

وزارة الجامعات
Ministère aux Universitaires

2ex

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT *Hydraulique*

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ANALYSE DE L'ECOULEMENT
MÉRIDIENAL
DANS UNE TURBOMACHINE

Proposé par :

M^r O. BELHAQJ

Etudié par :

M^r R. CHEZAL

Dirigé par :

M^r O. BELHAQJ

PROMOTION

Fevr 1991

وزارة الجامعات
Ministère aux Universitaires

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT *Hydraulique*

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*Analyse de l'écoulement
meridional
dans une turbomachine*

Proposé par :
M^o O. BELHAÏJ

Etudié par :
M^o R. CHEÏAL

Dirigé par :
M^o O. BELHAÏJ

PROMOTION
JUIN 1991

RESUME

Une méthode d'analyse de l'écoulement méridional dans une turbomachine est présentée dans ce travail .Un programme a été élaboré.La méthode est basée sur l'équation du gradient de vitesses le long de lignes quasi-orthogonales fixes.Lors de l'analyse numérique on a utilisé la méthode des différences finies et la technique du SPLINE.

SYNOPSIS

A method of analyzing flow through a turbomachine is presented that is suitable for computer programming. This method is based on an equation for the velocity gradient along arbitrary fixed quasi-orthogonals.Finite difference method and SPLINE technics were used in this analysis.



INTRODUCTION	03
I/EQUATIONS GENERALES DU MOUVEMENT D'UN FLUIDE	05
EQUATIONS D'EULER	
EQUATIONS DE NAVIER-STOKES	
I.1/HYDRODYNAMIQUE DU LIQUIDE PARFAIT.....	06
I.1.1/EQUATIONS GENERALES DU MOUVEMENT.....	07
EQUATIONS D'EULER	
I.1.2/EQUATION CARACTERISTIQUE.....	17
I.1.3/EQUATION DE CONTINUITE.....	17
I.1.4/EQUATION DU MOUVEMENT LE LONG.....	19
DE LA TRAJECTOIRE	
I.1.5/EQUATIONS GENERALES DU MOUVEMENT.....	21
PERMANENT	
I.1.5.1/DEFINITION D'UN MOUVEMENT.....	21
PERMANENT	
I.1.5.2/CAS D'UN LIQUIDE INCOMPRESSIBLE	22
I.1.6/ECOULEMENTS ROTATIONNELS ET IRROTATIONNELS	26
I.1.6.1/EXEMPLES D'ECOULEMENTS PLAN	27
ROTATIONNELS ET IRROTATIONNELS	
I.1.6.1.1/ECOULEMENT RECTILIGNE.....	27
I.1.6.1.2/ECOULEMENT CURVILIGNE.....	28
I.1.7/ECOULEMENTS POTENTIELS ET ECOULEMENTS.....	30
CONSERVATIFS	
I.1.7.1/MOUVEMENT A POTENTIEL DES ACCELERATIONS..	30
THEOREME DE LAGRANGE	
I.1.7.2/SIGNIFICATION ENERGETIQUE DES EQUATIONS..	31
D'EULER	
I.1.7.2.1/MOUVEMENT PERMANENT THEOREME.....	33
THEOREME DE BERNOULLI	
I.2/HYDRODYNAMIQUE DU LIQUIDE REEL.....	35
I.2.1/EQUATIONS GENERALES DU MOUVEMENT D'UN LIQUIDE..	35
REEL	
I.2.2/CAS PARTICULIERS DE SIMPLIFICATION.....	44
DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES	

II./INTRODUCTION A LA THEORIE DES TURBOMACHINES	46
II.1/GENERALITES.....	47
II.2/TRIANGLES DES VITESSES.....	49
II.3/PUISSANCE ET HAUTEUR DANS LA ROUE D'UNE TURBOMACHINE	50
II.4/HAUTEURS PERTES RENDEMENTS	52
II.5/COURBES CARACTERISTIQUES.....	55
II.5.1/REGIMES DE FONCTIONNEMENT.....	56
II.5.2/COURBES CARACTERISTIQUE DES POMPES.....	57
II.5.3/COURBES CARACTERISTIQUES DES TURBINES.....	59
III/ANALYSE PHYSIQUE ET MATHEMATIQUE DE L'ECOULEMENT.....	63
MERIDIONAL.	
IV/PROCEDRES ET TECHNIQUES NUMERIQUES.....	83
IV.1/APPROXIMATION DES FONCTIONS.....	84
IV.1.1/APPROXIMATION PAR INTERPOLATION.....	85
IV.1.1.1/DEFINITIONS.....	85
IV.1.1.2/INTERPOLATION PAR LES FONCTIONS.....	86
SPLINE	
IV.1.1.3/CALCUL DE LA FONCTION SPLINE CUBIQUE...	87
IV.1.1.4/PROPRIETE FONDAMENTALE DES FONCTIONS...	91
SPLINE	
IV.1.1.5/CALCUL DES DERIVERS A PARTIR DES	92
FONCTIONS SPLINE CUBIQUE	
IV.1.1.6/CALCUL DES INTEGRALES PAR LES	93
FONCTIONS SPLINE CUBIQUE	
IV.1.1.7/L'APPROXIMATION INVERSE.....	96
IV.2/METHODES DE RESOLUTION NUMERIQUE PAR PAS DES	97
EQUATIONS DIFFERENTIELLES	
IV.2.1/LA METHODE D'EULER.....	97
IV.2.2/LA METHODE DE RUNGE-KUTTA.....	98
(DU SECOND ORDRE).	
IV.3/ETAPES ET PROCEDURE DE CALCUL DU PROGRAMME.....	101
V/EXPERIMENTATION NUMERIQUE.....	108
CONCLUSIONS.....	127
ANNEXE A LISTE DES SYMBOLES UTILISES (CHAP .III)	129
ANNEXE B VITESSES SUR L'INTRADOS ET L'EXTRADOS DE L'AUBE	133
ANNEXE C VISUALISATION DES SURFACES DE COURANT ET DU PLAN	137
MERIDIONAL	
ANNEXE D SECTIONS DE LA MECANIQUE DES FLUIDES	140
ANNEXE E PROGRAMME	142

INTRODUCTION

INTRODUCTION

Le but du présent projet est l'analyse de l'écoulement méridional à l'intérieur d'une turbomachine.

La technique utilisée à cet effet reste simple dans son utilisation puissante par ses résultats. Elle repose sur le principe suivant:

Un maillage est tracé à partir d'un ensemble de lignes quasi-orthogonales qui restent fixes tout le long du calcul (d'où simplicité) et de lignes de courant, qui elles, varient au fur et à mesure pour atteindre la convergence souhaitée.

L'utilisation des techniques numériques diverses est nécessaire pour l'aboutissement à nos objectifs :

- * Interpolation numérique par les fonctions SPLINE
- * Lissage de courbes
- * Résolution des équations différentielles
- * Résolution de systèmes d'équations linéaires

L'analyse de l'écoulement méridional est à même de fournir des informations sur l'état de l'écoulement en n'importe quel point, d'où utilité pour connaissance des zones à hauts risques de cavitation, redésign des profils de la roue voire de l'aube.

Les hypothèses simplificatrices prises en compte dans l'analyse résident dans le fait que l'on suppose que le fluide est parfait, hypothèse quant à elle nécessaire pour faciliter la discrétisation des équations d'écoulement.

*I EQUATIONS GENERALES DU MOUVEMENT
D'UN FLUIDE*

- . EQUATIONS D'EULER*
- . EQUATIONS DE NAVIER-STOKES*

INTRODUCTION

L'hydrodynamique étudie le mouvement des liquides en tenant compte des forces qui lui donnent naissance.

On se propose donc d'établir les relations entre les positions des particules fluides, le temps et les forces qui interviennent. On peut utiliser, à cet effet la méthode d'Euler:

Cette méthode consiste à déterminer, en fonction du temps et des forces agissantes et pour chaque point de la masse fluide, la vitesse \vec{V} , la pression P et la masse volumique ρ des particules fluides qui viennent successivement passer par ce point.

Comme la vitesse \vec{V} d'une particule est entièrement définie par ses trois composantes u, v, w on devra donc disposer de cinq équations permettant d'obtenir u, v, w, P et ρ en fonction de x, y, z, t et des composantes des forces agissant sur la particule considérée.

Parmi les forces en cause, les forces de viscosité n'interviennent que pour les liquides réels et non pour les liquides parfaits.

Cette remarque nous conduit donc à étudier successivement:

- 1'Hydrodynamique du liquide parfait
- 1'Hydrodynamique du liquide réel.

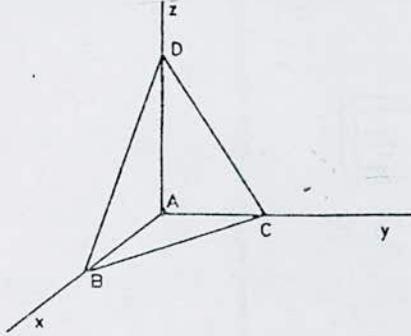
I-1)-HYDRODYNAMIQUE DU LIQUIDE PARFAIT:

- 1- Un système de trois équations générales du mouvement qu'on appelle les équations d'Euler.
- 2- Une équation caractéristique du fluide.
- 3- L'équation de continuité.

I-1-1)-EQUATIONS GENERALES DU MOUVEMENT

EQUATION D'EULER

Le liquide étant supposé parfait la pression en chaque point est unique (valeur unique) et parfaitement définie; en effet comme il n'y a pas de frottements intérieurs, il n'y a pas de composante tangentielle de la pression sur un élément plan, composante tangentielle qui varierait avec l'orientation de l'élément plan et ferait, en définitive, varier la pression en un point avec sa direction autour de ce point. La pression est donc constante dans toutes les directions autour d'un point.



$$\text{aire BCD} = d\omega$$

$$\text{aire ACD} = d\omega_x$$

$$\text{aire BDA} = d\omega_y$$

$$\text{aire CAB} = d\omega_z$$

Soient α , β et γ les angles que fait la normale à BCD respectivement avec les 3 axes A_x , A_y et A_z

$$d\omega_x = d\omega \cos(\alpha)$$

$$d\omega_y = d\omega \cos(\beta)$$

$$d\omega_z = d\omega \cos(\gamma).$$

Désignons par p la pression qu'on peut admettre constante en tout point de la surface infiniment petite $d\omega$.

La pression totale sur $d\omega$ sera $dP = p d\omega$.

Soient p_x , p_y , p_z , dP_x , dP_y , dP_z les éléments homogènes sur les autres faces du tétraèdre élémentaire ABCD.

$$\begin{cases} dP_x = p_x d\omega_x \\ dP_y = p_y d\omega_y \\ dP_z = p_z d\omega_z \end{cases}$$

dP , dP_x , dP_y , dP_z sont normales aux faces du tétraèdre sur lesquelles elles s'appliquent.

En appliquant le principe de d'Alembert , le tétraèdre élémentaire ABCD est en équilibre sous l'action des forces suivantes :

- Les pressions que nous avons définies
- Son poids
- Les forces d'inertie s'il y'a mouvement.

Les pressions sont des infiniments petits de l'ordre des surfaces. Le poids (mg) et les forces d'inertie ($-m \gamma$) sont des infiniments petits de l'ordre des volumes, on peut donc les négliger devant les pressions ce qui revient à écrire que les pressions sur les quatre faces du tétraèdre se font équilibrer .

En projetant l'équation d'équilibre des pressions sur l'axe Ax il vient :

$$-dP \cos(\alpha) + dP_x = 0$$

ou encore:

$$p d\omega \cos(\alpha) = p_x d\omega_x$$

et

$$d\omega \cos(\alpha) = d\omega_x$$

D'où:

$$p = p_x$$

De la même manière , on aura :

$$p = p_y$$

$$p = p_z$$

D'où:

$$p = p_x = p_y = p_z$$

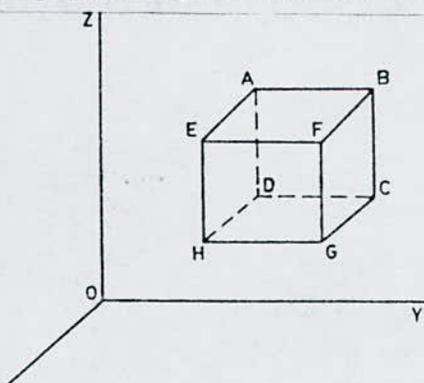
Rapprochons indéfiniment le plan BCD du point A en le maintenant parallèle à lui même. A la limite lorsque le plan BCD contient A , les pressions p_x , p_y , p_z , p toujours égales entre elles , deviennent les pressions du point A dans quatre directions normales aux faces du tétraèdre. Les directions A_x , A_y , et A_z ayant été choisies arbitrairement , on peut donc énoncer le théorème fondamental suivant :

Dans un liquide de fluidité parfaite, en équilibre, ou en mouvement la pression en un point est la même dans toutes les directions autour de ce point. La pression est donc une grandeur scalaire qui ne dépend que de la position du point et non de l'orientation.

En hydrostatique, on établit les équations d'équilibre d'un parallélépipède élémentaire pris dans une masse liquide au repos, c'est-à-dire soumis à l'action :

- a- des forces extérieures (forces de volume)
- b- des pressions latérales (forces de surface)

Considérons le parallélépipède représenté sur la figure ci-dessous



Si ρ est la masse volumique du fluide la masse du parallélépipède est $\rho dx dy dz$. Ecrivons les conditions d'équilibre de ce parallélépipède. Les forces agissant sur lui sont :

- 1- les forces extérieures
- 2- les pressions sur les six faces.

* Les forces extérieures

$$\rho \vec{F} \begin{cases} \rho X dx dy dz \\ \rho Y dx dy dz \\ \rho Z dx dy dz \end{cases}$$

X, Y et Z les sommes respectives, des composantes suivant OX, OY, OZ des forces extérieures agissant sur la masse fluide et rapporté à l'unité de masse (X, Y, Z ont les dimensions $L T^{-2}$ c'est-à-dire des dimensions d'accélération).

* Pression sur les six faces

Elles sont parallèles aux axes , on peut donc en faire immédiatement les sommes suivant les trois directions OX, OY, OZ. La somme suivant OX est égale à la somme des pressions s'exerçant sur les faces ABCD et EFGH.

Soit p la pression en A .

Comme de A en E , seul x varie la pression en E est égale à :

$$P + \frac{\partial P}{\partial x} dx .$$

La somme algébrique de ces deux pressions prises suivant OX est donc:

$$P - (P + \frac{\partial P}{\partial x} dx) = - \frac{\partial P}{\partial x} dx .$$

La somme des pressions s'exerçant sur les deux faces considérées perpendiculaires à OX est , par suite , égale à :

$$- \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz$$

On trouverait de même :

$$\text{suivant OY : } - \frac{\partial P}{\partial y} dy dz dx$$

$$\text{suivant OZ : } - \frac{\partial P}{\partial z} dz dx dy$$

La condition d'équilibre sur OX (projection) s'écrit donc :

$$\text{Forces extérieures} - \text{pressions} = 0$$

$$\text{D'où } \rho_x = \frac{\partial P}{\partial x}$$

En projetant sur les deux autres axes , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = X \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = Y \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = Z \end{array} \right. \quad \text{Equation d'équilibre de l'hydrostatique}$$

ou $\vec{F} = \frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} P$

En hydrodynamique , il suffit donc d'ajouter au second membre la force d'inertie par unité de masse , c'est à dire , au signe près l'accélération absolue , soit $-\vec{\gamma}$, ce qui conduit à l'équation fondamentale :

$$\frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} P = \vec{F} - \vec{\gamma} \quad \text{Equation générale du mouvement ou équation d'Euler}$$

Cette équation vectorielle projetée sur les axes fournit les trois équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = X - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = Y - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = Z - u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial t} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Equations générales} \\ \text{du mouvement ou} \\ \text{Equations d'Euler (1)} \end{array}$$

Soit $\vec{\Omega}(\epsilon, \eta, \xi)$

Ce vecteur $\vec{\Omega}$ est appelé le vecteur tourbillon

Soit un vecteur quelconque $\vec{u} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ alors son rotationnel sera

exprimé par:

$$\text{rot } \vec{u} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

$$\text{rot } \vec{u} \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Omega} \begin{cases} \epsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{cases}$$

Soit le vecteur vitesse $\vec{V} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ il s'écrira:

$$\vec{V} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}$$

son rotationnel sera donné par:

$$\text{rot } \vec{V} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k}$$

D'où

$$\boxed{\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{V}}$$

Le vecteur tourbillon est donc le vecteur de la rotation instantanée que prendrait la particule fluide considérée si, à cet instant, elle était brusquement solidifiée, la masse de fluide qui l'entoure étant anéantie.

Soit $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs quelconques

Alors

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = (Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2) \vec{i} + (Z_1 X_2 - X_1 Z_2) \vec{j} + (X_1 Y_2 - Y_1 X_2) \vec{k}$$

Considérons maintenant le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ et le vecteur vitesse \vec{v}

$$\vec{\Omega} \begin{pmatrix} \epsilon \\ \eta \\ \xi \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

on a alors :

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = (\eta w - \xi v) \vec{i} + (\xi u - \epsilon w) \vec{j} + (\epsilon v - \eta u) \vec{k}$$

Or

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \vec{\Omega} \wedge \vec{V} &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cdot w - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot v \right] \vec{i} \\ &+ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot u - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cdot w \right] \vec{j} \\ &+ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cdot v - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cdot u \right] \vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} \wedge \vec{V} &= \frac{1}{2} \left\{ \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) w - \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) v \right] \vec{i} \right. \\ &+ \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) u - \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) w \right] \vec{j} \\ &+ \left. \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) v - \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) u \right] \vec{k} \right\} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{V} &= \left\{ \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) w - \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) v \right] \vec{i} \right. \\ &+ \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) u - \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) w \right] \vec{j} \\ &+ \left. \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) v - \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) u \right] \vec{k} \right\} \end{aligned}$$

ou encore

$$2 \vec{\Omega} \wedge \vec{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} w - \frac{\partial v}{\partial z} w - \frac{\partial v}{\partial x} v + \frac{\partial u}{\partial y} v \\ \frac{\partial v}{\partial x} u - \frac{\partial u}{\partial y} u - \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial w}{\partial x} w \\ \frac{\partial u}{\partial z} v - \frac{\partial w}{\partial x} v - \frac{\partial w}{\partial y} u + \frac{\partial v}{\partial z} u \end{bmatrix}$$

Exprimons maintenant le $\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} \right)$, \vec{V} étant le vecteur vitesse défini comme précédemment :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \frac{V^2}{2} = \begin{bmatrix} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} \\ u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial y} \\ u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

D'où $\overrightarrow{\text{grad}} \frac{V^2}{2} + 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{V}$ donne lieu à l'expression :

$$\begin{bmatrix} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

De plus $\vec{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial t} \end{pmatrix}$

D'où l'expression suivante des 3 formules:

$$\vec{\gamma} \begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} + 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v} \quad (*)$$

On peut rapprocher de cette équation celle qui donne la loi de composition des accélérations dite formule de CORIOLIS (1835)

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r \quad (**)$$

où :

$\vec{\gamma}_a$: Accélération absolue

$\vec{\gamma}_r$: Accélération relative (par rapport aux axes mobiles)

$\vec{\gamma}_e$: Accélération du point coïncident (accélération d'entraînement)

\vec{v}_r : Vitesse relative

$\vec{\omega}$: vecteur de la rotation instantanée qui fait coïncider les axes fixes avec les axes mobiles

Le terme $2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$ accélération complémentaire ou accélération de CORIOLIS.

Si les axes mobiles sont animés par rapport au trièdre de référence de la vitesse \vec{v} , l'accélération relative est :

$$\vec{\gamma}_r = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

Si, en outre, le vecteur de la rotation instantanée $\vec{\omega}$ est égal au vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$, l'accélération d'entraînement $\vec{\gamma}_e$ est l'accélération centrifuge, soit

$$\vec{\gamma}_e = \text{grad} (v^2/2)$$

et l'accélération de CORIOLIS s'écrit :

$$\vec{\gamma}_c = 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

La formule (*) s'écrit alors

$$\vec{\gamma}_a = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} + 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

qui est identique à la formule (*).

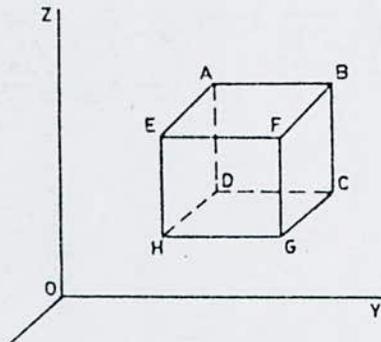
I-1-2)-EQUATION CARACTERISTIQUE

Pour un liquide supposé incompressible l'équation s'écrit:

$$\rho = \text{cte} \quad (2)$$

I-1-3)-EQUATION DE CONTINUITÉ

C'est celle qui exprime que le fluide reste continu, c'est-à-dire qu'il ne peut y'avoir dans aucune partie du fluide ni apport extérieur, ni prélèvement de matière; la masse se conserve au cours de l'écoulement (sauf cas de la "cavitation" exclu pour notre part).



Etablissons l'équation pour un fluide parfait; pour ce faire considérons la figure ci-dessus et adoptons le raisonnement suivant :

Pendant dt il entre par la face ABCD une masse de fluide égale à :

$$dy dz u \rho dt = \rho u dy dz dt$$

Pendant le même temps , il sort par la face EFGH une masse de fluide égale à celle qui est entrée augmentée de sa différentielle partielle par rapport à X .La masse qui sort est donc :

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right] dy dz dt$$

La différence des deux expressions :

$$- \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz dt$$

représente l'accroissement des masses du parallélépipède correspondant au mouvement du fluide à travers les deux faces envisagées.

On fait le raisonnement similaire pour déterminer l'accroissement de masse correspondant au mouvement à travers les autres faces et établir deux autres formules analogues, de sorte que l'accroissement total de la masse de fluide dans le parallélépipède pendant dt est :

$$-\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz dt$$

Puisque la masse du parallélépipède est restée constante pendant le temps dt , cet accroissement de masse est obligatoirement égal à l'accroissement de masse volumique multiplié par le volume soit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$$

D'où

$$-\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt$$

Et donc

$$-\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0}$$

C'est l'équation de continuité pour un fluide parfait.

Pour un liquide incompressible l'équation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

devient :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0} \quad \text{ou} \quad \boxed{\text{div } \vec{V} = 0} \quad (3)$$

En définitive pour un fluide parfait supposé incompressible , les cinq équations cherchées sont :

- Les trois équations d'Euler (1)
- L'équation caractéristique (2)
- L'équation de continuité (3)

I-1-4)-EQUATION DU MOUVEMENT LE LONG DE LA TRAJECTOIRE

Reprenons les équations d'Euler

$$\frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} P = \vec{F} - \vec{\gamma} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} = X - \frac{d^2 x}{dt^2} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Y} = Y - \frac{d^2 y}{dt^2} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Z} = Z - \frac{d^2 z}{dt^2} \end{array} \right.$$

Proposons nous d'établir la relation existant entre $X, Y, Z, x, y, z, P, \rho$ et t le long de la trajectoire d'une molécule fluide . A cet effet considérons les coordonnées de deux points M et M' infiniment voisins situés sur la trajectoire de la molécule fluide qui passe en M au temps t et en M' au temps $t+dt$.

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } M' \begin{pmatrix} x+dx \\ y+dy \\ z+dz \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } \begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} = X - \frac{d^2 x}{dt^2} = X - \frac{du}{dt} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Y} = Y - \frac{d^2 y}{dt^2} = Y - \frac{dv}{dt} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Z} = Z - \frac{d^2 z}{dt^2} = Z - \frac{dw}{dt} \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} dx = X dx - \frac{d^2 x}{dt^2} dx = X dx - \frac{du}{dt} dx \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Y} dy = Y dy - \frac{d^2 y}{dt^2} dy = Y dy - \frac{dv}{dt} dy \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Z} dz = Z dz - \frac{d^2 z}{dt^2} dz = Z dz - \frac{dw}{dt} dz \end{cases}$$

$$\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial P}{\partial X} dx + \frac{\partial P}{\partial Y} dy + \frac{\partial P}{\partial Z} dz \right] = \left\{ \left[X dx + Y dy + Z dz \right] - \left[\frac{du}{dt} dx + \frac{dv}{dt} dy + \frac{dw}{dt} dz \right] \right\}$$

$$\text{soit } P = f(X, Y, Z, t) \text{ alors } dP = \frac{\partial P}{\partial X} dx + \frac{\partial P}{\partial Y} dy + \frac{\partial P}{\partial Z} dz + \frac{\partial P}{\partial t} dt$$

$$\text{D'où } dP - \frac{\partial P}{\partial t} dt = \frac{\partial P}{\partial X} dx + \frac{\partial P}{\partial Y} dy + \frac{\partial P}{\partial Z} dz$$

$$\text{et } \frac{1}{\rho} \left[dP - \frac{\partial P}{\partial t} dt \right] = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial P}{\partial X} dx + \frac{\partial P}{\partial Y} dy + \frac{\partial P}{\partial Z} dz \right]$$

On a aussi :

$$\frac{dx}{dt} = u \quad , \quad \frac{dy}{dt} = v \quad , \quad \frac{dz}{dt} = w$$

D'où

$$\frac{1}{\rho} \left[dP - \frac{\partial P}{\partial t} dt \right] = \left\{ X dx + Y dy + Z dz - \left[\frac{du}{dt} dx + \frac{dv}{dt} dy + \frac{dw}{dt} dz \right] \right\}$$

Devient :

$$\frac{1}{\rho} \left[dP - \frac{\partial P}{\partial t} dt \right] = X dx + Y dy + Z dz - \left[u du + v dv + w dw \right]$$

Si V est la vitesse de la molécule qui passe en $M(x,y,z)$ au temps t alors V^2 s'écrit :

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2 \Rightarrow 2 V dV = 2 u du + 2 v dv + 2 w dw$$

donc

$$V dV = u du + v dv + w dw$$

et l'équation précédente sera exprimée comme suit :

$$\frac{1}{\rho} \left[dP - \frac{\partial P}{\partial t} dt \right] = X dx + Y dy + Z dz - V dV$$

I-1-5)-EQUATION GENERALE DU MOUVEMENT PERMANENT

I-1-5-1)-DÉFINITION D'UN MOUVEMENT PERMANENT

Le mouvement d'un fluide est permanent quand en un point quelconque de la masse en mouvement les molécules qui se succèdent en ce point sont toutes animées de la même vitesse, sont soumises à la même pression et ont la même masse volumique.

Un tel mouvement est très fréquent en hydraulique (Écoulement dans une conduite ou canal en dehors des circonstances exceptionnelles comme lors de l'ouverture ou de la fermeture brusque d'une vanne, écoulement dans une rivière en dehors des périodes d'étiages ou crues, "écoulements dans les machines hydrauliques sous charges constantes et débits constants").

Il ne faut pas confondre *Régime Permanent* avec *Régime Uniforme*, dans le premier la vitesse peut en effet varier tout le long de la trajectoire d'une molécule liquide, alors qu'elle reste constante dans le second.

Le régime "Permanent" exprime en quelque sorte une constance dans le "TEMPS" alors que le régime "Uniforme" exprime une constance dans "l'ESPACE".

Si V , P , et ρ varient en un point en fonction du temps le régime est dit variable

Mouvement permanent

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

Et l'équation $\frac{1}{\rho} (dp - \frac{\partial P}{\partial t}) = X dx + Y dy + Z dz - V dv$ s'écrit:

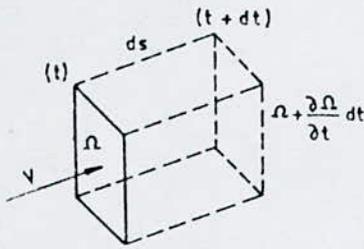
$$\frac{1}{\rho} dp = X dx + Y dy + Z dz - V dv$$

I-1-5-2)-CAS D'UN LIQUIDE INCOMPRESSIBLE DANS LE CHAMPS

DE LA PESANTEUR:

THEOREME DE DANIEL-BERNOULLI

Examinons le cas particulier et fréquent d'un écoulement liquide où toutes les vitesses sont normales à une section transversale plane du courant et égales entre elles; et exprimons son équation de continuité. Pour ce faire, considérons la figure ci-dessous:



\vec{v} : vitesse commune des molécules traversant, au temps t , la section plane dont l'aire à cet instant a pour valeur Ω

Q : débit à travers la section Ω , alors $Q = v \Omega$ (volume de liquide qui traverse cette section dans l'unité de temps).

Le volume qui entre dans la section Ω pendant le temps dt est donc égal à $Q dt$.

Celui qui pendant le même temps, sort par la section infiniment voisine et distante de la première de ds est :

$$Q dt + \frac{\partial Q}{\partial s} ds dt$$

d'où la différence des deux expressions est :

$$- \left[Q dt + \frac{\partial Q}{\partial s} ds dt \right] + \left[Q dt \right] = - \frac{\partial Q}{\partial s} ds dt$$

Cette différence $(- \frac{\partial Q}{\partial s} ds dt)$ représente l'accroissement de volume entre les deux sections.

Puisque la masse volumique ρ est supposée constante, cet accroissement de volume ne peut être égal qu'au produit de dS par l'accroissement de section pendant le temps dt , ce qui donne la relation:

$$-\frac{\partial Q}{\partial S} dS dt = \frac{\partial Q}{\partial t} dt dS$$

Autrement dit le débit varie dans l'espace (le long de S) pendant que la section varie dans le temps.

L'équation précédente s'écrit encore:

$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial S} = 0$	qui représente l'équation de continuité (liquide incompressible)
---	--

Le régime étant permanent $\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$

Il en résulte $\frac{\partial Q}{\partial S} = 0$

$$Q(s) = C^{te} \text{ (débit constant tout le long du liquide considéré)}$$

La permanence du mouvement qui est une constance dans le temps entraîne ici la constance du débit dans l'espace.

Soit maintenant un écoulement quelconque supposé incompressible dans le champ de pesanteur, son équation caractéristique est :

$$\rho = C^{te}.$$

Le liquide étant supposé soumis à la seule action de la pesanteur

$$\text{on a : } \begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \\ Z = -g \end{cases}$$

$$\text{D'où } \frac{1}{\rho} dP = X dx + Y dy + Z dz - V dv = -g dz - V dv$$

$$\text{Et } \int \frac{1}{\rho} dP = \int -g dz - \int V dv$$

$$\rightarrow \frac{1}{\rho} P = -g z - \frac{V^2}{2} + C^{te}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\rho} P + g z + \frac{V^2}{2} = C^{te}$$

$$\rightarrow g z + \frac{1}{\rho} P + \frac{V^2}{2} = C^{te}$$

$$\rightarrow z + \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = C^{te}$$

$$\rightarrow z + \frac{P}{\omega} + \frac{V^2}{2g} = C^{te} \quad (\text{avec } \omega = \rho g)$$

$$\rightarrow \frac{P}{\omega} + \frac{V^2}{2g} = C^{te} \quad (\text{avec } z + \frac{P}{\omega} = \frac{P^*}{\omega})$$

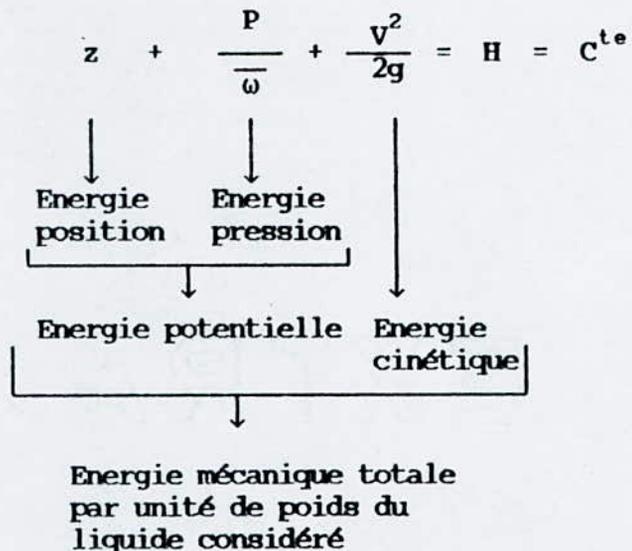
$$(\rho g z + P = P^*)$$

Le terme $\frac{V^2}{2g}$ représente la hauteur représentative de la vitesse.

