i,j,k+1} - 2P_{i,j,k} + P_{i,j,k-1}}{(\Delta t)^2} + O((\Delta t)^2)$$

(4.23)

Si nous cherchons l'inconnue \tilde{P} aux seuls points du maillage, il semble naturel d'imposer à \tilde{P} l'équation aux différences finies:

$$\frac{\tilde{P}_{i+1,j,k} - 2\tilde{P}_{i,j,k} + \tilde{P}_{i-1,j,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{\tilde{P}_{i,j+1,k} - 2\tilde{P}_{i,j,k} + \tilde{P}_{i,j-1,k}}{(\Delta y)^2} =$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\tilde{P}_{i,j,k+1} - 2\tilde{P}_{i,j,k} + \tilde{P}_{i,j,k-1}}{(\Delta t)^2}$$

(4.24)

Cette équation joue vis à vis de \tilde{P} le même rôle que l'équation d'onde vis à vis de P .

4/ Présentation de la méthode des différences finies
et application à l'équation d'onde

3- DISCRETISATION DES CONDITIONS AUX LIMITES :

a/- Cas d'une condition de Dirichlet :

Dans le cas où le domaine est borné par des droites parallèles aux axes de coordonnées, l'écriture des conditions aux limites ne pose pas de problèmes.

En effet, si P vérifie la condition de Dirichlet $P|_r = f$, où f est une fonction donnée, il suffit d'imposer à \tilde{P} de vérifier en les points du maillage situés sur le bord concerné, la condition $\tilde{P} = \tilde{f}$, où \tilde{f} est la restriction de f à ces mêmes points.

b/- Cas d'une condition de Newman

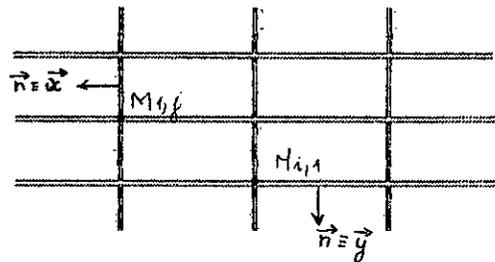
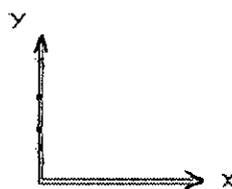
Dans le cas d'un domaine rectangulaire, ou au moins de frontières parallèles aux axes de coordonnées, les conditions de

Newman :

$$\frac{\delta P}{\delta n} = g(x, y)$$

deviennent :

$$\frac{\delta P}{\delta x} \text{ ou } \frac{\delta P}{\delta y} = g(x, y)$$



4/ Présentation de la méthode des différences finies
et application à l'équation d'onde

Si la condition de Newman s'écrit :

$$\frac{\delta P}{\delta y} \Big|_{\Gamma_1} = g_1(x, y) \text{ et}$$

$$\frac{\delta P}{\delta x} \Big|_{\Gamma_2} = g_2(x, y),$$

la discrétisation par différences finies centrales en un point de la frontière donne :

$$\frac{P_{i+1,j,k} - P_{i-1,j,k}}{2 \Delta x} + O(\Delta x) = g_2(x, y) \quad (4.25)$$

$$\text{et } \frac{P_{i,j+1,k} - P_{i,j-1,k}}{2 \Delta y} + O(\Delta y) = g_1(x, y) \quad (4.26)$$

Il faut donc imposer à P de vérifier en tous les points de la frontière concernée, la condition :

$$\frac{\tilde{P}_{i+1,j,k} - \tilde{P}_{i-1,j,k}}{2 \Delta x} = \tilde{g}_2(x, y) \text{ sur } \Gamma_2 \quad (4.27)$$

$$\frac{\tilde{P}_{i,j+1,k} - \tilde{P}_{i,j-1,k}}{2 \Delta y} = \tilde{g}_1(x, y) \text{ sur } \Gamma_1 \quad (4.28)$$

où $\tilde{g}_1(x, y)$ et $\tilde{g}_2(x, y)$ sont les restrictions respectives de

$g_1(x, y)$ et $g_2(x, y)$ à ces mêmes points.

4/ Présentation de la méthode des différences finies et application à l'équation d'onde

4- CLASSIFICATION DES SYSTEMES PHYSIQUES.

Un système physique est caractérisé par un ensemble de variables qui peuvent dépendre des coordonnées d'espace $X = (x, y, z)$ et du temps

Système discret : Un système est discret s'il possède un nombre de degré de liberté fini.

Système continu : Un système est continu s'il possède un nombre de degré de liberté infini.

Système stationnaire : Le système est dit stationnaire si ses variables ne dépendent pas du temps.

Système non stationnaire : le système est dit non stationnaire si ses variables dépendent du temps.

Système linéaire : Soit un système de la forme $[A] \cdot \{X\} = \{B\}$, ce système est dit linéaire si la matrice $[A]$ est indépendante du (vecteur des inconnues) $\{X\}$.

Système non linéaire : un système est dit non linéaire, si la matrice $[A]$ dépend du vecteur $\{X\}$.

4/ Présentation de la méthode des différences finies
et application à l'équation d'onde

5- ETUDE DU SYSTEME OBTENU PAR DISCRETISATION

L'équation d'onde discrétisée donne lieu à un système linéaire, instationnaire

En effet, chaque valeur approchée de la pression au temps $t + \Delta t$ est écrite en fonction de la solution précédente au temps t , et des valeurs voisines au temps $t + \Delta t$. Il s'agit donc d'une liaison implicite entre toutes les valeurs au temps $t + \Delta t$

considérons le domaine $D =]0, L[\times]0, H[$ dans le plan (x, y) et soient les pas :

$$\Delta x = \frac{L}{m+1} \quad \text{et} \quad \Delta y = \frac{H}{n+1},$$

m et n entiers assez grands.

On va construire la grille correspondante, en choisissant des pas Δx , Δy , identiques dans la direction des x et des y .

Cette même grille sera reprise plusieurs fois, selon l'axe Z qui représente l'axe des temps avec un pas de temps constant;

$$\Delta t = \frac{t_{\max}}{Z+1}$$

Où T_{\max} est le temps maximum du séisme.

Z un entier assez grand.

le schéma obtenu est illustré par la figure (4.2)

4/ Présentation de la méthode des différences finies et application à l'équation d'onde

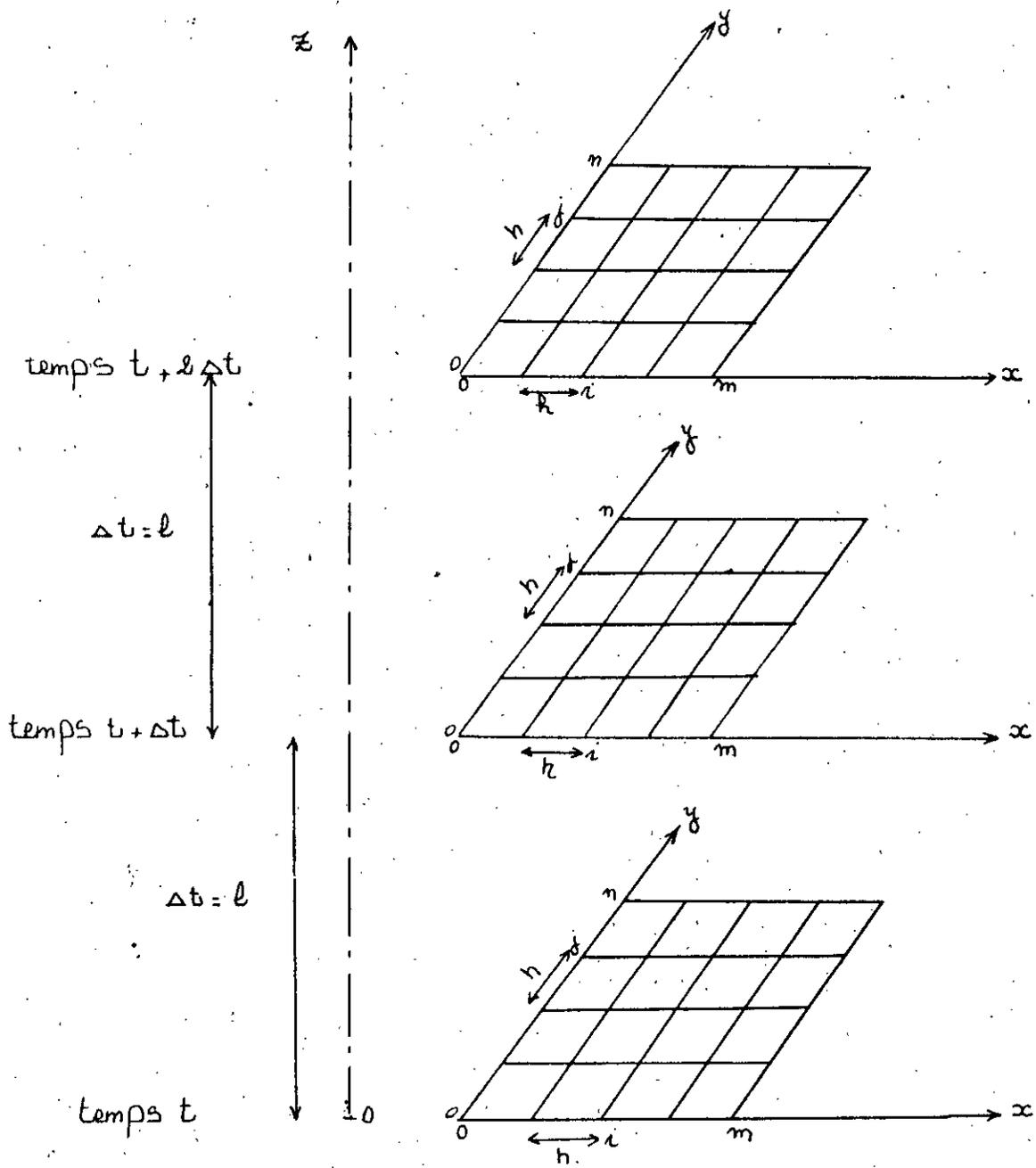


FIG (4.2)

4/ Présentation de la méthode des différences finies
et application à l'équation d'onde

Pour un temps donné $t = k \cdot \Delta t$, la valeur de la pression au temps antérieur $(k - 1) \Delta t$, sera considérée comme constante, et le système devient alors **stationnaire linéaire**.

Considérons la grille fig (4.3) avec un sens de balayage choisi.

