

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

8/90

وزارة التعليم و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique

lex

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT

GENIE HYDRAULIQUE
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

INVESTIGATION ET ETUDE DE L'ECOULEMENT

A TRAVERS UN ENSEMBLE D'OBSTACLES :

APPLICATION POUR UNE POMPE CENTRIFUGE

Proposé par :

O. BELHADJ

Etudié par :

N. LALLAOUI
D. SOUAG

Dirigé par :

O. BELHADJ

PROMOTION

1990

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE HYDRAULIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

INVESTIGATION ET ETUDE DE L'ECOULEMENT
A TRAVERS UN ENSEMBLE D'OBSTACLES :
APPLICATION POUR UNE POMPE CENTRIFUGE

Proposé par :
O. BELHADJ

Etudié par :
N. LALLAOUI
D. SOUAD

Dirigé par :
O. BELHADJ

PROMOTION

1990

وزارة التعليم العالي
 المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات

UNIVERSITE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
 L'ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

..... HYDRAULIQUE
 Mr. BENJAMIN
 Maitre de Recherche: ... Melle. JANTANUI Noria
 Melle SOUAG Doudja

التشريف
 من طرف
 السيد مهندس

الموضوع: دراسة الإنسياب خلال مجموعة من الحوائق: تطبيقاً لمنهج طارده
 الملخص: يهدف هذا الموضوع إلى دراسة الإنسياب في مستوى مبروحته لدرجته
 بطريقة كاتسانيس خلال مجموعة من الحوائق وسيتم النظرية على منحنى طارده
 حيث نحين خطوط الإنسياب وتوزيع السرعات لحوال القناة .
 نظر الضخامة حجم الحسابات تم إعداده برمجية بالباستكال على جهاز VAX VT 220

Object: Investigation de l'étude de l'écoulement à travers un ensemble d'obstacle
 application pour une pompe centrifuge
 Ce sujet a pour but l'étude de l'écoulement dans le plan "aube à aube" se faisant
 par la méthode de KATSANI à travers un ensemble d'obstacles et l'application se
 fera pour une pompe centrifuge déterminant ainsi les lignes de courant et la
 répartition de la vitesse le long d'un canal .
 Vu l'immensité de calcul, le programme a été établi en Pascal sur VAX

Subject:
 Abstract: The purpose of this work is to study the flow in blade to blade plane
 Katsanis methode through a body. The methode was applied to a centrifugal
 pump to obtain the streamline and velocities distributions along an arbitrary
 axis orthogond between blades.
 Due to the university computation, a programme has been developed with pascal
 language incorporated into computer VAX VT 220.



REMERCIEMENTS

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Ce memoire a ete elabore sous la direction de Mr BELHAOUJ.O
que nous tenons à remercier pour son suivi et pour les conseils
qu'il nous prodigua tout au long de ce travail.

Nous remercions également tous les membres de jury qui ont
accepte de juger ce travail.

Nous tenons à dire combien ce memoire doit à l'aide amicale de
Mr NOUR, ainsi qu'à celle de tous ceux qui ont contribue sous
des formes differentes à sa realisation finale.

SOMMAIRE

	Pages
I. Introduction.....	1
II. Notions generales sur les pompes centrifuges	2
1.1. Caracteristiques d'une pompe centrifuge.....	2
1.2. Ecoulement dans la rbue.....	6
1.3 Vortex.....	10
II. Equations generales.....	13
III. Ecoulement potentiel et notion d'axisymetrie.....	15
III.1 Ecoulement potentiel absolu.....	15
III.2 Ecoulement à surfaces de courant axisymetriques	17
IV. Passage à l'ecoulement quasi-bidimensionnel.....	27
IV.1 Hypotheses.....	27
IV.2 Ecoulement meridien.....	28
IV.3 ecoulement aube à aube.....	28
V. Condition de Kutta.....	34
VI. Analyse numerique de l'equation fondamentale.....	39
VI.1 discretisation de l'equation fondamentale....	39
VI.2 Discretisation des conditions aux limites....	40
VI.3 Resolution : methode de relaxation.....	42

VII. Interpretations..... 47

VIII. Conclusion..... 49

ANNEXE

INTRODUCTION

La recherche de la performance de la qualité de fonctionnement des turbomachines a conduit des chercheurs à axer leurs travaux sur l'étude de l'écoulement dans les pompes.

C'est un écoulement très complexe à étudier vu qu'il est non permanent, tridimensionnel et les effets de viscosité y sont importants.

Cette complexité provient essentiellement du changement de la direction axiale à la direction radiale, des conséquences des écoulements secondaires qui y surviennent ainsi que du décollement de la couche limite.

Pour faciliter cette étude l'introduction de certaines hypothèses simplificatrices s'est avérée nécessaire. Ces dernières concernent d'une part la nature du fluide et d'autre part la machine elle-même.

Plusieurs méthodes ont été élaborées dans ce domaine parmi lesquelles on peut citer :

- Les méthodes basées sur les transformations conformes.
- La méthode combinée d'ordre $o(h^2)$ et $o(h^4)$.
- Les méthodes potentielles.

Dans notre étude on ne s'intéressera qu'à la dernière méthode développée par le chercheur américain du centre de recherches en aérodynamique NASA : Theodore KATSANIS.

1. THEORIE DES POMPES CENTRIFUGES:

Les pompes centrifuges englobent une variété de pompes ou la production de pression nécessaire se fait par la rotation de la roue (ou de plusieurs roues) on pourra dire aussi que l'écoulement du liquide est réalisé par l'action de la force centrifuge sur les particules liquides , on pourra inclure aussi les pompes à écoulement axial .

La pompe se compose généralement de deux éléments essentiels :

- Une roue imposant un mouvement de rotation au liquide .
- Le corps de la pompe dirigeant le liquide vers la roue, ce corps comprend une tubulure d'aspiration , et une tubulure de refoulement .

Le liquide est dirigé vers l'oeillard de la roue par la tubulure d'aspiration , ensuite il est mis en rotation grâce à l'aubage de la roue.

On rappellera que l'ensemble aubes - parois latérales de la roue forment les canaux de la roue.

L'effet important de la roue est que le liquide quitte cette dernière avec une vitesse et une pression plus élevées que celles de l'entrée , ensuite la vitesse se transforme partiellement en pression dans le corps de la pompe avant que le liquide ne quitte la pompe par la tubulure de refoulement, ceci est accompli au niveau d'une volute.

1.1 CARACTERISTIQUES DES POMPES CENTRIFUGES:

Pour le calcul d'une roue d'une pompe il est nécessaire de connaître quatre paramètres essentiels qui caractérisent les pompes:

- La hauteur d'élevation H
- Le débit Q
- la vitesse angulaire ou le nombre de tours N par unité de temps.
- Le rendement

1.1.1 Débit :

Volume d'eau pompée par unité de temps généralement pris en l/s ou en m³/s.

1.1.2 Hauteur d'elevation:

La hauteur d'elevation nette ou hauteur manometrique totale est definie par:

$$H = \frac{P_3 - P_0}{\gamma} + \frac{V_3^2 - V_0^2}{2g} + h_G$$

Ou P_0 et P_3 pressions respectives à l'entree et à la sortie
 V_0 et V_3 Vitesses respectives à l'entree et à la sortie
 H hauteur geometrique entre les points 0 et 1.

Par definition la hauteur d'elevation totale est l'energie par unite de poids qui est appliquee par la roue au liquide entre les points ou les charges d'aspiration et de refoulement sont mesurees aux points 0 et 1.

* Notion de hauteur theoriques des pompes centrifuges

L'expression de la hauteur theorique d'une pompe centrifuge est obtenue en appliquant le theoreme du moment cinetique à la masse du fluide qui traverse les canaux de la roue.

Enonce : La variation du moment cinetique par unite de temps d'un fluide par rapport à son axe de revolution est egal au couple resultant des forces appliquees par rapport au meme axe.

L'accroissement du moment cinetique dans l'enceinte de la roue est donnee par la formule:

$$dK_u = r_2 V_2 \cos \alpha_2 dQ_{m2} dt - r_1 V_1 \cos \alpha_1 dQ_{m1} dt.$$

Ou V_1 et V_2 sont les vitesses absolues respectives à l'entree et à la sortie

Les produits $r_2 V_2 \cos \alpha_2$ et $r_1 V_1 \cos \alpha_1$ sont les moments de vitesses respectives à l'entree et à la sortie de la roue.

Etant donne qu'on a conservation de masse:

$$dQ_{m2} dt = dQ_{m1} dt = dQ_m dt.$$

d ou $dK_u = (r_2 V_2 \cos \alpha_2 - r_1 V_1 \cos \alpha_1) dQ_m dt.$

or la derivee du moment cinetique par rapport au temps est egale au couple agissant sur le systeme

$$\text{or } dM = (r_2 v_2 \cos \alpha_2 - r_1 v_1 \cos \alpha_1) dQ_m.$$

On obtient enfin

$$M = PQ (r_2 v_2 \cos \alpha_2 - r_1 v_1 \cos \alpha_1).$$

Avec

$$v_{u1} = v_1 \cos \alpha_1 \quad \text{et} \quad v_{u2} = v_2 \cos \alpha_2.$$

La puissance fournie par la pompe au liquide est donnee par :

$$P = M \cdot \omega = PQ (v_2 u_2 \cos \alpha_2 - v_1 u_1 \cos \alpha_1) = \gamma Q \cdot H_{th}.$$

$$H_{th} = \frac{1}{g} (v_2 u_2 \cos \alpha_2 - v_1 u_1 \cos \alpha_1).$$

C est l'equation fondamentale des turbopompes ou equation d'Euler pour un nombre infini d'aubes.

Si le liquide arrive sans prerotation c'est a dire avec une entree libre sans la presence de roues directrices pouvant modifier la direction d'amenée du liquide, alors $\alpha_1 = 90^\circ$ et l'equation d'Euler devient:

$$H_{th} = \frac{u_2 v_{u2}}{g}$$

1.1.3 Puissance:

- Puissance absorbée P ou puissance mecanique absorbée sur l'arbre ou l'accouplement de la pompe, elle est definie par :

$$P = P_{ar} = \frac{\gamma Q_r H_e}{\eta} = \frac{\gamma Q_r H_e}{102 \eta} \text{ Kw}$$

H_e : Hauteur d'elevation effective

- Puissance effective P_e : La puissance effective d'une pompe de debit Q_r et de hauteur d'elevation effective H_e s'exprime par :

$$P_e = \gamma Q_r \cdot H_e \cdot \eta \text{ Kw.}$$

1.1.4 Rendements:

- Rendement hydraulique : $\eta_h = \frac{H_c}{H_{th}}$
- Rendement volumetrique: $\eta_v = \frac{Q_r}{Q_i}$
- Rendement interne : $\eta_i = \eta_v \cdot \eta_h$
- Rendement mecanique: $\eta_m = \frac{P_i}{P_{br}} = \frac{P_{ar} - P_m}{P_{ar}}$

P_i Puissance absorbee par la roue

P_m Puissance perdue par pertes mecaniques

- Rendement global : $\eta = \frac{P_c}{P_r}$

C'est une caracteristique qui determine la valeur d'une pompe.

$$\eta = \eta_v \cdot \eta_m \cdot \eta_h$$

1.1.5 Notion de pertes:

Les pertes de charges dans une pompe se composent de deux parties:

a- Pertes de charges dues aux frottements et en partie aux tourbillons qui naissent a l'interieur de la pompe. Etant donne qu'en general a l'interieur d'une pompe centrifuge le regime d'ecoulement est turbulent, ces pertes de charges augmentent proportionnellement au carre du debit et peuvent etre exprimees par:

$$h_i = K_i \cdot Q^2$$

K_i etant une constante dependant du rendement hydraulique et des dimensions de la pompe.

b- Pertes de charges dues aux chocs a l'entree du liquide dans le rotor et dans la bache spirale; si la vitesse relative du liquide a l'entree des canaux n'est pas tangente aux aubes, dans ce cas le courant liquide rencontre l'aube sous un angle d'incidence, heurtant ainsi ce dernier d'un cote et se decolle de l'autre cote entrainant des tourbillons qui produisent a leur tour des pertes de charges.

1.2. ECOULEMENTS DANS LA ROUE:

1.2.1 Repartition de pressions et de vitesses:

La transmission du couple ou de la puissance par la roue au liquide produit une différence de pression entre les faces convexes (extrados) et concaves (intrados) des aubes.

La pression du côté de l'extrados exerçant la poussée est évidemment plus importante que du côté de l'intrados.

Le passage de l'extrados vers l'intrados fait apparaître une discontinuité de pression (différence de pression entre les deux côtés des aubes), le premier effet d'une telle répartition de cette dernière entraîne une augmentation des vitesses relatives près de l'intrados qui seront plus élevées que celles au voisinage de l'extrados, cela implique la non uniformité de la répartition de vitesses (pressions) dans les sections cylindriques de la roue d'une pompe centrifuge représentée dans la figure (1.a).

Le triangle de vitesses montrera dans un paragraphe plus loin que pour un angle d'aube donné la hauteur interne diminue quand les vitesses méridiennes augmentent, de même la vitesse relative plus élevée à l'arrière de l'aube provoque aussi une hauteur plus faible par rapport à la hauteur qui serait calculée pour la vitesse moyenne de l'écoulement.

Les inégalités de vitesses dues à la présence de changement de direction à l'arrivée dans la roue et sur le profil méridien de celle-ci.

Par exemple dans les roues centrifuges le liquide doit effectuer un changement de direction de près de 90° avant d'être soumis à l'action de l'aube.

1.2.3 CIRCULATION RELATIVE:

La répartition des vitesses relatives dans un canal de roue sont aussi influencées par la circulation relative du liquide due à l'effet de l'inertie sur des particules liquides sans frottements.

La particule d'eau tourne dans le sens inverse à celui de la vitesse de rotation dirigée vers l'extérieur, le mouvement de ces particules définit ce qu'on appelle : circulation relative ou tourbillon fig (1.b).



figure(1.a)

Repartition des vitesses relatives entre deux aubes consécutives



figure(1.b)

Circulation relative à l'intérieur d'un canal

L'écoulement vers l'extérieur est provoqué par une force centrifuge, la particule reste sans rotation mais aussi son mouvement de translation s'effectue suivant une trajectoire circulaire.

La circulation relative est moindre avec un grand nombre d'aubes conduisant ainsi à une valeur élevée de la hauteur d'élevation totale .

Ainsi la circulation relative est beaucoup plus faible dans une roue mince que dans une roue large pour un même diamètre.

Nota : une roue mince (large) une roue ayant une vitesse spécifique faible (grande).

1.2.4 VITESSE SPECIFIQUE:

La vitesse spécifique est un critère de similitude des pompes centrifuges pour l'étude de leurs caractéristiques de fonctionnement , son sens physique est le nombre de tours par minute d'une pompe qui élèverait de 1 m un débit de 1 m³/s avec une roue géométriquement semblable à celle de la roue considérée . Le nombre "Vitesse spécifique N_s" est utilisée pour caractériser le type de pompe .

$$N_s = \frac{N\sqrt{Q}}{H^{3/4}}$$

Cette vitesse est aussi calculée pour le produit de rendement optimum .

N Vitesse de rotation de la roue , trs/mn .

Q Débit , m³/s .

H Hauteur , m .