C'est la hauteur de laquelle devrait tomber la molécule liquide, en chute libre dans le vide, pour acquérir la vitesse V le long de la trajectoire d'une molécule liquide .

$$\boxed{z + \frac{P}{\omega} + \frac{V^2}{2g} = H = C^{te}}$$

Cette équation reste applicable si au lieu de considérer la trajectoire d'une molécule liquide on considère un filet liquide:



L'énergie mécanique totale par unité de poids se conserve le long d'un filet liquide de fluidité parfaite. Il y a transformation d'énergie potentielle en énergie cinétique et réciproquement.

I-1-6)-ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS ET IRROTATIONNELS:

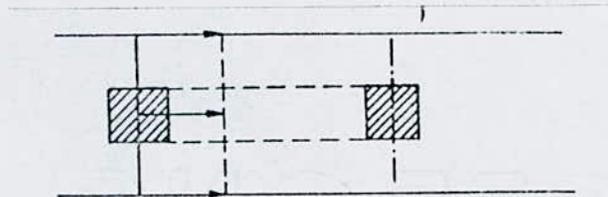
L'existence du vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ permet de définir deux grandes catégories d'écoulements:

- 1- Les écoulements rotationnels pour lesquels le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ n'est pas nul ou $\text{Rot } \vec{V} \neq 0$
- 2- Les écoulements irrotationnels pour lesquels le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ est nul en tous les points de l'écoulement ou $\text{Rot } \vec{V} = 0$.

I-1-6-1)-EXEMPLES D'ÉCOULEMENTS PLANS ROTATIONNELS ET IRROTATIONNELS:

I-1-6-1-1)-ÉCOULEMENT RECTILIGNE:

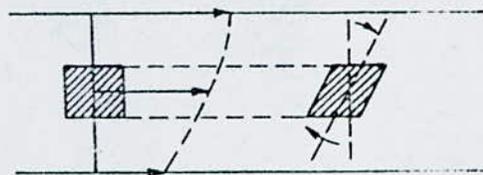
Supposons sur toute la largeur du courant une distribution uniforme des vitesses



- Écoulement plan rectiligne irrotationnel

On voit nettement qu'une particule de forme rectangulaire reste rectangulaire durant l'écoulement, on a donc affaire à un pur mouvement de *translation* et l'écoulement est *irrotationnel*.

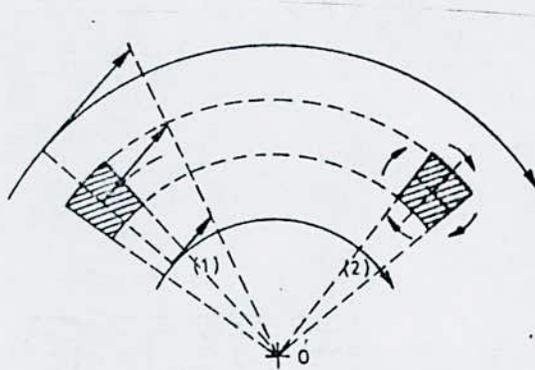
Si maintenant on suppose une distribution inégale des vitesses dans une section transversale du courant il est visible que la particule rectangulaire va subir une rotation d'ensemble. L'écoulement est donc *rotationnel*.



- Écoulement plan rectiligne rotationnel

I-1-6-1-2)-ÉCOULEMENT CURVILIGNE:

Supposons des trajectoires circulaires et concentriques autour de o



Écoulement curviligne plan rotationnel

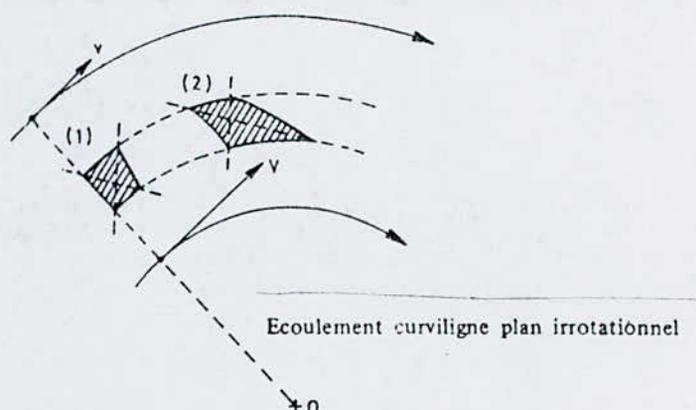
Dans le premier cas supposons que les vitesses varient en raison directe de la distance à o.

Soit $V = K r = \omega r$

On a donc affaire à un mouvement de rotation en bloc et la particule en (2) a la même forme qu'en (1) mais tous ses côtés ont pivoté dans le même sens, ce qui caractérise la *rotation élémentaire*; on a donc affaire à un écoulement *rotationnel*.

Supposons maintenant que la distribution des vitesses le long d'un rayon vecteur soit l'inverse du cas précédent, les plus fortes vitesses se rencontrant du côté intérieur de la courbe.

Au cours de son déplacement de (1) en (2) une particule limitée en (1) par deux lignes de courant et deux normales aux lignes se déforme, mais il y'a rotation de sens opposé pour les côtés parallèles et normaux aux vitesses; le côté le plus proche du centre de rotation avance plus vite que l'autre, la particule est devenue un losange et pour une distribution convenable des vitesses on conçoit que les diagonales de la particule restent parallèles au cours du déplacement de (1) en (2). On n'a plus affaire à une rotation de la particule sur elle même mais à une *déformation angulaire* ou *DISTORSION*. L'écoulement considéré peut donc être *irrotationnel* sous réserve d'une distribution convenable des vitesses.



En somme on peut très bien voir quelque chose *tourner* sans que le mouvement soit *ROTATIONNEL* pour autant.

Les écoulements *irrotationnels* présentent une grande importance en Hydraulique. En effet nous démontrerons plus loin que ces écoulements s'effectuent sans aucun échange d'énergie entre les particules liquides (nous les appellerons pour cette raison des *écoulements conservatifs*). On conçoit d'ailleurs qu'un échange d'énergie entre les particules situées sur des trajectoires voisines ne puisse se réaliser que si des forces excentrées (frottements ou forces d'inerties) produisent un travail; simultanément de telles forces provoqueront une *rotation, élémentaire* des particules.

Cette rotation élémentaire caractérisée par le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$, se rencontrera donc chaque fois que l'écoulement considéré entrainera une dissipation d'énergie (perte de charge) ou une transformation de l'énergie de la veine liquide en énergie mécanique ou inversement (Turbines Hélices Pompes). Au contraire on cherchera à réaliser un écoulement irrotationnel ($\vec{\Omega} = 0$) lorsqu'on désirera conduire le liquide avec des pertes nulles ou les plus faibles possibles, ce qui impliquera, notamment, que les forces de viscosité seront négligeables.

I-1-7)-ÉCOULEMENTS POTENTIELS ET ÉCOULEMENTS CONSERVATIFS

I-1-7-1)-MOUVEMENT à POTENTIEL DES ACCÉLÉRATIONS

THÉORÈME DE LAGRANGE

Soit l'équation d'Euler:

$$\frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} p = \vec{F} - \vec{\gamma}$$

Si les forces \vec{F} dérivent d'un potentiel U et si le fluide est incompressible ($\rho = c^{te}$) cette équation s'écrit:

$$\vec{F} = \vec{\text{grad}} U$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} p = \vec{\text{grad}} U - \vec{\gamma}$$

or $\rho = c^{te} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} p = \vec{\text{grad}} \left(\frac{p}{\rho} \right)$

d'où $\vec{\text{grad}} \left(\frac{p}{\rho} \right) - \vec{\text{grad}} U = \vec{\gamma}$

Donc on a: $\vec{\text{grad}} \left(\frac{p}{\rho} - U \right) = \vec{\gamma}$

$$\vec{\text{grad}} \left(\frac{p}{\rho} - U \right) = \vec{\gamma}$$

$\vec{\gamma}$ dérive donc d'un potentiel Γ :

$$\Gamma = U - \frac{p}{\rho} + C^{te}$$

L'existence d'un potentiel pour les forces de volume entraîne l'existence d'un potentiel pour l'accélération même si le mouvement n'est pas permanent.

Il en résulte le théorème de LAGRANGE: si un mouvement provoqué par des forces qui dérivent d'un potentiel est irrotationnel à un moment donné il le restera toujours.

Exemples: forces de pesanteur $U = -g z$

$$\text{forces centrifuges } U = -\frac{\omega^2 r^2}{2}$$

I-1-7-2)-SIGNIFICATION ENERGETIQUE DES ÉQUATIONS D'EULER

$$\frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} p = \vec{F} - \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{\text{grad}} \frac{v^2}{2} - 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

$$\left(\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\text{grad}} \frac{v^2}{2} + 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v} \right)$$

Si les forces de volume \vec{F} dérivent d'un potentiel U et si le liquide est incompressible ($\rho = C^{te}$) on a:

$$\frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} p = \vec{\text{grad}} U - \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{\text{grad}} \frac{v^2}{2} - 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

groupons tous les termes sous le signe $\overrightarrow{\text{gradient}}$

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} - U \right) + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = - 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{V}$$

Posons $\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} - U = E$

$\frac{P}{\rho}$: Energie due à la pression par unité de masse du liquide (ce terme est proportionnel à la hauteur représentative de la pression $\frac{P}{\bar{\omega}}$ avec $\bar{\omega} = \rho g$)

$\frac{V^2}{2}$: Energie cinétique par unité de masse du liquide (ce terme est proportionnel à la hauteur représentative de la vitesse $V^2/2g$).

- U : représente l'énergie potentielle par unité de masse du liquide (fonction potentielle des forces; si par exemple l'écoulement s'effectue dans le champ de la pesanteur $U = - g z$, - U = g z représente l'énergie position par unité de masse du liquide).

$$E = \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} - U$$

représente l'énergie mécanique totale par unité de masse du fluide et l'équation d'Euler devient:

$$\overrightarrow{\text{grad}} E + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = - 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{V}$$

Cette équation relie le mouvement d'une masse fluide (Cinématique) à l'échange d'énergie qui en résulte (Energétique). Le vecteur tourbillon qui figure précisément dans cette relation fondamentale joue donc un rôle essentiel dans l'aspect énergétique de l'écoulement.

I-1-7-2-1) - MOUVEMENT PERMANENT THÉOREME DE BERNOULLI :

Si le mouvement est permanent $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

$$\text{D'où } \vec{\text{grad}} E + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

$$\text{devient } \vec{\text{grad}} E = -2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

On constate donc que dans le cas considéré d'un liquide parfait incompressible en mouvement permanent, l'énergie E d'une particule du liquide ne peut rester constante dans l'espace au voisinage d'un point qu'aux seuls points où le vecteur tourbillon est nul ou parallèle à la vitesse ($\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = 0$).

Mais l'énergie peut rester constante même si $\vec{\Omega}$ n'est pas nul, à condition d'intégrer l'équation ($\vec{\text{grad}} E = -2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$) le long d'une ligne où le vecteur $\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$ n'effectue aucun travail.

Ce vecteur $\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$ est perpendiculaire à la vitesse \vec{v} . Si donc on intègre l'équation le long de la trajectoire d'une molécule ou le long d'un filet liquide, le travail du vecteur $\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$ est nul et l'intégration donne :

$$E = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} - U = c^{te}$$

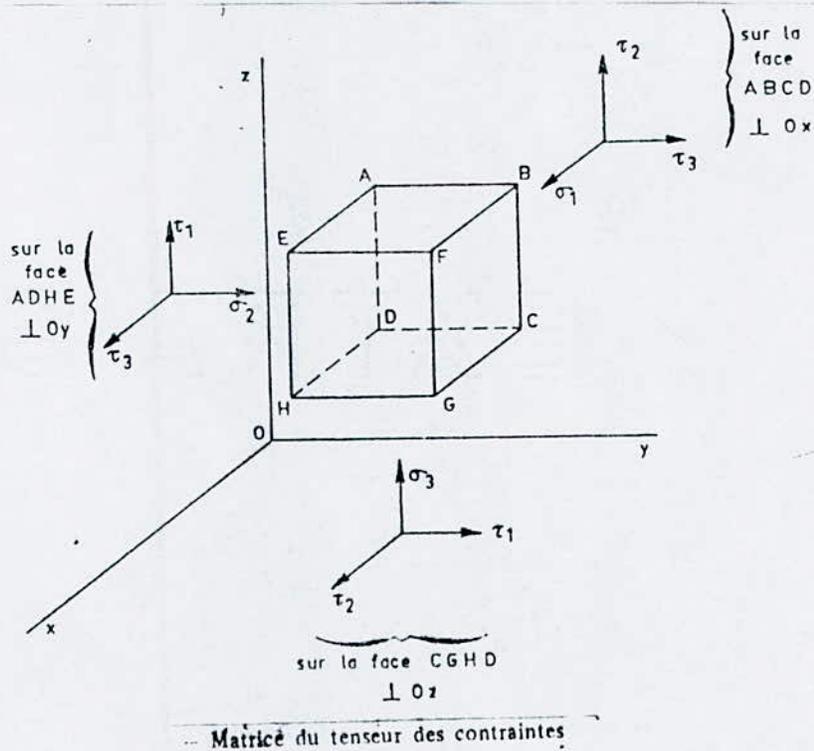
On retrouve ainsi le théorème de Bernoulli

Dans le cas d'un écoulement constitué par un ensemble de filets liquides dont les vitesses ne sont généralement pas parallèles la constante d'intégration change d'un filet à l'autre . Pour qu'elle soit la même pour tous les filets liquides constituant la masse en écoulement, il faut que $\vec{\Omega} = 0$, c'est-à-dire que l'écoulement considéré soit irrotationnel. L'énergie mécanique est alors constante dans tout l'écoulement.

I-2)-HYDRODYNAMIQUE DU LIQUIDE REEL

I-2-1)-EQUATIONS GENERALES DU MOUVEMENT D'UN LIQUIDE REEL

EQUATIONS DE NAVIER-STOKES



Ces équations s'obtiennent en écrivant l'équilibre du système des forces suivantes :

- 1/. Forces exterieures
- 2/. Pressions normales
- 3/. Forces d'inerties
- 4/. Forces de viscosité

Les trois premières catégories de forces ont conduit aux équations d'EULER

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \vec{F} - \vec{\gamma}$$

Il suffit d'ajouter à chacune de ces équations les composantes sur l'axe correspondant des forces de viscosité par unité de masse.

Considérons les projections sur l'axe ox :

1) composantes σ_1 :

Sur la face ABCD

$$\sigma_1 \, dy \, dz$$

Sur la face EFGH

$$-(\sigma_1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} \, dx) \, dy \, dz$$

Résultante :

$$-\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} \, dx \, dy \, dz$$

2) composante τ_2 :

Sur la face CGHD

$$\tau_2 \, dx \, dy$$

Sur la face ABCD

$$-(\tau_2 + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} \, dz) \, dx \, dy$$

Résultante :

$$-\frac{\partial \tau_2}{\partial z} \, dz \, dy \, dz$$

3) composante τ_3 :

Sur la face ADHE

$$\tau_3 \, dx \, dy$$

Sur la face BCGF

$$-(\tau_3 + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} dy) dx dz$$

Résultante :

$$-\frac{\partial \tau_3}{\partial y} dy dx dz$$

Les autres composantes sont perpendiculaires à ox et leurs projections sont nulles sur l'axe ox .

D'où la résultante des forces de viscosité projetée sur l'axe ox a pour expression :

$$- \left[\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} \right] dx dy dz ; (A)$$

les contraintes tangentielles sont proportionnelles aux vitesses de déformation angulaire . Les déformations angulaires correspondent donc à des glissements à l'intérieur de la particule.

(hypothèses de STOKES et NEWTON)

$$\text{Or } \left. \begin{aligned} \tau_1 &= -2\mu g_1 \\ \tau_2 &= -2\mu g_2 \\ \tau_3 &= -2\mu g_3 \end{aligned} \right\}$$

Avec

$$g_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$g_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$g_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Les contraintes normales σ_1 seront exprimées comme suit :

$$\sigma_1 = - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_2 = - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_3 = - 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

Les contraintes normales σ_1 sont des fonctions linéaires des vitesses de déformation linéaire, soit, en ne considérant que la contrainte visqueuse parallèle à ox :

$$\sigma_1 = a \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right]$$

La forme du second terme du second membre résulte de l'isotropie du fluide. Cette expression s'écrit également :

$$\sigma_1 = a \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] - \lambda \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_1 = (a + \lambda) \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right]$$

Posons $(a + \lambda) = - 2\mu$

Et $\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] = \theta$ (dilatation cubique)

Il vient que

$$\begin{cases} \sigma_1 = -2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda\theta \\ \sigma_2 = -2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \lambda\theta \\ \sigma_3 = -2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \lambda\theta \end{cases}$$

μ et λ sont des grandeurs caractéristiques du fluide et dépendent de l'état thermodynamique local; on les considère généralement comme constantes; μ est le coefficient de viscosité dynamique du fluide.

Pour un liquide supposé incompressible l'équation de continuité impose

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] = \text{div } \mathbf{V} = 0$$

Or

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] = \theta \rightarrow \theta = 0$$

D'où on retrouve la formulation précédente

$$\begin{cases} \sigma_1 = -2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_2 = -2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_3 = -2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

Ces résultats ne sont valables que pour de faibles vitesses de déformation .

Donc en remplaçant σ_1, τ_2, τ_3 par leurs valeurs dans l'équation

(A) on aura :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} (-2\mu \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (-2\mu g_3) + \frac{\partial}{\partial z} (-2\mu g_2) \\
 &= -2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[-2\mu \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[-2\mu \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] \right] \\
 &= -2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] - \mu \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] \\
 &= -2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right] - \mu \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \nu \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] - \nu \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right] \\
&\quad - \nu \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right] \\
&= -\mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \\
&= \left\{ -\mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] - \nu \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] - \nu \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v}{\partial y} \right] \right. \\
&\quad \left. - \nu \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial w}{\partial z} \right] \right\} \\
&= -\mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] - \nu \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] \\
&\rightarrow \frac{\partial \tau_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} = \left\{ -\mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \right. \\
&\quad \left. - \nu \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] \right\}
\end{aligned}$$

or $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ représente l'équation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{V} = 0$$

D'où

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} = -\mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]$$

Or :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u$$

$$\rightarrow \left[\frac{\partial \tau_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} \right] dx dy dz = -\mu \Delta u dx dy dz$$

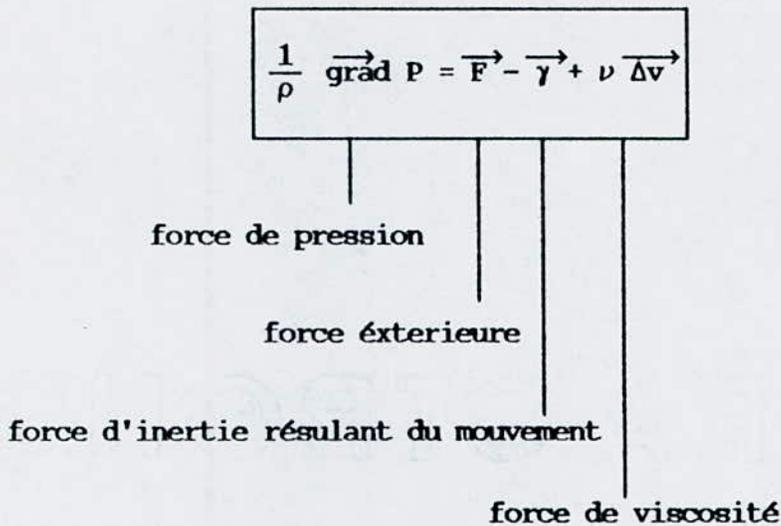
Il suffit donc d'adjoindre cette valeur à celles figurant au deuxième membre de la première équation d'EULER en remarquant que pour conserver l'homogénéité de l'équation, il convient de ramener cette force à l'unité de masse du fluide c'est à dire que son expression en définitive est:

$$\frac{\mu}{\rho} \Delta u = \nu \Delta u$$

On obtient ainsi la première des trois équations suivantes les deux autres s'en déduisant facilement :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = x - \frac{du}{dt} + \nu \Delta u \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = y - \frac{dv}{dt} + \nu \Delta v \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = z - \frac{dw}{dt} + \nu \Delta w \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P = \overrightarrow{F} - \overrightarrow{\gamma} + \nu \overrightarrow{\Delta v}$$



Si on savait intégrer les équations de NAVIER-STOKES compte tenu des conditions aux limites exprimées en fonction du temps, en particulier en tenant compte des forces de paroi, on pourrait résoudre analytiquement les problèmes d'hydrodynamique

Mais l'intégration de ces équations se heurte à des difficultés inextricables dès que les termes relatifs à la viscosité $\nu \Delta v$ et les termes relatifs à l'accélération (γ) sont du même ordre de grandeur; or c'est précisément ce qui se produit au voisinage des parois dans la plupart des écoulements que l'on rencontre dans la pratique.

On est donc le plus souvent obligé d'avoir recours à l'expérience pour faciliter l'étude des conditions d'écoulements.

I-2-2)-CAS PARTICULIER DE SIMPLIFICATION DES EQUATIONS
DE NAVIER-STOKES

- 1) Si $\nu = 0 \Rightarrow$ équation d'EULER des liquides parfaits.
- 2) Si $\nu = 0$ et $\vec{\gamma} = 0 \Rightarrow$ équations de l'hydrostatique.
- 3) Si le mouvement est rectiligne et uniforme $\vec{\gamma} = 0$ et $\Delta\vec{V} = 0$
 \Rightarrow Equations de l'hydrostatique et la pression dans toute la masse liquide varie suivant la loi hydrostatique.
- 4) Dans un tube de courant de "courbure négligeable", soit le plan xoy normal au vecteur vitesse \vec{V} et au vecteur accélération $\vec{\gamma}$.

En projection sur les axes ox et oy les équations de NAVIER-STOKES s'écrivent :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = X - \frac{du}{dt} + \nu \Delta u$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = Y - \frac{dv}{dt} + \nu \Delta v$$

Mais par hypothèse $u = v = 0$ et $\Delta u = \Delta v = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = X \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = Y$$

Dans la section considérée, c'est à dire dans une direction normale au vecteur vitesse d'un tube de courant de courbure négligeable la pression varie selon la loi hydrostatiaque.

5) Si l'écoulement est à potentiel des vitesses:

$$v = \vec{\text{grad}} \phi$$

$$\Delta v = \Delta \vec{\text{grad}} \phi = \vec{\text{grad}} \Delta \phi = 0 \quad (\Delta \phi = 0).$$

Les équations de NAVIER-STOKES se ramènent alors aux équations d'EULER applicables aux liquides parfaits autrement dit la viscosité n'intervient plus. L'écoulement d'un liquide visqueux à potentiel des vitesses est donc conservatif comme il a été démontré pour un liquide parfait cette conclusion est importante car elle permet d'étudier les écoulements à potentiel des vitesses d'un liquide réel sans tenir compte de leur viscosité; en utilisant notamment les méthodes d'étude des écoulements à potentiel.

*II INTRODUCTION A LA THEORIE
DES TURBOMACHINES*

II-1)-GENERALITES

Par machines hydrauliques nous entendons non seulement les turbomachines utilisées dans les installations hydrauliques mais d'une manière générale les turbomachines véhiculant un fluide quelconque ou actionnées par lui. Le terme de turbomachine semble avoir été dévolu par l'usage exclusivement aux machines constituées d'un ensemble de conduits, d'aubes, d'augets tournant autour d'un axe et réagissant sur le fluide en échangeant avec lui de l'énergie sans qu'il soit possible pour ces machines de définir une cylindrée ou un volume débité par tour. Cet échange d'énergie mécanique entre un moteur ou un récepteur et le fluide est le phénomène essentiel qui se produit dans la machine et ce sont les différentes formes de cet échange qui vont différencier les machines entre elles.

Si nous laissons de côté les machines volumétriques qui se caractérisent par leur principe mécanique (vis, palettes, cames, engrenages, pistons, membranes, etc.), les turbomachines se classent d'abord en turbines et en pompes selon qu'elles fournissent de l'énergie mécanique à un récepteur ou qu'elles sont alimentées par un moteur.

Selon la direction des filets fluides les machines seront radiales ou axiales. Sauf pour les machines axiales, selon le sens de l'écoulement elles pourront être centrifuges ou centripètes. Les pompes sont centrifuges et les turbines centripètes. Dans le cas des pompes, le type mixte intermédiaire entre l'écoulement radial et l'écoulement axial sera appelé hélico-centrifuge et dans le cas des turbines ce type sera la turbine Francis. L'analyse plus détaillée de l'écoulement dans la roue se fera à l'aide du triangle des vitesses.

Parmi les éléments permettant l'analyse globale de l'écoulement dans la roue se trouve le rapport de la variation de la pression et de l'énergie du fluide à la traversée de celle-ci. Ce rapport, appelé degré de réaction, sera une caractéristique importante de la roue.

Un autre critère utilisé pour différencier les types de machines (uniquement les turbines) est également celui du mode d'injection . On aura affaire à une turbine à injection totale ou partielle selon que le débit arrivant à la machine est réparti sur la totalité de la périphérie de la roue ou au contraire sur une fraction de celle-ci.

Les trois éléments hydrauliques essentiels d'une turbomachine hydraulique à injection totale sont tout d'abord la roue (ou quelquefois le rouet pour les pompes), ensuite du côté haute pression la bêche spirale (ou volute pour les pompes) dont un élément important est le distributeur (ou le diffuseur) et enfin le diffuseur ou aspirateur (bêche d'aspiration pour les pompes)(figII1)

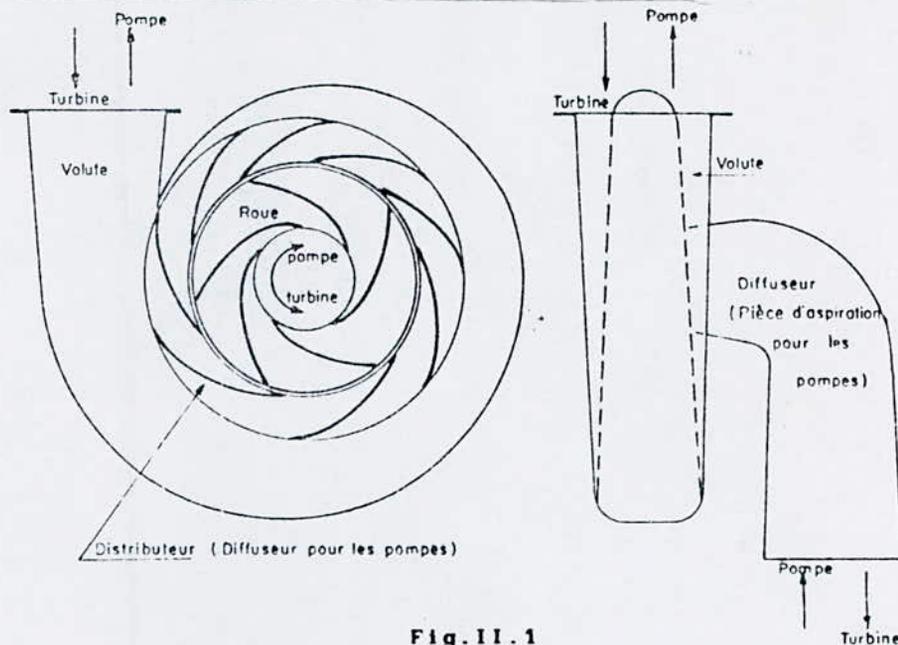


Fig.II.1

La roue est constituée dans le cas des roues radiales ou hélico-centrifuges (type Francis) par deux flasques et une ceinture et par des aubes. Dans le cas des roues axiales (Fig.II.1) le terme d'aubes est remplacé par celui de pâles et ces pâles sont montées, fixes ou orientables, sur un moyeu.

Au point de vue mécanique, outre les problèmes structurels posés par les éléments énumérés ci-dessus, il faudra étudier l'arbre, ses paliers et sa butée, les servomoteurs de commande et les vannes d'isolement.

Un autre problème important sera celui des systèmes de réglage et de régulation qui devront être étudiés compte tenu de tous les éléments en cause: turbomachine elle-même avec ses caractéristiques propres et celles de ses auxiliaires et caractéristiques du système dans lequel elle est insérée.

II-2)-TRIANGLE DE VITESSES

Si l'on considère un point matériel du fluide à l'intérieur de la roue et si on note sa vitesse absolue V , sa vitesse relative par rapport à la roue W et sa vitesse d'entraînement U ($U = \omega r$, r étant sa distance à l'axe et ω la vitesse de rotation de la roue), on peut écrire l'équation vectorielle :

$$\vec{V} = \vec{U} + \vec{W}$$

et représenter cette égalité par un triangle, appelé triangle des vitesses (Fig.II.2). Les triangles des vitesses à l'entrée et à la sortie de la roue présentent un intérêt particulier dans la théorie des turbomachines : l'indice 1 est attribué aux grandeurs d'entrée, l'indice 2 aux grandeurs de sortie.

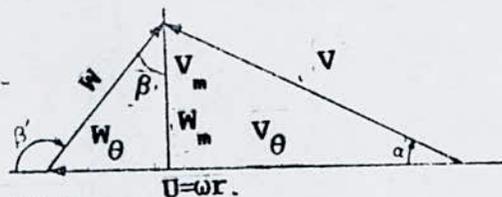


Fig. II.2

On appelle en outre α' et β' les angles à la base de ce triangle

$$\alpha' = (\vec{U}, \vec{V})$$

$$\beta' = (\vec{U}, \vec{W})$$

La projection de V sur U est notée V_θ et la hauteur du triangle est appelée V_m (ou W_m).

Les triangles des vitesses seront représentés sur un plan perpendiculaire à l'axe de la machine pour les roues radiales et sur un cylindre développé de même axe que la machine pour les roues axiales (Fig.II.2). Des systèmes de représentation conforme plus compliquée, sont utilisées pour les roues hélico-centrifuges ou Francis.

II-3)-PUISSANCE ET HAUTEUR DANS LA ROUE D'UNE TURBOMACHINE

Si l'on connaît les triangles des vitesses à l'entrée et à la sortie de la roue (ou au moins $U_1, U_2, V_{\theta 1}, V_{\theta 2}$) on peut calculer la puissance échangée entre le fluide et la roue de la machine et la variation de charge de l'écoulement à la traversée de la roue en appliquant le théorème d'Euler au fluide contenu à l'intérieur d'une surface de contrôle incluant la roue et que l'écoulement traverse en deux sections de contrôle (par exemple deux cylindres pour une roue radiale et deux plans pour une roue axiale). Cette théorie de base est d'ailleurs effectivement due à EULER .