Les points de cette grille sont définis par :

$$x_i = i h \quad i = 0, m$$

$$y_j = j h \quad j = 0, n$$

Le nombre de points où l'on souhaite connaître la valeur de \tilde{p} est $(m + 1) (n + 1)$.

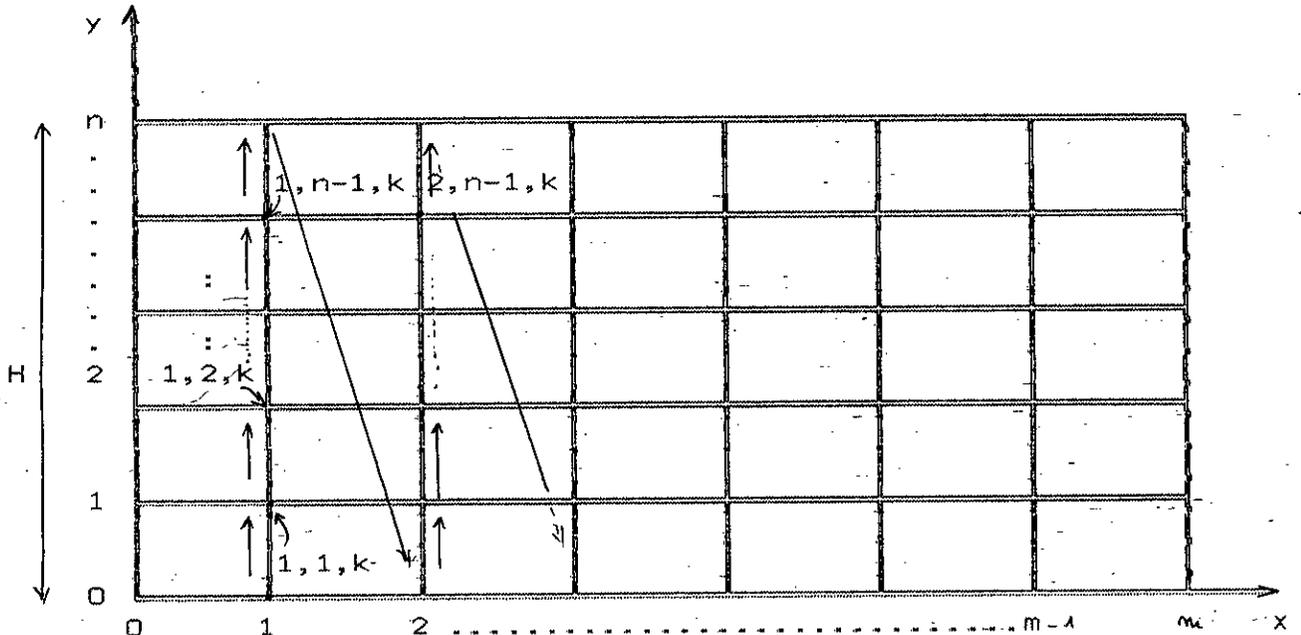


Figure (4.3)

4/ Présentation de la méthode des différences finies
et application à l'équation d'onde

reprenons l'équation (4.24) :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\tilde{P}_{i,j,k+1} - 2\tilde{P}_{i,j,k} + \tilde{P}_{i,j,k-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{\tilde{P}_{i+1,j,k} - 2\tilde{P}_{i,j,k} + \tilde{P}_{i-1,j,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{\tilde{P}_{i,j-1,k} - 2\tilde{P}_{i,j,k} + \tilde{P}_{i,j+1,k}}{(\Delta y)^2} \quad (4.24)$$

posons $\Delta t = 1 = h y$

v étant un réel à déterminer --

L'équation (4.24) devient :

$$\frac{1}{c^2 v^2} (\tilde{P}_{i,j,k+1} - 2\tilde{P}_{i,j,k} + \tilde{P}_{i,j,k-1}) = \tilde{P}_{i+1,j,k} - 4\tilde{P}_{i,j,k} + \tilde{P}_{i-1,j,k} + \tilde{P}_{i,j-1,k} + \tilde{P}_{i,j+1,k} + \tilde{P}_{i,j-1,k} \quad (4.29)$$

Toute transformation faite, on obtient :

$$\tilde{P}_{i,j,k} = \frac{1}{\left(4 - \frac{2}{c^2 v^2}\right)} (\tilde{P}_{i+1,j,k} + \tilde{P}_{i-1,j,k} + \tilde{P}_{i,j+1,k} + \tilde{P}_{i,j-1,k} -$$

$$\frac{1}{c^2 v^2} (\tilde{P}_{i,j,k-1} + \tilde{P}_{i,j,k+1}))$$

(4.30)

4/ Présentation de la méthode des différences finies
et application à l'équation d'onde

On supposera une interpolation linéaire entre temps consécutifs, soit la formule générale :

$$\tilde{p}_{i,j,k} = \frac{\alpha \tilde{p}_{i,j,k+1} + \beta \tilde{p}_{i,j,k-1}}{\alpha + \beta} \quad (4.31)$$

α et β étant deux variables réelles .

Tout calcul fait, l'équation (4.30) donne :

$$\tilde{p}_{i,j,k} = \frac{1}{\gamma} \left(\tilde{p}_{i+1,j,k} + \tilde{p}_{i-1,j,k} + \tilde{p}_{i,j+1,k} + \tilde{p}_{i,j-1,k} + \frac{1}{c^2 v^2} (1 - b) \tilde{p}_{i,j,k-1} \right) \quad (4.32)$$

$$i = 0, m$$

$$j = 0, n$$

$$k = 0, z$$

$$\text{avec } \gamma = \left(4 - \frac{2}{c^2 v^2} + \frac{1+b}{c^2 v^2} \right)$$

$$\text{où } b = \beta/\alpha$$

4/ Présentation de la méthode des différences finies
et application à l'équation d'onde

Ainsi, une fois le domaine discrétisé, l'approximation choisie et les équations aux différents noeuds du domaine écrites, nous nous retrouvons avec un système à n équations et n inconnues qui sont les valeurs de $\{x\}$ aux noeuds du domaine. Les valeurs de $\{B\}$ sont soit connues sur le contour du domaine, condition de Dirichlet, soit données sous forme de condition de Newman, ces n équations peuvent se mettre sous la forme matricielle:

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad (4.33)$$

où :

$\{x\}$: vecteur définissant les inconnues aux noeuds du domaine: pressions recherchées.

$[A]$: matrice traduisant l'équation d'onde et dépendant de Δx , Δy , Δt , α et β

$\{B\}$: vecteur faisant intervenir les données initiales et aux limites.

- Caractéristiques de la Matrice $[A]$:

* Comme seuls les points géométriquement voisins sont reliés par des équations du type (4.24), la matrice $[A]$ est très creuse.

* La matrice $[A]$ est à structure bande, elle comporte les termes ; 1, 2 et $-\gamma$

où :

$$\gamma = \frac{2}{4 - \frac{2}{\left(c^2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right)}} + \frac{1+B/\alpha}{\left(c^2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right)}$$

* La matrice $[A]$ est à " diagonale dominante", c'est à dire :

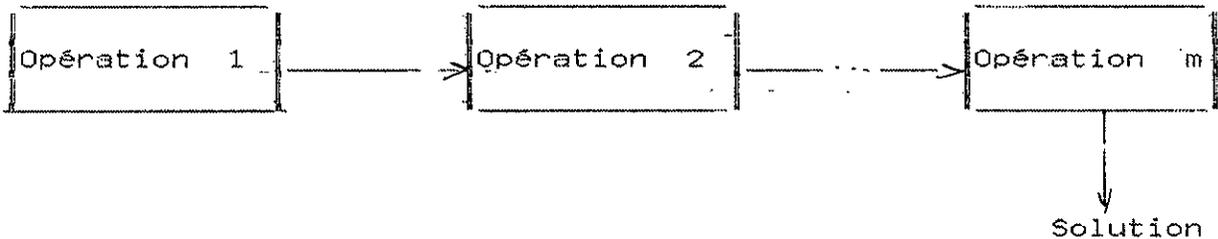
$$\forall i \in [1, N], \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |Q_{ij}| < |Q_{ii}|$$

4/ Présentation de la méthode des différences finies
et application à l'équation d'onde

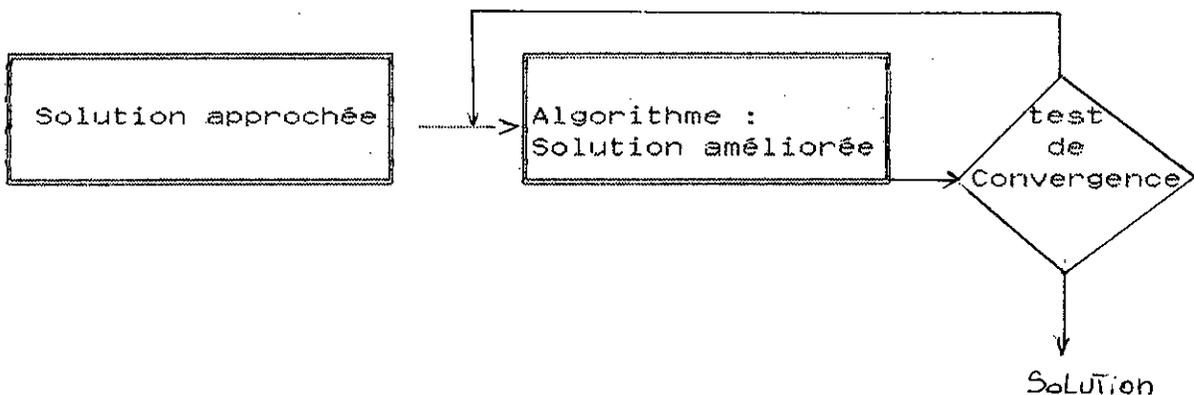
6- RESOLUTION DU SYSTEME OBTENU :

Les méthodes de résolution des systèmes linéaires peuvent être classées en deux catégories :

a)- Les méthodes directes qui conduisent à la résolution en un nombre d'opérations connu à priori .



b)- Les méthodes itératives qui conduisent à la solution par une succession d'améliorations d'une solution approchée, le nombre d'itérations nécessaires étant difficile à prévoir et dépendant de la structure de la matrice [A]



4/ Présentation de la méthode des différences finies
et application à l'équation d'onde

On vérifié aisément que les systèmes importants, tel notre cas, ne se traitent généralement pas par des méthodes directes.