1.2.5 TRIANGLE DES VITESSES :

la représentation graphique des vitesses est une méthode plus commode pour l'étude des différentes vitesses de l'écoulement dans la roue.

La forme des diagrammes est triangulaire et peuvent être tracés en n'importe quel point du filet liquide, mais qu'on ne peut avoir qu'à l'entrée et à la sortie des aubes.

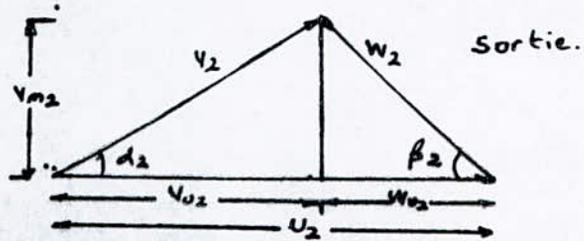
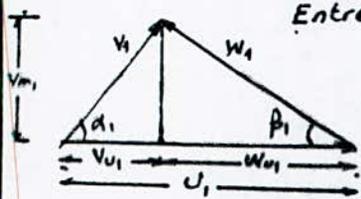
Ces diagrammes tiennent compte des vitesses moyennes :

U Vitesse périphérique de la roue .

W Vitesse relative de l'écoulement .

V Vitesse absolue de l'écoulement .

a-avec prerotation :



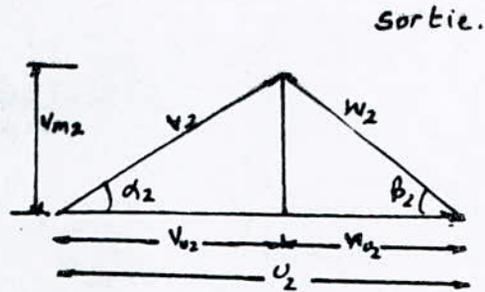
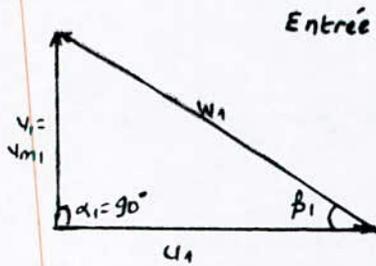
α_1 et α_2 angles d'inclinaison respectifs des vitesses absolues V_1 et V_2 par rapport à la vitesse périphérique.

β_1 et β_2 angles entre la vitesse relative et la vitesse périphérique à l'entrée et à la sortie.

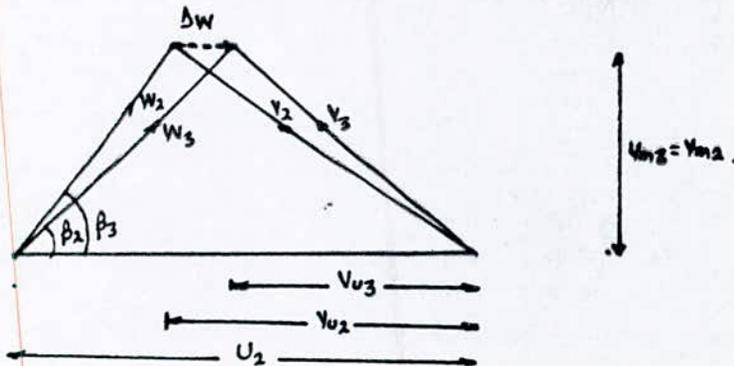
V_{m1} et V_{m2} sont appelées vitesses méridiennes ou débitances du fait qu'elles soient proportionnelles au débit.

V_u composante tangentielle de la vitesse V .

b-sans prerotation:



c-effet de la circulation sur le triangle des vitesses:



Si on considère le cas d'écoulement sans prerotation, l'équation d'Euler s'écrit :

$$H_{thor} = \frac{U_2^2}{2g}$$

Pour un nombre d'aubes fini : $H_{thc} = \frac{U_2^2}{2g}$

1.3 LE VORTEX:

Considérant un écoulement où toutes les lignes de courant sont circulaires concentriques autour d'un point donné.

La vitesse le long d'une ligne de courant donnée est constante mais si on se déplace vers une autre ligne la vitesse est inversement proportionnelle à la distance séparant le centre et la ligne de courant considérée, cet écoulement est appelé : Vortex.

Les composantes de la vitesse dans les directions radiale, et tangentielle sont V_r et V_u .
ou $V_r=0$ et $V_u=c/r$

On voit facilement que l'écoulement à vortex est:

1-possible physiquement pour un écoulement incompressible avec l'équation de continuité $\nabla \cdot \vec{V}=0$.

2-c est un écoulement irrotationnel sauf à l'origine $\nabla \times \vec{V}=0$.

Par définition du vortex on a:

$$V_u = c/r$$

pour évaluer c, on doit trouver la circulation autour d'une ligne de courant circulaire de rayon r donnée par:

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} = -V_u \cdot 2\pi r \quad \text{d'où} \quad V_u = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (*)$$

En comparant avec $V_u = c/r$ on tire c

$$c = -\frac{\Gamma}{2\pi}$$

Cela montre que la circulation pour toutes les lignes de courant a la même valeur c est à dire

$$\Gamma = -2\pi c$$

Par convention Γ est appelée intensité du vortex et l'équation (*) représente le champ de vitesse de l'écoulement à vortex d'intensité Γ .

V_θ est negative quand Γ est positive, c'est à dire, un vortex à intensite positive tourne dans le sens des aiguilles d'une montre.

Il serait necessaire de connaitre la valeur de $\nabla \times \vec{V}$ pour $r=0$, pour cela nous rappelons l'equation de Γ :

$$\Gamma = - \iint_{(S)} (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{S} = - 2\pi c.$$

$(\nabla \times \vec{V})$ et $d\vec{S}$ ont la meme direction, les deux sont perpendiculaires au plan de l'ecoulement.

Et l'equation peut etre ecrite:

$$2\pi c = \iint_{(S)} (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} |\nabla \times \vec{v}| \cdot dS.$$

L'integrale de surface est donnee par l'aire circulaire à l'interieur de laquelle $\Gamma = -2\pi c$ est evaluee le long de la ligne de courant; cependant l'aire à l'interieur du petit cercle à l'origine est infiniment petit et:

$$\iint_{(S)} |\nabla \times \vec{v}| \cdot dS \longrightarrow |\nabla \times \vec{v}| \cdot dS.$$

En combinant les deux equations

$$|\nabla \times \vec{v}| \cdot dS = 2\pi c \Rightarrow |\nabla \times \vec{v}| = \frac{2\pi c}{dS}$$

quand $r \rightarrow 0 \Rightarrow dS \rightarrow 0$ et la limite $|\nabla \times \vec{v}| \rightarrow \infty$

Le vortex est un ecoulement irrotationnel en tout point à l'exception de l'origine ($r=0$) ou la vitesse est infinie donc l'origine est un point singulier du champ d'ecoulement.

Le potentiel de vitesse est:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial r} = v_r = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = v_\theta = \frac{c}{2\pi r} \end{array} \right.$$

par integration :

$$\phi = - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

La fonction de courant est donnee par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = v_r = 0 \\ -\frac{\partial \psi}{\partial r} = v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{array} \right.$$

Par integration on obtient :

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

II. EQUATIONS GENERALES:

Les principes de conservation tires de la mecanique et de la physique conduisent à établir un certain nombre d'equations generales .

II.1 PRINCIPE DE CONSERVATION DE LA MASSE:

C'est un principe de physique permettant d'établir une relation entre certaines caracteristiques du fluide et ses mouvements , independamment des causes qui les provoquent.

Il se traduit par l'equation de continuite :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{V} = 0$$

ou

$$\text{div } \rho \vec{V} = \rho \text{div } \vec{V} + \vec{V} \text{grad } \rho$$

En mouvement relatif l'equation de continuite s'ecrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{W} = 0$$

Pour un ecoulement stationnaire:

$$\text{div } \rho \vec{W} = 0$$

II.2 PRINCIPE DE CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT:

C'est un principe de mecanique permettant d'établir des relations entre les caracteristiques du fluide , de son mouvement et de causes qui le produisent (forces).

Il se traduit par l'equation de la quantite de mouvement ou par l'equation fondamentale de la dynamique:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = - \rho \vec{g} \text{grad } (gH) - \text{grad } p + \vec{f}$$

f	force de viscosite
grad p	force de pression
grad (gH)	force de volume ou de pesanteur

II.2 PRINCIPE DE CONSERVATION D'ENERGIE:

Principe d'energetique : premier principe de la thermodynamique qui permet d'etablir des relations entre les differentes formes d'energie mises en jeu.

Ce principe enonce que la derivee par rapport au temps de la somme de son energie cinetique est egale à la puissance mecanique fournie par les forces exterieures et la puissance calorifique .

Elle se traduit par l'equation d'energie :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } H_t + T \text{grad } S + \vec{v} \wedge \text{rot } \vec{v} + \frac{f}{S} = 0.$$

H : Enthalpie totale

S : Entropie

III. ÉCOULEMENT POTENTIEL ET NOTION D'AXISYMETRIE:

III.1 ÉCOULEMENT POTENTIEL ABSOLU:

Les écoulements potentiels absolus sont caractérisés par la condition que la rotation élémentaire de particules fluides doit être nulle en tout point. Un écoulement absolu avec une fonction de vitesse en un point $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t)$ est donc à potentiel de vitesse si $\nabla \times \vec{V} = 0$ en tout point et pour un temps quelconque.

En l'absence de discontinuités de l'écoulement la circulation le long d'un contour fermé doit être nulle pour les écoulements à potentiel de vitesses.

C'est à dire que:

$$\Gamma = \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{V} = \int_C \nabla \times \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot d\vec{s} = 0.$$

L'intégrale, le long d'un contour fermé est nulle seulement si le produit $d\vec{r} \cdot \vec{V} = d\varphi$ est une différentielle totale ou φ est une fonction scalaire à déterminer

$$d\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right) \varphi.$$

En coordonnées cartésiennes un point P est repéré par ses coordonnées x, y, z du vecteur \vec{r} .

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$$

En passant d'un point P à un point Q de coordonnées $x+dx$, $y+dy$ et $z+dz$

$$d\vec{r} = dx\vec{e}_1 + dy\vec{e}_2 + dz\vec{e}_3.$$

connaissant les relations entre les vecteurs unitaires :

$$\vec{e}_1 \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \vec{e}_3 = 0.$$

et

$$\vec{e}_1 \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \vec{e}_3 = 1.$$

En introduisant l'opérateur ∇ .

on a donc:

$$d\varphi = (d\vec{r} \cdot \nabla) \varphi = d\vec{r} \cdot \nabla \varphi.$$

ou

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_3. \quad (1)$$

Donc la fonction vectorielle $V=V(r,t)$ doit satisfaire la relation:

$$\vec{V} = \nabla \cdot \varphi \quad (2)$$

ou pour un écoulement non permanent la fonction doit être une fonction de l'espace et du temps.

$$\varphi = \varphi(\vec{r}, t). \quad (3)$$

La fonction φ est appelée "potentiel de l'écoulement". Pour connaître les fonctions de vitesses aux différents points, elles peuvent être déterminées par intégration du système d'équations aux dérivées partielles exprimées par l'éq. (2)

$$\nabla \times \vec{V} = \nabla \times (\nabla \varphi) = 0$$

Donc, pour l'existence d'un potentiel d'écoulement, une condition nécessaire et suffisante est que $\nabla \times \vec{V} = 0$.

L'équation de mouvement d'un écoulement irrotationnel isentropique est donnée par :

pour $\nabla \times \vec{V} = 0$, $\nabla s = 0$ et $\vec{f} = 0$.

A l'aide de l'éq. (2) le premier terme devient :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\partial (\nabla \varphi)}{\partial t} = \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (4)$$

puisque l'ordre des dérivations par rapport à l'espace et au temps peut être interchangé.

Ainsi pour un écoulement potentiel absolu on a :

$$\nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \right) = 0. \quad (5)$$

ou bien puisque

$$H = h + \frac{v^2}{2} + gz.$$

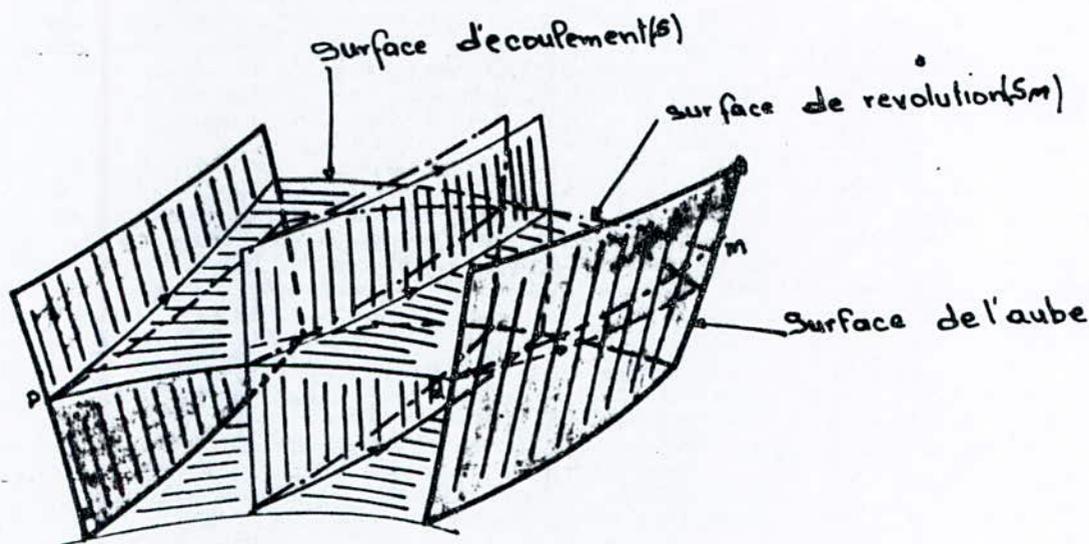
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + H = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + h + \frac{v^2}{2} + gz = \text{constante.}$$

III.2. ECOULEMENTS A SURFACES DE COURANT AXISYMETRIQUES:

III.2.1 ecoulement absolu:

Un écoulement a travers une grille d'aubes rotative ou stationnaire ne peut être axisymétrique si l'écoulement exerce un moment sur les aubes.

Donc les surfaces de courant ne sont pas des surfaces de révolution, cette situation est représentée par la figure (1)



figure(1): Surfaces de courant d'un écoulement bidimensionnel dans une grille

En général la vitesse V peut être exprimée par les composantes V_u, V_m et V_n dans les directions des vecteurs unitaires i_1, i_2 et i_3 respectivement.

Cependant, en un point particulier P , la surface de révolution S_m peut être telle que la composante de vitesse V_n normale à la surface de courant soit nulle en ce point, ceci n'est possible généralement que pour un seul point le long de la périphérie du cercle de rayon R , en d'autres points du cercle la composante V_n est différente de zéro.