En 1754 en effet, dans une "Théorie plus complète des machines qui sont mises en mouvement par la réaction de l'eau", EULER a mis en oeuvre l'égalité entre le couple et la variation du moment cinétique du fluide à travers l'ensemble mobile et en a déduit la nécessité d'aubages courbés pour augmenter la déviation de l'écoulement et par conséquent la variation de son moment cinétique.

Appliquons le théorème d'Euler au fluide intérieur à notre surface de contrôle et prenons le moment par rapport à l'axe des différentes forces, si nous appelons C le moment résultant des efforts exercés par l'eau sur les différents éléments de la roue, c'est-à-dire le couple sur l'arbre, nous avons :

$$C = \rho Q \left(r_1 V_{\theta 1} - r_2 V_{\theta 2} \right)$$

en supposant que les vecteurs $\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}$ à l'intérieur de la roue ont une résultante nulle en moyenne.

Si nous multiplions les deux membres de l'équation précédente par la vitesse de rotation ω , nous obtenons :

$$P = C \omega = \rho Q \left(U_1 V_{\theta 1} - U_2 V_{\theta 2} \right)$$

expression de la puissance échangée entre la roue et le fluide qui la traverse. On peut en déduire facilement la variation de charge du fluide entre les deux sections de contrôle puisque la puissance peut s'écrire :

$$P = \rho g Q H = \rho Q \left(U_1 V_{\theta 1} - U_2 V_{\theta 2} \right)$$

d'où :

$$H_{1,2} = \frac{U_1 V_{\theta 1} - U_2 V_{\theta 1}}{g}$$

Cette définition de la hauteur correspond à ce que nous appellerons la hauteur interne.

Remarquons que ces expressions peuvent s'établir à partir du théorème de BERNOULLI en mouvement relatif que nous pouvons utiliser entre l'entrée et la sortie d'un canal de roue :

$$\frac{P}{\rho g} + \frac{W^2 - V^2}{2g} + z = C^{te}$$

En effet si nous considérons le triangle des vitesses, nous pouvons écrire :

$$W^2 = U^2 + V^2 - 2 U V \cos \alpha$$

ou

$$W^2 - U^2 = V^2 - 2 U V_{\theta}$$

et en remplaçant dans l'équation ci-dessus :

$$\frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z - \frac{UV_{\theta}}{g} = C^{te}$$

les trois premiers termes représentant la charge de l'écoulement nous retrouvons donc :

$$H_{1,2} = \frac{U_1 V_{\theta 1} - U_2 V_{\theta 1}}{g}$$

et

$$P = \rho Q \left(U_1 V_{\theta 1} - U_2 V_{\theta 2} \right)$$

Les deux raisonnements précédents montrent bien comment la variation de charge à la traversée de la roue ainsi que la puissance échangée avec la roue ne dépendent que des triangles des vitesses à l'entrée et à la sortie et pas de la façon dont les variations angulaires sont obtenues c'est-à-dire du tracé des aubes. Inversement d'ailleurs ces raisonnements ne permettront pas la détermination complète de ce tracé.

II-4) -HAUTEURS, PERTES, RENDEMENTS

Une machine hydraulique est toujours installée entre deux points d'un circuit à des charges différentes, la différence entre ces charges est la hauteur géométrique totale H_0 . La différence de charge aux bornes de la machine H_n , différente de la hauteur géométrique totale à cause des pertes de charge ΔH dans les différents ouvrages et conduites d'amenée et d'évacuation s'appelle hauteur nette ou chute nette pour les turbines et hauteur d'élévation totale ou hauteur manométrique totale pour les pompes. On a pour les turbines :

$$H_n = H_0 - \Delta H$$

et pour les pompes :

$$H_n = H_0 + \Delta H$$

On peut introduire la notion de hauteur interne H_i hauteur obtenue par la formule d'Euler où l'on introduirait les vitesses réelles mesurées. Ces vitesses réelles pouvant être mesurées soit directement, soit plus facilement de façon indirecte à partir de la hauteur interne déduite de la puissance de la machine corrigée des pertes mécaniques définies plus loin. Les écarts angulaires obtenus par comparaison entre les angles de roue du projet et les vitesses réelles déterminées par l'analyse de la hauteur permettent d'ailleurs d'améliorer la connaissance des méthodes de tracés de roue.

Il existe encore des pertes mécaniques à prendre en compte : soit des pertes d'origine hydraulique : pertes par frottement de disques dues au frottement des flasques ou des ceintures de roues ou des disques d'équilibrage, pertes volumétriques dues aux fuites de la haute à la basse pression à travers les jeux entre les parties fixes de la machine et la roue ; soit encore des pertes d'origine purement mécanique : pertes dans les paliers et la ou les butées.

Nous pouvons maintenant définir trois rendements partiels pour toute machine hydraulique en appelant Q_u le débit utile passant dans la roue et ΔP les pertes mécaniques.

	En turbine	En pompe
Rendement hydraulique	$\frac{H_i}{H_n}$	$\frac{H_i}{H_n}$
Rendement mécanique	$\frac{Q_u H_i - \Delta P}{Q_u H_i}$	$\frac{Q_u H_i}{Q_u H_i + \Delta P}$
Rendement volumétrique	$\frac{Q_u}{Q}$	$\frac{Q}{Q_u}$

le produit de ces trois rendements étant égal au rendement global de la machine.

Les pertes hydrauliques sont de deux sortes: pertes par frottement et "pertes par choc". Les pertes par frottement comprennent les pertes par frottement proprement dites, les pertes dues aux variations de section, aux singularités diverses et sont groupées dans un seul terme proportionnel au carré de débit et sont représentées sur la figure II.3 par la parabole 1. IL est difficile d'exprimer les pertes par frottement à partir d'une analyse théorique de la machine étant donnée la grande variété de rayons hydrauliques, d'états de surface et de singularités que le fluide rencontre sur son parcours. Aucun conduit n'est d'ailleurs assez long pour que les formules globales de pertes de charge en conduite soient applicables. Les "pertes par choc" proviennent du fait qu'en dehors du point de fonctionnement pour lequel les aubages ont été tracés, les angles des vitesses absolues ne sont pas adaptés à l'aubage. Le terme de "pertes par choc" ne représente d'ailleurs pas bien le phénomène, il s'agit plutôt de pertes par élargissement brusque après le décollement provoqué par le défaut d'ajustement angulaire comme le montre la figure.II.4 .

Ces "pertes par choc" s'expriment d'ailleurs par une formule du type de celle des pertes par élargissement brusque, elles sont en effet proportionnelles à $(\Delta V_\theta)^2$ ou $(\Delta V_m)^2$ (fig.II.5), c'est-à-dire à $(\Delta Q)^2$, elles sont représentées par la parabole 2 de la figure (II.3). Les pertes hydrauliques sont alors représentées par la parabole 3, tangente à la parabole 1 au débit correspondant à l'entrée sans choc ou point d'adaptation.

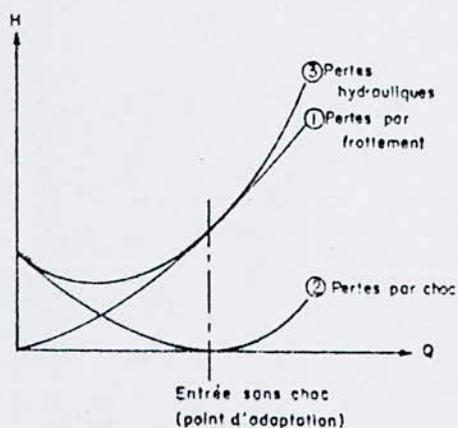


Fig. II.3



Fig. II.4

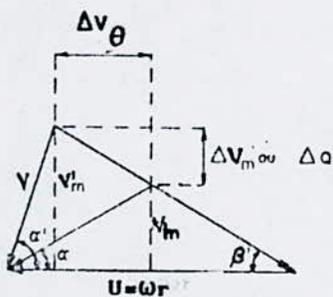


Fig. II.5

II-5)-COURBES CARACTERISTIQUES

Remarques préliminaires sur l'équation d'Euler :

La hauteur interne s'exprime par la relation :

$$H_i = \frac{U_1 V_{\theta 1} - U_2 V_{\theta 2}}{g}$$

ou encore en utilisant :

$$W^2 - U^2 + V^2 = - 2 U V_{\theta}$$

par

$$H_i = \frac{(V_1^2 - V_2^2) + (U_1^2 - U_2^2) + (W_1^2 - W_2^2)}{2g}$$

ces deux formes de la hauteur interne nous permettent de voir que, pour augmenter le H_i d'une turbine par exemple, il faudra que la vitesse absolue de sortie de l'aubage soit aussi faible que possible et en tous cas radiale (diminuer V_2 et $V_{\theta 2}$), que la section de sortie soit aussi près que possible de l'axe (diminuer U_2) c'est-à-dire que l'écoulement dans la roue soit centripète et que les conduits de roue soient convergents ($W_2 > W_1$). Dans le cas de la pompe la hauteur interne s'écrira :

$$H_i = \frac{U_2 V_{\theta 2} - U_1 V_{\theta 1}}{g}$$

ou

$$H_i = \frac{(V_2^2 - V_1^2) + (U_2^2 - U_1^2) + (W_2^2 - W_1^2)}{2g}$$

Cette fois il faudra autant que possible, pour augmenter H_i diminuer la vitesse d'entrée (en fait $V_{\theta 1}$ peut être considéré comme négligeable à moins d'avoir une prérotation importante), l'écoulement dans la roue devra être centrifuge et les canaux divergents. On voit qu'il s'agit des mêmes conditions que pour une turbine si on se souvient que l'écoulement est inversé par rapport à la marche en turbine.

Ces équations de base montrent qu'il est à priori possible de réaliser une hauteur H_1 donnée avec des combinaisons extrêmement diverses des vitesses $V_1, V_2, U_1, U_2, W_2, W_1$, et par conséquent avec, entre autres, des degrés de réaction à priori non déterminés. Les limites de cavitation fournissent des relations supplémentaires qui jouent un rôle essentiel. Des considérations économiques (dimensions, vitesses de rotation) permettent d'achever la détermination des paramètres de tracé.

L'ensemble de ces considérations conduit :

- à des machines axiales pour les H_1 relativement peu élevées (grandes vitesses spécifiques). La difficulté est alors de concilier les vitesses élevées (souci d'économie) avec les rendements élevés et avec l'absence de la cavitation.
- à des machines du type mixte (Francis, hélico-centrifuge) puis du type radial au fur et à mesure que H_1 augmente.

II-5-1)-REGIMES DE FONCTIONNEMENT

Les aubes de la roue ainsi que les directrices du distributeur (turbine) ou les aubes du diffuseur (pompe) seront tracées pour un certain régime de fonctionnement et on cherchera à réduire l'importance des différentes pertes pour ce régime de fonctionnement optimum. En fait les machines ne peuvent pas être toujours maintenues à ce régime. En effet les vitesses de rotation resteront le plus souvent constantes mais soit les chutes ou les hauteurs de refoulement ou les débits ou les puissances appelées varieront et les machines devront être capables de fonctionner en dehors du point optimum. Indépendamment de cet aspect purement mécanique, l'exploitant devra être en mesure de chiffrer l'incidence économique de ces fonctionnements à des rendements inférieurs aux rendements nominaux, soit pour orienter le choix d'une machine, soit pour une machine donnée pour élaborer les règles d'exploitation les plus économiques. C'est pourquoi il convient d'étudier la variation des pertes pour différents régimes et de représenter sur des graphiques le fonctionnement des machines dans ces conditions, ce sont des diagrammes que l'on appelle courbes caractéristiques.

Nous ne présentons ci-dessous que les notions élémentaires relatives à ces courbes caractéristiques en nous limitant au domaine des hauteurs et des débits positifs pour un sens de rotation donné. Dans un grand nombre de cas pratiques il sera cependant nécessaire de connaître les courbes caractéristiques dans des domaines de hauteurs ou de débits inversés, éventuellement même pour des vitesses de rotations inversées. Ces courbes caractéristiques nécessaires à l'étude de tous les transitoires intervenant dans le dimensionnement du projet pourront être obtenues sur modèle réduit.

II-5-2)-COURBES CARACTERISTIQUES DES POMPES

Cherchons à évaluer la hauteur théorique d'Euler pour une pompe donnée par exemple en fonction de sa vitesse de rotation ω et de son débit Q .

$$H_i = \frac{U_2 V_{\theta 2} - U_1 V_{\theta 1}}{g}$$

si nous n'avons pas de prérotation appréciable à l'entrée, nous pouvons considérer $V_{\theta 1}$ comme nul et la hauteur théorique de la pompe se réduit à :

$$H_i = \frac{U_2 V_{\theta 2}}{g}$$

La composante $V_{\theta 2}$ de la vitesse absolue à la sortie de la pompe peut s'évaluer facilement en fonction de la vitesse U_2 , de la composante V_{m2} dont nous savons qu'elle est proportionnelle au débit Q ($V_{m2} = \frac{Q}{S_{r2}}$ si S_{r2} est la section de la roue) et de l'angle de sortie des aubes mobiles β_2 qui est donnée constructive :

$$V_{\theta 2} = U_2 - V_{m2} \cotg \beta_2$$

d'où :

$$H_i = \frac{U_2 - V_{m2} \cotg \beta_2}{g}$$

ou encore :

$$g \frac{H_i}{U_2^2} = 1 - \frac{V_{m2}}{U_2} \cotg \beta_2$$

expression qui permet d'évaluer H_1 en fonction de la vitesse de rotation ω de la pompe et de son débit Q puisque les vitesses U_2 et V_{m2} sont respectivement proportionnelles à ces deux variables. Remarquons d'ailleurs qu'à vitesse constante (ce qui est le cas général) la hauteur H_1 est une fonction linéaire du débit, l'angle de la droite représentative avec l'axe des ordonnées étant égal à β_2 avec un choix convenable des échelles des deux axes: si ces échelles sont rapportées à la vitesse U_2 , la droite représentative est de plus indépendante de la vitesse de rotation de la pompe (Fig.II.6) tous les points expérimentaux pourront être reportés sur le même diagramme. Nous remarquons également sur ce diagramme que la hauteur théorique engendrée à débit nul est U_2^2/g et que pour le débit correspondant à $V_{m2} = U_2 \cdot \text{tg } \beta_2$ cette hauteur s'annule, remarquons que ce débit correspond également à $V_{\theta 2} = 0$, c'est-à-dire à une vitesse de sortie purement radiale. Nous pouvons également prendre d'autres échelles sur les axes H et Q de façon à ce que les termes de la fonction caractéristique soient homogènes à des vitesses :

$$\frac{gH_1}{u_2} = u_2 \cotg \beta_2$$

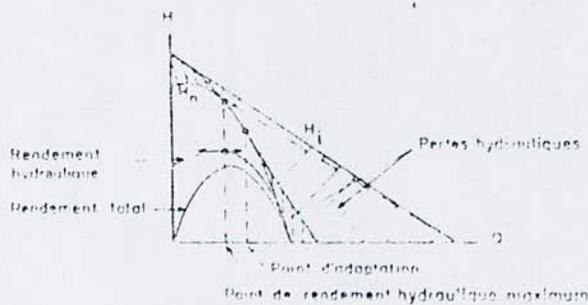


Fig. II.6

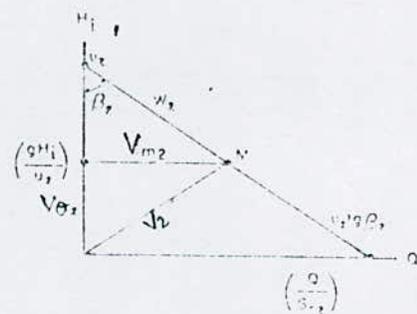


Fig. II.7

Dans ce diagramme, le point de fonctionnement de la roue M est le sommet du triangle des vitesses dont la base est sur l'axe des ordonnées. Cette représentation met particulièrement en valeur la déformation du triangle des vitesses de sortie entre les deux points de fonctionnement extrêmes : débit nul et hauteur nulle (Fig.II.7).

Si nous voulons maintenant obtenir la hauteur nette de la pompe, il nous suffit de déduire de la hauteur théorique les pertes hydrauliques définies par la (fig.II.3) et nous obtenons finalement les courbes caractéristiques de la (fig.II.8) qui définit entre la hauteur théorique, la hauteur nette et les pertes hydrauliques, le rendement hydraulique et le point de rendement hydraulique maximum ainsi que le rendement total.

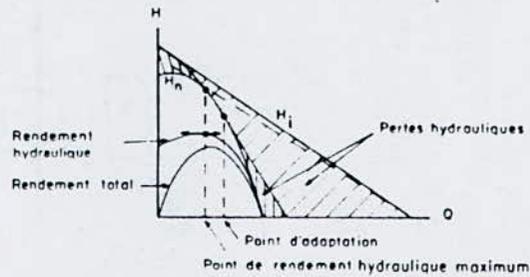


FIG .II .8

Une remarque importante doit être faite sur le fonctionnement des pompes dont la caractéristique est montante du voisinage des petits débits. En effet il n'est pas possible de faire fonctionner en parallèles de telles pompes au voisinage de cette zone de faible débit, une des machines prenant tout le débit au détriment des autres. Ce phénomène est appelé "pompage" entre les machines. Par ailleurs, ces courbes caractéristiques établies hors cavitation, pourront être très brutalement modifiées par ce phénomène surtout dans le cas des pompes où pour des conditions d'aspiration données l'apparition de la cavitation à l'oeillard de la pompe bloque le débit qui ne peut augmenter même si la hauteur manométrique requise est diminuée, d'où une caractéristique très tombante dès l'apparition de la cavitation.

II-5-3)-COURBES CARACTÉRISTIQUES DES TURBINES

Deux éléments vont venir compliquer l'établissement des courbes caractéristiques des turbines. D'abord dans le cas des pompes nous avons pu considérer que la vitesse absolue d'entrée était radiale et par conséquent n'étudier la hauteur théorique qu'en fonction des angles de sortie seulement :

Dans le cas de la turbine la hauteur utile sera fonction des éléments d'entrée et de sortie. D'autre part, alors que l'aubage fixe des pompes (appelé diffuseur) reste de géométrie constante sauf pour quelques cas exceptionnels, l'aubage fixe des turbines (appelé distributeur) est presque toujours de géométrie variable, de sorte qu'il existera une variable supplémentaire (ouverture du distributeur) dans le cas des turbines.

Examinons tout d'abord le cas d'une turbine fonctionnant à distributeur bloqué. Sa hauteur utile sera exprimée par :

$$H_i = \frac{U_1 V_{\theta 1} - U_2 V_{\theta 2}}{g}$$

et nous avons les relations géométriques :

$$V_{\theta 1} = V_{m1} \cotg \alpha_1$$

$$V_{\theta 2} = U_2 - V_{m2} \cotg \beta_2$$

d'où :

$$gH_i = U_1 V_{m1} \cotg \alpha_1 - U_2^2 + U_2 V_{m2} \cotg \beta_2$$

$$gH_i = -U_2^2 + U_2 \frac{Q}{S_{r2}} \left[\cotg \beta_2 + \frac{r_1}{r_2} \frac{S_{r2}}{S_{r1}} \cotg \alpha_1 \right]$$

les rayons d'entrée et de sortie r_1 et r_2 et les sections d'entrée et de sortie S_{r1} et S_{r2} étant des caractéristiques de la géométrie globale de la roue nous les bloquons dans un seul coefficient k , et finalement :

$$\frac{gH_i}{U_2^2} = -1 + \frac{Q}{U_2 S_{r2}} \left[\cotg \beta_2 + k \cotg \alpha_1 \right]$$

ce qui nous donne encore une droite représentative des hauteurs utiles dans un diagramme Q, H (fig.II.9)

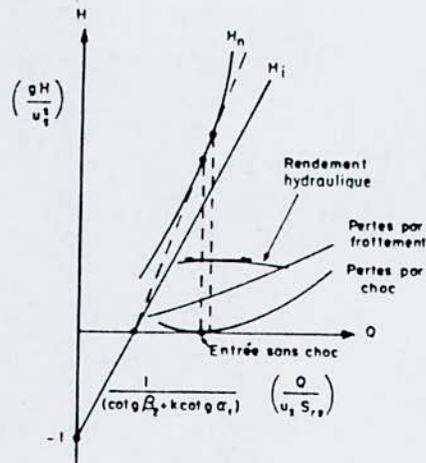


Fig. II.9

Pour passer aux hauteurs nettes et au rendement hydraulique il faudra cette fois ajouter les pertes hydrauliques au lieu de les retrancher comme dans le paragraphe précédent. Cette remarque nous permet d'ailleurs de faire une première comparaison entre les pompes et les turbines en considérant une même machine dans les deux cas de fonctionnement, par exemple, une turbine qui pour un débit Q présente une entrée sans choc et une sortie radiale, fonctionnant en pompe à la même vitesse et au même débit aura les mêmes triangles de vitesses et sa hauteur théorique sera la même que la hauteur utile en turbine et ces deux fonctionnements seront représentés par le point M de la (fig.II.10) Les points représentatifs des hauteurs nettes seront par contre très différents ainsi que les sens de variation de cette hauteur nette de part et d'autre du débit considéré, cette différence étant d'ailleurs accentuée par les décalages dus au débit de fuite et aux pertes mécaniques de sens différent en turbine et en pompe.

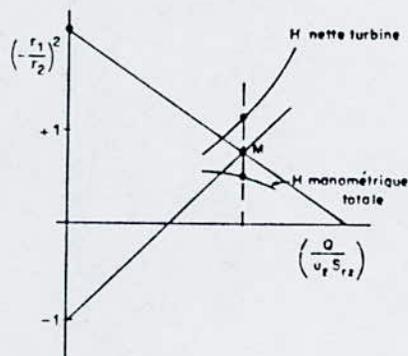


Fig. II.10

Si maintenant nous considérons le cas d'une turbine dont le distributeur n'est plus bloqué, pour chaque position de ce distributeur nous avons une droite de hauteur utile et une parabole de hauteur nette, le lieu des points correspondants à l'entrée sans choc étant indiqué en pointillé sur la (fig.II.11). Remarquons que chaque point des courbes de hauteur nettes (c'est-à-dire chaque point du plan Q, H) peut être côté en rendement, en ouverture de distributeur, en puissance de sorte que sur ce diagramme Q, H on peut tracer des courbes équirendement, équipuissance, etc. les courbes équirendement étant d'ailleurs appelées collines de rendement.

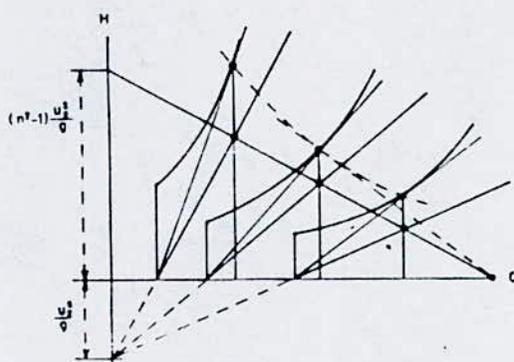


Fig. II. 11

*III ANALYSE PHYSIQUE ET MATHEMATIQUE
DE L'ECOULEMENT MERIDIONAL*

Ecrivons l'équation de NAVIER - STOKES pour un fluide réel compressible à viscosité dynamique constante .

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \vec{v}^2 + \nabla \vec{v} \wedge \vec{v} = - \frac{1}{\rho} \nabla (U + P) + \nu \nabla^2 \vec{v}$$

ou encore

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } P - \vec{F} - \nu \Delta \vec{v} = - \frac{d\vec{v}}{dt} = - \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} + 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v} \right]$$

Emettons quelques hypothèses simplificatrices:

- hypothèse 1 : notre écoulement est permanent $\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.
- hypothèse 2 : notre écoulement est sans cavitation (sans couche limite), il n'y a pas de décollement des particules fluides de la paroi; nous suposerons donc la paroi comme étant une ligne de courant.

Ce qui laisse dire que notre écoulement se fait sans frottements, donc les forces de frottements sont nulles ou négligeables et $\nu=0$ d'où le fluide est parfait. Or généralement le mouvement d'un fluide parfait est irrotationnel et représenté donc par un écoulement à potentiel des vitesses, d'où le vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = 0$ et donc $\text{rot } \vec{v} = 0$.

Notre équation s'écrira donc :

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } P - \vec{F} = - \frac{d\vec{v}}{dt} = - \text{grad} \frac{v^2}{2}$$

les forces de volumes \vec{F} présentées ici sont celles qui dérivent d'un potentiel gravitationnel $U = -gz$ et d'un potentiel inertiel $U = -\omega^2 r^2/2$. Or en général pour les écoulements dans les turbomachines , les forces qui dérivent d'un potentiel de pesanteur sont négligeables \Rightarrow

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } P = -\frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1)$$

L'équation (1) sera l'équation de départ pour l'étude de notre écoulement .

Soit: W : la vitesse relative de l'écoulement

V : la vitesse absolue de l'écoulement

Pour simplifier notre calcul, plaçons nous dans un repère cylindrique r, θ, z .

Soit la figure (III.1)

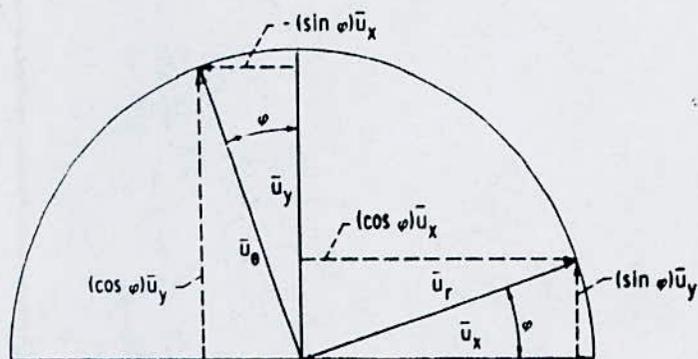


Fig. III.1

$$\text{avec } \begin{cases} \bar{u}_r = f(t, \varphi) \\ \bar{u}_\theta = f(t, \varphi) \\ \varphi = f(t) \end{cases}$$

\bar{u}_x : vecteur unitaire suivant la direction x

\bar{u}_r : vecteur unitaire suivant la direction r

\bar{u}_θ : vecteur unitaire suivant la direction θ

D'où selon la figure (III.1)

$$(2) \quad \begin{cases} \vec{u}_r = (\cos\varphi) \vec{u}_x + (\sin\varphi) \vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta = -(\sin\varphi) \vec{u}_x + (\cos\varphi) \vec{u}_y \end{cases}$$

Dérivons les équations données en (2) par rapport à t

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d}{dt} \left[(\cos\varphi) \vec{u}_x \right] + \frac{d}{dt} \left[(\sin\varphi) \vec{u}_y \right] \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d}{dt} \left[-(\sin\varphi) \vec{u}_x \right] + \frac{d}{dt} \left[(\cos\varphi) \vec{u}_y \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{\partial(\cos\varphi)}{\partial\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_x + \cos\varphi \frac{d\vec{u}_x}{dt} + \frac{\partial(\sin\varphi)}{\partial\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_y + \frac{d\vec{u}_y}{dt} \sin\varphi \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{\partial(-\sin\varphi)}{\partial\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_x + \left[-\sin\varphi \frac{d\vec{u}_x}{dt} \right] + \frac{\partial(\cos\varphi)}{\partial\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_y + \frac{d\vec{u}_y}{dt} \cos\varphi \end{cases}$$

Or $\frac{d\vec{u}_x}{dt} = \frac{d\vec{u}_y}{dt} = 0$ (\vec{u}_x et \vec{u}_y ne sont pas fonction de t)

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d\vec{u}_r}{dt} = -\sin\varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_x + \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_y \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_x - \sin\varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \left(-\sin\varphi \vec{u}_x + \cos\varphi \vec{u}_y \right) \frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = - \left(\cos\varphi \vec{u}_x + \sin\varphi \vec{u}_y \right) \frac{d\varphi}{dt} \end{cases}$$

Or $\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\varphi \vec{u}_x + \sin\varphi \vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta = -\sin\varphi \vec{u}_x + \cos\varphi \vec{u}_y \end{cases}$ (d'après 2)

Et $v_\theta = r \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \frac{v_r}{r} = \frac{d\varphi}{dt}$

d'où
$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{v_r}{r} \vec{u}_\theta \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\frac{v_\theta}{r} \vec{u}_r \end{cases}; (3)$$

De plus \vec{v} s'écrit

$$\vec{v} = v_r \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta + v_z \vec{u}_z$$

$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$: vecteurs unitaires suivant les directions (r, θ, z) .

Les expressions en (3) nous permettent d'écrire:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_r \vec{u}_r) + \frac{d}{dt}(v_\theta \vec{u}_\theta) + \frac{d}{dt}(v_z \vec{u}_z)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_r}{dt} \vec{u}_r + v_r \frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{dv_\theta}{dt} \vec{u}_\theta + \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} v_\theta + \frac{dv_z}{dt} \vec{u}_z + v_z \frac{d\vec{u}_z}{dt}$$

Or

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{v_\theta}{r} \vec{u}_\theta \quad \text{d'après (3)}$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\frac{v_\theta}{r} \vec{u}_r \quad \text{d'après (3)}$$

$$\frac{d\vec{u}_z}{dt} = 0 \quad \vec{u}_z \text{ ne dépendant pas du temps}$$

d'où en remplaçant ces termes par leurs valeurs dans l'équation on aura :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_r}{dt} \vec{u}_r + v_r \frac{v_\theta}{r} \vec{u}_\theta + \frac{dv_\theta}{dt} \vec{u}_\theta + \left(-\frac{v_\theta}{r}\right) v_\theta \vec{u}_r + \frac{dv_z}{dt} \vec{u}_z$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2}{r} \right] \vec{u}_r + \left[\frac{1}{r} v_r v_\theta + \frac{dv_\theta}{dt} \right] \vec{u}_\theta + \frac{dv_z}{dt} \vec{u}_z$$

Or $v_r = \frac{dr}{dt}$

D'où :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2}{r} \right] \vec{u}_r + \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{dt} v_\theta + r \frac{dv_\theta}{dt} \right] \vec{u}_\theta + \frac{dv_z}{dt} \vec{u}_z$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2}{r} \right] \vec{u}_r + \left[\frac{1}{r} \left(\frac{dr}{dt} v_\theta + r \frac{dv_\theta}{dt} \right) \right] \vec{u}_\theta + \frac{dv_z}{dt} \vec{u}_z$$

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2}{r} \right] \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{d(rv_\theta)}{dt} \vec{u}_\theta + \frac{dv_z}{dt} \vec{u}_z} ; (4)$$

Exprimons le gradient de pression dans le repère (r, φ, z) :

$$\nabla P = \frac{\partial P}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{u}_z$$

De plus $\vec{u}_\theta = \vec{u}_\varphi$ quand φ et θ réfèrent au même point.