La méthode proposée ici est la méthode itérative de Gauss - sédiel, elle consiste, pour chaque pas de temps, à réaliser les étapes suivantes :

- Choisir un sens de balayage
- imposer une solution initiale arbitraire à l'intérieur du domaine.
- Commencer à balayer le domaine en calculant en chaque point la valeur de la fonction; $\tilde{p}^{(T)}$

$\tilde{p}_{i-1,j,k}^{(T)}$ à l'aide des valeurs de :

* $\tilde{p}_{i,j-1,k}^{(T)}$ et $\tilde{p}_{i-1,j,k}^{(T)}$ récemment calculées dans l'itération en cours;

* les anciennes valeurs $\tilde{p}_{i+1,j,k}^{(T-1)}$ et $\tilde{p}_{i,j+1,k}^{(T-1)}$ issues de l'itération précédente et toujours stockées dans la mémoire de l'ordinateur.

* de la valeur fixe $\tilde{p}_{i,j,k-1}$ calculée au temps antécédent et toujours stockée dans la mémoire de l'ordinateur.

Soit en définitive, et en notation indicielle :

$$\tilde{p}_{i,j,k}^{(T)} = \frac{1}{\gamma} \left(\tilde{p}_{i+1,j,k}^{(T-1)} + \tilde{p}_{i-1,j,k}^{(T)} + \tilde{p}_{i,j+1,k}^{(T-1)} + \tilde{p}_{i,j-1,k}^{(T)} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{c^2 v^2} (1-b) (\tilde{p}_{i,j,k-1}) \right)$$

(4.37)

4/ Présentation de la méthode des différences finies
et application à l'équation d'onde

Valeur que nous substituons dans la mémoire de l'ordinateur à l'ancienne valeur $\tilde{p}_{i,j,k}(T-1)$

- Recommencer le balayage aux différents points tant que la solution n'est pas stabilisée, c'est à dire jusqu'à ce que un critère de convergence sur les valeurs de \tilde{p} soit vérifié.

Lorsqu'on passe au temps suivant, on affecte aux valeurs $\tilde{p}_{i,j,k-1}$ les valeurs calculées au temps précédent notés $\tilde{p}_{i,j,k}$, et les nouvelles valeurs $\tilde{p}_{i,j,k}$ seront calculées en suivant la procédure décrite précédemment.

Les calculs ne seront arrêtés qu'au moment où l'on estimera que le temps maximum pris en compte est représentatif du séisme considéré.

On arrive alors à la question la plus importante de convergence et de stabilité. On peut garantir que la solution du système d'équations (4.32) converge vers la solution exacte si $V < 1$.

C'est à dire :

$$1 < h$$

(4.38)

C'est une condition suffisante de convergence, mais elle n'est pas nécessaire. En d'autres termes, il peut y avoir des équations avec des espacements qui violent la condition (4.38), mais qui convergent, mais on ne peut garantir la convergence dans de tels cas.

Un autre problème se pose, c'est que quand V est supérieure à 1, la méthode est instable, ceci veut dire que n'importe quel erreur, devient amplifié quand la solution progresse.

En général, on souhaite assurer la convergence plutôt que l'espérer simplement, il est donc impératif que la condition (4.38) soit satisfaite.

4/ Présentation de la méthode des différences finies
et application à l'équation d'onde

Une fois la convergence assurée, c'est à dire, la relation (4.38) vérifiée, on cherchera à accélérer le processus de convergence en améliorant la méthode itérative de Gauss-Siedel par Surrelaxation .

Ceci peut se faire en introduisant le facteur de sur-relaxation w et en posant :

$$\tilde{p}_{i,j,k}^{(T+1)} = \tilde{p}_{i,j,k}^{(T)} + w (\tilde{p}_{i,j,k}^{(T+1)} - \tilde{p}_{i,j,k}^{(T)}) \quad (4.39)$$

où :

$\tilde{p}_{i,j,k}^{(T+1)}$ est le vecteur estimé par la méthode de Gauss-Siedel.

$\tilde{p}_{i,j,k}^{(T+1)}$ est le vecteur estimé par la méthode de Sur-relaxation.

Le coefficient w permet d'améliorer la vitesse de convergence, sa valeur optimale dépend du problème, c'est à dire de la forme de la matrice $[A]$; elle est déterminée par expérimentation numérique.

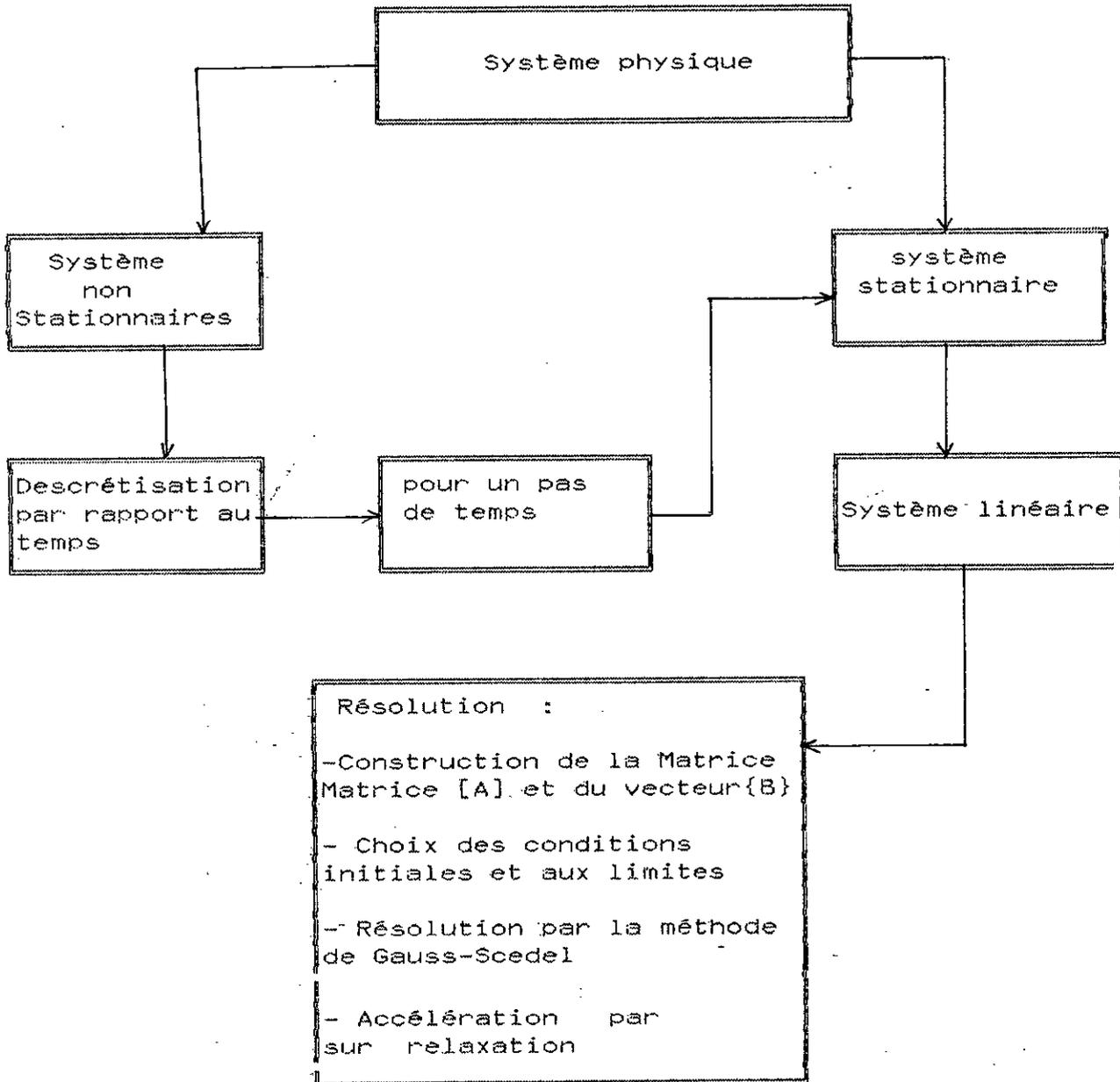
Dans le cas d'un domaine rectangulaire à $N \times M$ points intérieurs, on peut, au lieu de déterminer w par tâtonnement comme dans le cas général, prendre l'expression théorique:

$$w = 1 + \left\{ \frac{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{M+1}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{N+1}\right)}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\cos\left(\frac{\pi}{M+1}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{N+1}\right) \right)^2}} \right\}^2$$

(4.40)

7 - RESUME

Pour plus de clarification, on résumera les étapes de calcul par l'organigramme simplifiée suivant :



COMPLEMENT

On s'est proposé de traiter notre problème, par une autre méthode qui est la méthode mixte : différence finies - Newmark.

Ainsi, l'opérateur Laplacien sera discrétisé par la méthode des différences finies centrales, alors que l'opérateur différentiel par rapport au temps, sera discrétisé selon la méthode de Newmark.

- Principe de la méthode :

Cette méthode implicite permet de construire la solution à l'instant $(t + \Delta t)$ à partir des valeurs connues $\dot{P}_{i,j,k}$, $\ddot{P}_{i,j,k}$ et $\dot{P}_{i,j,k}$.

$$\text{avec : } \left\{ \begin{array}{l} \dot{P}_{i,j,k} = \frac{\delta P}{\delta t} \Big|_k \\ \ddot{P}_{i,j,k} = \frac{\delta^2 P}{\delta t^2} \Big|_k \end{array} \right.$$

elle utilise les développements limités suivants :

$$\dot{P}(x,y,t + \Delta t) = \dot{P}(x,y,t) + \Delta t(1-a) \left(\ddot{P}(x,y,t) + a \ddot{P}(x,y,t + \Delta t) \right) \quad (4.41)$$

et

$$P(x,y,t + \Delta t) = P(x,y,t) + \Delta t \dot{P}(x,y,t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left((1-b) \ddot{P}(x,y,t) + b \ddot{P}(x,y,t + \Delta t) \right) \quad (4.42)$$

a et b étant deux variables réelles, tel que :

$$a \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad b \geq \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{2} \right)^2$$