La condition d'un écoulement permanent, isentropique dans le système absolu $\vec{V}_x(\nabla_x \vec{V})$ est maintenant exprimée en un point P où $V_n=0$ par :

$$\nabla_x \vec{V} = \vec{e}_1 \left(\frac{\partial V_n}{\partial m} - \frac{\partial V_m}{\partial n} - V_m k_m \right) + \frac{\vec{e}_2}{R} \left(\frac{\partial(RV_u)}{\partial n} - \frac{\partial V_n}{\partial \theta} \right) + \frac{\vec{e}_3}{R} \left(\frac{\partial V_m}{\partial \theta} - \frac{\partial(RV_u)}{\partial m} \right) \quad (6)$$

On peut noter que les dérivées de V_n dans les différentes directions ne s'annulent pas même si V_n est nulle au point particulier P, ou V peut être exprimée par :

$$\vec{V} = \vec{e}_1 V_u + \vec{e}_2 V_m$$

Donc au point P on a :

$$\begin{aligned} \vec{V}_x(\nabla_x \vec{V}) = & \vec{e}_1 \frac{V_m}{R} \left(\frac{\partial V_m}{\partial \theta} - \frac{\partial(RV_u)}{\partial m} \right) + \frac{\vec{e}_2}{R} \left(\frac{\partial(RV_u)}{\partial m} - \frac{\partial V_n}{\partial \theta} \right) + \\ & + \frac{\vec{e}_3}{R} \left[\frac{V_u}{R} \left(\frac{\partial(RV_u)}{\partial n} - \frac{\partial V_n}{\partial \theta} \right) - V_m \frac{\partial V_n}{\partial m} + \frac{\partial V_m}{\partial n} V_m + V_m^2 k_m \right] = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Chacune des trois expressions entre parenthèses doit être nulle :

$$\frac{\partial V_m}{\partial \theta} - \frac{\partial(RV_u)}{\partial m} = 0.$$

$$\frac{\partial(RV_u)}{\partial n} - \frac{\partial V_n}{\partial \theta} = 0.$$

$$\frac{V_u}{R} \left(\frac{\partial(RV_u)}{\partial n} - \frac{\partial V_n}{\partial \theta} \right) - V_m \frac{\partial V_n}{\partial m} + V_m \frac{\partial V_m}{\partial n} + V_m^2 k_m = 0.$$

la surface S_m (surface de révolution) n'est une surface d'écoulement que si les variations de V_n dans les directions de θ et m sont nulles

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_n}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial V_n}{\partial m} = 0 \end{array} \right.$$

l'équation (7) montre que ceci est impossible pour un écoulement permanent, isentropique ou les composantes V_u différent de zéro

Cependant, pour les écoulements potentiels absolus avec $\nabla_r \vec{V} = 0$ une possibilité peut exister.

si la courbure K_m est donnée par:

$$K_m = - \frac{1}{V_m} \frac{dV_m}{dn} \quad (8)$$

Pour un écoulement donné on peut voir de la composante en i_1 de l'éq. (6) que la dérivée V_n/m est nulle pour un écoulement absolu avec $\nabla_r \vec{V} = 0$.

Si l'aubage est tel que:

$$\frac{\partial(RV_u)}{\partial n} = 0 \quad (9)$$

ou bien que le produit RV_u est constant le long de la normale à S_m avec la courbure K_m donnée par l'éq. (8), et puisque pour $V=0$ on a la composante en i_2 de l'éq. (6) qui doit aussi être nulle, on a donc de plus

$$\frac{\partial V_n}{\partial \theta} = 0.$$

Pour $\nabla_r \vec{V} = 0$ la composante en i_3 de l'éq. (6) donne une condition supplémentaire: $\frac{\partial V_m}{\partial \theta} = \frac{\partial(RV_u)}{\partial m}$

Indiquant que la composante de vitesse V_m doit varier dans la direction périphérique si le produit RV_u varie dans la direction de la génératrice m .

De l'éq. (7) on peut voir que les conditions des eqts. (8) et (9) ne réduisent pas les variations de V_n à zéro pour un écoulement permanent isentropique avec $\nabla_r \vec{V} = 0$ ($\nabla_r \vec{V} = 0$).

De la composante en i_3 de l'éq. (7) on obtient la relation:

$$\frac{\partial V_n}{R \partial \theta} = \frac{V_m}{V_n} \frac{\partial V_n}{\partial m} \quad (10)$$

D'où les écoulements permanents isentropiques ne peuvent avoir de surfaces de courant axisymétriques.

Cependant de telles surfaces paraissent possibles pour les écoulements isentropiques permanents qui sont à potentiel de vitesses (irrotationnels) avec $\nabla_r \vec{V} = 0$. Dans ce cas il ne peut y avoir de discontinuités aux bords de fuite des aubes.

Des études ont montrés que des écoulements permanents arbitraires ne peuvent avoir d'axisymetrie des surfaces de courant, des écoulements speciaux existent telque les écoulements de fluides incompressibles à travers des grilles radiales pour lesquels la possibilite de l'axisymetrie est possible: De tels écoulemebts peuvent étre calcules comme étant des écoulements bidimensionnels.

De l'eqt. (9) on a vu que pour avoir l'axisymetrie de surfaces de courant il faut que le produit RV_u doit étre constant le long de la normale ; cependant si l'écoulement est suppose étre bidimensionnel non seulement RV_u mais aussi V_u doit étre constante perpendiculairement à la surface d'écoulement.

$$\frac{\partial(RV_u)}{\partial n} = \frac{\partial R}{\partial n} V_u + \frac{\partial V_u}{\partial n} R = 0$$

Ainsi si les composantes tangentielles V_u ne sont pas nulles la relation ci-dessus n'est verifiée que pour:

$$\frac{\partial V_u}{\partial n} = 0 \quad \text{si} \quad \frac{\partial R}{\partial n} = 0$$

ceci est, si R ne varie pas dans la direction de la normale n .

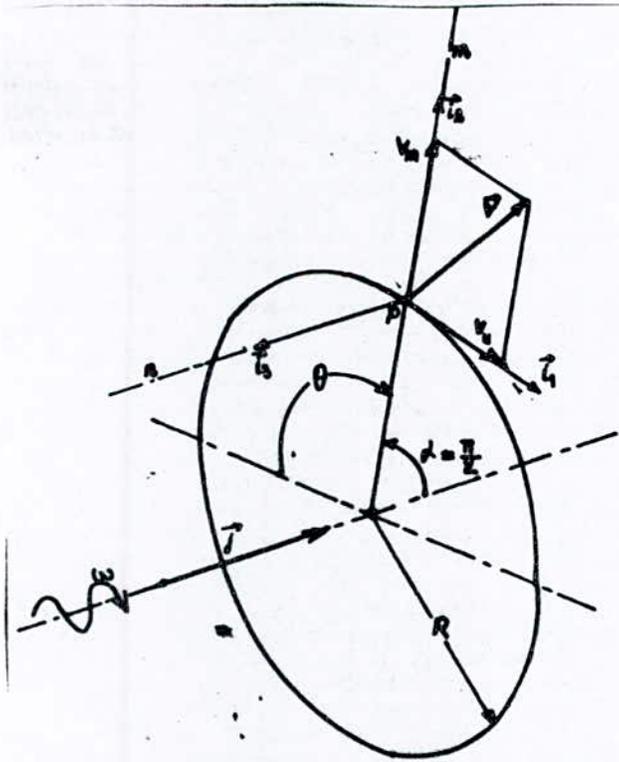


figure (2): surface de courant axisymetrique.

Alors comme le montre la figure (2) l'axe n doit être parallèle à l'axe de symétrie, autrement dit la surface de courant est perpendiculaire à l'axe.

La composante de vitesse V_m est donc dans la direction radiale: on obtient un système de coordonnées cylindriques avec $\lambda = \pi/2$. Si un écoulement bidimensionnel a lieu, toutes les surfaces de courant doivent être des plans perpendiculaires à l'axe, ceci n'est possible que si le fluide est incompressible.

L'équation de continuité se réduit donc à:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

Pour le système de coordonnées de la figure (2) on a:

pour $K_m = K_n = 0$

et puisque m correspond à R ,

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{R} \frac{\partial V_u}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial (R V_m)}{\partial R} = 0.$$

Cette relation montre que la relation $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ est automatiquement satisfaite par une fonction scalaire:

$\psi = \psi(R, \theta)$, si

$$\text{et } \frac{\partial \psi}{\partial R} = V_u \quad (11)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -R V_m. \quad (12)$$

L'écoulement considéré est irrotationnel, donc il doit satisfaire la condition $\nabla \times \vec{V} = 0$ de l'éq. (6) pour $K_m = K_n = 0$, $V_n = 0$ et toutes les variations dans la direction de n sont nulles

$$\nabla \times \vec{V} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial V_m}{\partial \theta} - \frac{\partial (R V_u)}{\partial R} \right) = 0.$$

puisque m correspond à R .

En introduisant les eqts. (11) et (12) dans cette relation:

$$\frac{\partial \left(-\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} - \frac{\partial \left(R \frac{\partial \psi}{\partial R} \right)}{\partial R} = 0.$$

puisque

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} = 0. \quad (13)$$

L'eqt. (13) est une equation aux derivees partielles qui peut etre resolue pour des conditions aux limites connues comme on le verra en details dans le chapitre (VI).

III.2. RECOULEMENT RELATIF:

Une etude simillaire peut etre faite pour un ecoulement relatif permanent avec:

$$\vec{W} \times (\nabla \times \vec{W} + 2\vec{\omega}) = 0 \quad (14)$$

La surface de revolution de la figure (2) represente la surface S_m qui tourne avec une vitesse angulaire j où j est le vecteur unitaire axial.

A noter que la direction de rotation coincide avec celle du vecteur unitaire i_1 .

Le vecteur vitesse relative W en un point arbitraire peut s'exprimer en fonction des composantes W_u, W_m et W_n dans les directions respectives des coordonnees $,m$ et n

Elle est donnee au point P par:

$$W = i_1 W_u + i_2 W_m \quad (15)$$

De l'eqt. (6):, en introduisant les composantes de la vitesse W correspondantes:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{W} = & \vec{e}_1 \left(\frac{\partial W_n}{\partial m} - \frac{\partial W_m}{\partial n} - W_m k_m \right) + \frac{\vec{e}_2}{R} \left(\frac{\partial (RW_u + \omega R^2)}{\partial n} - \frac{\partial W_n}{\partial \theta} \right) + \\ & + \frac{\vec{e}_3}{R} \left(\frac{\partial W_m}{\partial \theta} - \frac{\partial (RW_u)}{\partial m} \right) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\vec{j} = \vec{e}_2 \cos \lambda - \vec{e}_3 \sin \lambda.$$

puisque $\sin \lambda = \frac{\partial R}{\partial m}$ et $\cos \lambda = \frac{\partial R}{\partial n}$.

Donc, avec l'eqt. (16):

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{W} + 2\vec{\omega} = & \vec{e}_1 \left(\frac{\partial W_n}{\partial m} - \frac{\partial W_m}{\partial n} - W_m k_m \right) + \frac{\vec{e}_2}{R} \left(\frac{\partial (RW_u + \omega R^2)}{\partial n} - \frac{\partial W_n}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{\vec{e}_3}{R} \left(\frac{\partial W_m}{\partial \theta} - \frac{\partial (RW_u + \omega R^2)}{\partial m} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

De plus, pour W donnée par l'eqt. (15) au point P,

$$\vec{W}_x (\nabla_x \vec{W}) + 2\vec{\omega} = \vec{e}_1 \left(\frac{W_m}{R} \left(\frac{\partial W_m}{\partial \theta} - \frac{\partial (RW_u + \omega R^2)}{\partial n} \right) \right) + \frac{\vec{e}_2}{R} W_u \left(\frac{\partial (RW_u + \omega R^2)}{\partial n} - \frac{\partial W_m}{\partial \theta} \right) + \vec{e}_3 \left(\frac{W_u}{R} \left(\frac{\partial (RW_u + \omega R^2)}{\partial n} - \frac{\partial W_n}{\partial \theta} \right) - W_m \frac{\partial W_n}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (18)$$

Si dans l'eqt. (7) le produit RV_u est remplacé par $(RW_u + \omega R^2)$ la forme de l'eqt. (18) est la même que l'eqt. (7)

Donc les conclusions concernant la possibilité d'existence de l'axisymétrie des surfaces de courant sont les mêmes que celles tirées pour les écoulements absolus.

Les conditions sont :

la quantité $(RW_u + \omega R^2)$ ne varie pas dans la direction perpendiculaire à la surface de courant.

La courbure de la surface de courant est donnée par :

$$k_m = -\frac{1}{W_m} \frac{\partial W_m}{\partial \eta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial (RW_u + \omega R^2)}{\partial n} = 0$$

A l'exception des écoulements absolus de fluides incompressibles à travers une grille radiale ni les écoulements dans une grille stationnaire ni les écoulements relatifs dans une grille rotative ne peut avoir une axisymétrie de la surface de courant même si de tels écoulements sont supposés isentropiques.

D'après l'eqt. (17) on peut voir que pour un écoulement relatif avec $\vec{W}_x (\nabla_x \vec{W} + \omega R^2)$ la dérivée $\partial (RW_u + \omega R^2) / \partial n$ doit être nulle pour surface de courant axisymétrique; or pour un écoulement bidimensionnel la composante W_u ne varie pas suivant la direction perpendiculaire à la surface d'écoulement;

D'après l'équation:

$$\frac{\partial (RW_u + \omega R^2)}{\partial n} = R \frac{\partial W_u}{\partial n} + \frac{\partial R}{\partial n} W_u + 2\omega R \frac{\partial R}{\partial n} = 0$$

on peut voir que pour avoir la dérivée $\partial W_u / \partial n$ nulle (variations de W_u suivant la normale) pour des valeurs non nulles de W_u la dérivée $\partial R / \partial n$ doit être nulle, donc par analogie aux mouvements absolus, les mouvements relatifs doivent avoir des surfaces d'écoulements qui sont des plans perpendiculaires à l'axe, le fluide doit être donc incompressible.

L'équation de continuité de tels écoulements s'écrit:

$$\nabla \cdot \vec{W} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{W} = \frac{1}{R} \frac{\partial W_u}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial (R W_m)}{\partial R} = 0$$

Une fonction scalaire satisfaisant la relation ci-dessus si:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial R} = W_u \\ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -R W_m \end{array} \right. \quad (19)$$

(20)

D'après la figure (2) le vecteur unitaire axial $j = -i_3$.
D'où:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega} j = -\vec{i}_3 \omega.$$

Et la condition $\nabla \times \vec{W} = -2\vec{\omega}$ aboutit à:

$$\nabla \times \vec{W} + 2\vec{\omega} = \frac{\vec{i}_3}{R} \left(\frac{\partial W_m}{\partial \theta} - \frac{\partial (R W_u)}{\partial R} \right) - \vec{i}_3 2\omega = 0$$

En introduisant les eqts. (19) et (20)

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} = -2\omega. \quad (21)$$

ou

$$\nabla^2 \psi = -2\omega.$$

Le Laplacien de la fonction de courant pour les écoulements relatifs est donc égal à une constante.

On voit que l'éqt. (21) est une forme spéciale de l'équation de POISSON. Cette relation peut être appliquée pour une grille radiale avec un grand nombre de fines aubes.