Et $\frac{\partial P}{\partial \varphi} = \frac{\partial P}{\partial \theta}$ avec $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 1$

On peut donc écrire que :

$$\boxed{\nabla P = \frac{\partial P}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{u}_z} ; (5)$$

Ayant déjà noté les vitesses relatives par W et les vitesses absolues par V , on pourra écrire que :

$$W_r = V_r ; W_z = V_z \text{ et } \underbrace{V_\theta = W_\theta + \omega r}_{V \text{ absolue} = V \text{ relative} + V \text{ entrainement}}$$

Reprenons les équations :

$$(1) \quad \frac{1}{\rho} \nabla P = - \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$(4) \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2}{r} \right] \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{d(rv_\theta)}{dt} \vec{u}_\theta + \frac{dv_z}{dt} \vec{u}_z$$

$$(5) \quad \nabla P = \frac{\partial P}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{u}_z$$

On aura :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \vec{u}_z = - \left\{ \left[\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2}{r} \right] \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{d(rv_\theta)}{dt} \vec{u}_\theta + \frac{dv_z}{dt} \vec{u}_z \right\}$$

d'où:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \vec{u}_z = - \left\{ \left[\frac{dW_r}{dt} - \frac{(W_\theta + \omega r)^2}{r} \right] \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{d(rW_\theta + \omega r^2)}{dt} \vec{u}_\theta + \frac{dW_z}{dt} \vec{u}_z \right\}$$

En identifiant l'équation membre à membre on aura :

$$\frac{dW_r}{dt} - \frac{(W_\theta + \omega r)^2}{r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \quad (6a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d(rW_\theta + \omega r^2)}{dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (6b)$$

$$\frac{dW_z}{dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (6c)$$

Si q est la distance le long d'une trajectoire quelconque, la dérivée de la pression le long de cette courbe (ou direction) sera:

$$\frac{dP}{dq} = \frac{\partial P}{\partial r} \frac{dr}{dq} + \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dq} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{dq}$$

d'où remplaçons les termes de cette équation par celles trouvées en (6). On aura :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dq} = \left[\frac{dW_r}{dt} - \frac{(W_\theta + \omega r)^2}{r} \right] \frac{dr}{dq} + \left[\frac{d(rW_\theta + \omega r^2)}{dt} \right] \frac{d\theta}{dq} + \left[\frac{dW_z}{dt} \right] \frac{dz}{dq} ; (7)$$

L'équation (7) représente le gradient de pression dans la direction q . Il faut à ce moment là trouver une relation entre le gradient de vitesse et le gradient de pression. Ceci pourra se faire aisément en supposant l'écoulement ISENTROPIQUE.

Ecrivons l'équation ponctuelle d'énergie pour l'écoulement et appliquons la pour notre cas particulier :

$$\rho \frac{dH}{dt} - \frac{dP}{dt} = \rho T^{\circ} \frac{dS^*}{dt}$$

Où S^* représente l'entropie du fluide.

Or l'écoulement est supposé isentropique $\longrightarrow \frac{dS^*}{dt} = 0$

$$\Rightarrow \rho \frac{dH}{dt} = \frac{dP}{dt}$$

$$\Rightarrow \rho dH = dP$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{\rho} = dH \quad (8)$$

Maintenant multiplions l'équation (6a) par $w_r = \frac{dr}{dt}$

$$\left[\frac{dw_r}{dt} - \frac{(w_{\theta} + \omega r)^2}{r} \right] \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dw_r}{dt} \frac{dr}{dt} - \frac{(w_{\theta} + \omega r)^2}{r} \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \frac{dr}{dt}$$

$$(6b) : \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left[(rw_{\theta}) + (\omega r^2) \right] = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad ; \quad w_{\theta} = r \frac{d\theta}{dt}$$

$$(6b) \cdot w_{\theta} : \Rightarrow w_{\theta} \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (rw_{\theta} + \omega r^2) = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} r$$

$$\Rightarrow \frac{w_{\theta}}{r} \left[\frac{d}{dt} (rw_{\theta}) + \frac{d}{dt} (\omega r^2) \right] = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} r$$

$$\frac{W_\theta}{r} \left[\frac{dr}{dt} W_\theta + r \frac{dW_\theta}{dt} + \omega \frac{dr^2}{dt} + r^2 \frac{d\omega}{dt} \right] = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} r$$

$$\text{Or } \frac{d\omega}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{W_\theta}{r} \left[\frac{dr}{dt} W_\theta + r \frac{dW_\theta}{dt} + 2r\omega \frac{dr}{dt} \right] = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} r$$

$$\Rightarrow \frac{W_\theta}{r} \left[(W_\theta + 2\omega r) \frac{dr}{dt} + r \frac{dW_\theta}{dt} \right] = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} r$$

$$\text{car } 2r \frac{dr}{dt} = \frac{d(r^2)}{dt}$$

$$\text{Or } W_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

$$\Rightarrow \frac{W_\theta}{r} \left[(W_\theta + 2\omega r) \frac{dr}{dt} + r \frac{dW_\theta}{dt} \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{W_\theta}{r} \left[(\omega r + 2\omega r) \frac{dr}{dt} + r \frac{dW_\theta}{dt} \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow 3\omega r \frac{W_\theta}{r} \frac{dr}{dt} + \frac{W_\theta}{r} r \frac{dW_\theta}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow 3\omega r \frac{r\omega}{r} \frac{dr}{dt} + \frac{W_\theta}{r} r \frac{dW_\theta}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{3\omega^2 r \frac{dr}{dt} + W_\theta \frac{dW_\theta}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt}} \quad (6b')$$

Reprenons l'équation (6a) multipliée par W_r

$$\frac{dW_r}{dt} \frac{dr}{dt} - \frac{(W_\theta + \omega r)^2}{r} \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = W_r$$

$$\Rightarrow \frac{dW_r}{dt} W_r - \frac{W_\theta^2 + 2W_\theta \omega r + \omega^2 r^2}{r} \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dW_r}{dt} W_r - \left[\frac{W_\theta^2}{r} + \frac{2W_\theta \omega r}{r} + \frac{\omega^2 r^2}{r} \right] \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dW_r}{dt} W_r - \left[\frac{\omega^2 r^2}{r} + \frac{2\omega r \omega r}{r} + \frac{\omega^2 r^2}{r} \right] \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dW_r}{dt} W_r - (\omega^2 r + 2 \omega^2 r + \omega^2 r) \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dW_r}{dt} W_r - 4 \omega^2 r \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \frac{dr}{dt}} \quad (6a')$$

L'équation (6c) : $\frac{dW_z}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}$

$$(6c) \times (W_z = \frac{dz}{dt}) \Rightarrow \frac{dW_z}{dt} W_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dW_z}{dt} W_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{dt}} \quad (6c')$$

D'où on a :

$$(6a') \quad \frac{dw_r}{dt} w_r - 4 \omega^2 r \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \frac{dr}{dt}$$

$$(6b') \quad 3\omega^2 r \frac{dr}{dt} + w_\theta \frac{dw_\theta}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt}$$

$$(6c') \quad \frac{dw_z}{dt} w_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

Additionons ces trois équations membre à membre on aura :

$$\frac{dw_r}{dt} w_r + w_\theta \frac{dw_\theta}{dt} + \frac{dw_z}{dt} w_z - \omega^2 r \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \frac{dr}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$\vec{w} = w_\theta \vec{u}_\theta + w_z \vec{u}_z + w_r \vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \frac{dw_r}{dt} w_r + w_\theta \frac{dw_\theta}{dt} + \frac{dw_z}{dt} w_z = \frac{1}{2} \frac{dw^2}{dt} \quad [\text{car } v dv = \frac{1}{2} d(v^2)]$$

$$-\left[\frac{1}{\rho}\right] \left[\frac{\partial P}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right] = -\left[\frac{1}{\rho}\right] \frac{dP}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{dw^2}{dt} - \omega^2 r \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt}$$

$$\text{Ou encore} \quad \frac{1}{2} \frac{dw^2}{dt} = \omega^2 \frac{d(r^2)}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt}$$

L'écoulement étant supposé isentropique $\Rightarrow \frac{dP}{\rho} = dH$

$$\boxed{\frac{1}{2} \frac{dw^2}{dt} = \omega^2 \frac{d(r^2)}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dH}{dt}}$$

En intégrant cette dernière à l'entrée (de la turbomachine) et le long d'une ligne de courant :

$$\boxed{w^2 - w_i^2 = \omega^2 (r^2 - r_i^2) - 2(h - h_i)}; \quad (9)$$

Sachant que la vitesse absolue méridionale V_m est égale à la vitesse relative W_m et que la vitesse absolue $V_\theta = W_\theta + \omega r$

Sachant aussi que:

$$V^2 = V_m^2 + V_\theta^2 \quad \Rightarrow \quad V_m^2 = V^2 - V_\theta^2 \quad ; \quad \text{avec} \quad V_m^2 = V_r^2 + V_z^2$$

et

$$W^2 = W_m^2 + W_\theta^2 \quad W_m^2 = W^2 - W_\theta^2 \quad ; \quad \text{avec} \quad W_m^2 = W_r^2 + W_z^2$$

$$\text{Or} \quad V_m = W_m \quad \Rightarrow \quad V_m^2 = W_m^2 \quad \Rightarrow \quad V^2 - V_\theta^2 = W^2 - W_\theta^2$$

$$\text{Or} \quad W_\theta = V_\theta - \omega r \quad \Rightarrow \quad W_\theta^2 = V_\theta^2 - 2V_\theta \omega r + \omega^2 r^2$$

$$\Rightarrow \quad V^2 - V_\theta^2 \stackrel{?}{=} W^2 - W_\theta^2 = W^2 (V_\theta^2 - 2V_\theta \omega r + \omega^2 r^2)$$

$$\Rightarrow \quad V - V_\theta = W - V_\theta + 2V_\theta \omega r - \omega r$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V^2 = W^2 + 2V_\theta \omega r - \omega^2 r^2}$$

Posons $\lambda = V_\theta r$ (λ : prérotation)

$$\Rightarrow \quad \boxed{V^2 = W^2 + 2\omega\lambda - \omega^2 r^2}$$

D'où il vient qu'à l'entrée :

$$h'_i = h_i + \frac{V_i^2}{2} = h_i + \frac{W_i^2 + 2\omega\lambda - \omega^2 r_i^2}{2}$$

Par suite en remplaçant h_i par son expression donnée ci-dessus en (9) on aura :

$$\boxed{h = h'_i - \omega\lambda + \frac{\omega^2 r_i^2 - W_i^2}{2}} ; (10)$$

ayant assumé l'écoulement *ISENTROPIQUE* on a :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dq} = \frac{dh}{dq} = \frac{dh_i}{dq} - \omega \frac{d\lambda}{dq} + \omega^2 r \frac{dr}{dq} - W \frac{dW}{dq}$$

En substituant cette dernière dans l'équation (7) on a :

$$\frac{dW}{dq} = \frac{1}{W} \frac{dh_i}{dq} - \frac{\omega}{W} \frac{d\lambda}{dq} + \left[\frac{\omega^2 r}{W} + \frac{1}{W} \frac{dW_r}{dt} - \frac{(W_\theta + \omega r)^2}{rW} \right] \frac{dr}{dq} + \frac{1}{W} \frac{d(rW_\theta + \omega r^2)}{dt} \frac{d\theta}{dq} + \frac{1}{W} \frac{dW_z}{dt} \frac{dz}{dq} \quad (11)$$

Notons que :

$$W_m = W \cos(\beta) \quad ; \quad [\text{Fig III.2}]$$

Et

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{dm} \frac{dm}{dt} = \frac{W_m}{r_c}$$

Sachant aussi que :

$$W_r = W_m \sin(\alpha)$$

Et

$$W_z = W_m \cos(\alpha)$$

); [Fig III.2]

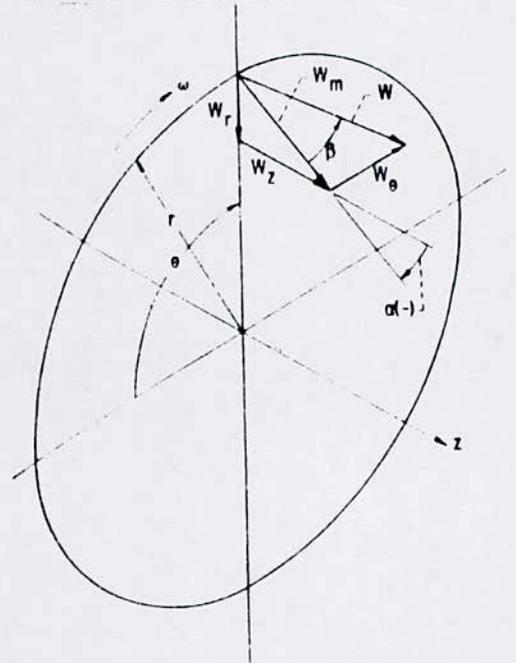


Fig. III.2

On aura finalement :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dW_r}{dt} &= \frac{W^2 \cos^2(\beta) \cos(\alpha)}{r_c} + W \sin(\alpha) \cos(\beta) \frac{dW_m}{dm} \\ \frac{dW_z}{dt} &= -\frac{W^2 \cos^2(\beta) \sin(\alpha)}{r_c} + W \cos(\alpha) \cos(\beta) \frac{dW_m}{dm} \end{aligned} \right] \quad (12)$$

De plus :

$$\frac{1}{W} \frac{d(rV_{\theta})}{dt} = \frac{1}{W} \frac{d(rW_{\theta} + \omega r^2)}{dt} = r \cos(\beta) \frac{dW_{\theta}}{dm} + W \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\beta) + 2r\omega \sin(\alpha) \cos(\beta) \quad (13)$$

En substituant les équations (12) et (13) dans l'équation (11) et sachant que :

$$V_{\theta} = W_{\theta} + \omega r$$

$$W_{\theta} = W \sin(\beta)$$

On obtient l'équation suivante :

$$\frac{dW}{dq} = a \frac{dr}{dq} + b \frac{dz}{dq} + c \frac{d\theta}{dq} + \frac{1}{W} \left[\frac{dh_i}{dq} - \omega \frac{d\lambda}{dq} \right] \quad ; (14)$$

Avec :

$$\begin{aligned} a &= \frac{W^2 \cos^2(\beta) \cos(\alpha)}{rc} - \frac{W \sin^2(\beta)}{r} + \sin(\alpha) \cos(\beta) \frac{dW_m}{dm} - 2\omega \sin(\beta) \\ b &= -\frac{W^2 \cos^2(\beta) \sin(\alpha)}{rc} + \cos(\alpha) \cos(\beta) \frac{dW_m}{dm} \\ c &= W \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\beta) + r \cos(\beta) \left[\frac{dW_{\theta}}{dm} + 2\omega \sin(\alpha) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

L'analyse de l'écoulement méridional sera concerné par la projection de la direction q sur ce plan .Cette projection nous donnera les lignes Quasi-orthogonales. Soit s la distance le long de cette projection méridionale de la direction q .Nous aurons alors:

$$\frac{dW}{ds} = \frac{dW}{dq} \cdot \frac{dq}{ds} = a \frac{dr}{ds} + b \frac{dz}{ds} + c \frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{W} \left(\frac{dh_i}{ds} + \omega \frac{d\lambda}{ds} \right) \quad (16)$$

Si s représente la normale à la ligne de courant méridionale, alors $s = n$ et on a :

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dn} = \cos(\alpha)$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dn} = -\sin(\alpha)$$

les quantités $\frac{dr}{ds}$ et $\frac{dz}{ds}$ dans l'équation (16) sont définies par les équations paramétriques pour une courbe arbitraire dans le plan méridional :

$$r = r(s)$$

$$z = z(s)$$

La quantité $\frac{d\theta}{ds}$ se rapporte à la variation de la direction q en fonction de θ . Si maintenant q évolue sur une surface "flasque avant - flasque arrière", définie par :

$$\theta = \theta(r, z)$$

Alors

$$\boxed{\frac{d\theta}{ds} = \frac{\partial\theta}{\partial r} \frac{dr}{ds} + \frac{\partial\theta}{\partial z} \frac{dz}{ds}} ; (17)$$

En combinant les équations (15) et (17), l'équation (16) pourra être réécrite sous la forme suivante :

$$\boxed{\frac{dW}{ds} = (A \frac{dr}{ds} + B \frac{dz}{ds}) W + C \frac{dr}{ds} + D \frac{dz}{ds} + \left(\frac{dh_i}{ds} - \omega \frac{d\lambda}{ds} \right) \frac{1}{W}} ; (18)$$

où :

(19)

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\cos(\alpha) \cdot \cos^2(\beta)}{r_c} - \frac{\sin^2(\beta)}{r} + \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\beta) \frac{\partial \theta}{\partial r} \\
 B &= \frac{-\sin(\alpha) \cos^2(\beta)}{r_c} + \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\beta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \\
 C &= \sin(\alpha) \cos(\beta) \frac{dW^m}{dm} - 2\omega \sin(\beta) + r \cos(\beta) \left(\frac{dW_\theta}{dm} + 2\omega \sin(\alpha) \right) \frac{\partial \theta}{\partial r} \\
 D &= \cos(\alpha) \cos(\beta) \frac{dW^m}{dm} + r \cos(\beta) \left(\frac{dW_\theta}{dm} + 2\omega \sin(\alpha) \right) \frac{\partial \theta}{\partial z}
 \end{aligned}$$

L'équation (18) donne le gradient de vitesse le long d'une ligne Quasi-orthogonale (arbitrairement choisie) dans le plan méridional.

Elle est écrite de façon à convenir pour une approche numérique de la solution.

$\frac{dh_i}{ds}$ représente ici la fonction de l'enthalpie totale à l'entrée, en fonction de la distance, le long de la ligne quasi-orthogonale en un point quelconque considéré.

Dans cette analyse les lignes quasi-orthogonales ont été choisies comme des droites joignant le flasque arrière au flasque avant. A l'entrée et sortie de la turbomachine, elles ont été assimilées respectivement aux bords d'attaque et de fuite.

En plus de l'équation (18) qui représente *L'ÉQUILIBRE DES FORCES*, une autre équation se doit d'être écrite et satisfaite; c'est celle de la *CONTINUITÉ*. Ceci pourra se faire en égalisant le débit massique à travers chaque ligne à celui spécifié par la machine.

Pour cela la densité ou masse volumique doit être connue. Si la vitesse est connue, la densité ou masse volumique peut être calculée comme il suit grâce aux équations (20) jusqu'à (22)

Soit l'équation (10)

$$h = h_i' - \omega \lambda + \frac{\omega^2 r^2 - W^2}{2}$$

En assumant $C_p = C^{te}$ on a:

$$\boxed{\frac{T}{T_i'} = \frac{h_i}{h_i'} = 1 - \frac{W^2 + 2\omega\lambda - \omega^2 r^2}{2 C_p T_i'}} ; (20)$$

et pour $W = 0$

$$\boxed{\frac{T''}{T_i'} = 1 - \frac{2\omega\lambda - \omega^2 r^2}{2 C_p T_i'}} ; (21)$$

Pour des conditions isentropiques on a

$$\frac{\rho}{\rho_i'} = \left(\frac{T}{T_i'} \right)^{\left(\frac{1}{\gamma-1} \right)}$$

Ce qui nous donne la densité statique en n'importe quel point où la vitesse est connue si les conditions totales à l'entrée sont spécifiées.

Pour tenir compte des pertes, il est nécessaire d'apporter une correction au calcul de densité précédent. Une manière de le faire, est d'assumer une perte en pression totale relative $\Delta p''$, qui représente une mesure des pertes en efficacité.

On a alors:

$$\rho = \left(\frac{\rho}{\rho''} \right) \rho'' = \left(\frac{T}{T''} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{P''}{R T''}$$

$$\rho = \left(\frac{T}{T''} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{P_{isen}'' - \Delta p''}{R T''}$$

$$\rho = \left(\frac{T}{T''} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \rho_{isen}'' - \left(\frac{T}{T''} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{\Delta p''}{R T''}$$

$$\rho = \left(\frac{T}{T''} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{T''}{T'_i} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \rho'_i - \left(\frac{T}{T''} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{\Delta p''}{R T''}$$

$$\rho = \left(\frac{T}{T'_i} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \rho'_i - \left[\left(\frac{T}{T'_i} \right) \left(\frac{T'_i}{T''} \right) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{\Delta p''}{R T'_i} \left(\frac{T'_i}{T''} \right); (22)$$

Ceci donne la densité statique en spécifiant les pertes en pression relative totale.

Les rapports de température peuvent être déterminés à partir des équations (20) et (21).

Il est supposé ici que les conditions totales à l'entrée sont connues. On peut alors calculer le débit massique total qui traverse les lignes quasi-orthogonales:

$$w = N \int_0^{\alpha} \rho W_n r \Delta\theta ds ; (23)$$

où $\Delta\theta$ représente la distance angulaire entre les aubes et W_n la composante de W normale à la surface de révolution générée par la ligne quasi-orthogonale fixée.

A partir de la figure (III.3) on peut voir que:

$$W_n = W_n \cos(\psi - \alpha) ; (24)$$

Pour avoir $\Delta\theta$, l'usage est de considérer que $\Delta\theta$ est égal à:

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{N} - \frac{\theta}{r} ; (25)$$

où t_θ représente l'épaisseur tangentielle de l'aube et N le nombre d'aube dans la roue. Si l'épaisseur normale t_n de l'aube est spécifiée on peut alors calculer l'épaisseur t_θ grâce à:

$$t_\theta^2 = t_n^2 \left(1 + r^2 \left(\frac{\partial\theta}{\partial z} \right)^2 + r^2 \left(\frac{\partial\theta}{\partial r} \right)^2 \right) ; (26)$$

Il est à noter qu'ici $\frac{\partial\theta}{\partial r}$ et $\frac{\partial\theta}{\partial z}$ réfèrent à la forme moyenne (ou squelette) de l'aubage et non à la ligne de courant méridionale.

Les équations (20) jusqu'à (22) et (24) jusqu'à (26) donnent les valeurs numériques de l'équation (23) qui peut être intégrée grâce aux fonctions SPLINE.

Les vitesses à la surface moyenne de l'écoulement ayant été calculées les vitesses sur les surfaces de l'aube peuvent elles aussi être trouvées et ceci en supposant l'écoulement absolue irrotationnel et une variation linéaire de la vitesse entre les aubes; soit W_t la vitesse à la surface de fuite de l'aube (ou Extrados) alors

$$W_t = \frac{\cos(\beta_1) \cos(\beta_t)}{\cos(\beta_1) + \cos(\beta_t)} \left(\frac{2W}{\cos(\beta_1)} + r \omega (\tan\beta_1 - \tan\beta_t) + \frac{d}{dm} \left((r\omega + W \sin\beta) r \Delta\theta \right) \right) (27)^*$$

et $W_1 = 2W - W_t$

avec W_1 : vitesse sur la surface d'attaque (ou intrados)

la dérivée $\frac{d}{dm} \left((r\omega + \omega \sin(\beta)) r \Delta\theta \right)$ peut être calculée aux moyens des fonctions SPLINES.

Les équations (21) jusqu'à (23) et l'équation d'état $P = \rho RT$ peuvent être utilisées pour le calcul de la température statique, de la densité et de la pression sur les surfaces des aubes.

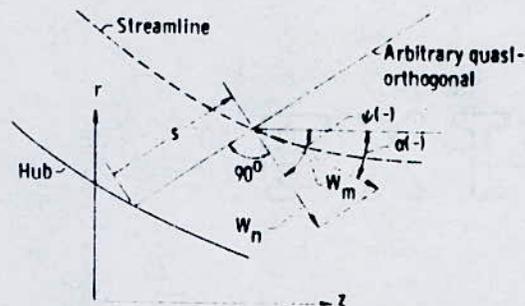


Fig. III.3

(*) : Annexe

IV PROCÉDES ET TECHNIQUES NUMÉRIQUES

INTRODUCTION

Au cours de notre programmation nous avons utilisé des méthodes numériques pour calculer notre écoulement, ces méthodes sont principalement contenues en deux grandes parties:

I- Les méthodes d'interpolation SPLINE avec toutes les possibilités qu'elles offrent, pour lisser nos lignes de courant et calculer tous les paramètres géométriques s'y rapportant. C'est-à-dire détermination des dérivées premières et secondes en un ensemble de points x, y données (ici dans notre cas r et z), les angles α, β , le débit massique w (Intégration au moyen de la fonction d'interpolation SPLINE).

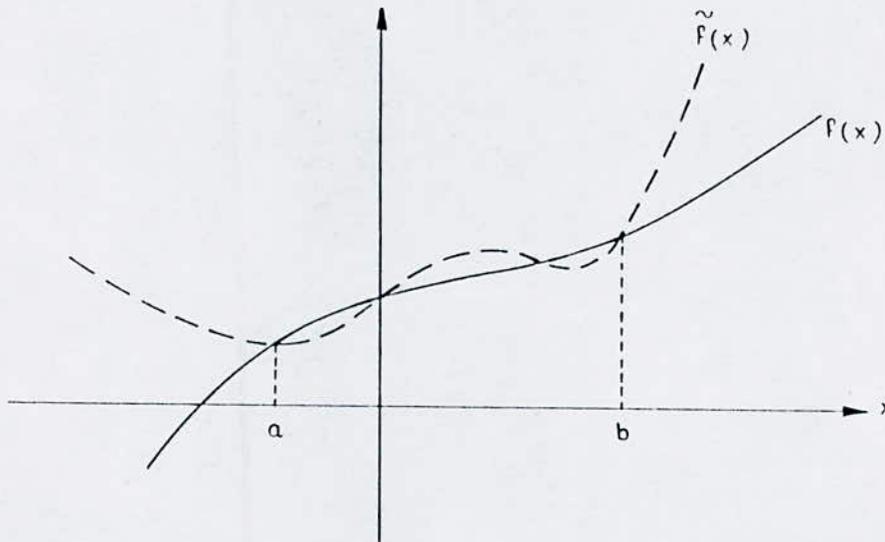
* La méthode de GAUSS-SEIDEL pour la résolution de tous les systèmes d'équations linéaires qui découlent de l'interpolation numérique au moyen des fonctions SPLINE cubique.

II- Enfin la méthode de RUNGE-KUTTA du second ordre pour la résolution de l'équation différentielle liant entre elles les sections et les vitesses qui les traversent.

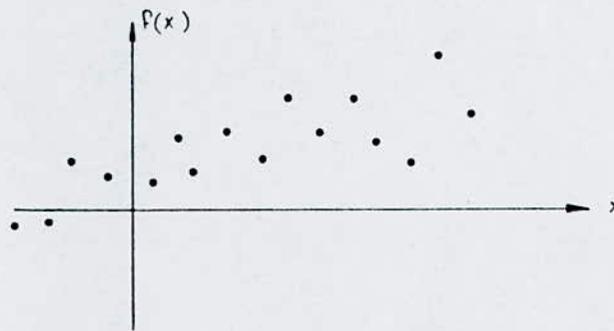
Nous aborderons succinctement tour à tour les trois méthodes dans ce chapitre.

IV-1)-APPROXIMATIONS DES FONCTIONS

Soit une fonction $f(x)$ quelconque, il s'agit sur un intervalle $[a, b]$, fini ou infini, d'approcher au "mieux" cette fonction $f(x)$ par une autre fonction $\tilde{f}(x)$.



Supposons que la fonction se présente sous la forme d'une suite de valeurs n'ayant pas l'aspect du continu, à la limite il pourra s'agir d'un nuage de points:



On peut approcher au mieux une fonction $f(x)$ de plusieurs façons possibles.

Nous distinguerons dans le cas présent:

- 1- L'approximation locale
- 2- L'approximation par interpolation
- 3- L'approximation au sens de TCHEBYTCHEV
- 4- L'approximation en moyenne quadratique
- 5- L'approximation au sens des moindres carrés

Nous nous réstreinderons à étudier l'approximation par interpolation.

IV-1-1)-APPROXIMATION PAR INTERPOLATION

IV-1-1-1)-DEFINITION

L'approximation par interpolation d'une fonction $f(x)$ consiste à trouver une fonction $\tilde{f}(x)$ telle que pour $(n+1)$ valeurs de la variable appartenant à l'intervalle $[a,b]$, on ait:

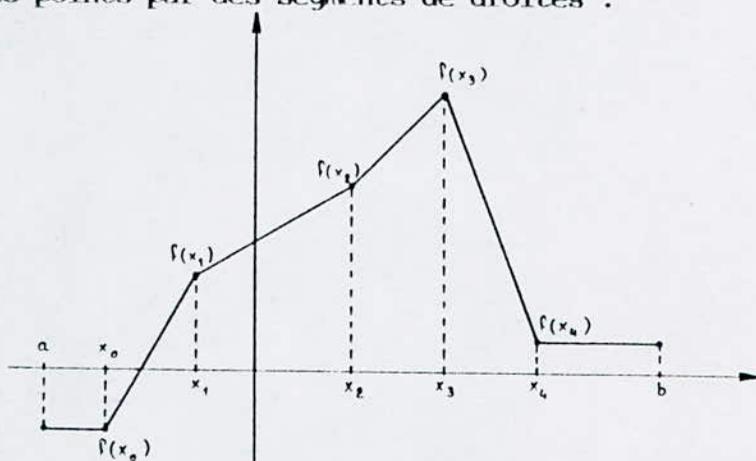
$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(x_0) &= f(x_0) \\
 \tilde{f}(x_1) &= f(x_1) \\
 \tilde{f}(x_2) &= f(x_2) \\
 &\dots\dots\dots \\
 \tilde{f}(x_n) &= f(x_n)
 \end{aligned}$$

Il existe une infinité de fonctions $\tilde{f}(x)$ qui peuvent coïncider avec $f(x)$ en $n+1$ valeurs de la variable. Pour mettre en évidence une ou plusieurs fonctions $f(x)$ particulières il faut donc apporter les hypothèses supplémentaires.

Nous étudierons pour notre cas les fonctions SPLINE, celles utilisées dans notre programme.

IV-1-1-2)-INTERPOLATION PAR LES FONCTIONS SPLINE

Les fonctions SPLINE ont été introduites en 1945 par SCHOENBERG. la marche à adopter pour utiliser cette technique numérique est la suivante: Considérons une fonction $f(x)$ donnée sous forme de valeurs discrètes: $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ avec $x_i \in [a,b]$ les x_i étant équidistants ou pas. Une manière élémentaire d'interpoler consisterait, au lieu de faire passer un polynôme par les $f(x_i)$, de relier ces points par des segments de droites :



Cela revient à faire des interpolations linéaires sur $[a,b]$. On a donc remplacé sur l'intervalle $[a,b]$, $f(x)$ par une fonction approchante $\tilde{f}(x)$ constituée de morceaux de polynômes du premier degré.

On peut améliorer cette façon de faire en essayant de traduire mathématiquement l'opération effectuée par le dessinateur qui pour faire une interpolation sur sa planche à dessiner utilise une latte de bois flexible ou de matière plastique (SPLINE), passant par des pivots.

Pour ce faire on va approcher $f(x)$ par une fonction $\tilde{f}_k(x)$ constituée de morceaux de polynômes de degré $(2k - 1)$. $\tilde{f}_k(x)$ sera continue en tous points de l'intervalle $[a, b]$ notamment aux x_i ($i=0, 1, \dots, n$), ainsi que ses dérivées premières, secondes, ... jusqu'aux dérivées $(2k - 2)^{\text{ième}}$ incluses. Donc les fonctions :

$$\tilde{f}_k(x), \tilde{f}'_k(x), \tilde{f}''_k(x), \dots, \tilde{f}_k^{(2k-2)}(x)$$

seront continues en tous points de $[a, b]$ notamment aux x_i .