L'équation (4.12) donne :

$$\begin{aligned} \ddot{P}(x, y, t + \Delta t) &= \frac{2}{b(\Delta t)^2} (P(x, y, t + \Delta t) - P(x, y, t)) \\ &- \Delta t \dot{P}(x, y, t) - \frac{(\Delta t)^2}{2} (1-b) \ddot{P}(x, y, t) \end{aligned} \quad (4.43)$$

en adoptant la notation :

$$P(x, y, t) = P_{i,j,k}$$

l'équation d'onde discrétisée au temps $(t + \Delta t)$ donne :

$$\begin{aligned} &\frac{\tilde{P}_{i,j+1,k+1} - 2\tilde{P}_{i,j,k+1} + \tilde{P}_{i,j-1,k+1}}{(\Delta y)^2} \\ &+ \frac{\tilde{P}_{i+1,j,k+1} - 2\tilde{P}_{i,j,k+1} + \tilde{P}_{i-1,j,k+1}}{(\Delta x)^2} \\ &= \frac{2}{bc^2(\Delta t)^2} (\tilde{P}_{i,j,k+1} - P_{i,j,k} - \Delta t \dot{P}_{i,j,k} - \frac{(\Delta t)^2}{2} (1-b) \ddot{P}_{i,j,k}) \end{aligned} \quad (4.44)$$

posons $\Delta x = \Delta y = h$

et $\Delta t = 1 = \sigma h$

σ étant un réel à déterminer

après transformation, l'équation (4.44) donne :

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{i,j,k+1} = & \frac{1}{\Omega} [\tilde{p}_{i,j+1,k+1} + \tilde{p}_{i,j-1,k+1} + \tilde{p}_{i+1,j,k+1} + \\ & \tilde{p}_{i-1,j,k+1} + \beta(\tilde{p}_{i,j,k} - 1 \tilde{p}_{i,j,k} - \frac{1^2}{2} (1-b) \tilde{p}_{i,j,k})] \end{aligned}$$

(4.45)

$$i = 0, m$$

$$j = 0, n$$

$$k = 0, Z$$

Avec

$$\Omega = 4 + \frac{2}{bc^2 \sigma^2}$$

$$\beta = \frac{2}{b} \left(\frac{h}{1} \right)^2$$

Les valeurs de $\ddot{p}_{i,j,k}$ et $\dot{p}_{i,j,k}$ seront calculées en utilisant les formules d'approximation de Newmark (4.41) et (4.42)

Ainsi donc pour un temps donnée, le système obtenu est de la forme :

$$[A] \quad \{ X \} = \quad \{ B \}$$

C'est un système linéaire, stationnaire et homogène.

La matrice [A] présente les mêmes caractéristiques que celle du système étudié précédemment , elle contient les termes : 1, 2 et $-\Omega$.

Le système sera alors traité de la même façon que le premier en utilisant une méthode de résolution de Gauss-Siedel dont la convergence est accélérée par surrelaxation.

CHAPITRE 5

PRINCIPE DE RESOLUTION

5/ Principe de résolution

L'équation d'onde discrétisée, les conditions initiales et aux limites établies, le présent chapitre consiste donc à décrire les étapes de résolution concernant la détermination de pressions hydrodynamiques générés par la propagation d'une onde sismique dans le réservoir d'un barrage poids, dans l'hypothèse d'un mouvement horizontal.

I/ - FORMULATION DU PROBLEME

Nous présenterons dans notre étude, le cas suivant :

- barrage poids triangulaire avec parement amont horizontal.

- Le barrage est supposé rigide et se déplaçant avec le fond de la retenue, la fondation étant du type rocheuse et imperméable.

- Le mouvement de l'eau, régi par l'équation de propagation d'onde, est supposé plan et instationnaire. La surface libre est supposée horizontale et la pression qui y reigné est la pression atmosphérique.

On illustrera l'exemple traité, par la figure (5.1) .

Le problème concernant le domaine ABCD est résolu par les deux algorithmes décrits précédemment :

- Algorithme utilisant l'approximation par différences finies
- Algorithme utilisant l'approximation mixte : différences finies - Newmark

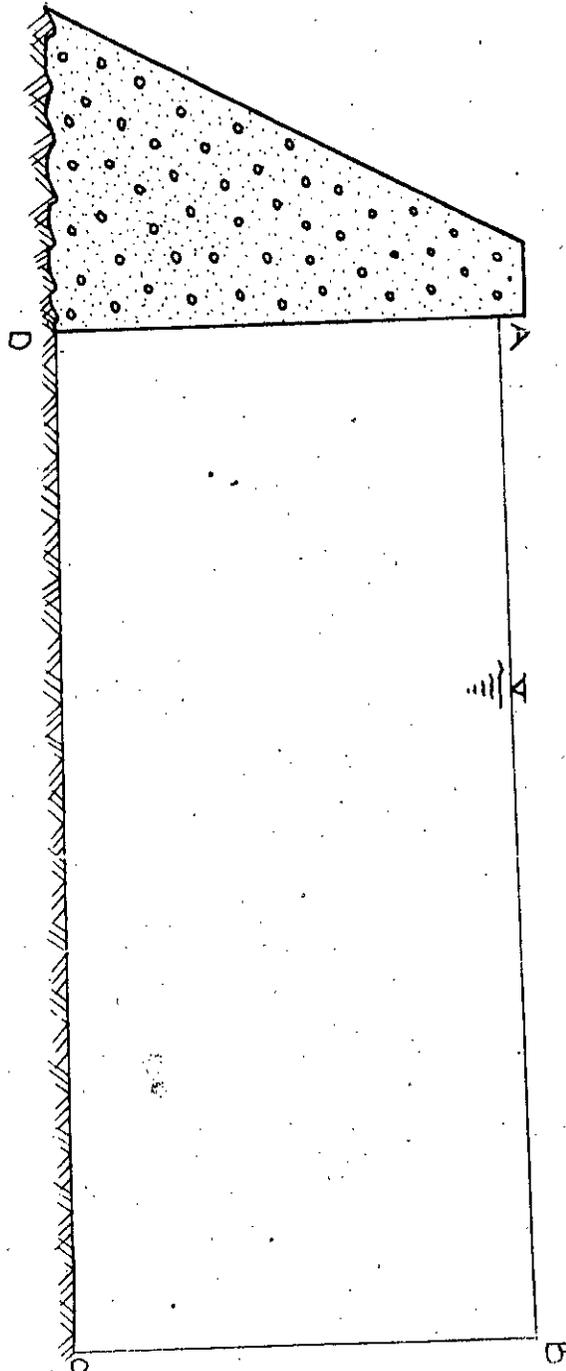


FIG (5.1)

II/- EQUATIONS DE BASE

Choisissons un axe de coordonnées (OX, OY), l'axe (OX) correspond à la longueur du réservoir, et l'axe (OY) correspond à la hauteur du réservoir.

L'équation de continuité s'écrit alors :

$$\frac{\delta(\rho u)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho v)}{\delta y} = - \frac{\delta \rho}{\delta t} \quad (5.1)$$

Les équations de Navier Stokes simplifiés donnent :

$$-\frac{1}{\rho} \text{grad } \rho = \frac{\delta \vec{v}}{\delta t} \quad (5.2)$$

Enfin, l'équation d'état relative au mouvement considéré, s'écrit :

$$\rho = \rho c^2 \quad (5.3)$$

Ces trois équations donnent après transformation :

$$\frac{\delta^2 P}{(\delta x)^2} + \frac{\delta^2 P}{(\delta y)^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\delta^2 P}{(\delta t)^2} \quad (5.4)$$

L'équation (5.4) est du type hyperbolique. Les conditions aux limites sont données sur tout le contour du domaine:

- A la surface libre AB, la pression est :

$$P = 0 \quad (5.5)$$

- Sur la face BC (limite du reservoir), la condition de non reflexion à l'infini s'écrit :

$$\frac{\delta P}{\delta x} = 0 \quad (5.6)$$

- Au fond de la retenue (CD), la pression P vérifie la relation :

$$\frac{\delta P}{\delta y} = 0 \quad (5.7)$$

c'est une condition de non infiltration

- Le long du parement amont (DA), on a la condition de non infiltration, exprimée par :

$$\frac{\delta P}{\delta n} = - \int a \cdot \vec{n} \quad (5.8)$$

où \vec{n} est la normale à (DA)

et a l'accélération absolue de la structure supposé rigide .
 \int la fluctuation de la masse volumique.

III/- RESOLUTION :

A/ Approximation par différences finies :

L'approximation par différences finies centrales des points du domaine d'étude D a donné les résultats suivants :

- à l'intérieur du domaine, l'équation d'onde discrétisé donne :

$$\tilde{P}_{i,j,k} = \frac{1}{\gamma} [\tilde{P}_{i+1,j,k} + \tilde{P}_{i-1,j,k} + \tilde{P}_{i,j+1,k} + \tilde{P}_{i,j-1,k} + \frac{1}{c^2 v^2} (1-b) \tilde{P}_{i,j,k-1}]$$

(5.9)

avec :

$$\gamma = 4 - \frac{2}{c^2 v^2} + \frac{1+b}{c^2 v^2}$$

où : $b = \beta/\alpha$

ainsi donc, si on applique l'équation (5.9) au domaine d'étude considéré (ABCD) , on obtient :

- sur la surface libre AB on a :

$$\tilde{P}_{i,j,k} = 0$$

(5.10)

- sur la limite (BC) on a :

$$\frac{\delta P}{\delta x} = \frac{\tilde{p}_{i+1,j,k} - \tilde{p}_{i-1,j,k}}{2 \Delta x} = 0$$

d'où:

$$\tilde{p}_{i+1,j,k} = \tilde{p}_{i-1,j,k} \quad (5.11)$$

$$\tilde{p}_{i,j,k} = \frac{1}{\gamma} [2\tilde{p}_{i+1,j,k} + \tilde{p}_{i,j+1,k} + \tilde{p}_{i,j-1,k} +$$

$$\frac{1}{c^2 v^2} (1-b) \tilde{p}_{i,j,k-1}]$$

(5.12)

- sur la limite (CD) , on a :

$$\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\tilde{p}_{i,j+1,k} - \tilde{p}_{i,j-1,k}}{2 \Delta y} = 0$$

c'est à dire

$$\tilde{p}_{i,j+1,k} = \tilde{p}_{i,j-1,k} \quad (5.13)$$

Donc pour un point donné sur (CD) on obtient :

$$\tilde{p}_{i,j,k} = \frac{1}{\gamma} [\tilde{p}_{i+1,j,k} + \tilde{p}_{i-1,j,k} + 2\tilde{p}_{i,j+1,k} +$$

$$\frac{1}{c^2 v^2} (1-b) \tilde{p}_{i,j,k-1}]$$

(5.14)

5/ Principe de résolution

- de la même manière on discrétisera la condition aux limites sur (DA) traduite par la relation :

$$\frac{\delta P}{\delta x} = \frac{\tilde{P}_{i+1,j,k} - \tilde{P}_{i-1,j,k}}{2 \Delta x} = -j a \quad (5.15)$$

où encore :

$$\tilde{P}_{i-1,j,k} = \tilde{P}_{i+1,j,k} + 2\Delta x \cdot j a \quad (5.16)$$

donc, pour un point de (DA) on a :

$$\tilde{P}_{i,j,k} = \frac{1}{\gamma} [2 \tilde{P}_{i+1,j,k+1} + 2\Delta x \cdot j a + \tilde{P}_{i,j+1,k} + \tilde{P}_{i,j-1,k} + \frac{1}{C^2 V^2} (1-b) \tilde{P}_{i,j,k-1}] \quad (5.17)$$

Ainsi, on a établi, toutes les équations nécessaires et l'étape suivante sera donc l'élaboration d'un programme utilisant la méthode des différences finies pour la résolution du problème en vue.