Comme première approximation on peut supposer que la vitesse périphérique est faible ou nulle:

$$\text{Donc: } \frac{\partial \psi}{\partial R} = W_u = 0$$

Des équations (20) et (21):

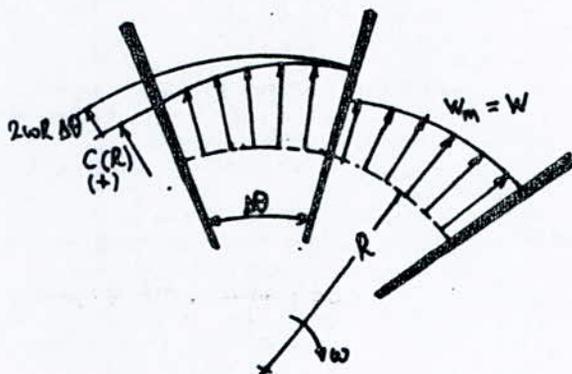
$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial (-R W_m)}{\partial \theta} = -2\omega$$

Puisque

$$\frac{\partial \psi}{\partial R} = 0 \Rightarrow \frac{\partial W_m}{\partial \theta} = 2\omega R \quad \text{d'où } W_m = 2\omega R \theta + c(R)$$

Où la fonction d'intégration $C(R)$ est une fonction de R qui peut être déterminée à l'aide de l'équation de continuité. Pour le système de coordonnées représenté par la figure (3), on peut voir que θ augmente dans la direction de rotation d'où la composante W_m augmente linéairement avec l'angle θ .

pompe.



turbine

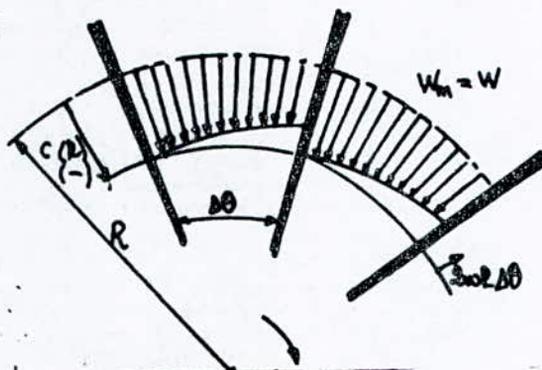


figure (3) : distributions des vitesses.

La figure (3) montre les distributions de la vitesse W_m pour des écoulements radiaux entrants et sortants entre deux aubes adjacentes, où $C(R)$ est la valeur de W_m sur la surface de l'aube pour $\theta = 0$.

On peut voir directement de la figure que la pression statique exercée sur la surface de l'aube est grande aux points où la vitesse W_m est faible et vice-versa, comme on peut l'obtenir en appliquant l'équation de Bernoulli pour les écoulements permanents avec $W_{u1} = W_{u2} = 0$.

En conclusion ,on peut dire qu'un écoulement strictement bidimensionnel ne peut avoir lieu que pour des mouvements de fluides incompressibles à travers des grilles radialesentre des plans perpendiculaires à l'axe .

Si les écoulements dans les turbomachines sont traites en supposant l'existence de l'axisymetrie des surfaces de courant il est à signaler que les resultats obtenus ne sont que des approximations suffisantes pour avoir un ordre de grandeur sur l'écoulement dans la roue.

IV. PASSAGE A L'ECOULEMENT QUASI-BIDIMENSIONNEL DANS LES TURBOMACHINES :

IV.1 HYPOTHESES :

- 1- Ecoulements isentropiques
- 2- Ecoulements permanents
- 3- Fluides incompressibles
- 4- Axisymetrie des surfaces de courant .

Les premiere et deuxieme hypothese doivent etre prises en consideration pour l'etablissement d'une theorie generale. La troisieme est licite dans le cas d'une pompe à eau.

Les ecoulements a travers les stators et les rotors ne peuvent avoir d'axisymetrie des surfaces de courant si l'espacement entre les aubes est fini , à l'exception des ecoulements de fluides incompressibles dans des grilles radiales avec des surfaces de courant qui sont des plans perpendiculaires a l'axe; l'analyse de tels ecoulements au moyen des fonctions de courant revient en particulier à la resolution de l'equation (III.13) pour les ecoulements absolus et de l'equation (III.21) pour les ecoulements relatifs.

des procedures similaires appliquees pour des grilles quelconques constituent des approximations pour les raisons suivantes:

1-Impossibilite d'avoir des formes d'aubes satisfaisant les conditions necessaires pour une axisymetrie des surfaces de courant.

2-L'ecoulement n'est pas necessairement bidimensionnel meme si ces conditions sont satisfaites .

Cependant, en vue des difficultes associees à la determination du modele d'ecoulement dans les turbomachines on ne peut se passer de telles approximations dans une theorie aussi complexe que celle-ci il faut considerer que les solutions obtenues ne sont pas totalement exactes mais suffisantes pour avoir avant tout une valeur d'indication sur l'ecoulement etudie.

Ces ecoulements seront appeles "ecoulements quasi-bidimensionnels", on doit savoir que de tels ecoulements n'existent pas reellement mais qu'ils representent une situation d'ecoulement idealisee.

IV. 2ECOULEMENTS MERIDIEN:

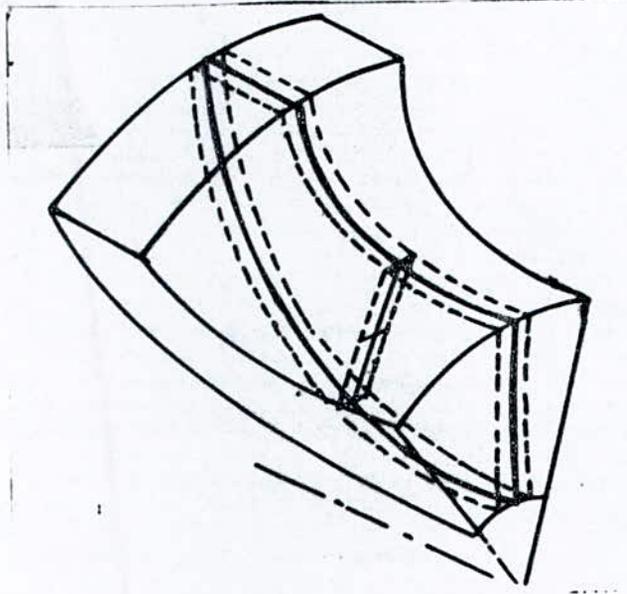


figure (1): plan meridien (Hub to shroud)

L'etude de l'ecoulement sur le plan meridien considere que toutes les variations dans la direction de ne sont pas prises en compte , ce qui revient à la resolution de l'equation aux derivees partielles qu'on ne va pas developper puisqu'on ne s'est pas interessees à cette partie de calculs .

on peut obtenir les lignes de courant du plan meridien que on l'on va utiliser pour le calcul de l'ecoulement Aube à aube pour cela on ne s'interesse en general qu'à trois lignes essentielles et representatives de l'ecoulement : la ligne du flasque superieur (shroud) , moyenne et flasque inferieur (hub).

IV. 3ECOULEMENT AUBE À AUBE:

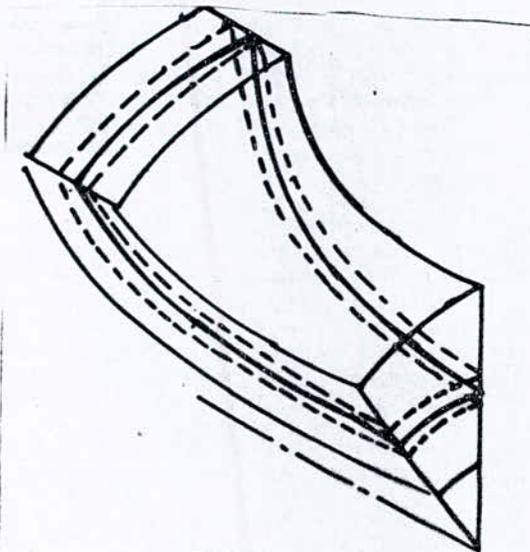


figure (2): Plan aube-à-aube

Pour l'écoulement dans le plan aube à aube les vitesses suivant la normale à la surface d'écoulement ne sont pas prises en compte. Ainsi il n'est pas nécessaire de différencier, entre les écoulements uniformes et non uniformes, aussi il n'est pas possible de considérer les écoulements avec des distributions de vitesses particulières perpendiculaires à la surface d'écoulement.

Donc il est suffisant de traiter les écoulements absolus irrotationnels et les écoulements relatifs satisfaisant la condition: $\nabla \times \vec{W} = -\omega \vec{e}_z$.

A partir de l'analyse des écoulements relatifs, les relations pour les écoulements absolus irrotationnels sont obtenus en posant ω égal à zero.

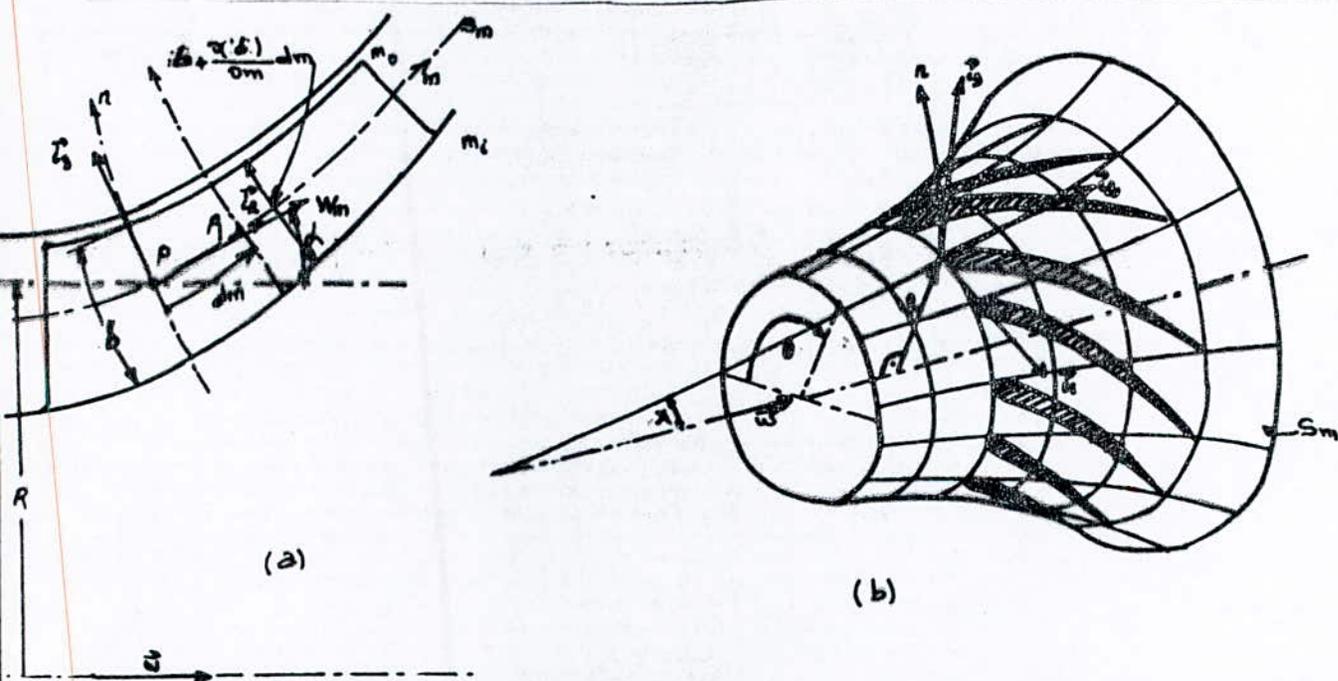


figure (3): surfaces de courant axisymétriques.

L'écoulement sur la surface axisymétrique S_m à génératrice m peut être représentatif de l'écoulement général à travers la grille pour une surface de courant axisymétrique avec $\frac{\partial W_n}{\partial \theta} = 0$, la composante en i_2 de l'équation (17) s'écrit:

$$\frac{\partial(RW + \omega R^2)}{\partial n} = 0$$

puisque b (hauteur de l'aube) est supposée faible devant R cette condition peut être adoptée.

En posant l'éq. (17) égale à zéro:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{W} + 2\vec{\omega} = \vec{e}_1 \left(\frac{\partial W_n}{\partial m} - \frac{\partial W_m}{\partial n} - W_m k_m \right) + \frac{\vec{e}_2}{R} \left(\frac{\partial(RW_u + \omega R^2)}{\partial n} - \frac{\partial W_n}{\partial \theta} \right) + \\ + \frac{\vec{e}_3}{R} \left(\frac{\partial W_m}{\partial \theta} - \frac{\partial(RW_u + \omega R^2)}{\partial m} \right) = 0 \end{aligned}$$

Les relations suivantes sont obtenues pour une surface de courant axisymétrique.

$$\frac{\partial W_m}{\partial n} + W_m k_m = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial W_n}{\partial \theta} - \frac{R \partial W_u}{\partial m} + \frac{\partial R}{\partial m} W_u = 2\omega R \frac{\partial R}{\partial m} \quad (2)$$

De préférence la génératrice m est prise telle que la surface S_m divise la masse fluide en deux parties égales, on peut supposer donc que le rayon R , la courbure k_m et l'angle λ sont connus en tout point sur la génératrice.

L'éq. (2) représente l'équation de mouvement de l'écoulement quasi-bidimensionnel sur la surface de courant axisymétrique S_m , cet écoulement a les composantes de vitesse W_u et W_m qui subissent des variations dans les directions de m et θ .

L'écoulement à travers le rotor doit aussi satisfaire l'équation de continuité qui, pour un écoulement permanent compressible s'écrit:

$$\vec{W} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{W} = 0$$

Avec $\rho \vec{W} = \vec{e}_1 (\rho W_u) + \vec{e}_2 (\rho W_m)$

d'où:

$$\nabla(\rho \vec{W}) = \frac{1}{R} \frac{\partial(\rho W_u)}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial(\rho R W_m)}{\partial m} + \rho W_m k_m = 0 \quad (3)$$

La courbure peut être exprimée par :

$$k_n = \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial m} \quad (4)$$

Pour un passage d'écoulement donné, les variations de b peuvent être exprimées par une fonction de m , d'où les valeurs de k_n sont aussi des fonctions de m .

En introduisant l'éq. (4) dans l'éq. (3), on obtient :

$$\frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial m} \rho W_m + \frac{1}{R} \frac{\partial(\rho W_u)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho R W_m)}{\partial m} = 0$$

Et puisque b ne varie dans la direction de θ :

$$\frac{\partial(b \rho W_u)}{\partial \theta} + \frac{\partial(b \rho R W_m)}{\partial m} = 0 \quad (5)$$

Il est maintenant possible d'établir une fonction de courant qui satisfait l'équation (5), dont les dérivées sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial m} = b \rho W_u \\ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -b \rho R W_m \end{cases}$$

Pour des valeurs connues de b, R, W_u , et W_m , la valeur de la fonction de courant peut être obtenue par intégration de ces équations.