IV-1-1-3)-CALCUL DE LA FONCTION SPLINE CUBIQUE

Calculons explicitement la fonction SPLINE d'ordre 2, $\tilde{f}_2(x)$. Cette fonction SPLINE d'ordre 2 est souvent appelée SPLINE cubique.

Soit $S_i(x)$ le polynôme de $\tilde{f}_2(x)$ qui approche $f(x)$ sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ avec $i = 1, 2, 3, \dots, n$. D'après la définition de $\tilde{f}_2(x)$, $S_i(x)$ est un polynôme de degré $2k - 1 = 3$.

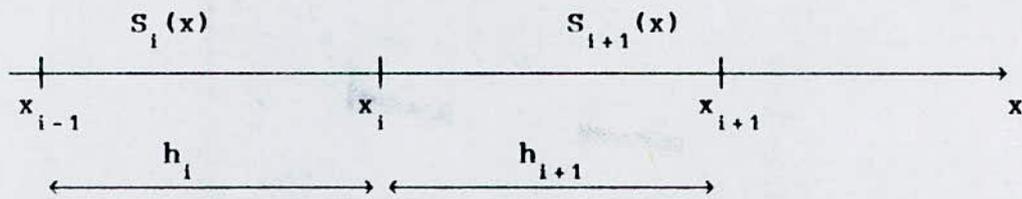
Posons
$$D_i = \left(\tilde{f}_2''(x) \right)_{x=x_i}$$

En supposant que x_0 et x_n correspondent aux bornes de l'intervalle à étudier on a toujours à partir de la définition de $\tilde{f}_k(x)$:

$$D_0 = D_n = 0$$

L'algorithme utilisé consiste à prendre comme inconnues les D_i ($0 < i < n$) pour déterminer entièrement les $S_i(x)$.

Posons $h_i = x_i - x_{i-1}$ avec $i=1, 2, \dots, n$



Ecrivons la continuité en x_i de $D_i = \left(\tilde{f}_2''(x) \right)_{x=x_i}$

$$\left[\begin{array}{l} \left(S_i''(x) \right)_{x=x_i} = D_i \\ \left(S_{i+1}''(x) \right)_{x=x_i} = D_i \end{array} \right] \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1$$

on a alors:

$$S_i''(x) = (x_i - x) \frac{D_{i-1}}{h_i} - (x_{i-1} - x) \frac{D_i}{h_i}$$

Cette dernière expression donne, après deux intégration successives:

$$S_i(x) = \left\{ (x_i - x)^3 \frac{D_{i-1}}{6h_i} - (x_{i-1} - x)^3 \frac{D_i}{6h_i} + (x_{i-1} - x) Q_i + (x_i - x) \right\}$$

Pour obtenir Q_i et R_i , écrivons que $S_i(x)$ passe effectivement par les points $f(x_{i-1})$ et $f(x_i)$. On obtient alors:

$$\left[\begin{array}{l} S_i(x_{i-1}) = f(x_{i-1}) \\ S_i(x_i) = f(x_i) \end{array} \right]$$

Soit:

$$f(x_{i-1}) = \frac{h_i^2}{6} D_{i-1} + h_i R_i$$

$$f(x_i) = \frac{h_i^2}{6} D_i - h_i Q_i$$

On obtient à présent pour $S_i(x)$:

$$S_i(x) = \left\{ \begin{aligned} &(x_i - x)^3 \frac{D_{i-1}}{6h_i} + (x_i - x) \left(f(x_{i-1}) - \frac{h_i^2}{6} D_{i-1} \right) \frac{1}{h_i} \\ &- (x_{i-1} - x)^3 \frac{D_i}{6h_i} - (x_{i-1} - x) \left(f(x_{i-1}) - \frac{h_i^2}{6} D_i \right) \frac{1}{h_i} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Introduisons la continuité de la dérivée première en x_i :

$$\left(S_i'(x) \right)_{x=x_i} = \left(S_{i+1}'(x) \right)_{x=x_i}$$

on obtient alors

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{h_i}{6} D_{i-1} + \frac{h_{i-1} + h_i}{3} D_i + \frac{h_{i+1}}{6} D_{i+1} = \\ &\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_{i+1}} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h_i} \\ &i = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}} \quad (2)$$

Cette dernière relation nous donne un système de $(n-1)$ équations linéaires à $(n-1)$ inconnues qui sont les D_i avec $i=1, 2, \dots, n-1$.

Comme $D_0 = D_n = 0$, on pourra donc calculer $S_i(x)$ pour $x_{i-1} < x < x_i$ avec $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

A partir de l'équation (1) le système d'équations (2) s'écrit explicitement :

$$A \cdot D = F \quad (3)$$

avec

$$D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ D_{n-1} \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h_2} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_1} & \\ \vdots & \vdots \\ \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_{i+1}} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_i} & \\ \vdots & \vdots \\ \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{h_n} - \frac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{h_{n-1}} & \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2+h_3}{3} & \frac{h_3}{6} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{h_{n-2}}{6} & \frac{h_{n-2}+h_{n-1}}{3} & \frac{h_{n-1}}{6} & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_{n-1}+h_n}{3} & \end{bmatrix}$$

La matrice A est tridiagonale symétrique. La méthode de GAUSS ne conviendrait pas pour résoudre le système (3) car la matrice A étant à la fois creuse et de grande taille, elle conduirait à effectuer un grand nombre de calcul inutilement. Aussi on résout ce système par une méthode itérative: la méthode de GAUSS-SEIDEL dont la convergence dans ce cas bien précis -et d'autres cas aussi d'ailleurs- est plus rapide que la méthode de JACOBI.

On constatera aussi que l'une comme l'autre converge en vertu du fait que quelque soit l'élément courant a_{ij} de matrice A on a:

$$|a_{ij}| = \frac{h_i + h_{i+1}}{3} > \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}} |a_{ij}| = \frac{h_i + h_{i+1}}{6}$$

Cette relation correspond à la condition suffisante de convergence du processus itératif linéaire (en utilisant indifféremment la norme ∞ ou 1 puisque la matrice est symétrique).

IV-1-1-4)-PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DES FONCTIONS SPLINE:

Il s'agit de la propriété de minimisation. Soit la fonction SPLINE d'ordre k , $\tilde{f}_k(x)$, telle qu'elle a été définie précédemment avec notamment:

$$\left(\tilde{f}_k^{(L)}(x) \right)_{x=a} = \left(\tilde{f}_k^{(L)}(x) \right)_{x=b} = 0$$

pour $L = k, k + 1, \dots, 2k - 1$

Soit par ailleurs une fonction quelconque F_k de classe C^k (k fois dérivative) dans $[a, b]$, qui passe comme les \tilde{f}_k par les n points d'interpolation :

$$\begin{array}{l} x_1 \longrightarrow f(x_1) \\ x_2 \longrightarrow f(x_2) \\ \vdots \\ x_n \longrightarrow f(x_n) \end{array}$$

F_k est donc une fonction d'interpolation quelconque de classe k . on a la relation suivante, si $\tilde{f}_k \neq F_k$,

$$\int_a^b \left(\tilde{f}_k^{(k)}(x) \right)^2 \cdot dx < \int_a^b \left(F_k^{(k)}(x) \right)^2 \cdot dx$$

En conséquence, de toutes les fonctions F_k , les fonctions SPLINE d'ordre k , \tilde{f}_k , sont telles que

$$\int_a^b \left(F_k^{(k)}(x) \right)^2 \cdot dx \quad \text{est } \underline{\text{minimal}}$$

Ainsi pour la fonction SPLINE cubique on aura

$$\int_a^b \left(f_2''(x) \right)^2 \cdot dx \quad \text{minimal}$$

par rapport à $\int_a^b \left(F_2''(x) \right)^2 \cdot dx$ en général.

Cela signifie concrètement que la fonction SPLINE cubique évite "au mieux", dans sa représentation graphique les oscillations parasites comme celles pouvant être introduites par les polynômes de LAGRANGE.

On dit encore que la courbe est "lissée au maximum". C'est pourquoi, les fonctions SPLINE cubiques constituent un outil idéal pour calculer soit les dérivées premières en différents points de l'intervalle considéré, soit l'intégrale le long de cet intervalle.

VI-1-1-5)-CALCUL DES DÉRIVÉES A PARTIR DES FONCTIONS SPLINE CUBIQUES

Dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on peut écrire la fonction SPLINE cubique sous la forme :

$$S_{i+1}(x) = \alpha_i (x-x_i)^3 + \beta_i (x-x_i)^2 + \gamma_i (x-x_i) + \delta_i .$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

$$\alpha_i = \frac{D_{i+1} - D_i}{6(x_{i+1} - x_i)}$$

$$\beta_i = \frac{D_i}{2}$$

$$\gamma_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{2(x_{i+1} - x_i) \cdot D_i + (x_{i+1} - x_i) \cdot D_{i+1}}{6}$$

$$\delta_i = f(x_i)$$

Les D_i qui sont les dérivées secondes de la fonction approchante $\tilde{f}_2(x)$ aux points d'interpolation x_i :

$$D_i = \left(\tilde{f}_2''(x) \right)_{x=x_i}$$

On a donc directement pour l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$:

$$f'(x) = 3 \alpha_i (x-x_i)^2 + 2 \beta_i (x-x_i) + \gamma_i .$$

$$f''(x) = 6 \alpha_i (x-x_i) + 2 \beta_i .$$

Pour les n premiers points d'interpolation

$$\begin{aligned} x_i &\longrightarrow f(x_i) \\ (i = 0, 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned}$$

On a simplement :

$$\left(f'(x) \right)_{x=x_i} = \gamma_i$$

$$\left(f''(x) \right)_{x=x_i} = 2 \beta_i$$

IV-1-1-6)-CALCUL DES INTEGRALES PAR LES FONCTIONS

SPLINE CUBIQUES:

Comme pour le calcul des dérivées premières des fonctions, les fonctions SPLINE cubiques conviennent particulièrement bien aussi pour le calcul des intégrales.

Reprenons l'expression du polynôme $S_{i+1}(x)$ qui approche $f(x)$ sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on a :

$$S_{i+1}(x) = \alpha_i (x-x_i)^3 + \beta_i (x-x_i)^2 + \gamma_i (x-x_i) + \delta_i$$

avec

$$\alpha_i = \frac{D_{i+1} - D_i}{6(x_{i+1} - x_i)}$$

$$\beta_i = \frac{D_i}{2}$$

$$\gamma_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{2(x_{i+1} - x_i) \cdot D_i + (x_{i+1} - x_i) \cdot D_{i+1}}{6}$$

$$\delta_i = f(x_i)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Les quantités D_i sont obtenues à partir des $f(x_i)$ par le sous-programme SPLINE .

Soit à calculer :

$$I = \int_a^b f(x) \cdot dx \quad \text{ou encore :}$$

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x) \cdot dx \quad .$$

on a :

$$\tilde{I} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} S_{i+1}(x) \cdot dx \right)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} S_{i+1}(x) \cdot dx = \left(\frac{\alpha_i}{4} (x-x_i)^4 + \frac{\beta_i}{3} (x-x_i)^3 + \frac{\gamma_i}{2} (x-x_i)^2 + \delta_i (x-x_i) \right)_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$\tilde{I} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \left(\frac{\alpha_i}{4} (x-x_i)^4 + \frac{\beta_i}{3} (x-x_i)^3 + \frac{\gamma_i}{2} (x-x_i)^2 + \delta_i (x-x_i) \right)_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$\tilde{I} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \left(\frac{\alpha_i}{4} (x_{i+1}-x_i)^4 + \frac{\beta_i}{3} (x_{i+1}-x_i)^3 + \frac{\gamma_i}{2} (x_{i+1}-x_i)^2 + \delta_i (x_{i+1}-x_i) \right)$$

Comme on le voit, cette méthode est très générale, elle peut s'appliquer à une fonction donnée pour des valeurs discrètes de la variable non régulièrement espacées .

Si la fonction est donnée pour des valeurs régulièrement espacées de la variable

$$x_{i+1} - x_i = H \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

alors on a :

$$\tilde{I} = \frac{H^4}{4} \cdot \sum_{i=0}^{i=n-1} \alpha_i + \frac{H^3}{3} \cdot \sum_{i=0}^{i=n-1} \beta_i + \frac{H^2}{2} \cdot \sum_{i=0}^{i=n-1} \gamma_i + H \cdot \sum_{i=0}^{i=n-1} \delta_i$$

VI-1-1-7)-L'APPROXIMATION INVERSE :

Ayant approché la fonction :

$$y = f(x)$$

par la fonction $\tilde{f}(x)$ sur l'intervalle $[a,b]$ on souhaiterait à présent déterminer une fonction $\tilde{f}^{-1}(y)$, qui sur l'intervalle $[f(a),f(b)]$ approche la fonction inverse de f :

$$x = f^{-1}(y)$$

La fonction SPLINE est un des procédés parmi d'autres (Polynôme de LAGRANGE, Moyennes quadratiques) qui permet d'arriver à ce but.

Le procédé utilisé précédemment reste le même dans son ensemble, à la seule différence, qu'au lieu de considérer x comme variable et y comme valeur correspondante de la fonction, on fait l'inverse, c'est-à-dire, y est considérée comme variable et x comme valeur correspondante de la fonction .

Ce procédé sera utilisé à chaque fois que l'on voudra calculer pour notre écoulement la distance s de la ligne orthogonale correspondante au débit massique calculé lui même d'ailleurs par interpolation au moyen des fonctions (calcul d'intégrale) SPLINE mais non inverse .

En premier on procède par le schéma suivant :

On calcule le débit massique correspondant à la distance s de la ligne orthogonale, donc :

$$(\text{distance } s, \text{ débit massique}) = [x, \tilde{I}(x)]$$

En second :

Ayant calculé le débit massique on se propose de recalculer la section (la distance s) qui engloberait ce débit donc :

$$(\text{Débit massique, distance } s) = [y, \tilde{f}^{-1}(y)]$$

et on utiliserait alors le sous programme SPLINE qui nous approximerait notre fonction, nous donnant $S(x)$ en tout point des intervalles définis.

IV-2)-METHODES DE RESOLUTION NUMERIQUE PAR PAS

DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Les méthodes présentées ici sont basées sur un calcul de $y(x_i)$ successifs avant la détermination finale de $y(x)$

$$\begin{array}{ccccccccc} | & & | & & | & & | & & | \\ \hline x_0 & & x_1 & & x_2 & & x_i & & x \\ \hline y_0 = Y(x_0) & & y_1 = Y(x_1) & & y_2 = Y(x_2) & & y_i = Y(x_i) & & y_x = Y(x) \end{array}$$

Cela veut dire que l'on calculera successivement y_1, y_2, \dots, y_i , et enfin y_x .

Le pas $h_i = x_i - x_{i-1}$ n'est pas obligatoirement constant.

Il existe un grand nombre de méthodes de résolution numérique par pas des équations différentielles ordinaires du premier ordre.

- La première dite méthode d'EULER parce qu'elle est la plus simple.
- La deuxième dite méthode de RUNGE-KUTTA.

C'est celle qu'on utilisera dans notre procédure technique.

IV-2-1)-LA METHODE D'EULER

A partir d'un développement de TAYLOR, tronqué au second ordre, on peut écrire :

$$Y_{i+1} = Y_i + h_{i+1} \cdot [Y'(x)]_{x=x_i} + \frac{h_{i+1}^2}{2} \cdot [Y''(x)]_{x=\alpha}$$

$$\alpha \in]x_i, x_{i+1}[$$

On aura donc à effectuer au second pas l'opération :

$$Y_{i+1} = Y_i + h_{i+1} \cdot f(x_i, Y_i)$$

L'erreur commise en un seul pas est en $\phi(h^2)$.

L'erreur commise en n pas sera tout naturellement du premier ordre ($\phi(h)$), puisque l'on peut estimer que h sera inversement proportionnel à n.

IV-2-2)-LA MÉTHODE DE RUNGE KUTTA (du second ordre)

Il s'agit d'un léger ajustement apporté à la méthode d'EULER générale:

On fait une première évaluation de y_{i+1} , soit y_{i+1}^0 , par la méthode d'EULER générale :

$$y_{i+1}^0 = y_i + h_{i+1} \cdot [y'(x)]_{x=x_i} + \phi(h^2)$$

et on utilise cette première valeur de y_{i+1}^0 pour calculer l'intégrale:

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) \cdot dx$$

par la méthode des trapèzes .

soit :

$$y_{i+1} = y_i + h_{i+1} \cdot \frac{[y'(x)]_{x=x_i} + [y'(x)]_{x=x_{i+1}}}{2} + \epsilon$$

On calculera explicitement $[y'(x)]_{x=x_{i+1}}$ en écrivant :

$$[y'(x)]_{x=x_{i+1}} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^0) + \phi(h^2)$$

En effet

$$[y'(x)]_{x=x_{i+1}} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

$$f(x_{i+1}, y_{i+1}) = f(x_{i+1}, y_{i+1}^0) + \phi(|y_{i+1} - y_{i+1}^0|)$$

Or d'après la méthode d'EULER générale $\phi(|y_{i+1} - y_{i+1}^0|) = \phi(h^2)$

On effectue donc à chaque pas la double opération :

$$\left[\begin{array}{l} y_{i+1}^0 = y_i + h_{i+1} \cdot f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + h_{i+1} \cdot \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2} \end{array} \right.$$

On peut estimer l'erreur commise en chaque pas en prenant un développement de TAYLOR au troisième ordre :

$$y_{i+1} = y_i + [y'(x)]_{x=x_i} \cdot h_{i+1} + \frac{1}{2} [y''(x)]_{x=x_i} \cdot h_{i+1}^2 + \frac{1}{6} [y'''(x)]_{x=\alpha} \cdot h_{i+1}^3$$

$$\alpha \in] x_i, x_{i+1} [$$

ou encore, on posant :

$$[y'''(x)]_{x=x_i} = \frac{[y'(x)]_{x=x_{i+1}} - [y'(x)]_{x=x_i}}{h_{i+1}} + \phi(h)$$

On a :

$$y_{i+1} = y_i + h_{i+1} \cdot \left([y'(x)]_{x=x_i} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{[y'(x)]_{x=x_{i+1}} - [y'(x)]_{x=x_i}}{h_{i+1}} + \phi(h) \right\} \cdot h_{i+1} \right) + \phi(h^3)$$

soit

$$y_{i+1} = y_i + h_{i+1} \left([y'(x)]_{x=x_i} + \frac{1}{2} [y'(x)]_{x=x_{i+1}} - \frac{1}{2} [y'(x)]_{x=x_i} \right) + \phi(h^3)$$

$$y_{i+1} = y_i + h_{i+1} \cdot \frac{[y'(x)]_{x=x_i} + [y'(x)]_{x=x_{i+1}}}{2} + \phi(h^3)$$

Comme l'estimation que nous faisons pour déterminer y_{i+1} conduit à faire une erreur sur $[y'(x)]_{x=x_{i+1}}$ en $\phi(h^2)$, on voit que la méthode d'EULER modifiée conduit à une erreur en $\phi(h^3)$ à chaque pas.

l'erreur globale sera donc $\phi(h^2)$

On constate donc que la méthode de RUNGE-KUTTA permet de gagner un ordre d'approximation par rapport à la méthode d'EULER générale.

Le procédé utilisé avec la méthode de RUNGE-KUTTA, procédé qui consiste à estimer une première fois $y_{i+1}(x)$ et ensuite à ajuster la valeur de y_{i+1}^0 obtenue, ce procédé est d'un usage très courant en calcul numérique. Il porte le nom de:

"PREDICTION-CORRECTION"
(traduction de PREDICTOR-CORRECTOR)

La convergence ainsi que la stabilité du schéma ainsi adopté est assuré en vertu du fait que le critère de stabilité

$$\text{pour } \left[\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = Y^p \quad ; \quad p > 0 \\ \text{et} \\ y(x_0) = x_{p-1} \end{array} \right.$$

$$\text{est tel que } \Delta x > \frac{1}{x_{p-1}} \text{ pour } p \text{ pair}$$

$$\Delta x > \frac{2}{x_{p-1}} \text{ pour } p \text{ impair}$$

or l'équation auquel on a affaire $\frac{dw}{ds} = f(w,s)$ est du premier ordre c'est-à-dire $p = 1$ et donc doit satisfaire à $\Delta x > \frac{2}{x_0}$ ou encore $\Delta s > \frac{2}{w(1,1)}$, relation qui est vérifiée tout le long de notre travail ; d'où l'on peut dire que le schéma numérique de la méthode de RUNGE-KUTTA du seconde ordre est stable et convient très bien à notre équation .

IV-3)-ETAPES ET PROCEDES DE CALCUL DU PROGRAMME

Nous allons dans ce qui suit décrire la procédure de calcul adoptée lors de l'élaboration de notre programme.

La première étape au cours de notre analyse est l'évaluation numérique des paramètres α , β , r_c , $\frac{\partial \theta}{\partial r}$, $\frac{\partial \theta}{\partial z}$, $\frac{dr}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, $\frac{dW_m}{dm}$ et $\frac{dW_\theta}{dm}$, afin de pouvoir les utiliser dans les équations (18) et (19) du chap(III).

Pour pouvoir déterminer α , β et r_c une géométrie des lignes de courant doit être établie. En premier lieu des lignes droites "fixes" (quasi-orthogonales) sont menées du flasque arrière au flasque avant le long desquelles le gradient de vitesse d'une surface moyenne d'écoulement doit être calculé.

Pour approximer en un premier temps la position des lignes de courant, les quasi-orthogonales seront partagées en parties égales et les points ainsi joints deux à deux définiront une position initiale des lignes de courant.

Nous aboutissons par là même à un maillage du domaine de notre écoulement. Par la suite en chaque noeud ainsi défini, il nous sera possible de déterminer la valeur de l'angle α :

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{dr}{dz}$$

et l'inverse du rayon de courbure: $\frac{1}{r_c}$

$$\frac{1}{r_c} = \frac{\frac{d^2 r}{dz^2}}{\left(1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (1)$$

Les quantités (dr/dz) et (d^2r/dz^2) étant des dérivées premières et secondes de r par rapport à z , il nous sera aisé de les calculer -connaissant z et r - au moyen des fonctions d'interpolation SPLINE cubiques comme il a été montré dans les paragraphes précédents.

Remarque: le calcul de $(1/r_c)$ au lieu de r_c est utilisé ici pour éviter une division par zéro au cas où:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = 0.$$

Pour les paramètres restants, la surface moyenne d'écoulement entre les aubes doit être bien définie par son équation paramétrique :

$$\theta = \theta(r, z)$$

Cette dernière doit être bien spécifiée de façon à ce que les quantités $\frac{\partial \theta}{\partial r}$ et $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ peuvent être déterminées en n'importe quel point.

L'interpolation par les fonctions SPLINE cubiques nous donnera les quantités $\frac{\partial \theta}{\partial r}$ et $\frac{\partial \theta}{\partial z}$.

Une fois que $\frac{\partial \theta}{\partial r}$ et $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ sont connues (calculées) l'angle β sera déterminé par:

$$\tan \beta = r \frac{d\theta}{dm} = r \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \frac{dr}{dm} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{dz}{dm} \right)$$

$$\tan \beta = r \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \sin(\alpha) + \frac{\partial \theta}{\partial z} \cos(\alpha) \right) \quad (2)$$

Pour démarrer dans les calculs on supposera W constante à travers toute la roue. A partir de figure.(IV-1) on peut voir que:

$$W_m = W \cos(\beta)$$

$$W_\theta = W \sin(\beta)$$

Connaissant la distance m le long de la ligne de courant méridionale, alors:

$$\frac{dW_m}{dm} \quad \text{et} \quad \frac{dW_\theta}{dm}$$

peuvent être déterminés par l'interpolation SPLINE. Sachant que $\frac{dr}{ds}$ et $\frac{dz}{ds}$ sont données par les angles aux lignes quasi-orthogonales, il apparaît alors que toutes les quantités nécessaires au calcul, de $\frac{dW}{ds}$ - à partir de l'équation (18) chap(III) - excepté W sont déterminées.

La prochaine étape de calcul, à partir de ce moment sera "l'intégration numérique" ou résolution de l'équation différentielle (éq 18 chap III) qui est sous la forme:

$$\frac{dW}{ds} = f(W, s)$$

où f est connue pour un nombre fini de valeurs de s .

Pour une vitesse initiale donnée -exemple vitesse sur le flasque avant- la distribution de vitesse le long des lignes quasi-orthogonales peut être approximée par:

$$W_{j+1} = W_j + \left(\frac{dW}{ds} \right)_j \Delta s$$

où l'indice représente le nombre de lignes de courant et s la distance séparant les lignes de courant.

Pour une meilleure estimation (de la solution, la méthode de Runge Kutta peut être utilisée.

Le schéma que nous proposons est un cas particulier de cette méthode (on l'appelle aussi méthode du second ordre de R-K), qui est bien adaptée au solutionnement de notre équation.

soit:

$$\begin{aligned} W_{j+1}^{**} &= W_j + \left(\frac{dW}{ds} \right)_j \Delta s \\ W_{j+1}^{**} &= W_j + \left(\frac{dW}{ds} \right)_{j+1} \Delta s \\ W_{j+1} &= \frac{W_{j+1}^* + W_{j+1}^{**}}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

Ce schéma évite une ambiguïté due à l'utilisation de la dérivée au début de l'intervalle et aboutit à une approximation d'ordre supérieur.

Pour le calcul de la quantité $\left(\frac{dW}{ds} \right)_j$ l'équation 18 (chap III) est utilisée avec les paramètres calculés à la $J^{i\text{eme}}$ ligne de courant et à la vitesse W_j .

Pour calculer $\left(\frac{dW}{ds}\right)_{j+1}$, les paramètres utilisés sont ceux calculés à la $(j+1)^{i\text{eme}}$ ligne de courant et W_{j+1}^* est utilisé pour la vitesse W dans l'équation 18 (Chap III).

La méthode adoptée ici est assez précise tant que la vitesse ne varie pas de l'ordre de 30% entre deux lignes de courant .

Complétant le calcul pour les lignes quasi-orthogonales du flasque avant jusqu'au flasque arrière, on aboutit à la distribution complète de la vitesse le long de la ligne considérée.

Les équations (20) à (22) (Chap III) et (24) à (26) (Chap III) sont alors utilisées pour le calcul des termes sous le signe somme(\int) de l'équation (23) du chapitre III :

$$w = N \int_0^{\theta} \rho W_n r \Delta\theta ds$$

L'intégrale quant à elle sera calculée par interpolation numérique: l'interpolation par les fonctions SPLINE .

Le débit massique qui traverse cette ligne qui vient d'être calculé est comparé au débit massique total donné en entrée dans le programme. Si le débit massique calculé que l'on notera ici $Q_{m\text{calc}}$ est trop petit par rapport à $Q_{m\text{te}}$ (débit massique total à l'entrée), alors la vitesse W que l'on vient de calculer est augmentée et vice et versa. Et l'on recalculera donc par suite le nouveau débit massique $Q_{m\text{calc}}$ correspondant à la nouvelle vitesse W .

Ce procédé est utilisé surtout, dans l'esprit d'assurer la continuité de l'écoulement.

Une fois la différence $\left(\left| Q_{m\text{te}} - Q_{m\text{calc}} \right| \right)$ est de l'ordre de la tolérance qu'on se fixe au préalable, on dit que les paramètres ainsi calculés concordent au cas de figure et l'on recalculera alors à cet instant par une interpolation inverse, toujours en utilisant à cet effet l'interpolation par les fonctions SPLINE, la distance qui sépare alors deux nouvelles lignes de courant.

L'interpolation inverse se fera aisément connaissant le débit massique traversant différentes sections (chaque section étant définie par la distance entre le flasque avant et une ligne de courant) on lui correspond la distance qu'il traverse (se référer au Chap IV APPROXIMATION INVERSE pour détails).

Le calcul ainsi fait pour la première ligne quasi-orthogonale sera répété pour le reste des lignes quasi-orthogonales de l'entrée de la turbomachine jusqu'à la sortie.

Ceci étant, un nouveau schéma de maillage sera considéré pour l'itération d'après, les lignes quasi-orthogonales restant quant à elles toujours fixes ce sont les lignes de courant qui vont changer de position.

Ainsi et de proche en proche, le calcul sera refait autant de fois que la tolérance sur la variation (ou espacement) entre la position initiale d'une ligne de courant et la position calculée ne sera pas atteinte, cette tolérance représentant alors le seuil de convergence du calcul.