DESCRIPTION DU PROGRAMME :

1- Dictionnaire des variables :

La signification des différentes variables utilisées dans notre programme est illustrée ci-dessous :

- Longueur du reservoir selon l'axe (OX) L
- Hauteur du reservoir selon l'axe (Oy) H
- Nombre de noeuds selon l'axe (Ox) m
- Nombre de noeuds selon l'axe (Oy) n
- Nombre de noeuds par étage dans le plan (oxy) NPG
- Nombre total de noeuds NPT
- pas selon l'axe (OX) l
- pas selon l'axe (Oy) l
- pas selon l'axe (OZ)..... h
- Matrice des valeurs au temps (t- t) PSTAR
- Matrice des valeurs au temps (t) P
- Matrice des valeurs intermédiaires durant l'itération ... PTAMP

2/- Entrée des données :

Les informations sur les dimensions géométriques du réservoir (hauteur et longueur), le nombre d'éléments à discrétiser selon l'axe (OX) et (OY) , constituent les informations nécessaires pour résoudre le problème.

3/- Résolution

Les systèmes auxquels on aboutit sont linéaires, on utilise l'algorithme de résolution de Gauss-Sièdel.

- la limite du réservoir inconnue a priori est définie par la condition (5.6) , on suppose donc une valeur de la longueur du réservoir et on résoud le problème d'où les valeurs $P(x,y,t)$ en tout point .

4/- Programme principal et sous programmes :

a- Programme principal

Il contient toutes les déclarations (nature des variables , dimensions des matrices , etc) , ainsi que les appels aux différentes sous-routines.

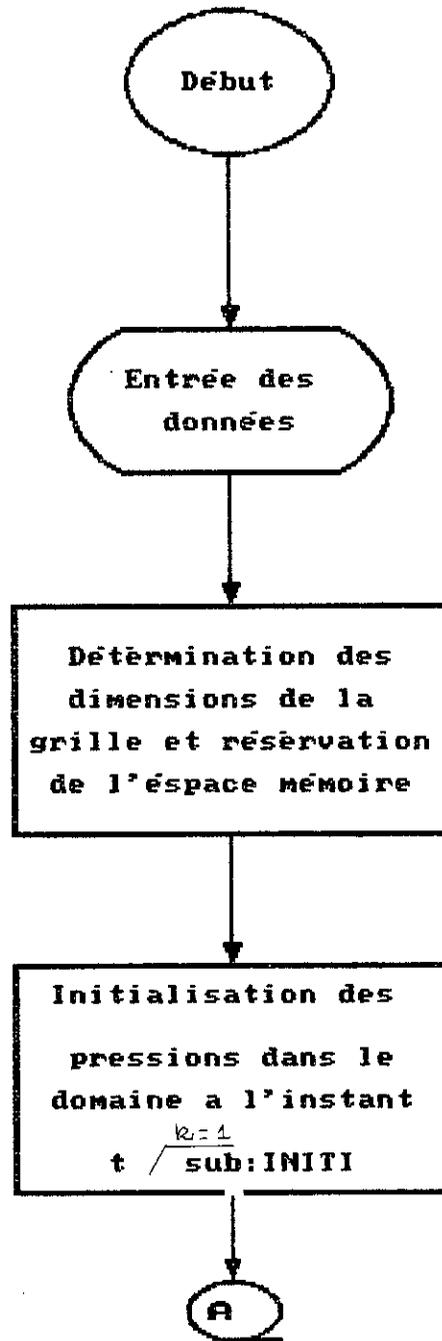
b- Sous programmes

Nous avons utilisés des sousroutines dont les fonctions sont résumés dans le tableau ci-dessus :

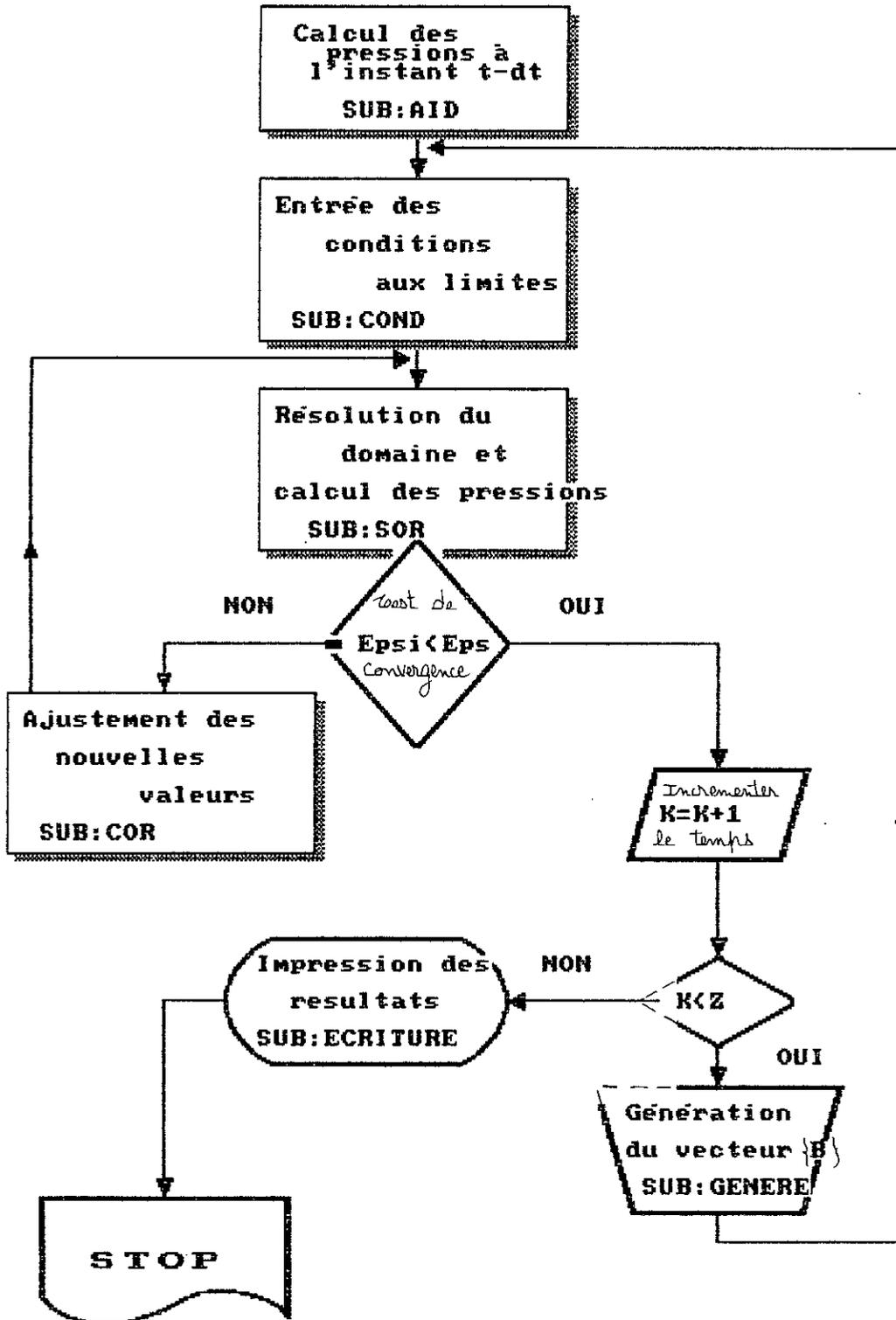
<u>SUBROUTINE</u>	<u>FONCTION</u>
- Lecture	- permet d'introduire toutes les informations sur les dimensions géométriques du réservoir .
- INITI	- permet d'initialiser toutes les variables du système à résoudre au temps t . Les pressions ont des valeurs arbitraires.
- AID	- Permet de calculer les valeurs des inconnues au temps $(t - \Delta t)$
- COND	- permet de tenir compte des conditions aux limites (sur la face amont du barrage , le fond de la retenue, la limite du réservoir ainsi que sur surface libre).
- COR	- permet de corriger les valeurs de la pression durant l'itération
- GENERE	- permet de remplacer les valeurs de la pression au temps $(t - \Delta t)$ par celles au temps (t) .
- SOR	- permet la résolution du système d'équations.
- ECRITURE	- permet l'impression du systèmes.

5/ Principe de résolution

ORGANIGRAMME



6/ Principe de résolution



B/- Approximation par la méthode mixte : différences finies-
Newmark :

Le domaine d'étude est divisé en mailles où les équations et les conditions aux limites sont remplacées par les approximations adéquates.

Les résultats obtenus dans le chapitre IV, seront exprimés de la manière suivante :

-à l'intérieur du domaine, l'équation d'onde discrétisée donne :

$$\ddot{\tilde{p}}_{i,j,k+1} = \frac{1}{\Omega} [\ddot{\tilde{p}}_{i+1,j,k+1} + \ddot{\tilde{p}}_{i-1,j,k+1} + \ddot{\tilde{p}}_{i,j+1,k+1} + \ddot{\tilde{p}}_{i,j-1,k+1}$$

$$+ \beta (\ddot{\tilde{p}}_{i,j,k} + \ddot{\tilde{p}}_{i,j,k} + \frac{1^2}{2} (1-\beta) \ddot{\tilde{p}}_{i,j,k})]$$

(5.18)

avec :

$$\Omega = 4 + \frac{2}{bc^2} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2$$

où encore :

$$\Omega = 4 + \frac{2}{bc^2} \left(\frac{h}{1} \right)^2 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{2}{b} \left(\frac{h}{1} \right)^2$$

5/ Principe de résolution

b étant un réel, qui, pour une variation linéaire de pression, vaut 1/3.