Si $\psi = \psi(\theta, m)$ sont connues les composantes de vitesse peuvent être déterminées par :

$$\left\{ \begin{array}{l} W_u = \frac{1}{b \rho} \frac{\partial \psi}{\partial m} \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} W_m = -\frac{1}{b \rho R} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{array} \right. \quad (7)$$

Puisque la vitesse W doit satisfaire l'équation de mouvement, la fonction ψ doit correspondre avec la condition exprimée par l'équation (2):

$$\frac{\partial W_m}{\partial \theta} - R \frac{\partial W_u}{\partial m} - \frac{\partial R}{\partial m} W_u = 2\omega R \frac{\partial R}{\partial m}$$

Avec les équations (6) et (7), puisque b et R sont indépendants de θ :

$$\frac{1}{bR} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + R \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{1}{bR} \frac{\partial \psi}{\partial m} \right) + \frac{\partial R}{\partial m} \frac{1}{bR} \frac{\partial \psi}{\partial m} = -2\omega R \frac{\partial R}{\partial m}$$

En dérivant les termes entre parenthèses et puisque $\frac{\partial R}{\partial m} = \sin \lambda$,

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial m^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial(\ln R)}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial(\ln R)}{\partial m} - \frac{\partial(\ln(bR))}{\partial m} \right) \frac{\partial \psi}{\partial m} = -2b\omega \sin \lambda \quad (8)$$

ou $\ln(\)$ est le logarithme népérien.
ou sous la forme:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial m^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial R}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \left(\frac{\sin \lambda}{R} - \frac{1}{bR} \frac{\partial(bR)}{\partial m} \right) \frac{\partial \psi}{\partial m} = -2b\omega \sin \lambda \quad (9)$$

Pour les écoulements de fluides incompressibles, la relation applicable est:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial m^2} + \left(\frac{\sin \lambda}{R} - \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial m} \right) \frac{\partial \psi}{\partial m} = -2b\omega \sin \lambda \quad (10)$$

Pour un écoulement radial avec $\lambda = \pi/2$ et b constante la relation applicable est identique à l'équation (13)

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} = 0$$

les difficultés rencontrées lors de la résolution des équations ci-dessus résultent du fait que ces dernières doivent être résolues pour des conditions aux limites imposées par le profil de l'aube ainsi que des conditions d'écoulement à l'amont et à l'aval de la roue.

Aux bords de fuite des aubes la condition dite de KUTTA doit être vérifiée ; cette condition signifie que le point d'arrêt appelé aussi point de stagnation de l'écoulement doit coïncider avec le bord de fuite de l'aube pour éviter les écoulements parasites autour de ce dernier.

La fonction de courant pour un écoulement absolu quasi-bidimensionnel dans des grilles stationnaires peut être obtenue à partir de l'équation (28) en prenant $\omega=0$ et en remplaçant les vitesses W_u et W_m par les composantes V_u et V_m de la vitesse absolue V .

Il est à noter que le second terme de l'équation (28) disparaît dans le cas où l'angle λ est nul en tout point ceci est par exemple dans le cas d'une pompe axiale, on peut le voir aussi à l'amont de la roue d'une pompe centrifuge si on suppose que l'entrée est axiale.

Devant l'existence d'une infinité de solutions pour l'écoulement potentiel, le choix d'une solution particulière doit être fait, pour cela on a besoin d'une condition supplémentaire qui fixe la circulation Γ pour un profil donné à un angle d'attaque donné.

L'examen de résultats expérimentaux sur le développement du champ d'écoulement autour d'un profil placé en mouvement après un état d'arrêt a montré qu'au début de l'écoulement tend à contourner le bord de fuite du bas vers le haut de la

surface comme l'indique la figure (1). Cependant des considérations plus avancées sur l'écoulement incompressible montrent (d'après des résultats théoriques) que la vitesse devient infiniment grande à l'extrémité du profil, ce qui est impossible du point de vue physique d'où ce type d'écoulement est représenté par la figure (1.a) ne dure pas longtemps : c'est une phase transitoire.

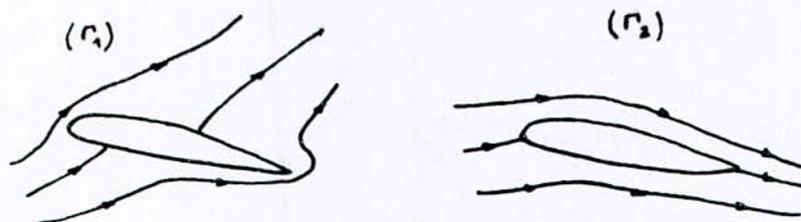


figure (1): effet de différentes valeurs de la circulation sur l'écoulement potentiel.

Après le passage de la phase transitoire l'écoulement permanent s'établit.

En se référant à des photographies schématisées par la figure (1) montrant que l'écoulement quitte l'intrados et l'extrados du profil sans perturbations, il en découle que: l'écoulement permanent étant établi une valeur particulière de la circulation (Γ_2) est adoptée.

Cette valeur résulte dans un écoulement quittant le bord de fuite sans perturbations.

Cette observation a été faite et utilisée dans l'analyse théorique par M. WILHELM KUTTA en 1902 et est devenue connue par : "la condition de KUTTA"

Dans le but de l'application de la condition de KUTTA dans une analyse théorique on a besoin d'être plus précis en ce qui concerne la nature de l'écoulement au bord de fuite .

Le bord de fuite peut avoir différentes formes , il peut être à angle fini, il peut être sous forme de biseau ou arrondi.



figure (2): différentes formes possibles du bord de fuite.

En considérant la forme représentée par la figure (2.a) , V_1 et V_2 étant les vitesses respectives le long de l'extrados et l'intrados.

Si ces vitesses sont à valeurs finies au point a on aura deux vitesses dans deux directions différentes au même point , cependant ceci est impossible du point de vue physique pour cela la seule solution c'est de considérer V_1 et V_2 comme étant nulles au point a.

Pour la forme représentée par la figure (2.b) les vitesses V_1 et V_2 sont dans la même direction , donc elles peuvent toutes deux avoir des valeurs finies; cependant la pression au point a n'a qu'une valeur unique .

En appliquant l'équation de Bernoulli entre les surfaces du haut et du bas immédiatement adjacentes au point a , on a :

$$p_a + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = p_a + \frac{1}{2} \rho V_2^2$$

D'où

$$V_1 = V_2$$

On en conclut que pour cette forme du bord de fuite les vitesses à la sortie (sur l'intrados et l'extrados) sont finies et égales en module.

* Methode utilisee par R.Zgouli pour l'application de la condition de Kutta.

La methode de KATSANIS pour le calcul de l'écoulement suppose la deviation de l'écoulement à la sortie β_3 connue (à l'infini aval).

La deviation au bord de fuite β_2 est donnee par la relation:

$$\tan \beta_2 = \left(\frac{\tan \beta_3}{b_3} \frac{\rho_2}{\rho_3} + \frac{\omega(r_3^2 - r_2^2)}{q} \rho_2 s \right) b_2. \quad (A)$$

determinee à partir des equations de continuite et de quantite de mouvement.

predire l'angle de sortie est d'un interet important pour la definition des performances d'une turbo-machine telque la hauteur, la pression et autres.

L'idee de base est de ramener l'angle β_2 par un processus iteratif à la valeur pour laquelle la condition de KUTTA est verifiee.

La plupart des auteurs conviennent à egaler soit les coefficients de pression soit la vitesse relative de part et d'autre du profil le plus proche possible du bord de fuite pour la recherche du point d'arrêt.

- Methode de prediction de la deviation :

L'ajustement à la condition de Kutta peut etre recherchee à l'aide de deux procedures differentes:

- Egalisation des vitesses relatives au bord de fuite .
- Egalisation des coefficients de pression .

Dans cette présente étude on utilisera le premier cas, c'est à dire l'égalisation des vitesses à l'intrados et à l'extrados au voisinage du bord de fuite.

-Procédure de calcul:

- choisir un point P1 intersection du profil avec la verticale la plus proche du bord de fuite.

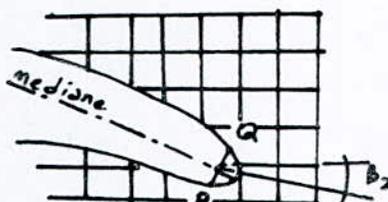
-Trouver son symétrique Q1 par rapport à la médiane calculée par la tangente de cette dernière.

- β_3 étant supposée, on calcule β_2 à partir de la relation (A). On calcule l'écoulement d'après la méthode décrite ci-dessus, on déduit la vitesse relative au point P, et par interpolation celle au point Q, les deux vitesses étant connues on cherche ΔW :

$$\Delta W = W_P - W_Q.$$

Si

$$|\Delta W| < E_t. \quad (1)$$



Et étant l'erreur tolérée pour la vitesse par exemple $E_t = 10^{-4} W_R$.

alors β_3 est l'angle recherché ; sinon on recalcule une nouvelle valeur de $\beta_3 = \beta_3 + \epsilon$ et on refait le calcul jusqu'à ce qu'on aboutisse à la condition (1). On prendra $|\epsilon| = 1.5^\circ$.

La condition de KUTTA se resume donc comme suit :

-pour un profil donne à un angle d'attaque donne la circulation Γ autour du profil est telque le fluide quitte le bord de fuite sans perturbations.

- Si le bord de fuite est à angle fini, donc c'est un point d'arret pour $V_1=V_2=0$.

-Si le bord de fuite a la forme de biseau,les vitesses quittant l'intrados et l'extrados sans perturbations sont egales en module et tangente à la ligne mediane.

VI. ANALYSE NUMERIQUE DE L'EQUATION FONDAMENTALE:

VI.1 DISCRETISATION DE L'EQUATION FONDAMENTALE:

soit l'équation fondamentale de l'écoulement non visqueux dans la roue est donnée par:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial m^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial l}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \left(\frac{\sin \lambda}{R} - \frac{1}{lP} \frac{\partial(lP)}{\partial m} \right) \frac{\partial \psi}{\partial m} = -2b\omega \sin \lambda.$$

Ayant à résoudre une équation aux différences finies qui est basée sur l'approximation (discretisation) d'un opérateur différentiel par un opérateur aux différences finies (annexe A), l'équation peut donc s'approximer par:

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{2}{h_1 h_2} + \frac{2}{h_3 h_4} \right) y_{i,j} + \frac{2}{h_1 (h_1 + h_2)} y_{i-1,j} + \frac{2}{h_2 (h_3 + h_4)} y_{i+1,j} + \left(\frac{2}{h_3 (h_3 + h_4)} - \frac{\sin \lambda_{i,j}}{R_{i,j} (h_3 + h_4)} \right) \\ & + \frac{b_{i,j+1} - b_{i,j-1}}{b_{i,j} (h_3 + h_4)^2} y_{i,j-1} + \left(\frac{2}{h_4 (h_3 + h_4)} + \frac{\sin \lambda_{i,j}}{R_{i,j} (h_3 + h_4)} - \frac{b_{i,j+1} - b_{i,j-1}}{b_{i,j} (h_3 + h_4)^2} \right) y_{i,j+1} = -\frac{2\omega}{q} b_{i,j} \sin \lambda_{i,j} \end{aligned}$$

Cette équation est applicable entre deux aubes adjacentes à l'intérieur de la roue, à l'amont on considérera que l'entrée est axiale et on applique l'équation suivante avec $\lambda = 0$ ce qui revient donc à la résolution de l'équation de Poisson.

À l'aval on considère qu'on a un diffuseur avec une largeur b constante.

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{2}{h_1 h_2} + \frac{2}{h_3 h_4} \right) y_{i,j} + \frac{2}{h_1 (h_1 + h_2)} y_{i-1,j} + \frac{2}{h_2 (h_1 + h_2)} y_{i+1,j} + \left(\frac{2}{h_3 (h_4 + h_3)} - \frac{\sin \lambda_{i,j}}{R_{i,j} (h_4 + h_3)} \right) y_{i,j-1} \\ & + \left(\frac{2}{h_4 (h_3 + h_4)} + \frac{\sin \lambda_{i,j}}{R_{i,j} (h_4 + h_3)} \right) y_{i,j+1} = -\frac{2\omega}{q} b \sin \lambda_{i,j}. \end{aligned}$$

La résolution de telles équations revient donc à la résolution d'un système d'équations linéaires $Ax=B$ avec l'une des méthodes numériques connues.

Le nombre de noeuds du reseau etant important le temps de calcul risque de devenir prohibitif aussi prefere-t-on d'utiliser une methode iterative : la methode de relaxations.

VI.2 DISCRETISATION DES CONDITIONS AUX LIMITES:

Les valeurs des fonctions de courant sont donnees d'apres les equations (9) et (10) et les vitesses donnees par la fonction de courant en remplaçant par la fonction adimensionnelle y :

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\rho b r}{q} w_m \quad w_m = \frac{q}{\rho b r} \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial y}{\partial m} = -\frac{\rho b}{q} w_\theta \quad w_\theta = -\frac{q}{\rho b} \frac{\partial y}{\partial m}$$

a- A l'entree : limite AH

En approximant la fonction par :

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{y - y_0}{\theta - \theta_0} = \frac{\rho b r}{q} w_m \quad (1)$$

$$\frac{\partial y}{\partial m} = \frac{y - y_0}{m - m_0} = -\frac{\rho b}{q} w_\theta \quad (2)$$

Au noeud 4 l'eqt. (2) s'ecrit:

$$y_4 - y_0 = -(m_4 - m_0) \frac{\rho b}{q} w_\theta$$

$$y_0 = y_4 + \frac{\rho b}{q} w_\theta h_4$$

ON reecrit l'eqt. (1) au noeud 4

$$y_0 = y_4 + (\theta_0 - \theta_4) \frac{\rho b r}{q} w_m$$

Entre les deux aubes

$$\theta_0 - \theta = -s \quad \text{et} \quad w_m = \frac{y - y_0}{\theta - \theta_0} \frac{q}{\rho b r} \quad \text{et} \quad y - y_0 = 1.$$

D ou

$$w_m = \frac{1}{s} \frac{q}{\rho b r}$$

En remplaçant dans (2) on aboutit à:

$$y_0 = y_4 + h_4 \frac{\rho b r}{s r_2}$$

Donc l'équation de la fonction de courant à l'entrée s'écrit :

$$y_0 = y_1 + h_1 \frac{\operatorname{tg} \beta_1}{s r_1}$$

De la même façon on trouve la fonction de courant à la sortie :

$$y_0 = y_3 - h_3 \frac{\operatorname{tg} \beta_2}{s r_2}$$

d'une manière générale les deux équations s'écrivent :

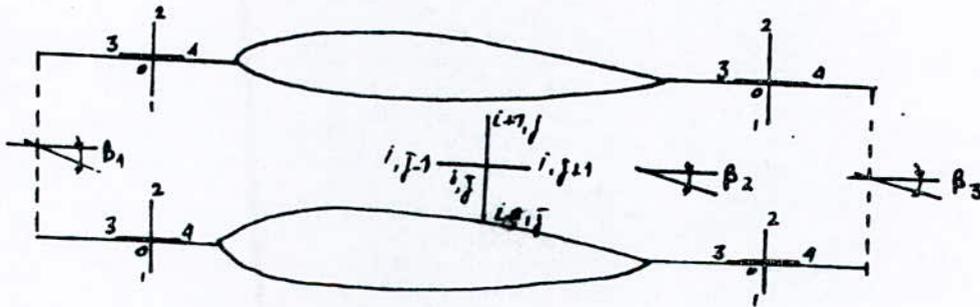
-A l'entrée

$$y_{i,0} = y_{i,1} + h_1 \frac{\operatorname{tg} \beta_1}{s r_1}$$

-A la sortie

$$y_{i,n} = y_{i,n-1} - h_3 \frac{\operatorname{tg} \beta_2}{s r_2}$$

où β est le pas entre deux aubes successives, s étant constant.



b-Limites supérieure et inférieure :

Sur EF et HG :

En utilisant simplement l'équation fondamentale :

$$y_0 = \frac{1}{s_0} (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 y_4 + k)$$

$$\text{avec } k = \frac{2\omega}{g} b p \sin \lambda_0$$

Comme le système est périodique, on voit clairement que le point (2) sur HG est le même que le point (2) sur AB, d'une façon générale sur cette limite.

$$y_{m,j} = \frac{1}{20} (2_1 y_{m-1,j} + 2_2 y_{1,j} + 2_3 y_{m,j-1} + 2_4 y_{m,j+1} + k).$$

Sur AB et CD :

$$y_{0,j} = \frac{1}{20} (2_1 y_{m-1,j} + 2_2 y_{1,j} + 2_3 y_{0,j-1} + 2_4 y_{0,j+1} + k).$$

Pour notre maillage de la région infini amont et infini aval l'équation fondamentale est:

$$y_{i,j} = \frac{1}{20} (2_1 y_{i-1,j} + 2_2 y_{i+1,j} + 2_3 y_{i,j-1} + 2_4 y_{i,j+1} + k).$$

Donc connaissant les caractéristiques β , s et r respectivement à l'entrée et à la sortie on pourra facilement déterminer les fonctions de courant aux frontières.

c-Limites des profils

En supposant que la vitesse est tangente au profil la fonction de courant est donnée par :

sur l'intados $y=0$.

sur l'extrados $y=1$.