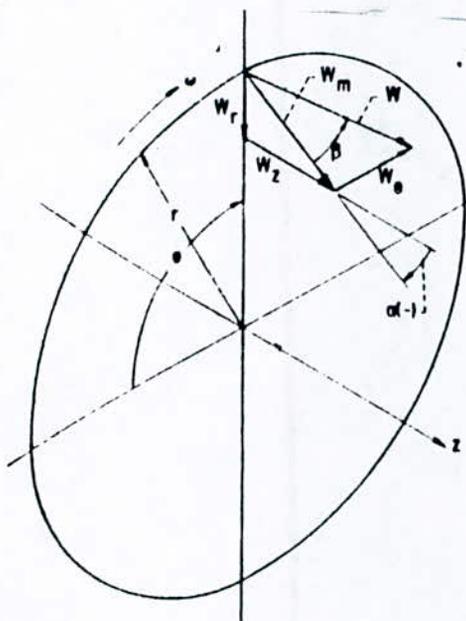


Fig.IV.1

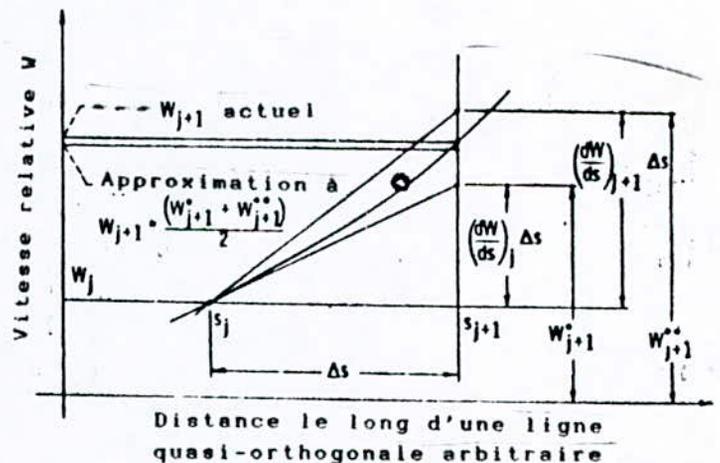
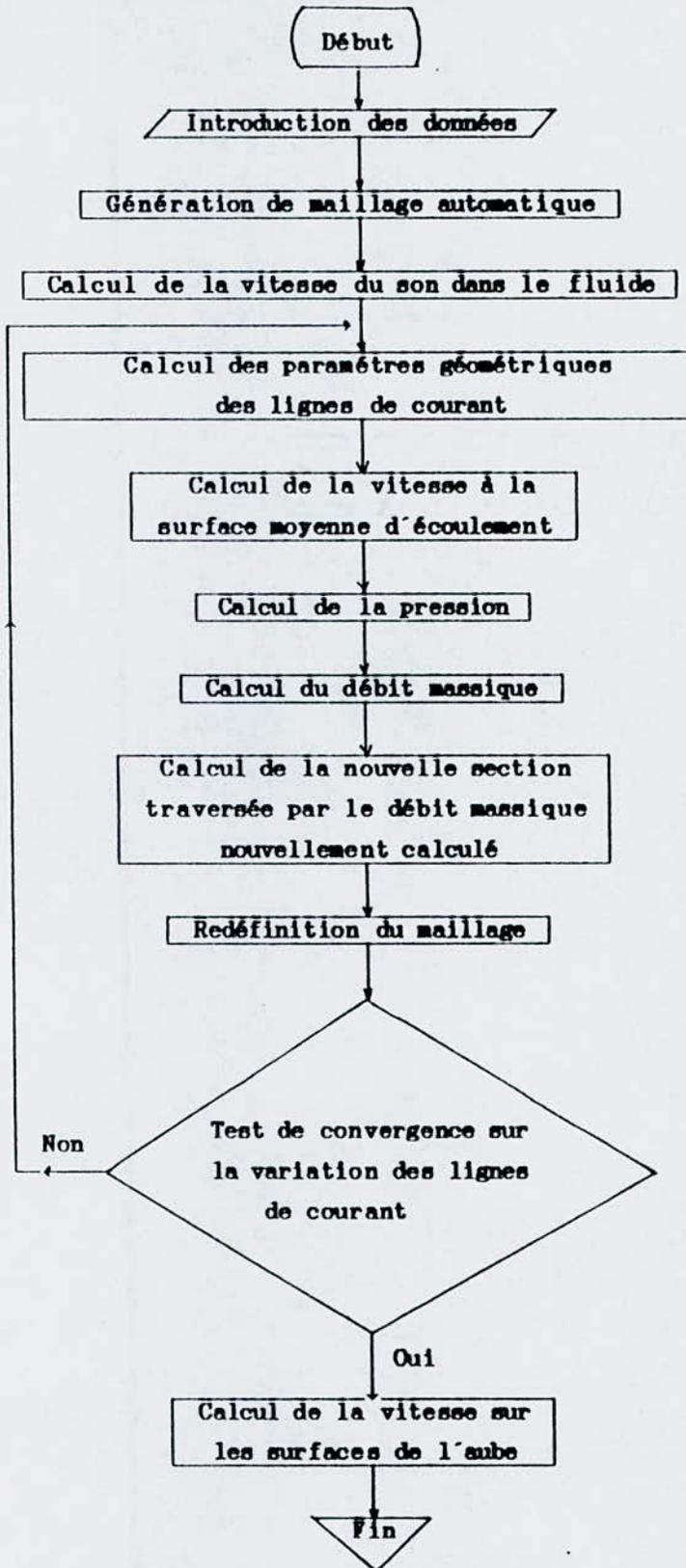


Fig.IV.2: Approximation de la solution de l'équation différentielle $\frac{dW}{ds} = f(W,s)$

ORGANIGRAMME GENERAL DU PROGRAMME



ORGANIGRAMME SUBROUTINE SPLINE

(*) Initialisation de B(1) et B(N) parce que ce sont des valeurs (*) artificielles (h₀=h_{n+1}=0); elles servent à automatiser l'algorithme
 (*) Initialisation de AM(1): AM(1)=D₀=0 condition de la continuité de la dérivée d'ordre 2 de la fonction (elle s'annule aux bornes a=x₀, b=x_n)

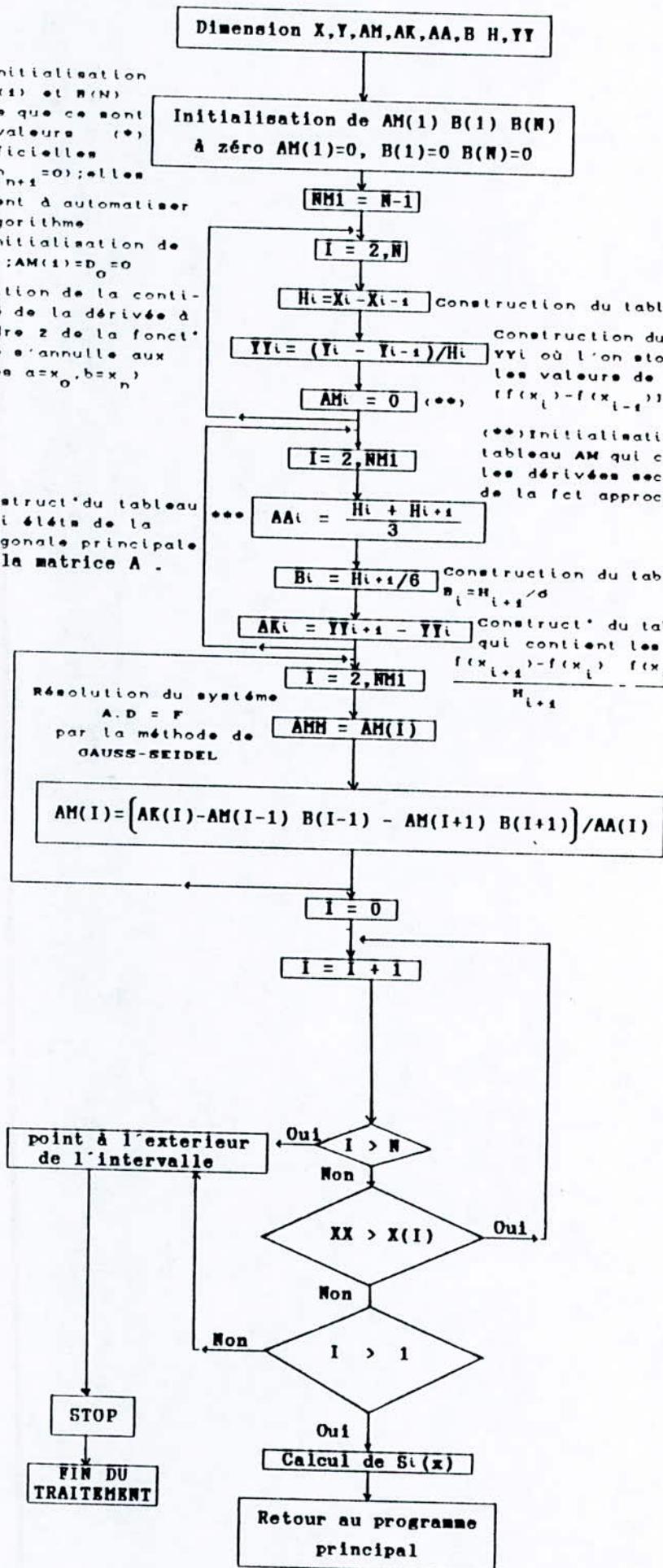
*** Construct' du tableau AAi éléts de la diagonale principale de la matrice A .

Construction du tableau YYi où l'on stocke les valeurs de $\{f(x_i) - f(x_{i-1})\} / \{x_i - x_{i-1}\}$

(**) Initialisation du tableau AM qui contient les dérivées secondes de la fct approchant f_k

Construction du tableau B_i = h_{i+1} / 6

Construct' du tableau AK qui contient les éléments $\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_{i+1}} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h_i}$



V *EXPERIMENTATION NUMERIQUE*

V)-EXPERIMENTATION NUMERIQUE

Le programme élaboré dans notre projet et décrit dans le chapitre précédent (Chap.IV) a été exécuté pour l'exemple suivant:

Nous avons considéré une turbine radiale de 13 aubes.

Nous avons représenté sur les figures (1) jusqu'à (4) les épaisseurs de l'aube et ceci dans le but de permettre une meilleure visualisation. Les figures (1) jusqu'à (3) représentent l'épaisseur de l'aube dans le plan aube à aube et ce à différentes sections du rayon. Enfin la figure (4) permet de voir la variation de cette épaisseur dans un espace tridimensionnel ainsi que la forme de l'aube avec son squelette.

Les profils du flasque avant et arrière (HUB et SHROUD) sont visualisés sur les figures (5) jusqu'à (13).

La vitesse de rotation de la turbine est $\omega = 51.5$ tr/min, le fluide utilisé est de l'air à la température $T = -140^\circ\text{C}$ et la pression à l'entrée P_1 est de 3 bar ($3 \cdot 10^5$ Pa). Le débit massique $Q_m = 0.44$ kg/s et la vitesse $V_{\theta 1}$ du fluide à l'entrée est de 308 m/s

Nous avons fait la supposition que λ et h'_i restaient constants du flasque avant jusqu'au flasque arrière.

A l'entrée, la surface d'écoulement a été assumée dévier de la surface de l'aube de manière à convenir avec la direction de l'écoulement à l'intérieur de la roue. Cet angle à l'entrée est de 35° .

Les lignes de courant sont radiales à l'entrée de la roue, de façon que la surface de courant soit indépendante de z quand elle dévie de la surface de l'aube (l'écoulement n'est plus parfaitement guidé par l'aube).

Pour une distance donnée à partir de l'entrée, θ varie en puissance trois de r (et indépendant de z).

Soit r_b le rayon à partir duquel la surface d'écoulement n'est plus guidée par l'aube, alors une approximation à r_b est donnée par:

$$r_b = r_i e^{-0.71\Delta\theta} \quad [\text{ref 6}]$$

Une correction à la surface d'écoulement sera apporté en exprimant son équation paramétrique (pour $r \geq r_b$) par :

$$\theta = - \frac{(r - r_b)^3 \tan \beta_i}{3 r_i (r_i - r_b)^2}$$

sa différentiation donne:

$$\frac{\partial\theta}{\partial r} = - \frac{(r - r_b)^2 \tan \beta_i}{r_i (r_i - r_b)^2} ; (1)$$

Cette dernière est utilisée dans l'équation [19.Chap.III] et [2.Chap.IV] quand $r > r_b$ mais pas dans l'équation [26.Chap.III] sachant que celle-ci se rapporte à la forme de l'aube.

Pour l'exemple exécuté $r_b = 04$ Cm et à la sortie il a été assumé que la surface d'écoulement est guidée par l'aube .

Les pertes $\Delta P''$ ont été estimées à 0.17 bar variant linéairement de l'entrée à la sortie.

Les lignes de courant après convergence des calculs (ainsi que les lignes quasi-orthogonales, qui du reste demeurent fixes) ont été représentées sur la figure (14).

Du fait que le calcul est réstreint à l'intérieur de la roue le comportement des lignes de courant à l'extérieur de celle-ci n'est pas donné.

Nous avons ensuite représenté les distributions du gradient de vitesse (lignes d'égales vitesses) fig.(5d) et les distributions du gradient de pression (lignes d'égales pressions) fig.(7d).

Sur la figure (13) nous avons représenté le diagramme de vitesse sur les surfaces de l'aube (Intrados, Extrados) ainsi que la vitesse d'écoulement de la surface moyenne et ce en trois endroits: flasque avant, flasque arrière, surface de révolution moyenne.

Sur la figure (7d) il est nettement visible que la pression diminue dans la direction de l'écoulement, phénomène qui d'ailleurs est tout à fait normal pour une turbine radiale.

La figure (5d) montre que la vitesse augmente en général, excepté le long du flasque avant juste après l'entrée où elles diminuent très faiblement.

Bien que l'augmentation de vitesse soit indésirable ceci reste toujours à la limite de l'acceptable en raison du gradient de pression favorable. Cependant ce qu'on remarque de plus inquiétant, ce sont les vitesses négatives que l'on observe sur le diagramme des vitesses de l'aube figure (13). Elles indiquent un décollement sur l'intrados de l'aube qui peut alors amener à des turbulences causant de ce fait de fortes pertes. De même, la baisse sérieuse du gradient de vitesse indiqué sur la surface de pression à proximité du flasque avant et du flasque arrière, conduit à la séparation de l'écoulement c'est-à-dire des pertes.

Ceci étant, nous avons essayé de voir quelle serait l'influence de quelques paramètres importants de la turbomachine sur l'écoulement. Pour ce faire nous avons fait varier deux paramètres, -séparément chacun- le débit massique Q_m et le nombre d'aubes.

V-1)-RÉSULTATS DE L'EXPÉRIMENTATION SUR LE DÉBIT MASSIQUE:

Les résultats de l'expérimentation sur le débit massique sont représentés sur les graphiques :fig.(5a)d); fig.(5b)c); fig.(6); fig.(7a)d);fig.(7b)c);fig.(8).

On peut comme pour les cas précédents faire les conclusions suivantes, en disant qu'à l'intérieur de la roue la pression diminue dans la direction de l'écoulement et que cette pression augmente avec l'augmentation du débit massique. Il aurait été peut être plus intéressant de voir comment aurait évolué l'écoulement si l'on devait augmenter nettement plus le débit massique.

V-2) EXPERIMENTATION SUR LE NOMBRE D'AUBES :

Plus intéressantes sont les courbes recueillies à partir de la variation du nombre d'aubes : fig.[9a)b)c)d)] fig.(10) fig.[11a)b)c)d)] fig.(12)

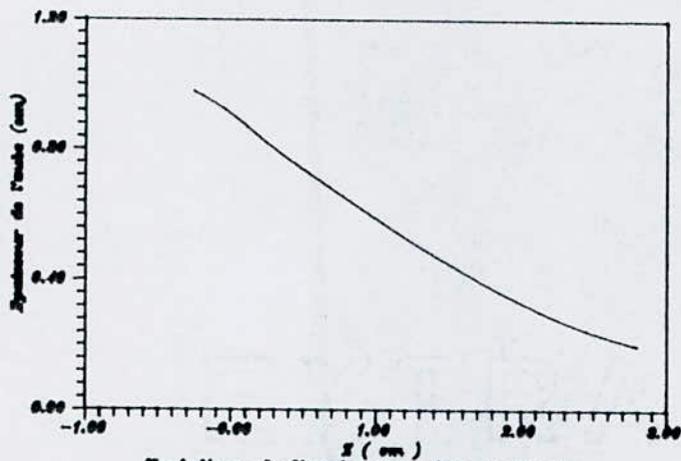
En effet on voit sur la figure [9d)] que pour le double du nombre d'aube considéré au départ (13) la vitesse augmente pour atteindre des vitesses locales très élevées ,en certains régions elles sont de l'ordre de la vitesse du son ($1 \sim 1.2 M$), ce seront des vitesses transoniques, à la limite supersoniques.

Elles se localisent sur le flasque arrière (SHROUD) juste avant la sortie et l'on peut dire qu'en passant sur le fait que l'on soit en supersonique, les zones à risque de cavitation dans une turbine radiale se situent à la sortie sur le flasque arrière; le problème qui se pose dans ce cas de figure, c'est que l'on se trouve devant un écoulement mixte (régions à vitesses subsoniques et régions à vitesses supersoniques) ceci est en contradiction totale avec notre hypothèse qui réside dans l'application de la théorie d'EULER) théorie basée essentiellement sur la continuité de l'écoulement, or dans un écoulement supersonique , il se produit une onde de chocs qui va créer des zones de discontinuités au niveau des vitesses, et de ce fait l'écoulement n'est plus régissable par la théorie d'EULER, on applique alors le théorème d'HUGONIOT pour palier cette discontinuité que l'on voit bien sur la fig.(12), figure qui représente le gradient de pression . On dit aussi qu'il y 'a inversion des phénomènes observés.

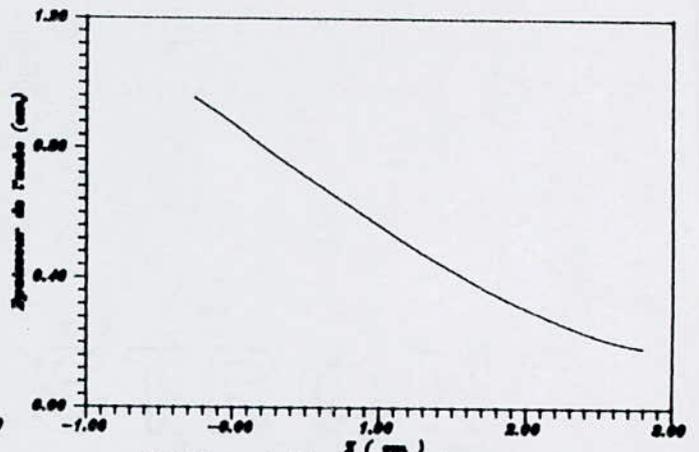
Nous avons aussi négligé délibérément un facteur important qui réside dans le fait que lorsque nous avons augmenté le nombre d'aubes , nous n'avons pas augmenté les pertes par frottements d'où la très nette augmentation de la vitesse.

On voit donc que l'on doit trouver un compromis entre le débit et les pertes. Le nombre d'aubes qui correspond à ce compromis est communément appelé nombre d'aube optimal.

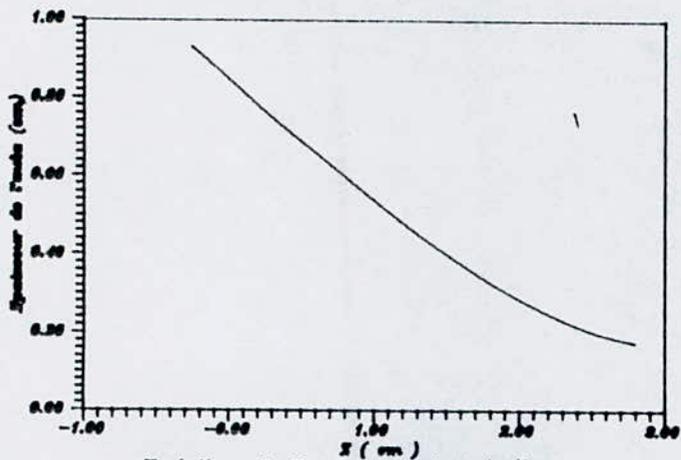
Nous n'avons pas poussé notre expérimentation plus loin que ce qu'il n'a été présenté ici , mais l'on peut faire varier encore une infinité de paramètres et voir quel serait leur incidence sur l'écoulement (angle d'attaque, forme de l'aube, profil des flasques, vitesse de rotation, température et pression d'entrée etc...).



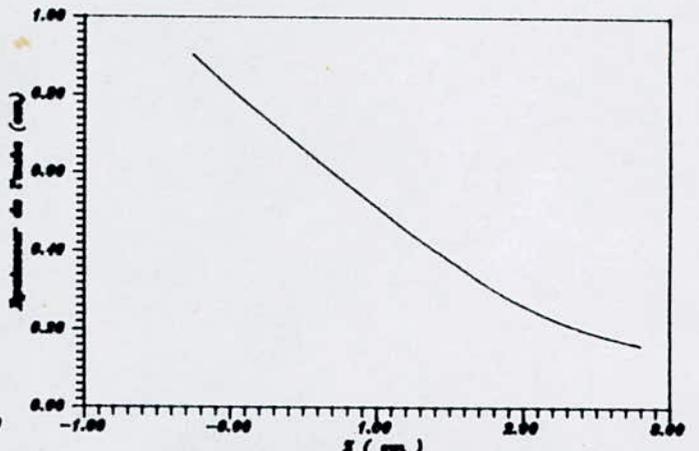
Variations de l'épaisseur axiale de l'aube pour un rayon donné ($r = 1.05$ cm)



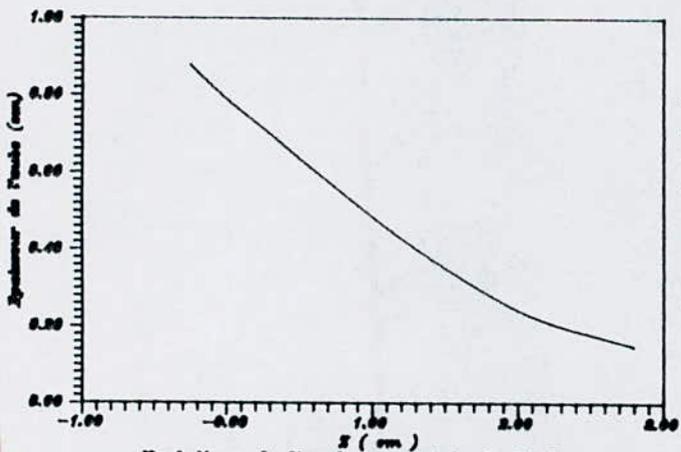
Variations de l'épaisseur axiale de l'aube pour un rayon donné ($r = 1.91$ cm)



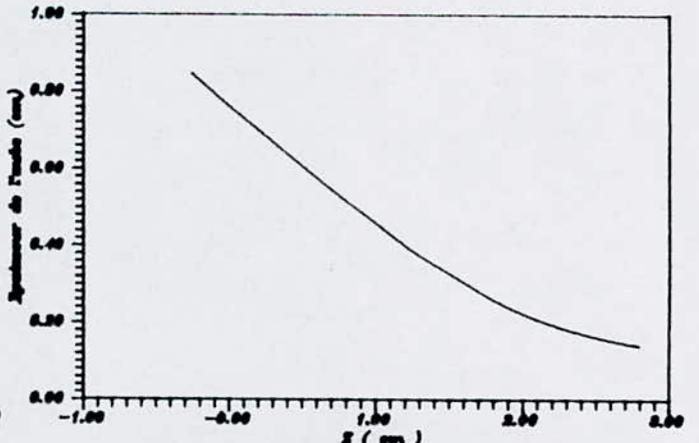
Variations de l'épaisseur axiale de l'aube pour un rayon donné ($r = 2.18$ cm)



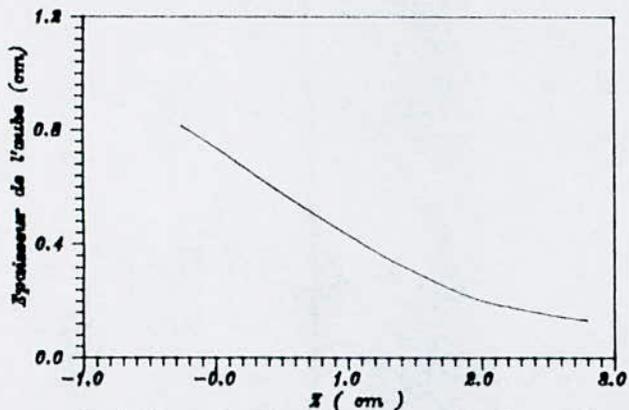
Variations de l'épaisseur axiale de l'aube pour un rayon donné ($r = 2.41$ cm)



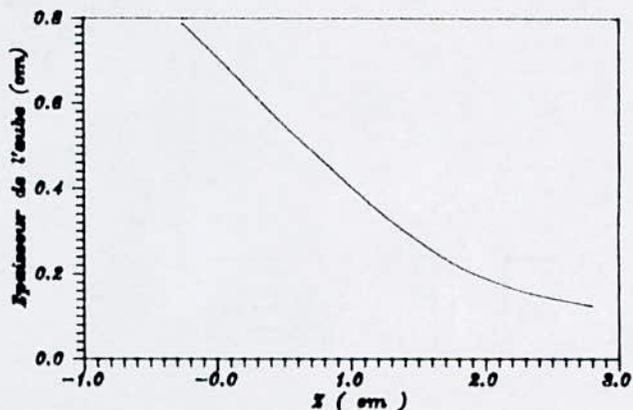
Variations de l'épaisseur axiale de l'aube pour un rayon donné ($r = 2.67$ cm)



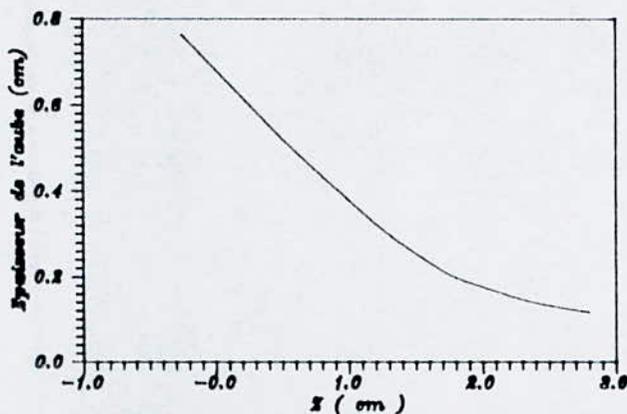
Variations de l'épaisseur axiale de l'aube pour un rayon donné ($r = 2.82$ cm)



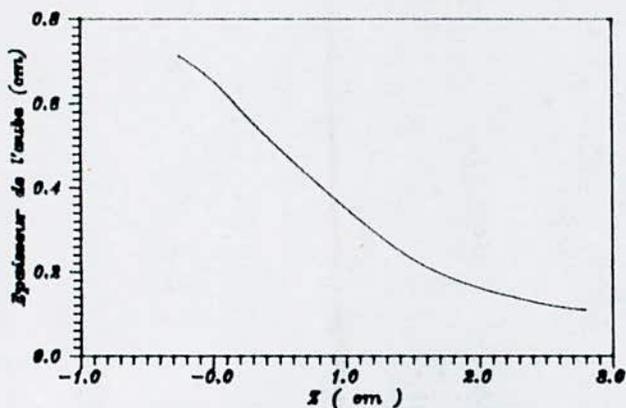
Variations de l'épaisseur axiale de l'aube pour un rayon donné ($r = 3.18$ cm)



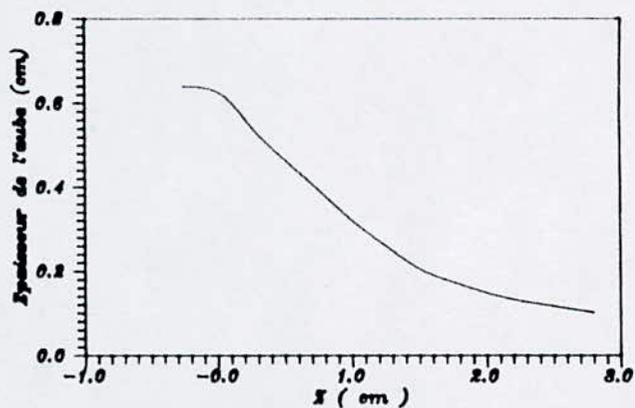
Variations de l'épaisseur axiale de l'aube pour un rayon donné ($r = 3.43$ cm)



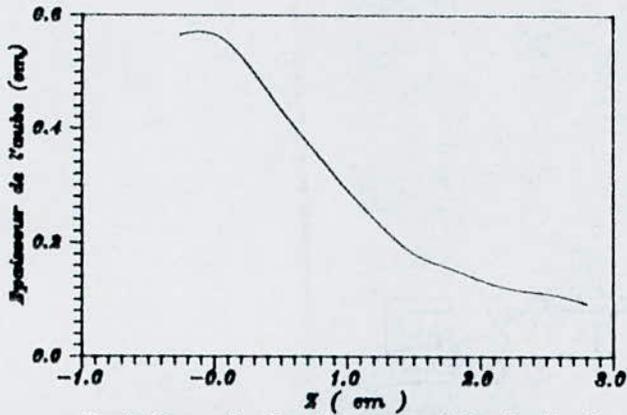
Variations de l'épaisseur axiale de l'aube pour un rayon donné ($r = 3.69$ cm)



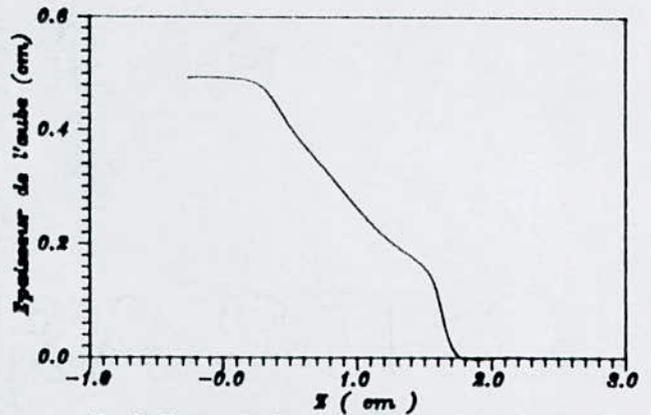
Variations de l'épaisseur axiale de l'aube pour un rayon donné ($r = 3.94$ cm)



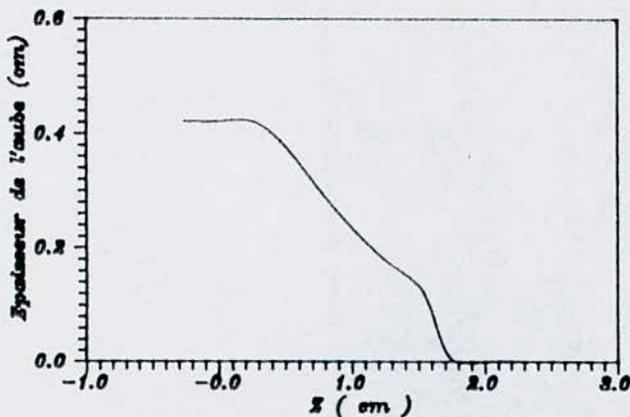
Variations de l'épaisseur axiale de l'aube pour un rayon donné ($r = 4.20$ cm)



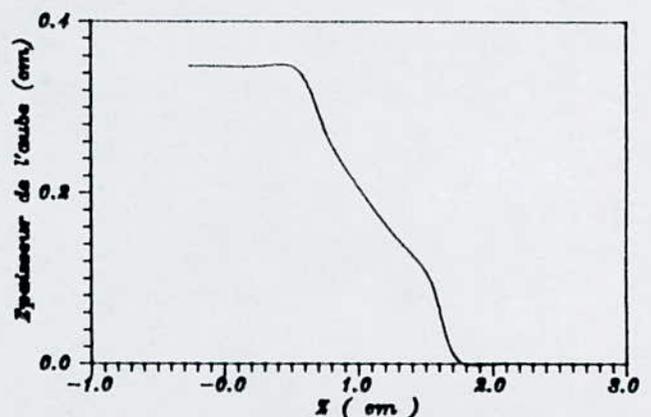
Variations de l'épaisseur axiale de l'aube pour un rayon donné ($r = 4.45$ cm)



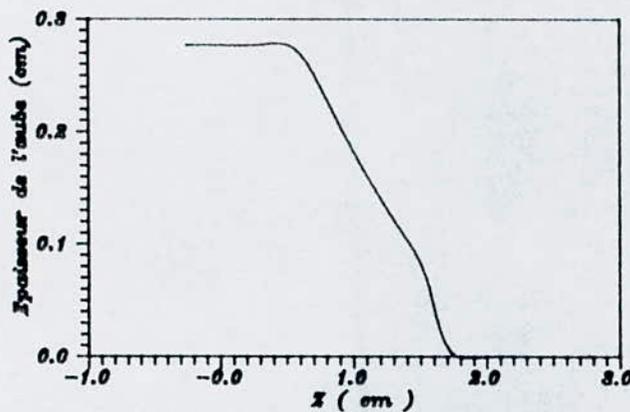
Variations de l'épaisseur axiale de l'aube pour un rayon donné ($r = 4.70$ cm)



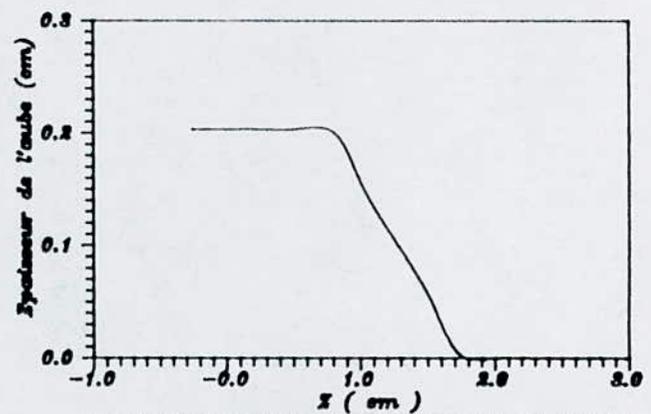
Variations de l'épaisseur axiale de l'aube pour un rayon donné ($r = 4.96$ cm)



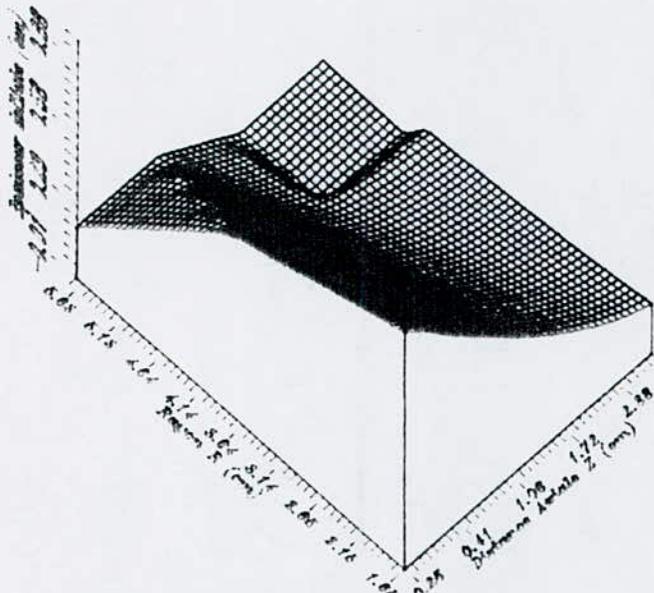
Variations de l'épaisseur axiale de l'aube pour un rayon donné ($r = 5.21$ cm)



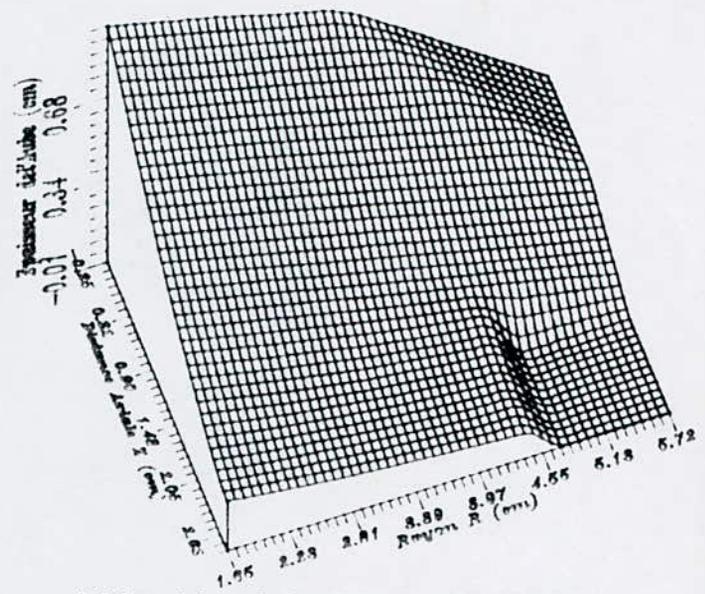
Variations de l'épaisseur axiale de l'aube pour un rayon donné ($r = 5.46$ cm)



Variations de l'épaisseur axiale de l'aube pour un rayon donné ($r = 5.72$ cm)



Rotation Autour de $X = 225$; Sweep = 60 .