\tilde{P} et $\dot{\tilde{P}}$ seront déterminés par les formules d'approximation de Newmark.

$$\tilde{P}_{i,j,k+1} = \frac{2}{bl^2} (\tilde{P}_{i,j,k+1} - \tilde{P}_{i,j,k} - 1 \tilde{P}_{i,j,k} - \frac{1^2}{2} (1-b) \tilde{P}_{i,j,k}) \quad (5.19)$$

et !:

$$\tilde{P}_{i,j,k+1} = \tilde{P}_{i,j,k} + 1((1-a) \tilde{P}_{i,j,k} + a \tilde{P}_{i,j,k+1}) \quad (5.20)$$

- sur la surface libre AB, on a :

$$\tilde{P}_{i,j,k} = 0 \quad (5.21)$$

- sur la limite BC, on a :

$$\frac{\delta P}{\delta x} = \frac{\tilde{P}_{i+1,j,k+1} - \tilde{P}_{i-1,j,k+1}}{2 \Delta x} = 0 \quad (5.22)$$

d'où :

$$\tilde{P}_{i+1,j,k+1} = \tilde{P}_{i-1,j,k+1} \quad (5.23)$$

donc, pour un point donné sur BC, on aura :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{i,j,k+1} = & \frac{1}{\Omega} (2 \tilde{P}_{i+1,j,k+1} + \tilde{P}_{i,j+1,k+1} + \tilde{P}_{i,j-1,k+1} + \\ & B(\tilde{P}_{i,j,k} + 1 \tilde{P}_{i,j,k} + \frac{1^2}{2} (1-b) \tilde{P}_{i,j,k}) \end{aligned} \quad (5.24)$$

- sur la limite (CD) on a :

$$\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\tilde{P}_{i,j+1,k+1} - \tilde{P}_{i,j-1,k+1}}{2 \Delta y} = 0 \quad (5.25)$$

c'est à dire :

$$\tilde{P}_{i,j+1,k+1} = \tilde{P}_{i,j-1,k+1}$$

Donc pour un point donné sur (CD), on aura :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{i,j,k+1} = & \frac{1}{\Omega} [\tilde{P}_{i+1,j,k+1} + \tilde{P}_{i-1,j,k+1} + 2 \tilde{P}_{i,j+1,k+1} + \\ & B(\tilde{P}_{i,j,k} + 1 \tilde{P}_{i,j,k} + \frac{1^2}{2} (1-b) \tilde{P}_{i,j,k}) \end{aligned} \quad (5.26)$$

5/ Principe de résolution

- de même on a sur (DA)

$$\frac{\delta P}{\delta x} = \frac{\tilde{P}_{i+1,j,k+1} - \tilde{P}_{i-1,j,k+1}}{2 \Delta x} = - \beta a \quad (5.27)$$

ce qui donne :

$$\tilde{P}_{i-1,j,k+1} = \tilde{P}_{i+1,j,k+1} + 2 \Delta x \beta a \quad (5.28)$$

Ce qui donne pour un point de (DA) :

$$\tilde{P}_{i,j,k+1} = \frac{1}{\Omega} [2 \tilde{P}_{i+1,j,k+1} + \tilde{P}_{i,j,k+1} + \tilde{P}_{i,j-1,k+1} + 2 \Delta x \cdot a + \beta (\tilde{P}_{i,j,k} + \tilde{P}_{i,j,k} + \frac{1^2}{2} (1-b) \tilde{P}_{i,j,k})] \quad (5.29)$$

Ainsi, après développement des équations, on obtient une formulation simple du problème, résoluble par un programme utilisant la méthode mixte : différences finies - Newmark.

CHAPITRE 6

RESULTATS ET CRITIQUES

Resultats et critiques

Après avoir établi les équations nécessaires a la résolution de notre problème, nous présenterons dans ce chapitre les résultats obtenus avec quelques critiques relatives au cas étudié.

Tout d'abord nous avons cherché a optimiser l'hypothèse de linéarité de la pression, pour cela on a fait un ajustement numérique des valeurs de α et β , et on a ainsi aboutit a un choix des valeurs α et β .

I/ CHOIX DES VALEURS α ET β :

La discrétisation par la méthode de NEWMARK d'un problème "hyperbolique" introduit des coefficients a et b. pour une variation linéaire de pression les valeurs de a et b sont donnés.

La discrétisation du même type d'équations par la méthode des "Différences Finies" introduit elle aussi des paramètres α et β , dont les valeurs sont inconnues a priori.

Ainsi donc on s'est référée a la méthode de NEWMARK afin de délimiter le champ de variation des paramètres α et β .

Les valeurs trouvés ont été comparés a celles obtenues par la méthode expérimentale de ZANGAR et un choix optimum de α et β a été tiré pour le cas présent.

II/ INFLUENCE DU PAS DE TEMPS:

L'analyse qu'on a effectuée montre que les résultats du calcul sont parfaitement aberrants si l'on choisit l'intervalle de temps trop grand. En effet, lorsque les termes d'inertie sont relativement importants (cas d'une propagation d'onde) le choix du pas de temps influe sur la précision des résultats.

ainsi donc, pour des pas de temps de plus en plus affines une évolution meilleure de la variation de pression dans la réserve est obtenue.

RESULTATS ET CRITIQUES

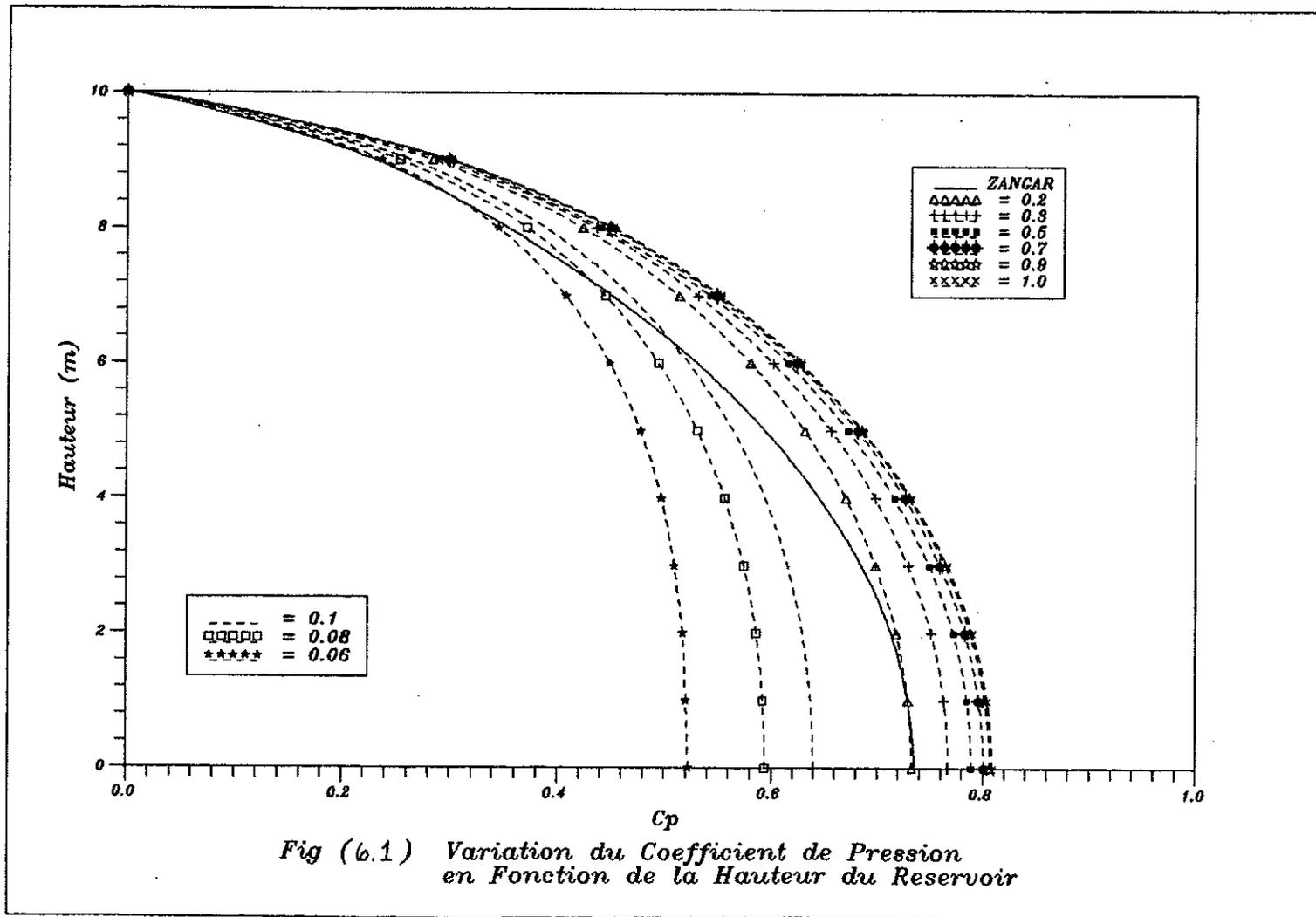
ACCELERATION A=UNITEE
HAUTEUR=10(m)
DELTAX=1(m)
SECTION1 (I=1,J=1,11)

Coefficient de pression
"METHODE DES DIFFERENCES
FINIES"

0.733
0.729
0.718
0.698
0.670
0.631
0.580
0.514
0.423
0.283
0.000

Coefficient de pression
"METHODE DE ZANGAR"

0.735
0.729
0.713
0.685
0.645
0.594
0.530
0.450
0.353
0.230
0.000



ACCELERATION A=UNITEE
 HAUTEUR=10(m)
 DELTAX=1(m)

 VARIATION DE LA PRESSION LE LONG DE LA LONGUEUR
 DU RESERVOIR

Section1 (<i>Parerment Amont</i>) (i=1,j=1,11)		Section2 (i=2,j=1,11)
0.732		0.622
0.729		0.618
0.717		0.606
0.698		0.586
0.669		0.557
0.631		0.517
0.580	Section6 (i=6,j=1,11)	0.465
0.513	0.346	0.398
0.422	0.343	0.310
0.283	0.334	0.189
0.000	0.320	0.000
	0.300	
	0.273	
	0.239	Section50 (i=50,j=1,11)
Section10 (i=10,j=1,11)	0.198	0.125
0.167	0.149	0.124
0.166	0.088	0.120
0.161	0.000	0.115
0.154		0.106
0.143		0.096
0.129		0.083
0.113		0.068
0.093		0.051
0.069		0.029
0.405		0.000
0.000		0.000