VI.3 RÉSOLUTION : MÉTHODE DE RELAXATION:

On considère en premier lieu un écoulement entre deux plaques planes parallèles c'est à dire le système obtenu est un rectangle de longueur L et de largeur l .

on divise l en n intervalles et L en n intervalles , on obtient ainsi (n+1) (M+1) points dont é (m+1) sont des points donnees par les conditions aux limites .

Il nous reste donc (m+1) (n+1) - 2 (m+n+2) noeuds à determiner .

on ecrit l'equation differentielle en chaque noeud P (i , j) , ensuite on resoud le systeme resultant des equations simultannees .

Les conditions aux limites sont formulees comme suit :

$$\begin{cases} y_{i,0} = c_1 \\ y_{i,m} = c_2 \\ y_{0,j} = c_3 \\ y_{m,j} = c_4 \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 1, m \\ j = 1, n. \end{matrix}$$

L equation fondamentale au point P (i , j) s'ecrit pour $h_1 = h_2$ et $h_3 = h_4$

$$-\left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_3^2}\right) y_{i,j} + \frac{1}{h_1^2} y_{i-1,j} + \frac{1}{h_1^2} y_{i+1,j} + \frac{1}{h_3^2} y_{i,j-1} + \frac{1}{h_3^2} y_{i,j+1} = 0$$

Avec $a=0$, b et r etant constantes le long de l'axe de l'ecoulement pour un maillage avec $h_1 = h_3$ (cas d'une pompe axiale) l'equation devient :

$$-\frac{4}{h_1^2} y_{i,j} + \frac{1}{h_1^2} (y_{i-1,j} + y_{i+1,j} + y_{i,j-1} + y_{i,j+1}) = 0$$

$$y_{i,j} = \frac{1}{4} (y_{i+1,j} + y_{i-1,j} + y_{i,j-1} + y_{i,j+1})$$

Cela signifie que pour ce cas la fonction de courant adimensionnelle y est la moyenne des quatre fonctions de courant voisines forment ainsi l'etoile.

Si $h_1 \neq h_3$.

$$y_{i,j} = \frac{\frac{1}{h_1^2} (y_{i-1,j} + y_{i+1,j}) + \frac{1}{h_3^2} (y_{i,j-1} + y_{i,j+1})}{\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_3^2}}$$

Si $h_1 \neq h_2 \neq h_3 \neq h_4$.

$$y_{i,j} = \frac{\frac{2}{h_1(h_1+h_2)} y_{i-1,j} + \frac{2}{h_2(h_1+h_2)} y_{i+1,j} + \frac{2}{h_3(h_3+h_4)} y_{i,j-1} + \frac{2}{h_4(h_3+h_4)} y_{i,j+1}}{\frac{2}{h_1 h_2} + \frac{2}{h_3 h_4}}$$

Pour une pompe radiale $\lambda = \pi/2$,

$$\frac{\partial b}{\partial m} = \frac{\partial r}{\partial m} = 0$$

et l'équation différentielle correspondante est:

$$y_{i,j} = \frac{r_1}{\omega} (\partial_1 y_{i-1,j} + \partial_2 y_{i+1,j} + \partial_3 y_{i,j-1} + \partial_4 y_{i,j+1} + k)$$

Avec

$$\partial_0 = \frac{2}{h_1 h_2} + \frac{2}{h_3 h_4} ; \quad \partial_1 = \frac{2}{h_1(h_1+h_2)} ; \quad \partial_2 = \frac{2}{h_2(h_1+h_2)} ;$$

$$\partial_3 = \frac{2}{h_3(h_3+h_4)} ; \quad \partial_4 = \frac{2}{h_4(h_4+h_3)} ; \quad k = \frac{2\omega b}{g}$$

Par contre pour une pompe centrifuge λ , r et b varient selon m et l'équation caractéristique est :

$$y_{i,j} = \frac{1}{\omega} (\partial_1 y_{i-1,j} + \partial_2 y_{i+1,j} + \partial_3 y_{i,j-1} + \partial_4 y_{i,j+1} + k'). \quad (*)$$

Avec

$$\partial_3' = \frac{2}{h_3(h_3+h_4)} - \frac{\sin \lambda_{i,j}}{r_{i,j}(h_3+h_4)} + \frac{b_{i,j+1} - b_{i,j-1}}{b_{i,j}(h_4+h_3)^2}$$

$$\partial_4' = \frac{2}{h_4(h_3+h_4)} - \frac{\sin \lambda_{i,j}}{r_{i,j}(h_3+h_4)} - \frac{b_{i,j+1} - b_{i,j-1}}{b_{i,j}(h_3+h_4)^2}$$

$$k' = \frac{2\omega}{g} b_{i,j} \sin \lambda_{i,j}$$

∂_0 , ∂_1 et ∂_2 étant déterminés précédemment.

Ces équations sont appelées équations de relaxations.

On peut accélérer la convergence de la méthode en introduisant un facteur d'accélération (ω) ; la relation (*) devient donc :

$$y_{i,j} = y_{i,j} + \frac{\omega}{20} (-20 y_{i,j} + 21 y_{i,j-1} + 22 y_{i+1,j} + 23 y_{i,j-1} + 24 y_{i,j+1} + k)$$

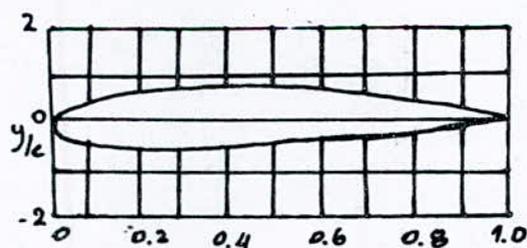
* Pas de quadrillage :

La formule de Taylor arrêtée au second ordre sera d'autant plus précise que le pas du quadrillage sera faible .Mais par ailleurs plus ce pas sera faible plus l'occupation mémoire et le temps de calcul seront grands .

Une amélioration peut de la précision est possible , en appliquant la formule de Taylor arrêtée au sixième ordre , on peut ainsi l'appliquer aux huit points entourant le point P(1,j).

Avant calculer la solution de l'équation avec un pas h en appliquant la formule à quatre points , pour savoir si le pas choisi est assez fin on peut la recalculer avec le même quadrillage en utilisant la formule de huit points ; on regarde alors si les résultats trouvés sont différents à la précision que l'on s'est fixée , sinon on passe à un réseau plus fin. Mais pour notre cas on se limitera au premier calcul seulement.

On précisera que dans notre étude on s'intéressera surtout à la dernière équation celle d'une pompe centrifuge et on utilisera des profils aérodynamiques tel que le profil NACA 2412 donne par le schéma ci-dessus :



section du profil NACA 2412.

Pour les premiers calculs on suppose que les aubes ne sont pas inclinées, le maillage choisi est :
division de la longueur de l'aube en 10 intervalles et la distance séparant les deux aubes successifs en 6 intervalles.

En considerant les deux maillages de l'infini amont et l'infini aval on aura : 16 intervalles sur la longueur nous donnant ainsi : $(m+1)(n+1) = 7 \times 7$ points ; dont $2(m+n) = 2(7+7)$ des points donnees representant les conditions aux limites .

On a $(m+1)(n+1) - 2(m+n)$ noeuds ou leurs fonctions de courant seront determinees a partir du systeme d equations de relaxation.

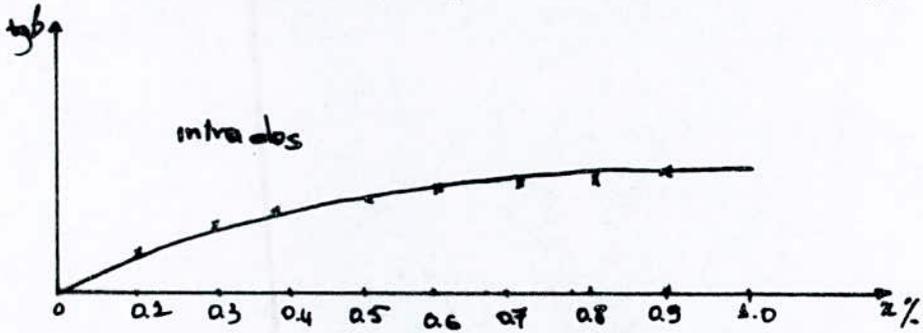
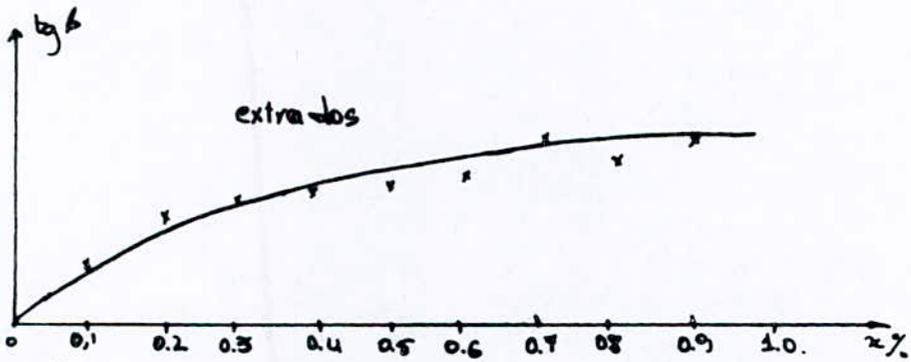
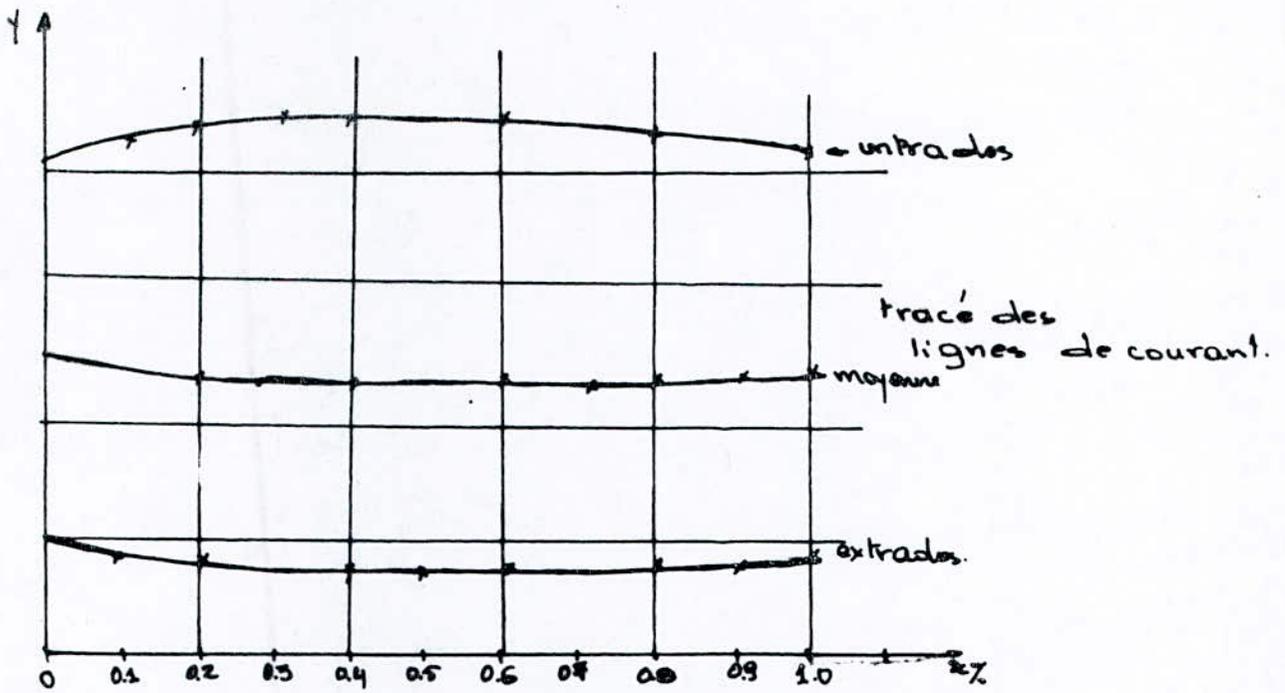
RESULTATS

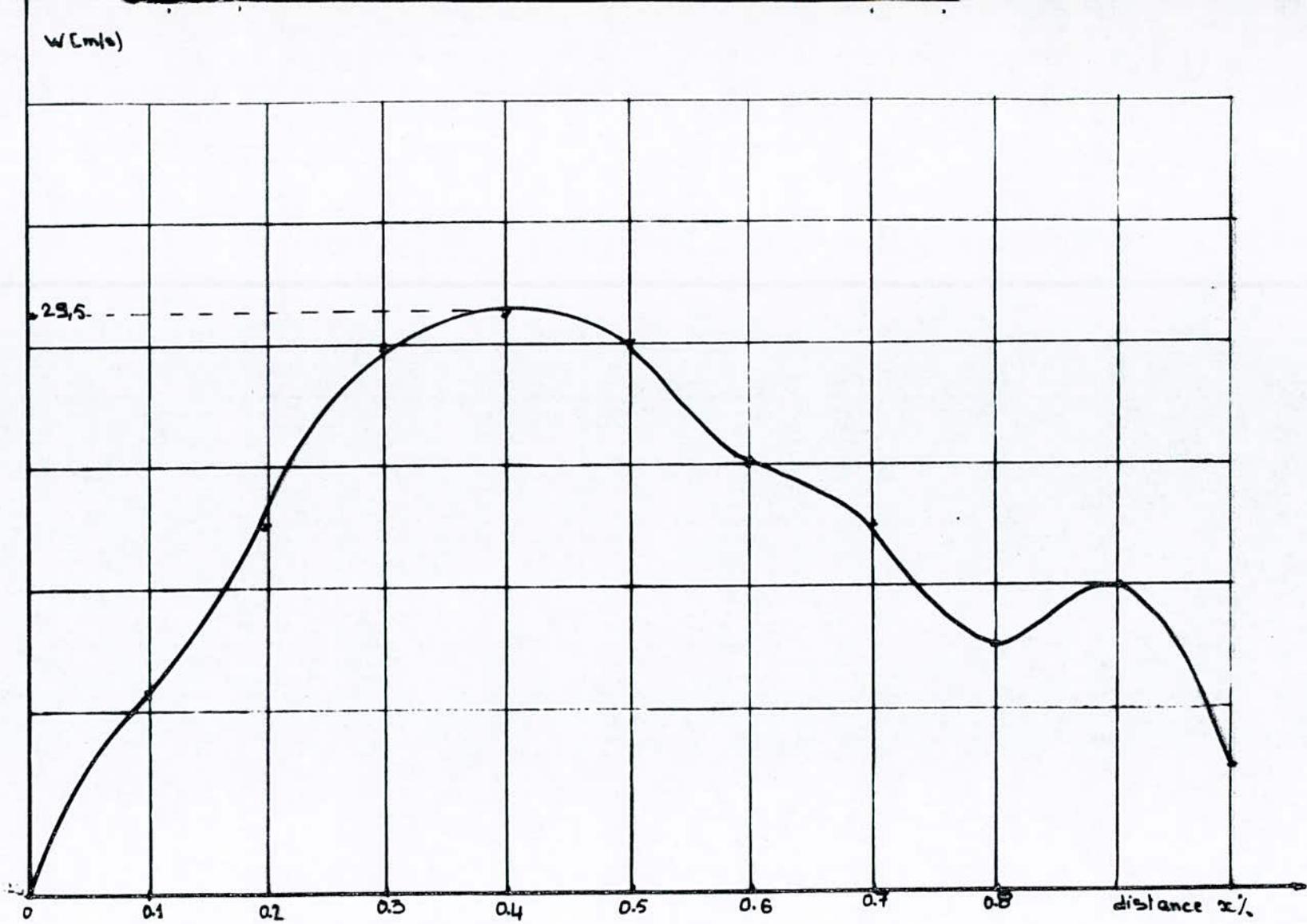
Resultat: ligne moyenne.