Rotation Autour de $X = 340$; Sweep = 60 .

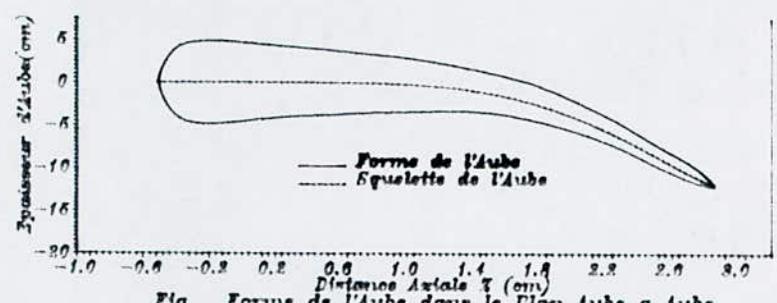
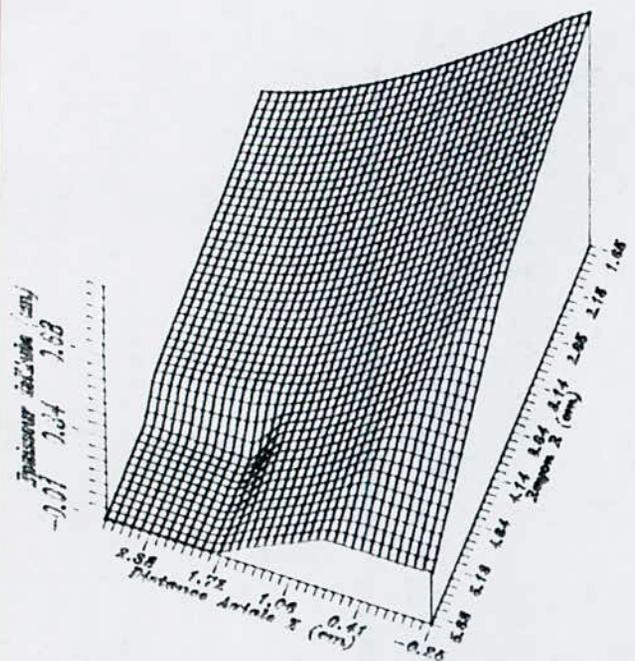
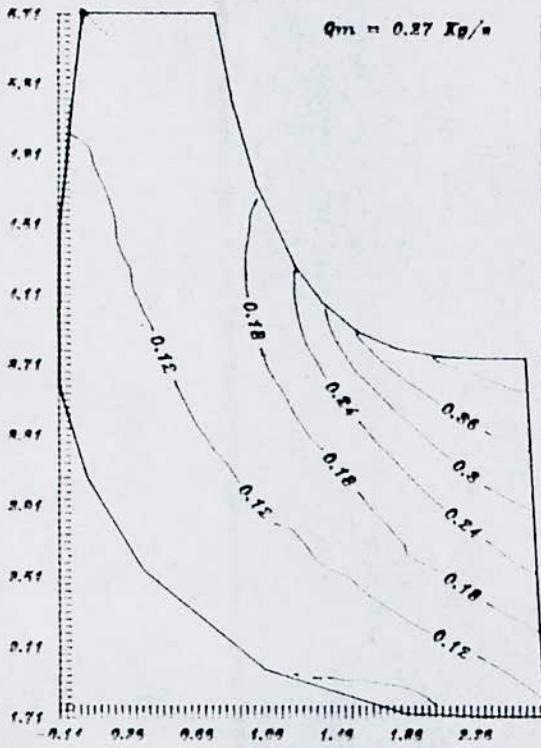


Fig Forme de l'Aube dans le Plan Aube a Aube



Fluide DMKos : $\Delta p = 3.11 \text{ Kg/m}^2$; $T = -140 \text{ C}$; $C_1 = 867 \text{ m/s}$; $P_1 = 3 \text{ bar}$



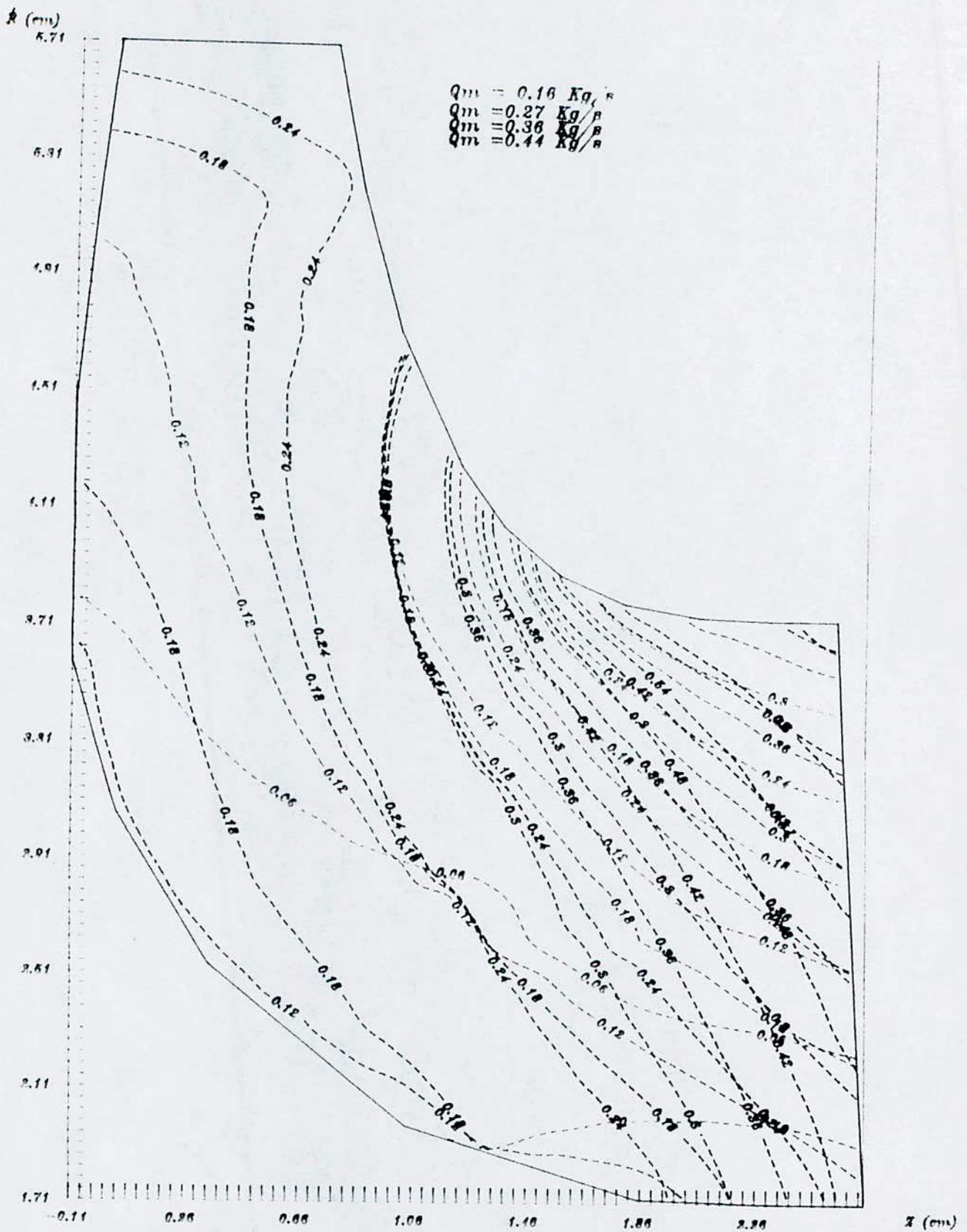


Fig Variation du Rapport de Vitesses (W/C_1) en Fonc du Debit Massique Q_m
 Fluide Utilise : Air = 3.11 Kg/m^3 ; $T = -140 \text{ C}$; $C_1 = 357 \text{ m/s}$; $P_1 = 3 \text{ bar}$

Fluide Utilisé : Air = 1.29 Kg/m³ ; T = -140 C ; C_l = 357 m/s ; P_l = 3 bar

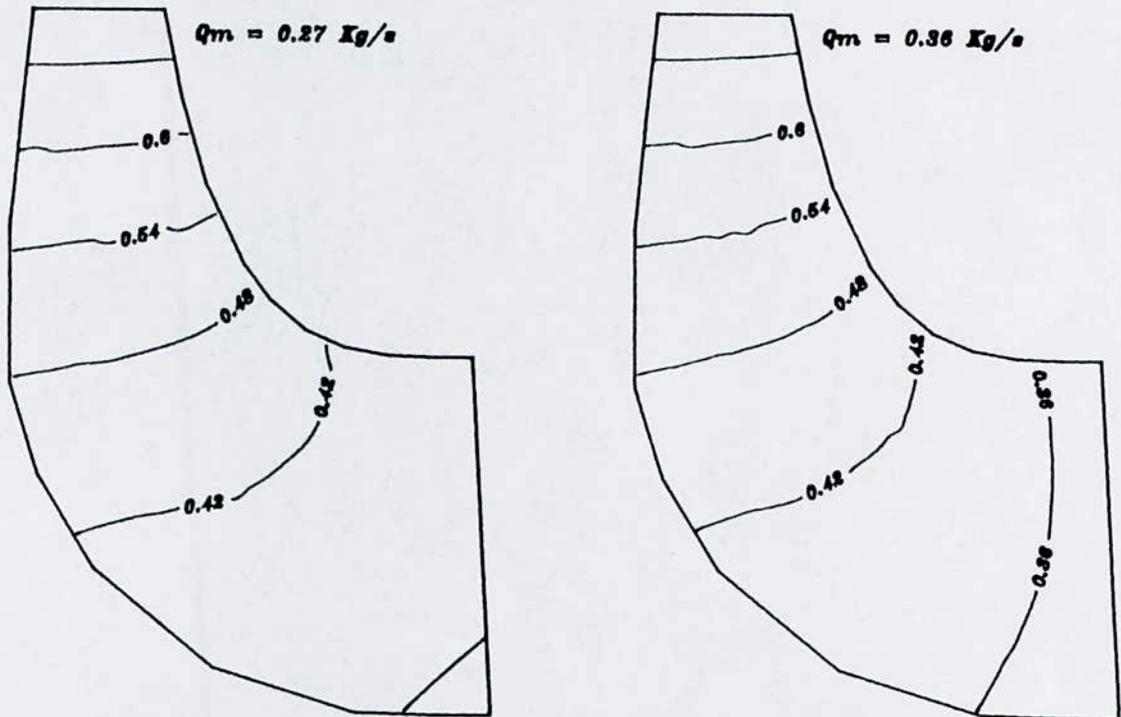


Fig: b) a) Variation du Rapport de Pressions (P/P₁) en Fonc du Débit Massique

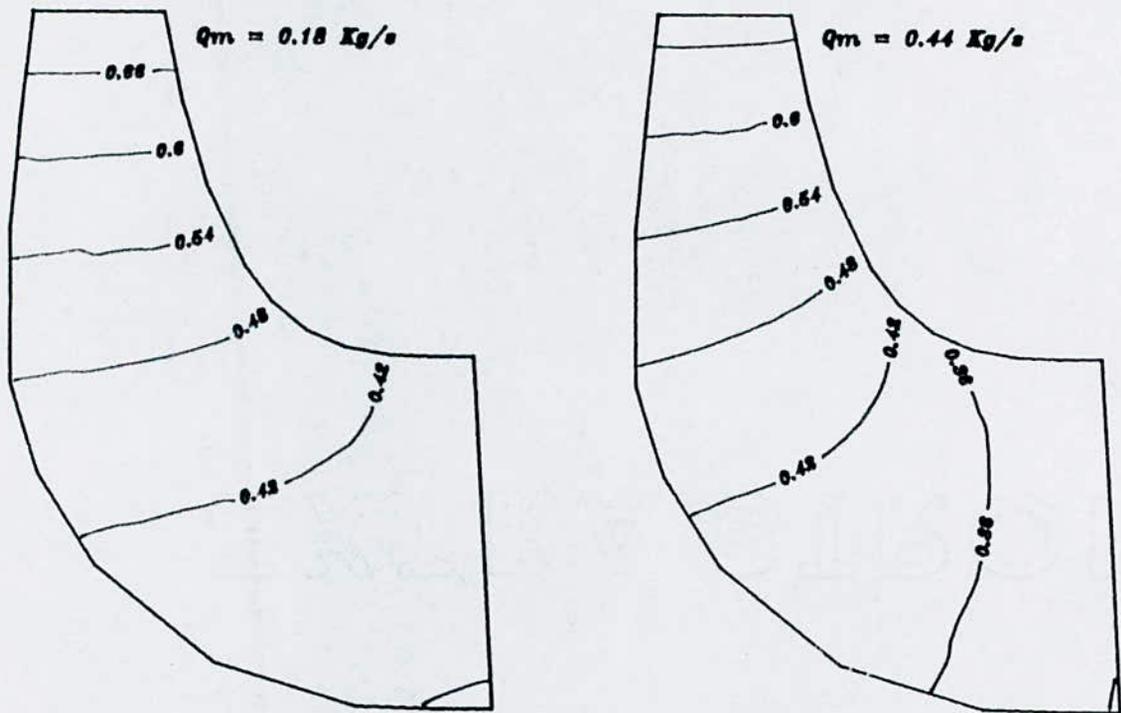
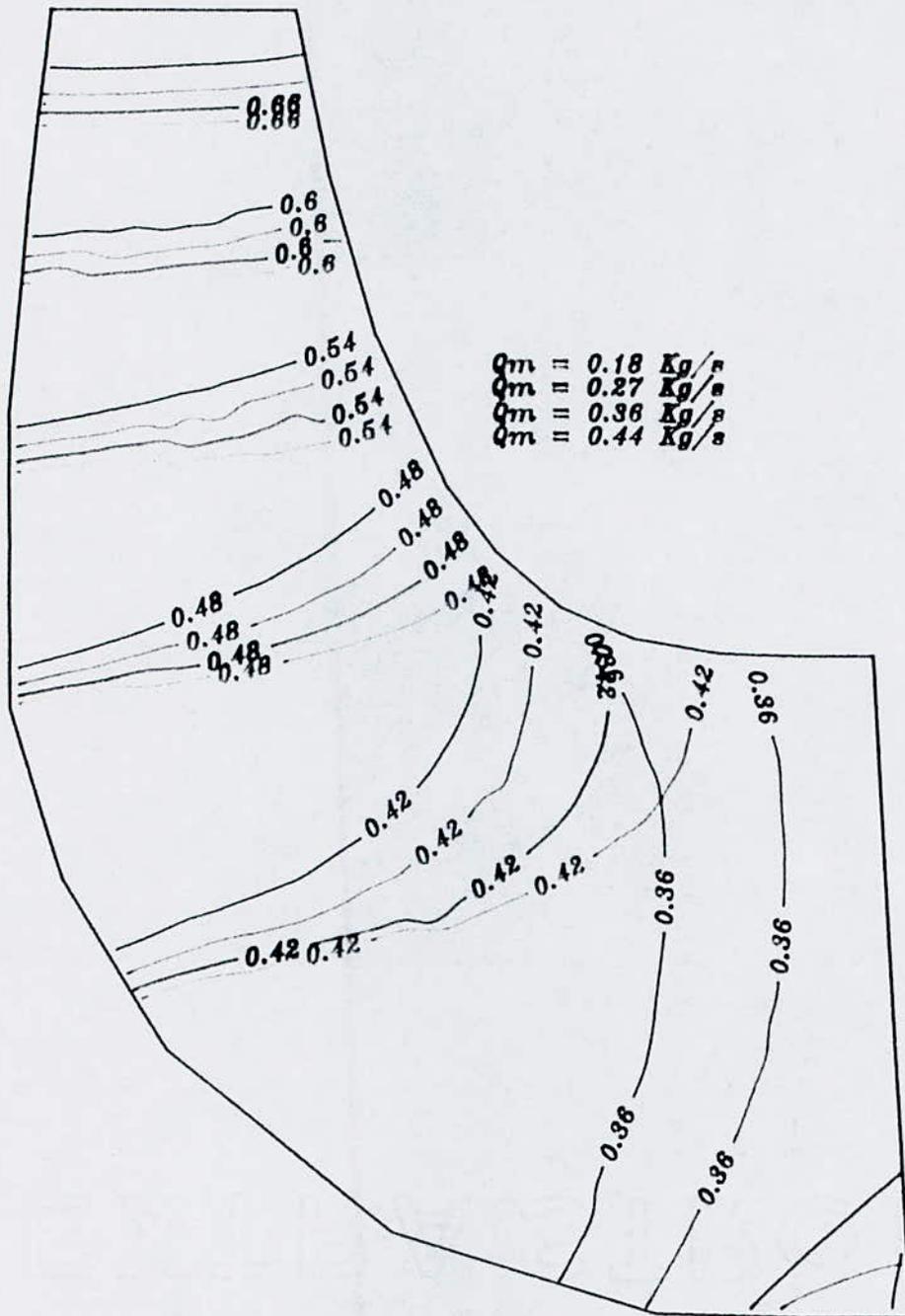


Fig: b) a) Variation du Rapport de Pressions (P/P₁) en Fonc du Débit Massique



Fluide Utilisé : Air = 3.11 Kg/m^3 ; $T = -140 \text{ C}$; $C_A = 357 \text{ m/s}$; $P_0 = 3 \text{ bar}$
 Fig : Variation du Rapport de Pression (P/P_0) en Fon du Débit Massique

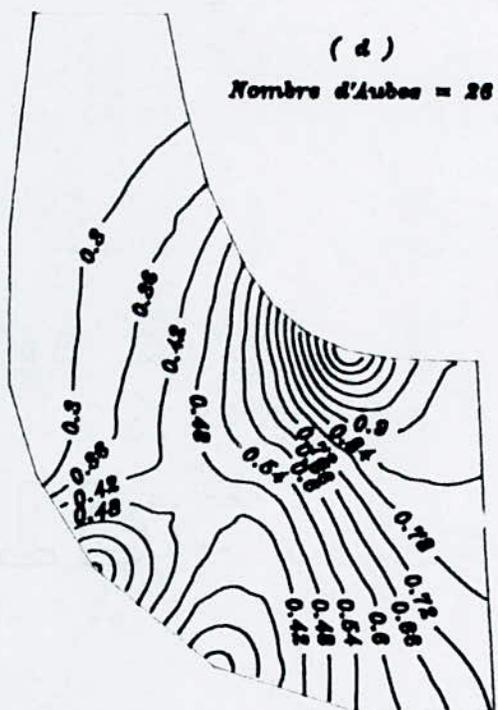
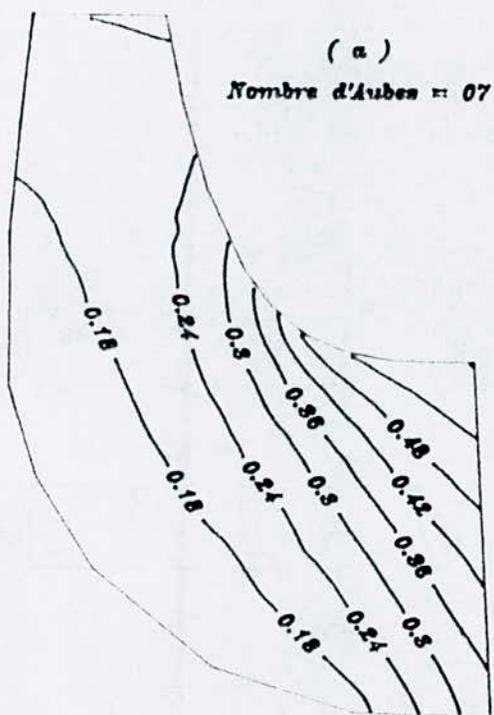
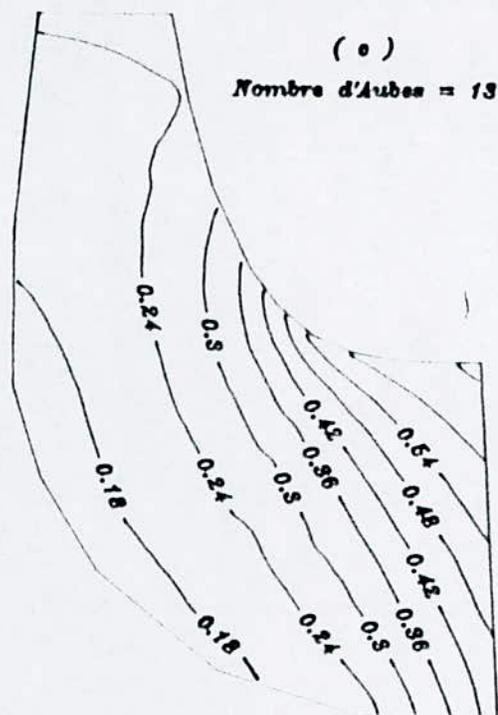
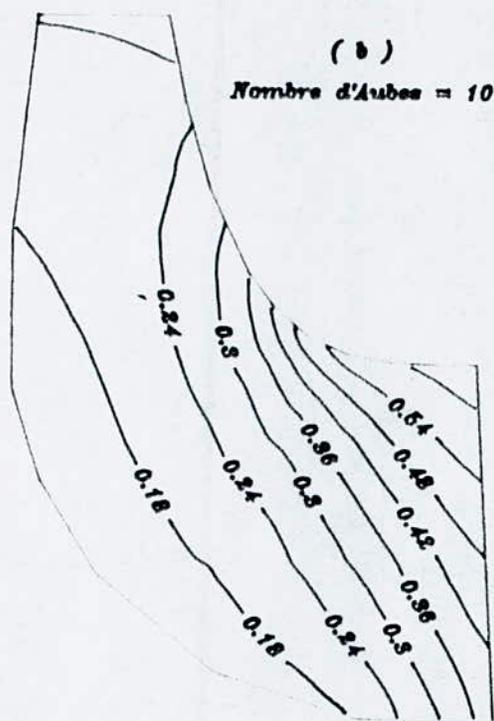


Fig a) b) c) d): Variation du Rapport de Vitesses (W/C_1) en Fonc du Nbre d'Aubes
 Fluide Utilisé : Air = 3.11 Kg/m^3 ; $T = -140 \text{ C}$; $C_1 = 357 \text{ m/s}$; $P_1 = 3 \text{ bar}$
 $Q_m = 0.14 \text{ Kg/s}$

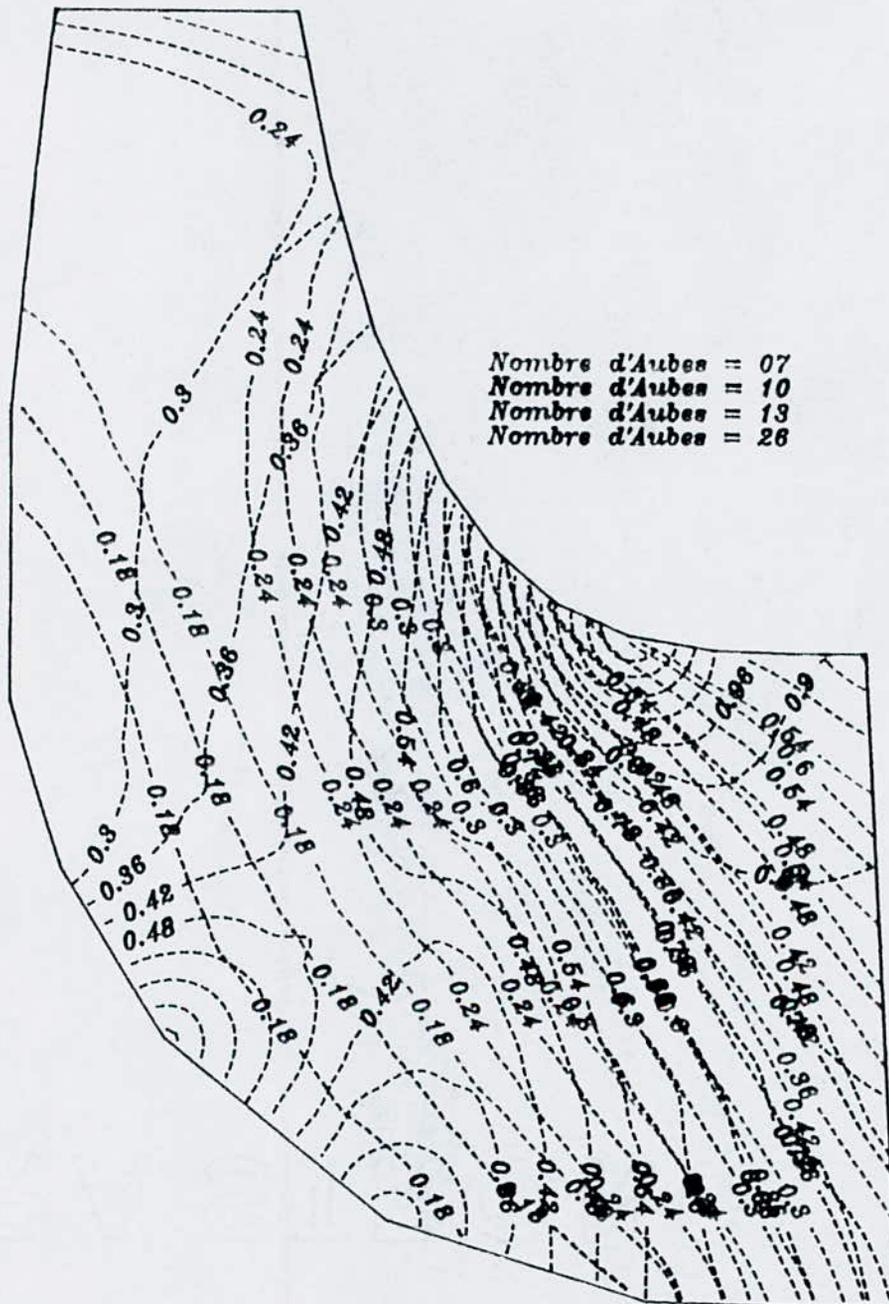


Fig : Variation du Rapport de Vitesse (W/C_x) en Fon du Nbre d'Aubes
 Fluids Utilise : Air = 3.11 Kg/m^3 ; $T = -140 \text{ C}$; $C_x = 357 \text{ m/s}$; $P_i = 3 \text{ bar}$
 $Q_m = 0.44 \text{ Kg/s}$