Resultats & Critiques

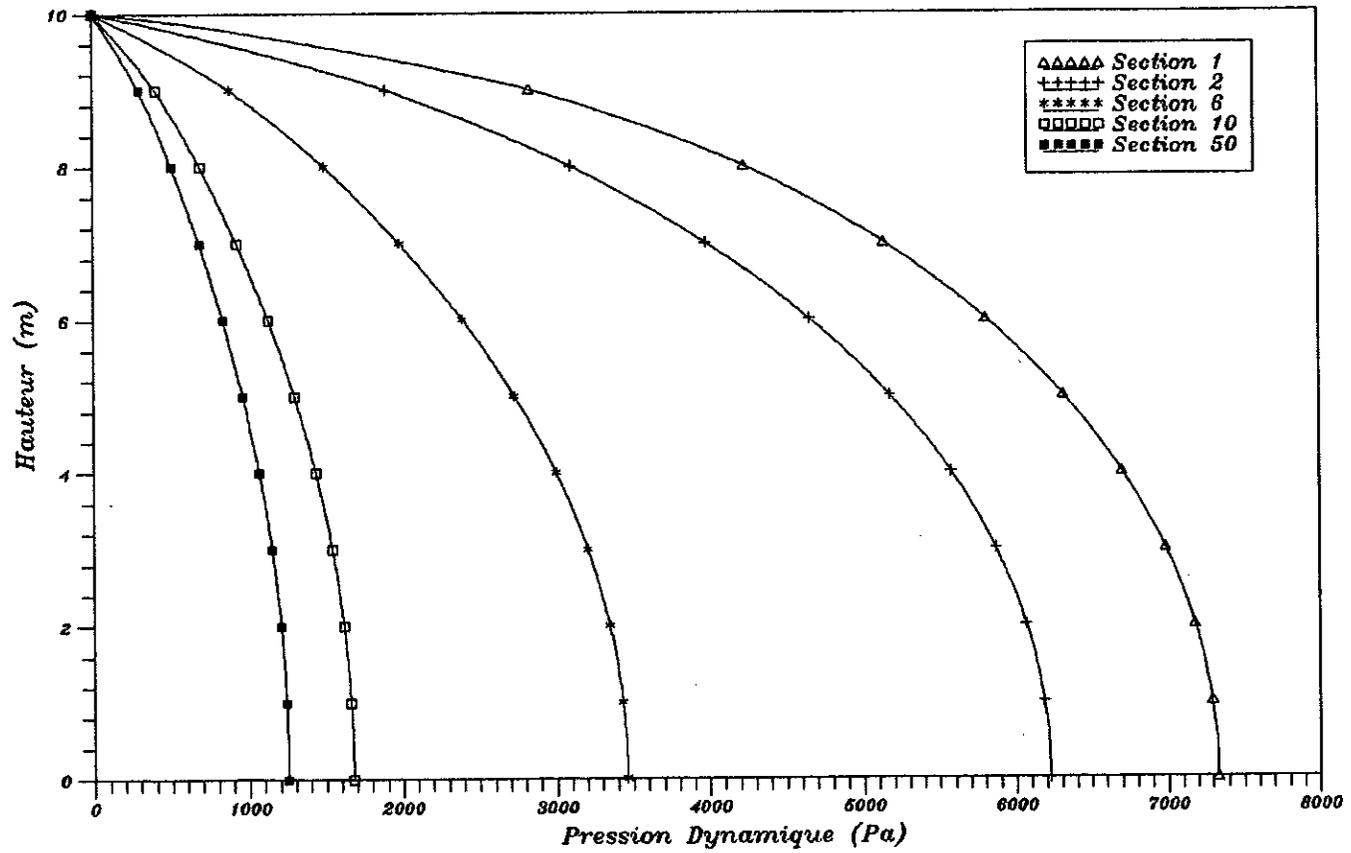


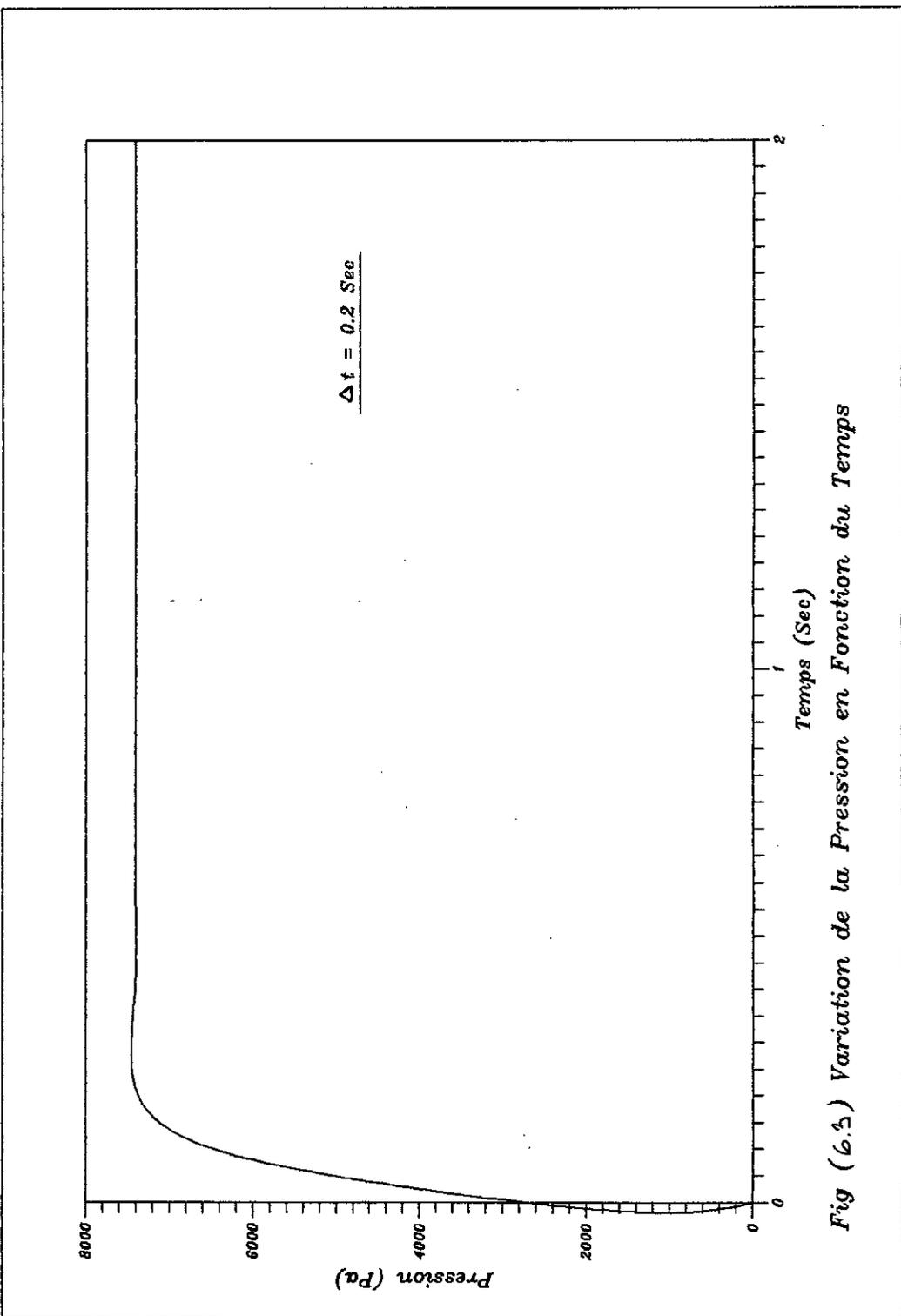
Fig (6.2) Variation de la Pression en Fonction de la Longueur du Reservoir

Resultats et critiques

ACCELERATION A=UNITEE
HAUTEUR=10(m)
DELTAT=0.2(sec)
DELTAX=1(m)
SECTION1 (I=1,J=1)

VARIATION DE LA PRESSION DYNAMIQUE EN FONCTION DU TEMPS

TEMPS(sec)	PRESSIONS EN(pa)
0.0	0.000000
0.2	7373.785331
0.4	7405.525089
0.6	7405.509678
0.8	7405.499529
1.0	7405.490234
1.2	7405.487223
1.4	7405.487224
1.6	7405.487224
1.8	7405.487224
2.0	7405487224



Resultats & Critiques

Fig (6.5) Variation de la Pression en Fonction du Temps

RESULTATS ET CRITIQUES

ACCELERATION A=UNITEE
HAUTEUR=10(m)
DELTAT=0.01(sec)
DELTAX=1(m)
SECTION1 (I=1,J=1)

VARIATION DE LA PRESSION EN FONCTION DU TEMPS

TEMPS(sec)	PRESSIONS EN(pa)
0.00	.000000
0.01	-4598.262915
0.02	7931.030994
0.03	5901.660366
0.04	6234.959681
0.05	6180.222924
0.06	6189.202552
0.07	6187.730728
0.08	6187.971809
0.09	6187.932341
0.1	6187.925073
0.11	6187.918335
0.12	6187.917293
0.13	6187.917401
0.14	6187.917386
0.15	6187.917388