I	J	y	WM [m/s]	WT [m/s]	W [m/s]	TBETA
1	1	0.28618				
	2	0.16279				
	3	0.0836				
	4	0.0000	13.91	5.6357	45.00	0.403
	5	0.0000	23.29	0.6754	23.30	0.029
	6	0.0000	23.43	11.457	26.09	0.489
	7	0.0000	27.225	10.372	29.13	0.381
	8	0.0000	28.61	7.18	29.50	0.251
	9	0.0000	23.699	13.43	29.00	0.523
	10	0.0000	24.69	10.937	27.01	0.443
	11	0.0000	24.088	9.779	26.00	0.406
	12	0.0000	24.083	1.324	24.12	0.055
	13	0.0000	26.587	-	25.01	-
	14	0.0000	24.058	10.585	26.00	0.44
	15	0.16937				
	16	0.148928				
	17	0.571079				
	1	0.39567				
	2	0.27231	0.375107	-0.39981	0.5482	-1.0659
	3	0.17257	0.300485	-0.31987	0.43887	-1.0645
	4	0.093818	2.20427	-2.471	3.3113	-1.12102
	5	0.028626	1.3499	-1.5462	2.0525	-1.14538
	6	0.009873	0.888050	-0.46374	1.0018	-0.522195
	7	0.004509	0.791354	-0.1109	0.79909	-0.14023
	8	0.004368	0.822923	0.0209	0.82318	0.025407
	9	0.005496	0.961145	0.2679	0.9978	0.27875
	10	0.01682	1.23504	0.4877	1.30278	0.39495
	11	0.027407	1.6085	0.6871	1.7891	0.427196
	12	0.04657	2.06324	1.1058	2.3488	0.53595
	13	0.074425	2.7473	1.6972	3.2276	0.61821
	14	0.11609	3.7128	2.4297	4.47033	0.67059
	15	0.17251	0.473199	0.8661	0.98689	1.8302
	16	0.150208	0.24326	-2.929	2.93945	-12.042
	17	0.0571079				
3	1	0.47670				
	2	0.35335	0.804266	-0.43091	0.5275	-1.462
	3	0.23625	0.256099	-0.4237	0.4951	-1.6646
	4	0.11690	1.9267	-3.2529	3.78069	-1.6883
	5	0.04675	1.79831	-1.6882	2.4665	-0.93879
	6	0.025243	1.76545	-0.52169	1.8409	-0.2955

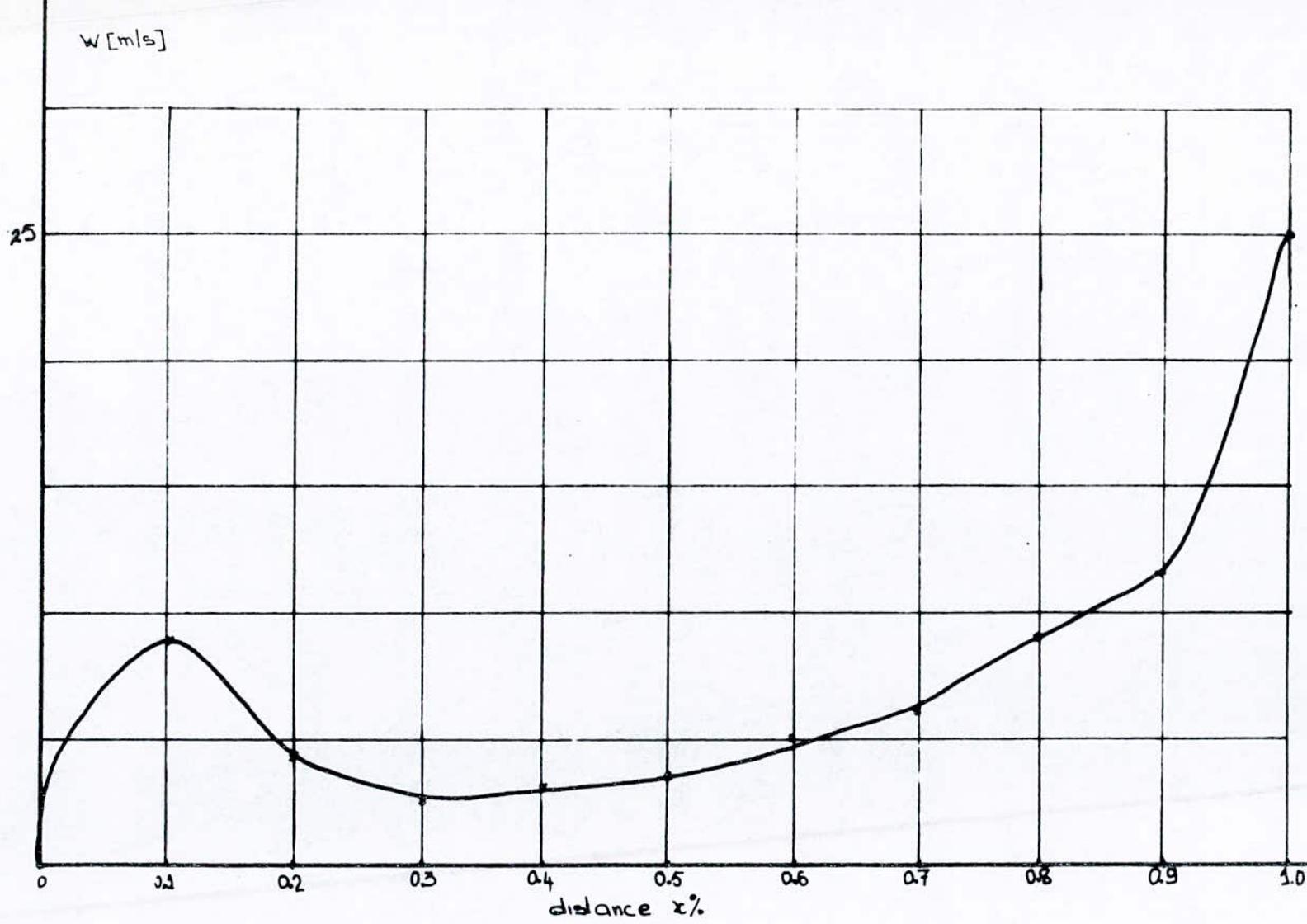
	7	0.0186	1.8690	0.1170	4.0729	0.0627
	8	0.0190	1.8620	0.0573	1.8855	0.0292
	9	0.0213	2.0749	0.287	2.0948	0.1380
	10	0.0328	2.0463	0.491	2.10468	0.2400
	11	0.0444	2.1397	0.716	2.2564	0.3340
	12	0.0638	2.1176	1.120	2.39597	0.5290
	13	0.0921	2.0916	1.692	2.6907	0.8090
	14	0.1330	2.0416	2.392	3.1453	1.1710
	15	0.1860	1.187	6.217	1.34065	0.5230
	16	0.1570	0.638	-3.28	3.3422	-5.175
	17	0.0571				
4	1	0.5502				
	2	0.4268	0.2910	-0.483	0.53085	-1.5270
	3	0.3026	0.3140	-0.485	0.57812	-1.5470
	4	0.1561	4.2280	-3.773	5.6672	-0.230
	5	0.0828	5.3030	-1.755	5.5963	-0.3370
	6	0.0608	5.8300	-0.516	5.9529	-0.087
	7	0.0500	6.5098	-0.100	6.5056	-0.0159
	8	0.0559	6.9432	-0.0646	6.8435	+0.00945
	9	0.0590	6.7409	0.258	6.7459	0.0382
	10	0.0678	6.5971	0.4048	6.6118	0.0668
	11	0.0788	6.5052	0.6630	6.5389	0.1010
	12	0.0966	6.0891	1.0148	6.17298	0.1666
	13	0.1220	5.3078	1.5668	5.5342	0.2950
	14	0.1607	4.8112	2.3629	5.36076	0.4910
	15	0.2051	2.5191	0.3283	2.37925	0.1240
	16	0.1731	1.182	-4.0107	4.18429	-3.360
	17	0.0571				
5	1	0.6248				
	2	0.5014	0.2510	-0.4804	0.48079	-1.6330
	3	0.3960	0.4548	-0.443	0.67532	-0.9750
	4	0.2537	14.668	-5.3249	15.0279	-0.2210
	5	0.2067	23.008	-1.0529	23.0321	-0.0457
	6	0.1965	26.740	-0.15056	26.744	-0.00562
	7	0.1988	29.790	0.0465	29.7977	0.00156
	8	0.1988	31.310	-0.05265	31.3109	-0.00168
	9	0.1964	30.121	-0.03128	30.1274	-0.00103
	10	0.1974	29.259	0.10657	29.259	0.00343
	11	0.2009	28.421	0.23616	28.4229	0.00081
	12	0.2207	26.244	0.28075	26.2467	0.0106
	13	0.2128	21.154	0.75178	21.1676	0.0365
	14	0.2384	18.633	1.6209	18.7036	0.0869
	15	0.2767	5.0235	-0.9652	5.17541	-0.1920
	16	0.2000	1.690	-5.5746	5.8254	-3.2968
	17	0.0571				

6	1	0.677	-0.035			
	2	0.554	0.2600	-0.258	0.260	7.299
	3	0.533	14.070	0.137	0.295	0.522
	4	0.630	22.900	4.170	14.6700	0.296
	5	0.776	26.120	3.7789	23.200	0.1629
	6	0.833	29.540	1.926	26.990	0.0737
	7	0.877	31.040	0.876	29.550	0.0296
	8	0.877	29.230	-0.850	31.050	-0.0273
	9	0.936	28.820	-1.690	29.280	-0.0581
	10	0.798	27.020	-1.650	23.050	-0.0590
	11	0.762	25.610	-1.792	27.090	-0.0696
	12	0.716	27.460	-3.744	25.880	-0.1462
	13	0.603	21.230	-7.612	27.740	-0.153
	14	0.568	4.290	-5.282	21.880	-0.248
	15	0.395	0.429	-8.499	9.520	-7.980
	16	0.2130	0.4203	-7.574	8.594	-20.420
	17	0.0571				
7	1	0.606				0.51
	2	0.483				0.50
	3	0.529				0.52
	4	1.000	0.000	0.000	0.000	0.53
	5	1.000	0.883	0.8808	1.8810	0.53
	6	1.000	0.772	0.790	0.883	0.54
	7	1.000	0.449	0.243	20.511.	0.55
	8	1.000	0.543	0.3119	0.63	0.57
	9	1.000	0.5788	0.393	0.700	0.68
	10	1.000	0.897	0.514	1.001.	0.6
	11	1.000	1.0044	0.617	1.2001	0.6
	12	1.000	1.604	0.978	1.881	0.61
	13	1.000	1.776	1.248	2.330	0.63
	14	1.000	14.132	18.723.	28.0021	0.65
	15	0.430				0.67
	16	0.215				0.68
	17	0.0571				0.7.