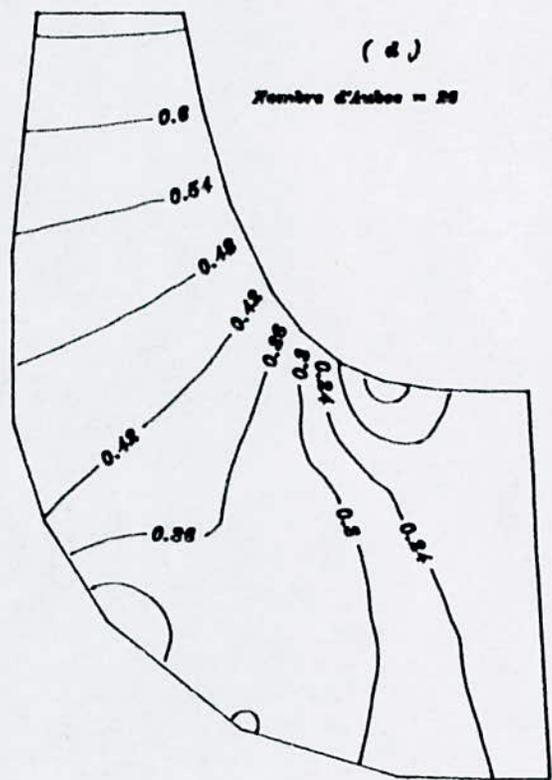
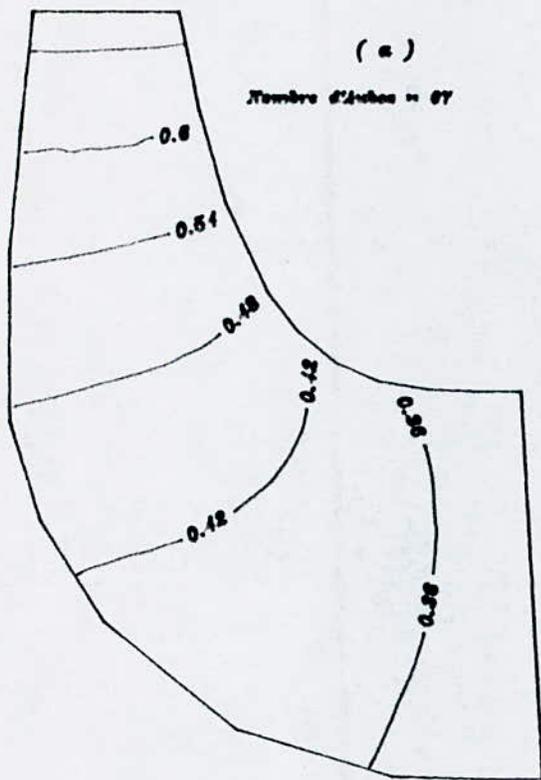
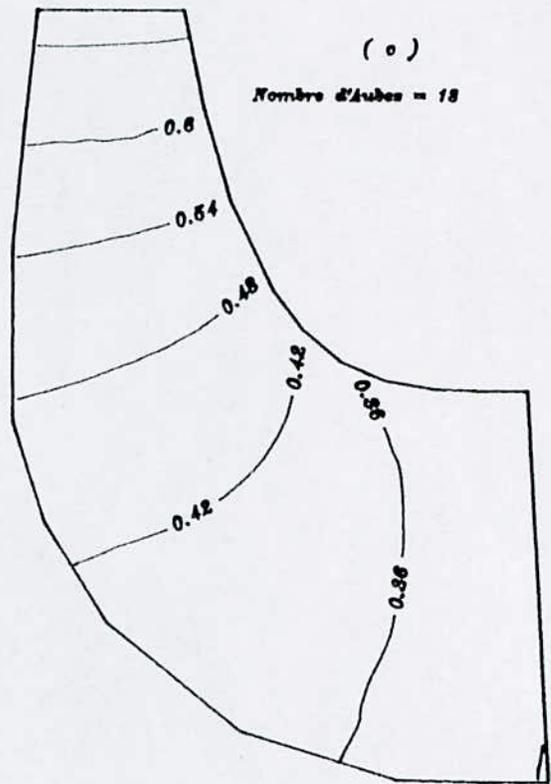
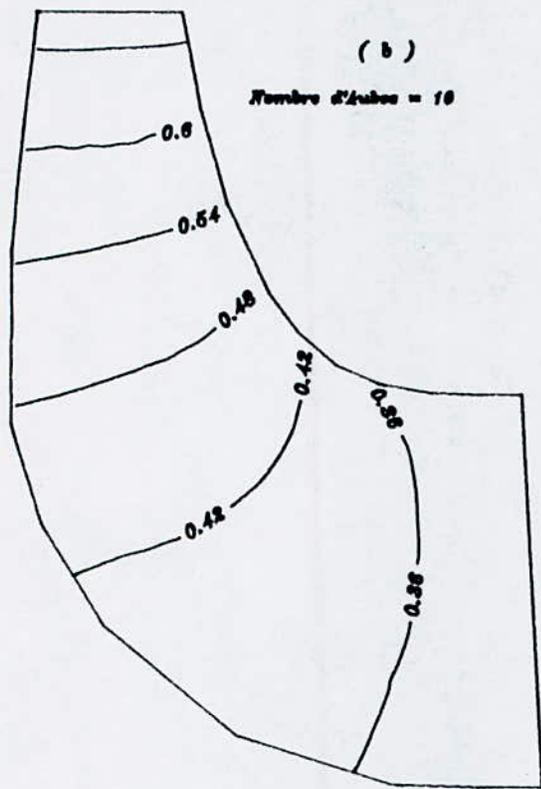


Fig a)b)c)d): Variations du Rapport de Pression (P/P_1) pour ' Nbres d'Aubes
 Fluides UHMe : Air = 3.11 Kg/m³ ; T = -140 C ; C1 = 357 m/s ; P1 = 3 bars
 Qm = 0.44 Kg/s

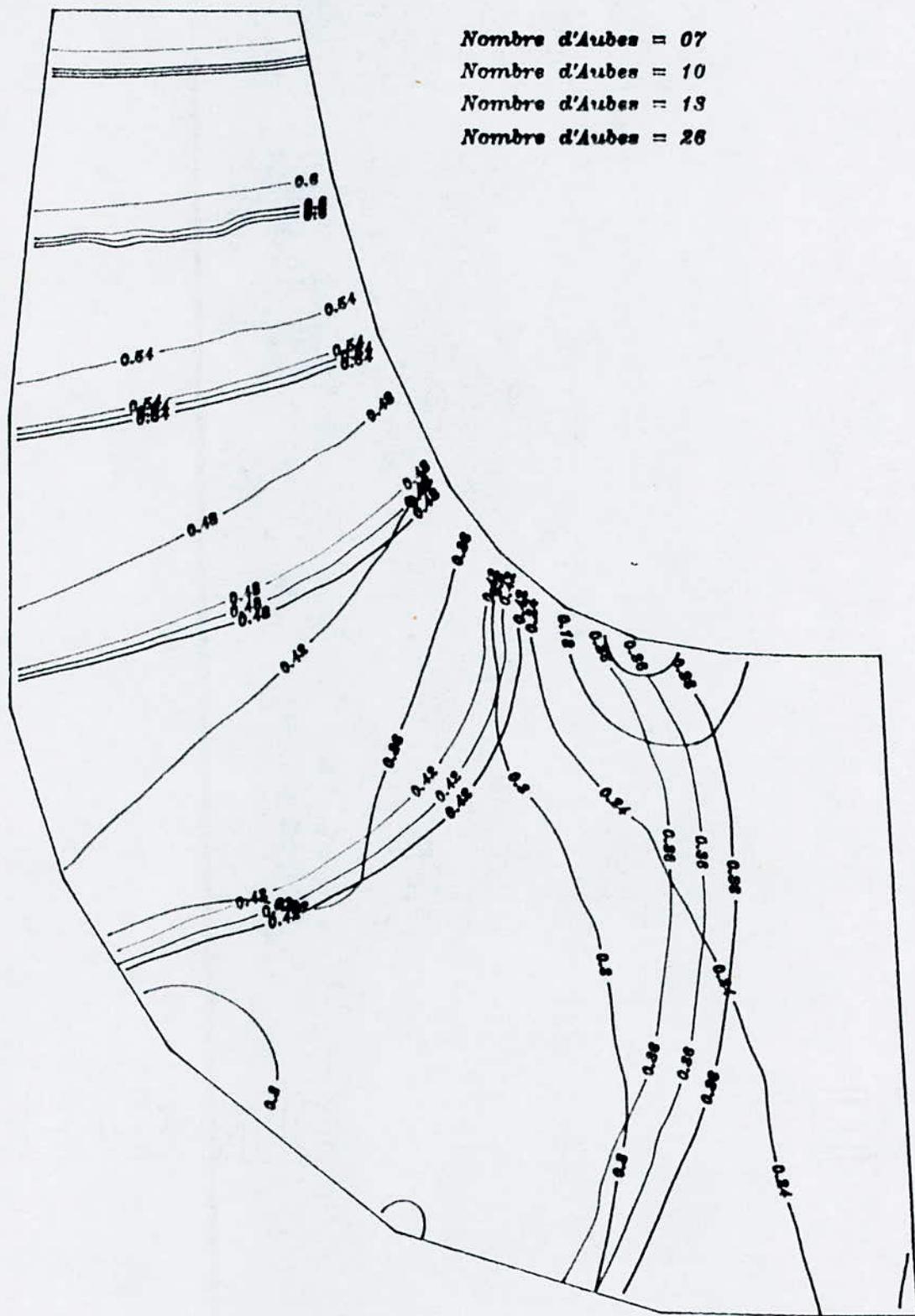


Fig : Variations du Rapport de Pression (P/P_1) Pour Différents Nombres d'Aubes
 Fluide Utilisé : Air = 1.21 Kg/m^3 ; $T = -140 \text{ C}$; $C_1 = 357 \text{ m/s}$; $P_1 = 3 \text{ bars}$
 $Q_m = 0.44 \text{ Kg/s}$

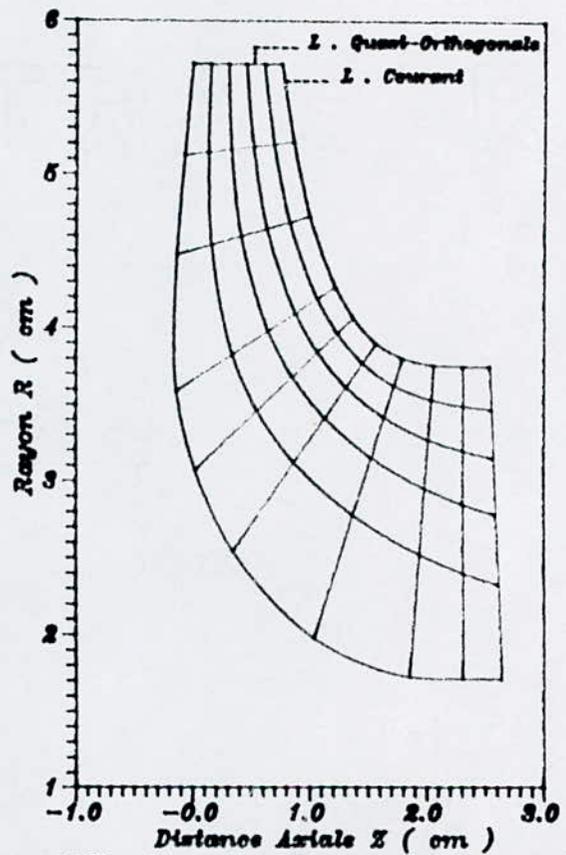
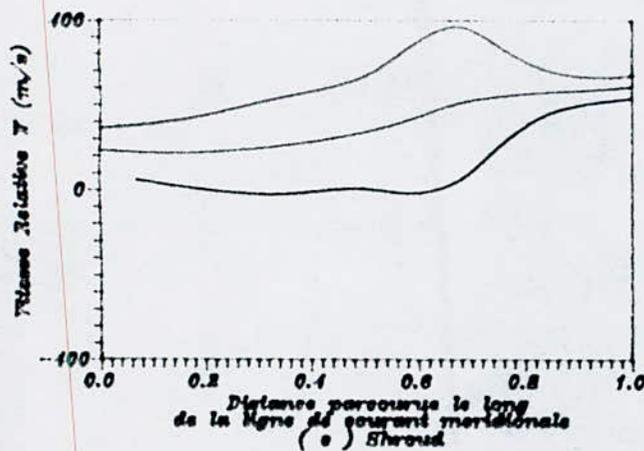
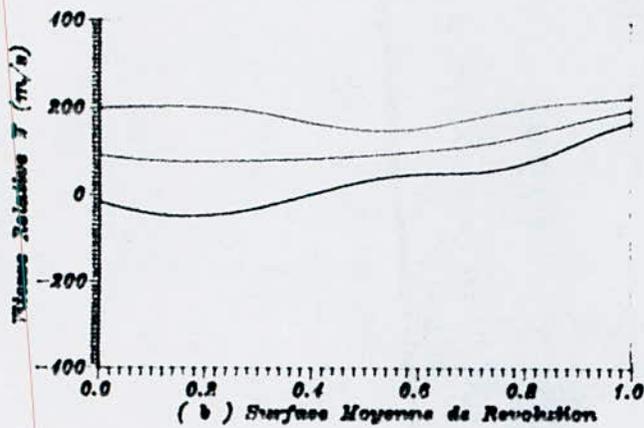
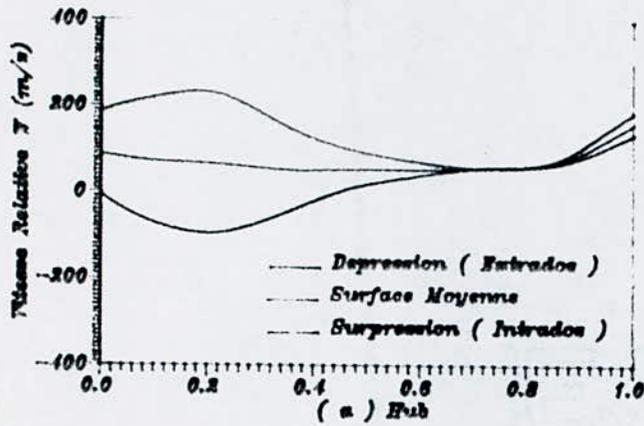


Fig Situation des Lignes de Courant Apres Convergence

Fig :Diagramme des Vitesses sur les Surfaces de l'Aube

CONCLUSION

CONCLUSION:

Au terme de ce travail nous arrivons aux conclusions suivantes:

L'analyse de l'écoulement méridional quoique ne représentant pas la réalité de l'écoulement à l'intérieur de la turbomachine fournit une note d'information assez précise pour "l'ingénierie".

De même la technique utilisée basée sur les lignes quasi-orthogonales qui restent fixes, indifféremment aux variations de la position des lignes de courant, est une technique qui allie simplicité et puissance.

On est cependant amené à faire les réflexions suivantes:

Il serait souhaitable d'étendre ce travail jusqu'à approcher l'écoulement tridimensionnel en analysant l'écoulement dans le plan aube à aube et procéder à la reconstitution par couplage de l'écoulement pseudo tridimensionnel. Le cas idéal serait d'analyser l'écoulement en tridimensionnel, tâche extrêmement ardue et laborieuse, et qui reste à ce jour un sujet de recherche dans des pays à technologie avancée.

L'autre point non moins négligeable que l'on se doit de soulever, réside dans l'hypothèse simplificatrice que l'on a utilisé dans notre équation d'écoulement, l'hypothèse d'un écoulement PARFAIT ISENTROPIQUE. Il aurait été très intéressant du point de vue apport scientifique de considérer la viscosité en l'incluant dans nos équations puis résoudre le problème. Il n'est cependant pas possible d'aborder tout à la fois et tout seul, ceci représente non seulement un travail d'équipe, mais une technicité élevée et une connaissance parfaite des écoulements secondaires, lesquels sont jusqu'à aujourd'hui les soucis majeurs des scientifiques.

ANNEXE A

ANNEXE A

Liste des symboles (utilisés principalement dans le
chapitre III)

(Toutes les grandeurs sont exprimées
en U.S.I.)

- A : Paramètre [eqt 19 § III]
a : Paramètre [eqt 15 § III]
B : Paramètre [eqt 19 § III]
b : Paramètre [eqt 15 § III]
C : Paramètre [eqt 19 § III]
c : Paramètre [eqt 15 § III]
 c_i : Vitesse du son dans le fluide,
 c_p : Chaleur spécifique à température constant
D : Paramètre [eqt 19 § III]
f : Fonction quelconque
g : Accélération de la gravité
h : Enthalpie statique
N : Nombre d'aubes
n : Distance le long d'une normale à une ligne de courant
méridionale
p : Pression statique absolue
 $\Delta p''$: Pertes en pression relative totale entre l'entrée et un
point quelconque de la roue
q : Direction à une ligne de courant tridimensionnelle
R : Constante individuelle des gaz
r : Rayon compté à partir de l'axe de rotation
 r_b : Rayon en lequel la surface de lignes de courants est assumée
tangente à la forme moyenne de l'aube
 r_c : Rayon de courbure d'une ligne de courant
s : Distance le long d'une ligne quasi orthogonale dans le plan
méridional
T : Température
t : Temps

- t_n : Epaisseur de l'aube dans le plan Aube-à-Aube
 t_θ : Epaisseur de l'aube dans la direction tangentielle t_θ
 \bar{u} : Vecteur unitaire
 V : Vitesse absolue
 W : Vitesse relative
 w : Débit massique transversant la surface de révolution générée par une ligne quasi orthogonal entre le flasque avant et un point donné sur la ligne quasi orthogonale
 x : Coordonnée x
 y : Coordonnée y
 z : Distance axiale
 α : Angle que fait le vecteur de vitesse relative et le plan méridional
 γ : Rapport des chaleurs spécifiques $\frac{C_p}{C_v}$
 θ : Coordonnée angulaire relative
 $\Delta\theta$: Angles entre les surfaces des aubes en un point donné
 λ : $r_i V_{\theta_i}$ prérotation
 ρ : Masse volumique
 ϕ : Coordonnée angulaire absolue
 ψ : Angle que fait une ligne quasi orthogonale et la direction radiale
 ω : Vitesse de rotation

Indices

- i : Entrée
 j : Numéro de ligne de courant
 l : Surface de l'aube (Intrados)
 m : Composante dans la direction de la ligne de courant méridionale
 n : Composante normale
 r : Composante radiale
 s : Flasque arrière

- t : Surface de l'aube (Extrados)
- x : Composante dans la direction x
- y : Composante dans la direction y
- z : Composante axiale
- θ : Composante tangentielle

Exposant

- ' : Conditions d'arrêt absolues
- " : Conditions d'arrêt relatives
- : module d'un vecteur

ANNEXE B

VITESSES SUR L'INTRADOS ET L'EXTRADOS DE L'AUBE

DETAILS DE CALCULS

- La vitesse tangentielle de la roue en n'importe quel point est donnée par : ωr

- la vitesse absolue tangentielle de la particule fluide sera :

$$\omega r + W_{\theta}$$

$$\text{avec } \begin{cases} W_m = W \cos(\beta) \\ W_{\theta} = W \sin(\beta) \end{cases}$$

HYPOTHESES MAJEURES

- Le long des surfaces de l'aube (Intrados et Extrados), les vitesses sont considérées constantes et égales à :

$$W_1 \text{ et } W_t$$

- Les directions de l'écoulement sont supposées constantes et égales à :

$$\beta_1 \text{ et } \beta_t$$

- Le long des lignes d'un même rayon, la vitesse varie de W_1 à W_t et la direction de l'écoulement varie de β_1 à β_t .

- La continuité et l'irrotationnalité du mouvement nous donne :

$$\left. \begin{array}{l} W = \frac{W_1 + W_t}{2} \\ \text{et} \\ \beta = \frac{\beta_1 + \beta_t}{2} \end{array} \right\} ; (1)$$

- Pour un écoulement ISENTROPIQUE (écoulement sans ondes de chocs, non visqueux, sans transfert de chaleur), la circulation de la particule fluide est nulle d'où :

$$\left\{ \left(W + \omega.r.\sin(\beta) \right)_1 \frac{dM}{\cos(\beta_1)} - \left(W + \omega.r.\sin(\beta) \right)_t \frac{dM}{\cos(\beta_t)} + \frac{d}{dM} \left[\left(\omega.r + W_{\theta} \right)_{\text{moy}} . r . \Delta\theta \right] . dM = 0 \right\} ;(2)$$

avec $\left(\omega.r + W_{\theta} \right)_{\text{moy}}$: Vitesse tangentielle absolue moyenne.
 et selon des considérations trigonométriques du triangle des vitesses (fig.1) :

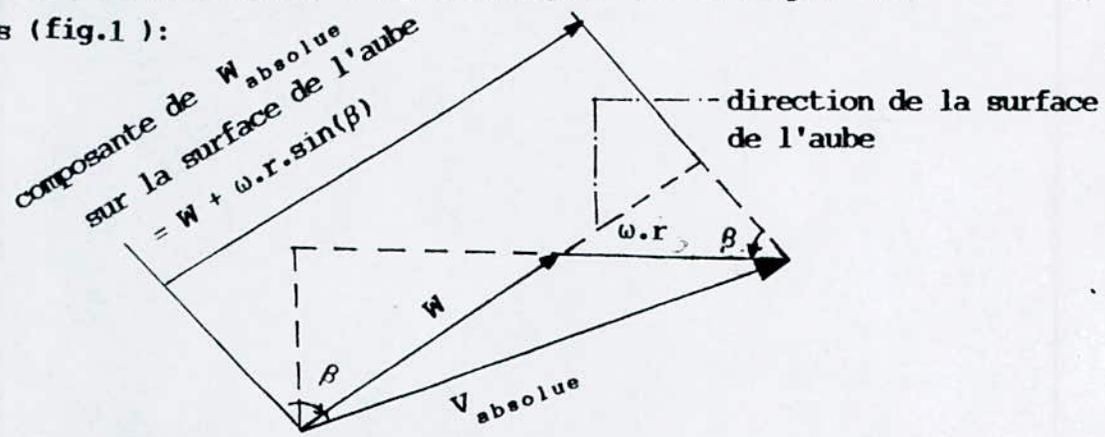


fig.1. Triangle des vitesses

-* $W + \omega.r.\sin(\beta)$: Composante sur la surface de l'aube de la vitesse absolue .

- A partir de (1) et (2) on aboutit à la relation suivante :

$$\left\{ \frac{W_1}{\cos(\beta_1)} - \frac{W_t}{\cos(\beta_t)} + r.\omega . \left(\text{tg}(\beta_1) - \text{tg}(\beta_t) \right) + \frac{d}{dM} \left[\left(\omega.r + W_{\text{moy}} . \sin(\beta_{\text{moy}}) . r . \Delta\theta \right) \right] = 0 \right\}$$

- Après quelques transformations mathématiques et sachant que :

$$W = W_{\text{moy}} = \frac{W_1 + W_t}{2}$$

- On a :

- On a :

$$W_t = \frac{\cos(\beta_1) \cdot \cos(\beta_t)}{\cos(\beta_1) + \cos(\beta_t)} \left\{ \frac{2W}{\cos(\beta_1)} + r \cdot \omega \cdot (\operatorname{tg}(\beta_1) - \operatorname{tg}(\beta_t)) \right. \\ \left. + \frac{d}{dM} \left((\omega \cdot r + W \cdot \sin(\beta)) \cdot r \cdot \Delta\theta \right) \right\}$$

et

$$W_1 = 2W - W_t$$

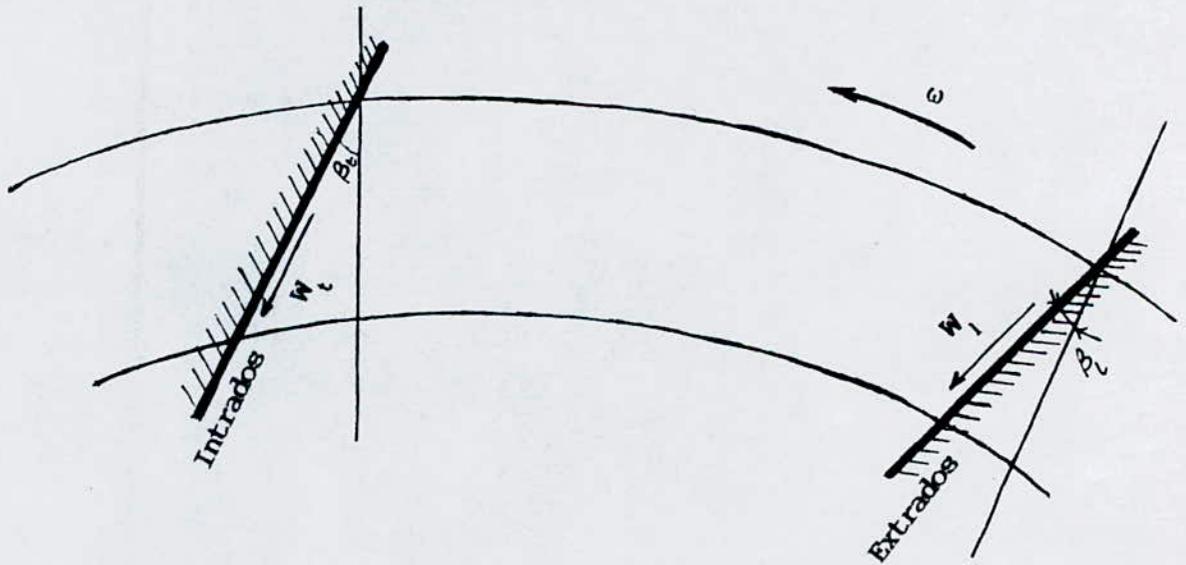
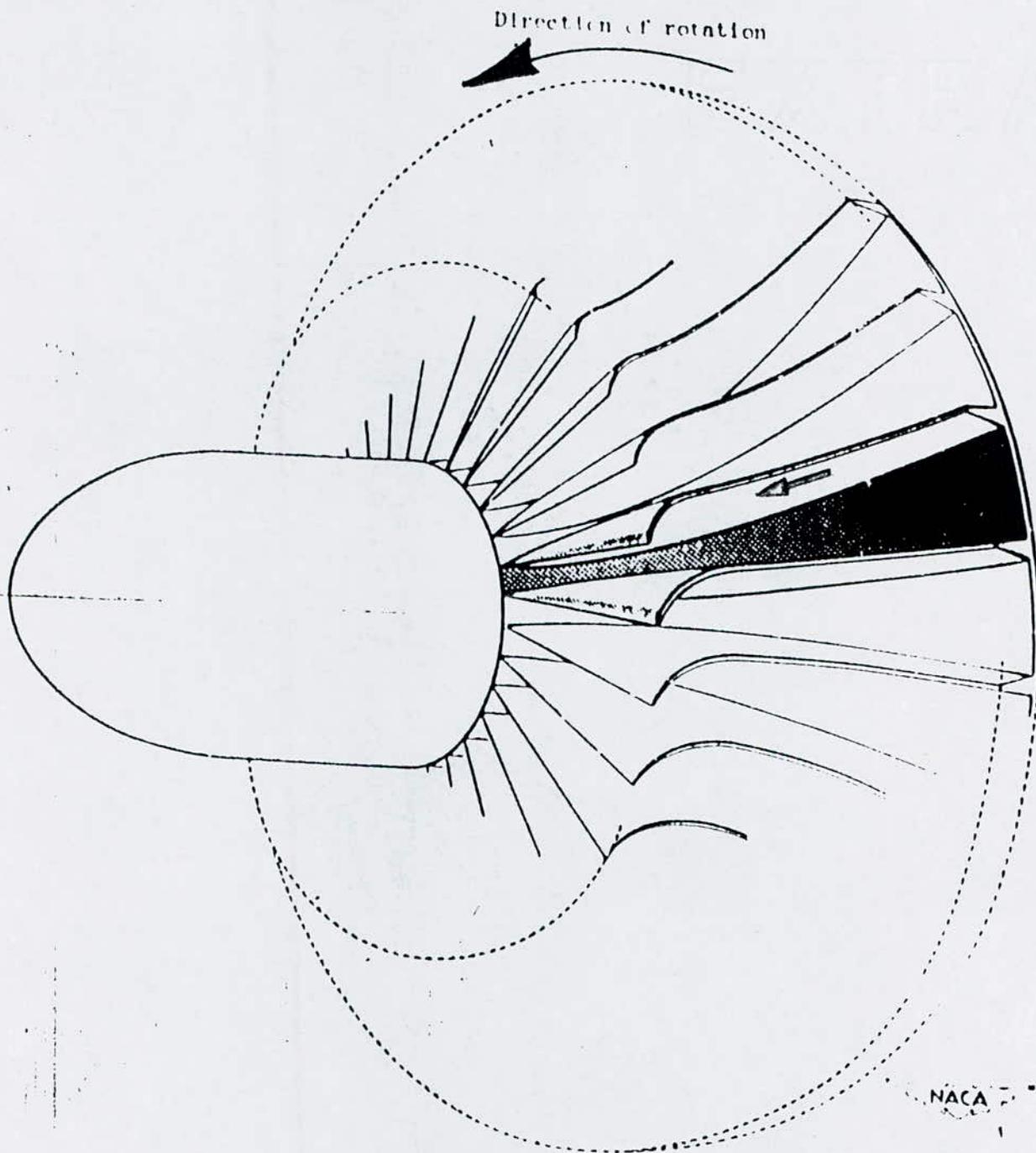


fig.2. Vue développée d'un filet fluide entre les aubes sur une surface de révolution en un rayon donné

ANNEXE C



EXTRAIT

ANNEXE D

ANNEXE E

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1-THODORE KATSANIS, LEWIS RESEARCH CENTER, CLEVELAND OHIO./ Use of Arbitrary Quasi-orthogonals for calculating Flow Distribution in the Meridional Plane of a Turbomachine ./ NACA december 1964
- 2-HAMRICK, JOSEPH T., GINSBURG, AMBROSE, AND OSBORN, WALTER M./ Methode of Analysis for compressible Flow Through Mixed-Flow centrifugal Impellers of Arbitrary Design./ NACA Rep. 1082, 1952.
- 3-SMITH, KENNETH J., AND HAMRICK, JOSEPH T./ A Rapid Approximate Method for the design of Hub Shroud Profiles of Centrifugal Compressors of Given Blade Shape ./ NACA TN 3399 , 1955
- 4-OSBORN, WALTER M., SMITH, KENNETH J., AND HAMRICK, JOSEPH T./ Design and test of Mixed-Flow Impellers .VIII-Comparaison of Experimental results for Three Impellers with Shroud Redesigned by Rapid approximate Method./ NACA RM E5L07 , 1957.
- 5-ELLIS, GAYLORD O., AND STANITZ, JOHN D./ Comparaison of Two-and Three-Dimensional Potential Flow Solutions in a Rotating Impeller Passage ./ NACA TN 2806 , 1952.
- 6-STANITZ, JOHN D., AND PRIAN, VASILY D./ A Rapid Method for Determining Velocity Distribution on Impeller Blades of Centrifugal Compressors. / NACA TN 2421 , 1951.
- 7-VAN WYLEN. / Thermodynamique Appliquée. / John Wiley & Son , 1981.
- 8-MARCEL SEDILLE. / Ventilateurs Centrifuges et Axiaux tome1 : Aérodynamique Générale- Calcul et Fonctionnement . Eyrolle Editeur . Masson et Cie Editeurs 1973

- 9-M.H.VAVRA ./Aerodynamics and Flow in Turbomachines./ John
 Willey & Sons , inc (1960)
- 10-SCHMIDT JURGEN ./Mecanique des Fluides ./ INES TIARET OPU.
- 11-R COMOLET ./Mecanique Experimentale des Fluides -Dynamique des
 Fluides Reels ./Masson 3^e edition 1982
- 12-M CARLIER ./Hydraulique Generale et Appliquée.: Eyrolles 1980.
- 13-SCHLICHTING ./Theory of Boundary Layer.
- 14-M SKLIA ./ Cours de Differences Finies ./ M I T 88.
- 15-THESE BELHADJI KNP-1988
- 16-LEON./ Traitement d'Algoritmes par Ordinateur ./KNSTA cpadues
 editions 1988.
- 17-RICHARD L BURDEN-J DOUGLAS FAIRES -ALBERT C REYNOLDS -PWS
 PUBLISHERS./Numerical Analysis. /Boston Massachussets Second
 Edition 1986.
- 18-HILDEBRAND, F. B./ Introduction to Numerical Analysis./
 McGraw-Hill Book co., inc ., 1956.
- 19-WALSH, J. L., AHLBERG, J.H ., AND NILSON , E. N./ Best
 Approximation Properties of the Spline Fit ./ Jour . Math.
 and Mech.,vol. 11, no. 2 mar. 1962, pp. 225-234.
- 20-PIERRE REBUFFET/Aérodynamique Expérimentale/Librairie Polytechnique/
 Ch.Beranger/2^eEdition/PARIS 1962
- 21-Dictionnaire Encyclopédique Quillet./ Librairie ARISTIDE
 QUILLET./ PARIS / Edition 1981. / PP-522 527 .