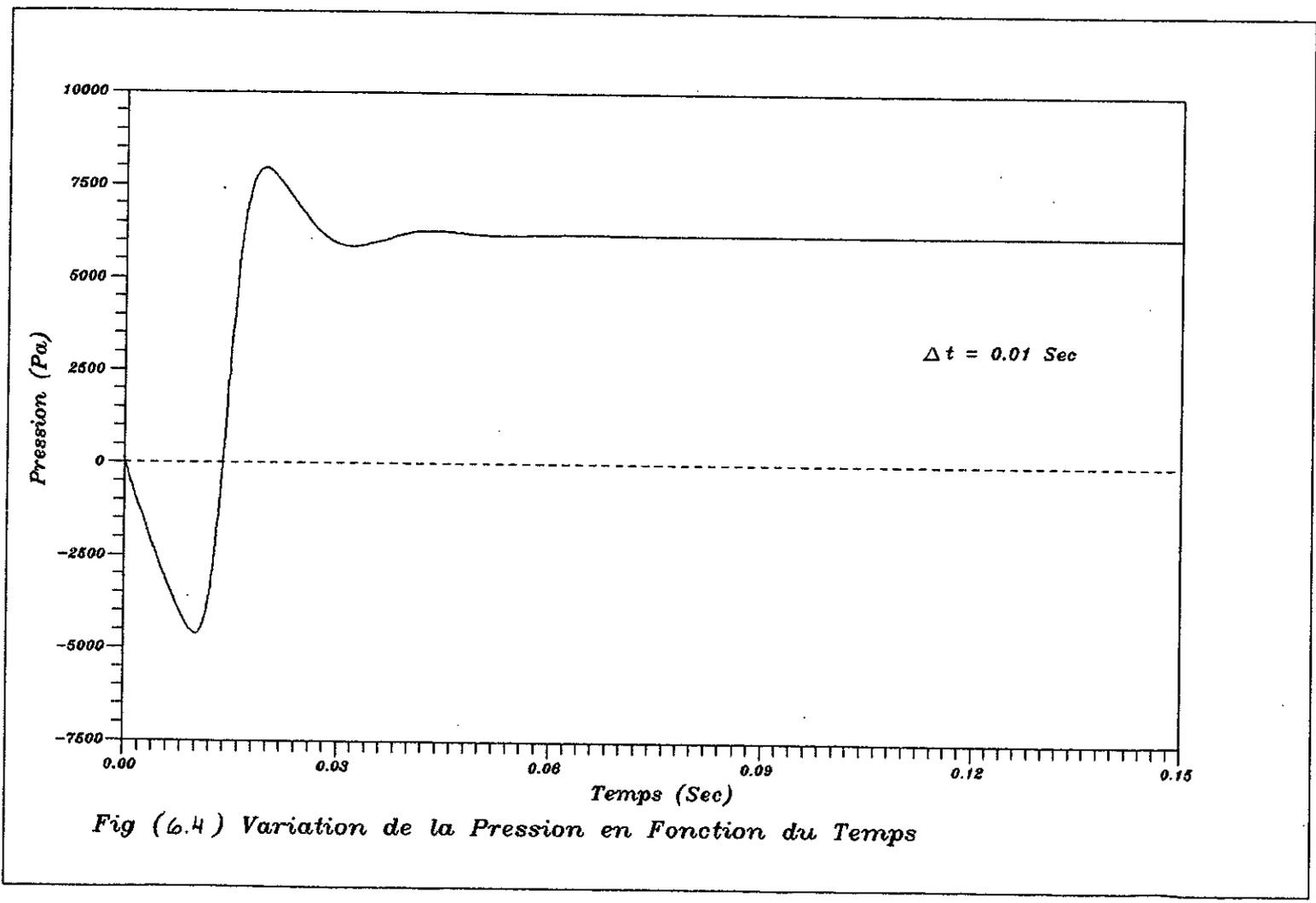


Fig (6.4) Variation de la Pression en Fonction du Temps

RESULTATS ET CRITIQUES

ACCELERATION A=UNITEE
HAUTEUR=10(m)
DELTAT=0.001(sec)
DELTAX=1(m)
SECTION1 (I=1,J=1)

VARIATION DE LA PRESSION EN FONCTION DU TEMPS

TEMPS 1E-003(sec)	PRESSIONS EN(pa)
0.00	0.000000
1.00	-9170.712608
2.00	8865.356736
3.00	-8508.377827
4.00	8348.668153
5.00	-8075.819297
6.00	7970.129890
7.00	-7735.164897
8.00	7657.909937
9.00	-7445.390287
10.00	7386.525000
11.00	-7189.497597

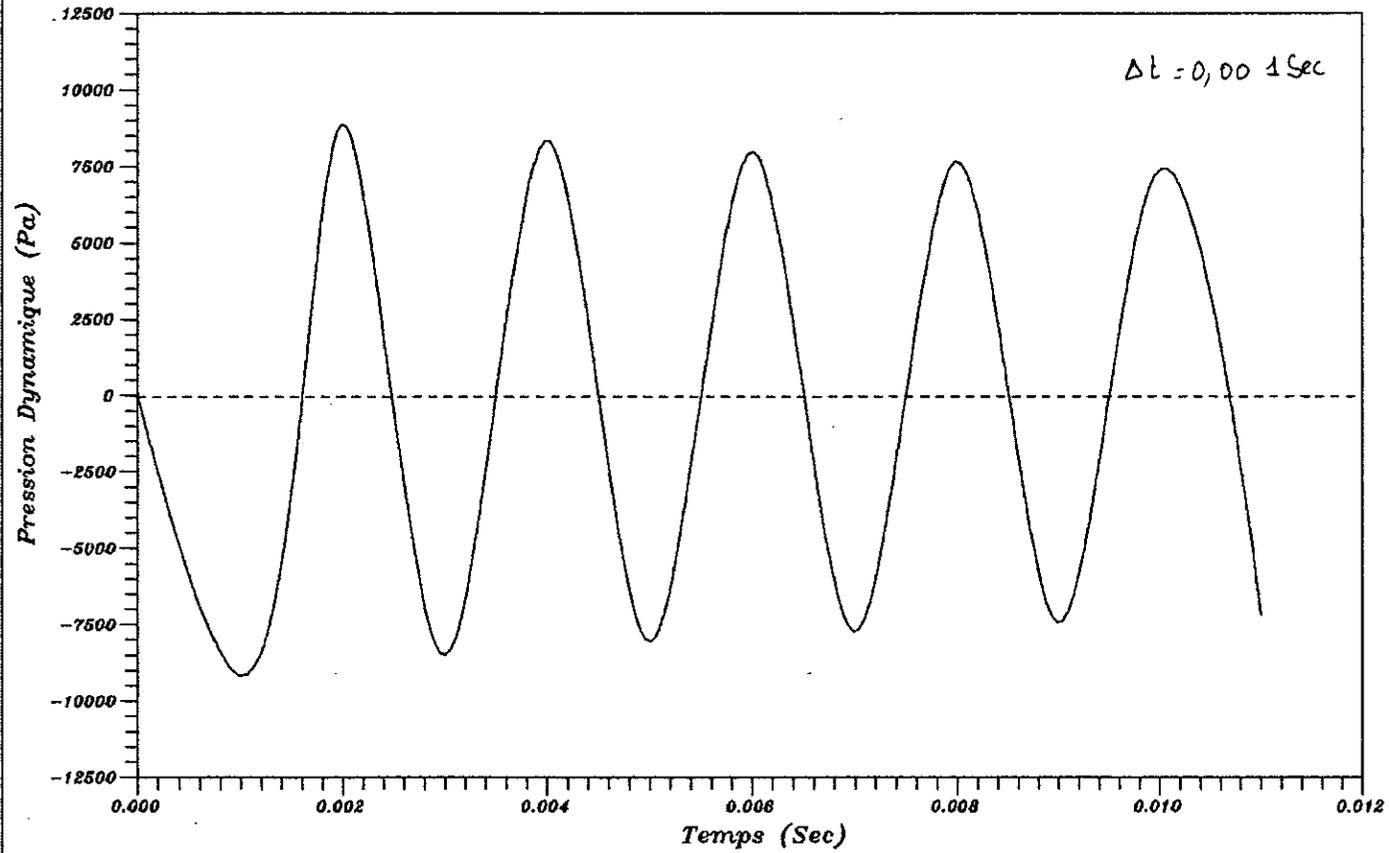


Fig (6.5) Variation de la Pression en Fonction du Temps

CONCLUSION

CONCLUSION

Souvent ,les lois fondamentales a intégrer se presentent sous la forme d'equations aux derivees partielles, equations du type "elliptiques" "paraboliques" et "hyperboliques", dont on ne connait de solutions analytique que dans des cas tres restreints. L'utilisation d'ordinateurs de plus en plus puissants permet aujourd'hui de traiter par le calcul des problemes qui semblaient il y a quelque trente ans, reserves au modele reduit ou a l'observation sur place. d'autre part , la rapidite de calcul permet de traiter des problemes pratiques complexes qu'il etait impensable d'aborder par le calcul manuel.

Les succes obtenus par l'utilisation du modele numerique ne doivent pas faire oublier les difficultees rencontrees:

- Difficultes du traitement numerique :les schemas d'integration numerique peuvent fausser sensiblement lesresultats, les schemas de calcul franchement instables sont moinsdangereux que celles des schemas stables, mais qui introduisent une diffusion artificielle importante.

-Difficultes de l'ajustement : il y a une tendance assez repandue a pousser l'ajustement au dela des limites raisonnables. Il ne faut pas perdre en vue que les equations differ entielles, qui sont a la base du modele mathematique ne tiennent pas compte de toute la complexite des phenomenes. Au lieu de chercher a tout prix a obtenir une bonne concordance entre le calcul et les observations (experience) , il vaut mieux comprendre pourquoi il y a des differences.

notre recommandation est de faire une etude plus poussee en tenant en compte du couplage FLUIDE-STRUCTURE ceci permettra d'obtenir un bon dimensionnement des barrages poids construits dans les zones sismiques.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- 1- [ALAIN CAPRA et VICTOR DAVIDOVICI]

calcul dynamique des structures
en zone sismique

Ed. EYROLLES 1982

- 2- [V. DAVIDOVICI]

Genie parasismique

Presses de l'école
nationale des ponts et
chaussées 1985

- 3- [O PIRONNEAU]

Méthodes des éléments finis pour
les fluides

Ed. MASSON 1988

- H- [H. BOUMAHRAT]

Méthodes numériques appliquées avec
nombreux problèmes résolus en Fortran77

OPU 1991

- 5- [M. HUG]

Mécanique des fluides appliquée

Ed. EYROLLES 1975

- 6- [W. DORN]

Numerical methods and fortran
programming with application

Ed. John Wiley and Sons
1964

- 7- [CH. OBLED]

Analyse numérique (cours)

Ecole nationale polytechnique
de génoble 1986

- 8- [L. SCHOFFENECKER] Thermodynamique chimique
OPU 1983
- 9- [G.TOUZOT et G.DHATT] Une présentation de la méthode des
éléments finis.
Ed. MALOINE S.A 1981
- 10- [C I G B] Une révision du calcul sismique des
barrages
Comité internationale des
grands barrages mars 1975.
- 11- [G. O'BRION] A study of the numerical solution
of partial differential equations .
- 12- [I.L RYHMING] Dynamique des fluides
Presses polytechniques
Romandes 1985
- TRAVAUX DE FIN D'ETUDE:
- 13- [ZOURDANI] Etude dynamique d'un barrage en terre
par la méthode des éléments finis
Promotion 1987
- 14- [BEN MILOUD] Etude des infiltrations dans les digues
et barrages en terre par la méthode des
différences finies
Promotion 1991