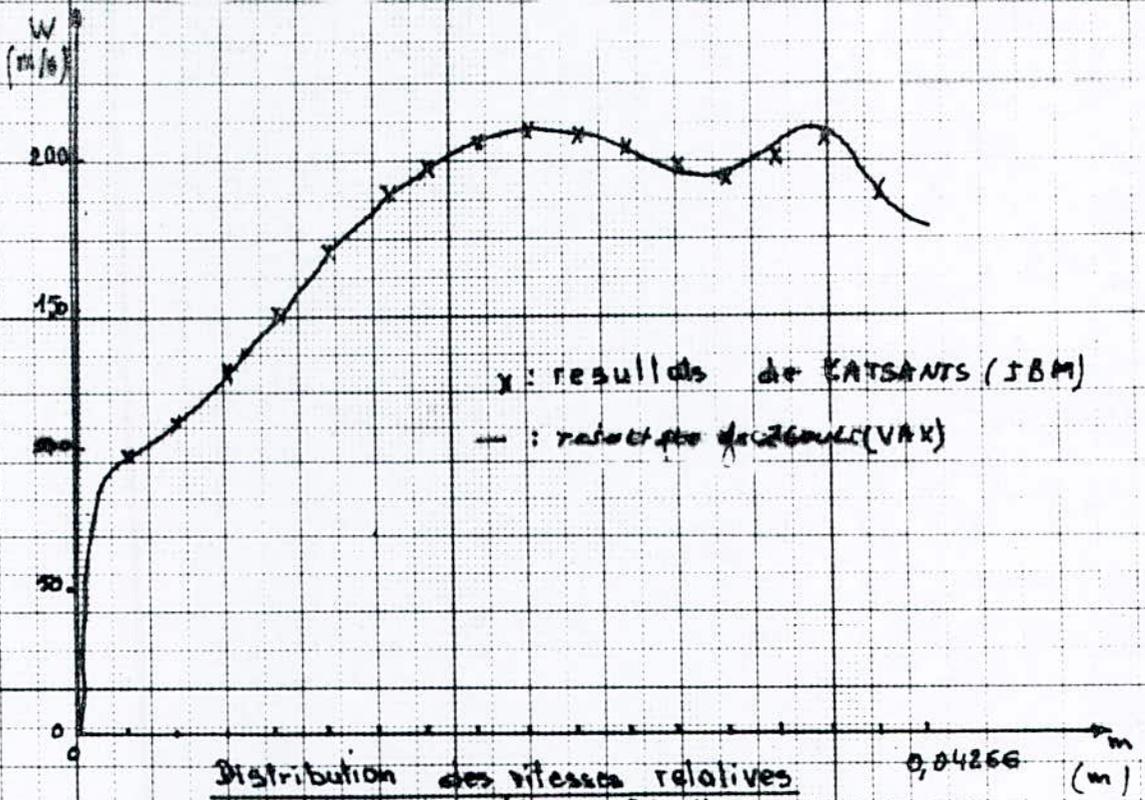




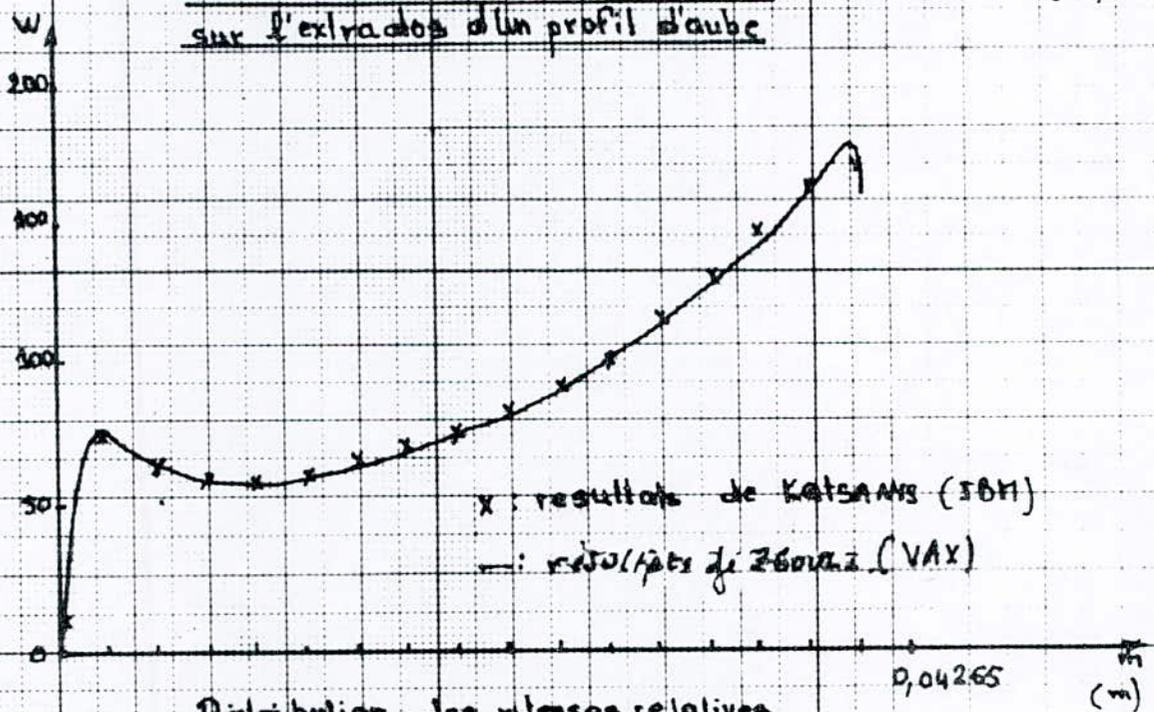
graph (2) Distribution de la vitesse relative
sur l'extrados de l'aube



graphem). Distribution des vitesses relatives
sur l'intrados de l'aube



Distribution des vitesses relatives
sur l'extrados d'un profil d'aube



Distribution des vitesses relatives
sur l'intrados d'un profil d'aube

VII. INTERPRETATION DES RESULTATS:

Le calcul des fonctions de courant par la methode de Katsanis nous a permis d'abord de tracer les lignes de courant , la repartition des vitesses relatives le long d'un canal, ainsi que la tangente de l'angle d'inclinaison de la vitesse ; ces resultats permettront apres la determination des distributions de pressions , des forces agissant sur les aubes (force de trainee, portance) ainsi que d'autres parametres necessaires pour la connaissance des conditions d'ecoulement dans les turbomachines .

A partir des resultats trouves on a pu tracer le graphe representant les variations de l'angle d'inclinaison des vitesses relatives le long du profil .

Pour l'analyse de la courbe obtenue on a pu les comparer avec des resultats experimentaux trouves par des chercheurs telque A.J. Stepanoff et Trokolanski qui ont obtenus trois sortes de courbes : droite , courbe concave et courbe convexe , la courbe tracee a partir des resultats qu'on a obtenu est en accord avec la deuxieme c'est a dire la courbe concave.

En traçant les ligne de courant nous avons pu en tirer deux remarques importantes :

-Les lignes de courant sont presque paralleles , courbees au niveau inferieur et commencent a s'applatir au niveau moyen pour prendre une nouvelle courbure au niveau superieur .

-La deuxieme et l'avant derniere lignes prennent la forme de l'aubece qui traduit qu' au niveau des aubes epousent la forme de celle-ci.

les variations de vitesse relative entre deux aubes est parabolique. Tandis que celles le long du profil a l'extrados et a l'intrados representee par les graphes (1) et (2) en comparees avec celles trouvees par Katsanis ont presque les memes allures.

Les differences observees peuvent etre dues a la forme de l'aube: on n a pas utilise les memes profils; dans notre cas on a pris une forme aerodynamique dont on dispose les dimensions necessaires pour le calcul.

elles peuvent encore être expliquées par le manque d'affinité du maillage ce qui diminue la précision comme on l'a déjà indiqué.

-Pour la vérification de la condition de Kutta, on a calculé la valeur de $\operatorname{tg}\beta$ au bord de fuite.

La tangente de l'angle de la ligne moyenne est:

$$\operatorname{tg}\beta = 0,4452.$$

L'erreur commise étant faible, la condition de Kutta est donc vérifiée.

VIII. CONCLUSION:

Le present memoire ainsi elabore a ete l'oeuvre dela compilation de plusieurs ouvrages dont les principales sources sont le fruit de plusieurs annees de recherche faites par des chercheurs en aerodynamique et dans la recherche de la performance des turbomachines telque Katsanis .

La methode ainsi developpee est une simple contribution pour le calcul de l'ecoulement autour d'un ensemble d'obstacles applique a une turbomachine , nous donnant des resultats approches vu les hypotheses simplificatrices et les interpolations qu'on a utilise; cependant ceci n'explique pas que la methode est a rejeter,mais en prennant un maillage assez fin il serait possible d'ameliorer la precision des resultats obtenus .

Le domaine des turbomachines et de l'aerodynamique etant encore sujets de recherches , il serait souhaitable d'etandre la presente etude a un ecoulement de fluide reel.

ANNEXE

DISCRETISATION DU LAPLACIEN

Le probleme de la resolution des equations aux derivees partielles du type de l'equation de Poisson :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

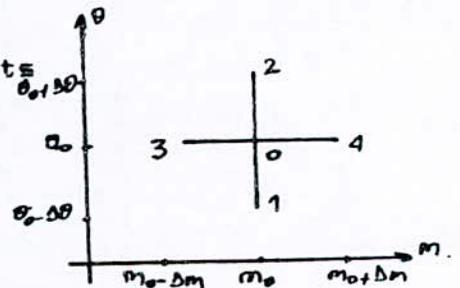
se ramene generalement à l'approximation de l'operateur differentiel par un operateur aux differences finies.

Le developpement en series de Taylor arrete au second ordre d'une fonction $f(x)$ continue et continuellement differentiable est:

$$f(\theta, m) = f(\theta_0, m_0) + (\theta - \theta_0) f'_\theta(\theta_0, m_0) + (m - m_0) f'_m(\theta_0, m_0) + \frac{1}{2} (\theta - \theta_0)^2 f''_\theta(\theta_0, m_0) + 2(\theta - \theta_0)(m - m_0) f''_{\theta m}(\theta_0, m_0) + (m - m_0)^2 f''_m(\theta_0, m_0) + o(h^2).$$

En appliquant l'equation aux quatre points entourant le noeud 0 on a:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_0 - \Delta\theta & m_3 &= m_0 - \Delta m. \\ \theta_2 &= \theta_0 + \Delta\theta & m_4 &= m_0 + \Delta m. \end{aligned}$$



$$f(\theta_0 - \Delta\theta, m_0) = f(\theta_0, m_0) + (\theta_1 - \theta_0) f'_\theta(\theta_0, m_0) + \frac{1}{2} (\theta_1 - \theta_0)^2 f''_\theta(\theta_0, m_0).$$

$$f(\theta_0 + \Delta\theta, m_0) = f(\theta_0, m_0) + (\theta_2 - \theta_0) f'_\theta(\theta_0, m_0) + \frac{1}{2} (\theta_2 - \theta_0)^2 f''_\theta(\theta_0, m_0).$$

$$f(\theta_0, m_0 - \Delta m) = f(\theta_0, m_0) + (m_3 - m_0) f'_m(\theta_0, m_0) + \frac{1}{2} (m_3 - m_0)^2 f''_m(\theta_0, m_0).$$

$$f(\theta_0, m_0 + \Delta m) = f(\theta_0, m_0) + (m_4 - m_0) f'_m(\theta_0, m_0) + \frac{1}{2} (m_4 - m_0)^2 f''_m(\theta_0, m_0).$$

La résolution du système d'équations ci-dessus donne les solutions :

$$f'_\theta(\theta_0, m_0) = \frac{f(\theta_0 + \Delta\theta, m_0) - f(\theta_0 - \Delta\theta, m_0)}{\theta_2 - \theta_1} ; \quad f'_m(\theta_0, m_0) = \frac{f(\theta_0, m_0 + \Delta m) - f(\theta_0, m_0 - \Delta m)}{m_4 - m_0} ;$$

$$f''_{\theta\theta}(\theta_0, m_0) = \frac{2}{\theta_3 - \theta_2} \left(\frac{f(\theta_0, -\Delta\theta, m_0)}{\theta_1 - \theta_0} - f(\theta_0, m_0) \frac{\theta_2 - \theta_1}{(\theta_1 - \theta_0)(\theta_2 - \theta_0)} - \frac{f(\theta_0 + \Delta\theta, m_0)}{\theta_2 - \theta_0} \right) ;$$

$$f''_{mm}(\theta_0, m_0) = \frac{2}{m_3 - m_4} \left(\frac{f(\theta_0, m_0 - \Delta m)}{m_3 - m_0} - f(\theta_0, m_0) \frac{m_4 - m_3}{(m_3 - m_0)(m_4 - m_0)} - \frac{f(\theta_0, m_0 + \Delta m)}{m_4 - m_0} \right) .$$

En posant :

$$h_1 = r(\theta_0 - \theta_1) ;$$

$$h_3 = m_0 - m_3 ;$$

$$h_2 = r(\theta_2 - \theta_0) ;$$

$$h_4 = (m_4 - m_0) .$$

Et en remplaçant pour chaque terme de l'équation (10) appliquée pour une fonction adimensionnelle y au point (0) :

avec $y = \psi/q$

$$\frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \Big|_0 = \frac{2y_1}{h_1(h_1 + h_2)} + \frac{2y_2}{h_2(h_1 + h_2)} - \frac{2y_0}{h_1 h_2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial m^2} \Big|_0 = \frac{2y_3}{h_3(h_3 + h_4)} + \frac{2y_4}{h_4(h_3 + h_4)} - \frac{2y_0}{h_3 h_4} .$$

$$\frac{1}{\rho R_0} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \theta} \Big|_0 = \frac{1}{\rho R_0} \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{h_1 + h_2} \right) \left(\frac{y_2 - y_1}{h_1 + h_2} \right) .$$

$$\left(\frac{\sin \lambda_0}{R_0} - \frac{1}{b_0 \rho_0} \frac{\partial (b\rho)}{\partial m} \Big|_0 \right) \frac{\partial y}{\partial m} \Big|_0 = \left(\frac{\sin \lambda_0}{R_0} - \frac{b_4 \rho_4 - b_3 \rho_3}{b_0 \rho_0 (h_4 + h_3)} \right) \frac{y_4 - y_3}{h_4 + h_3} .$$

DONNÉES:

caractéristiques de la pompe

$n = 735 \text{ tr/min}$; $H = 10 \text{ m}$; $Q = 100 \text{ l/s}$; $\eta = 0.95$

• ligne moyenne: pas $m = 2.8 \text{ cm}$ $m_0 = 0.254 \text{ cm}$.

$m \text{ (cm)}$	$b \text{ (cm)}$	$d \text{ (rad)}$	$R \text{ (cm)}$
0,254	10.44	0.122	20.32
$m_0 + m$	9.73	0.323	20.6
$m_0 + 2m$	9.32	0.471	20.75
$m_0 + 3m$	8.89	0.584	21.74
$m_0 + 4m$	8.46	0.657	22.71
$m_0 + 5m$	8.33	0.759	24.28
$m_0 + 6m$	8.05	0.834	25.96
$m_0 + 7m$	7.76	0.899	28.57
$m_0 + 8m$	7.62	0.969	31.9
$m_0 + 9m$	7.34	1.065	33.3
$m_0 + 10m$	7.06	1.126	36.12

• ligne supérieure: "stroud" pas $m = 2.29$ $m_0 = 0.254$.

m_0	10.44	0.157	22.86
$m_0 + m$	9.73	0.34	23.00
$m_0 + 2m$	9.32	0.453	23.42
$m_0 + 3m$	8.89	0.583	24.00
$m_0 + 4m$	8.46	0.672	24.84
$m_0 + 5m$	8.33	0.763	26.24
$m_0 + 6m$	8.05	0.829	27.32

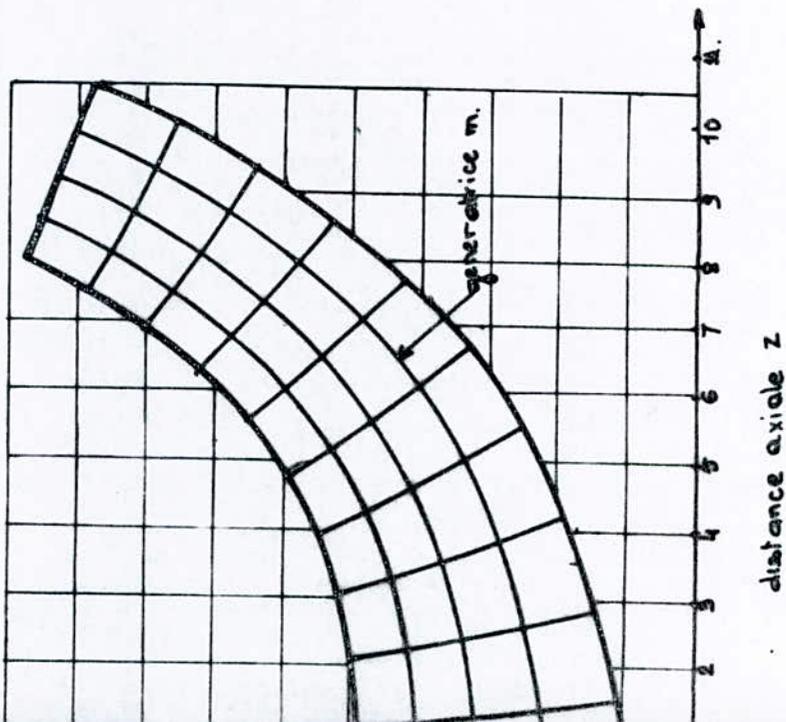
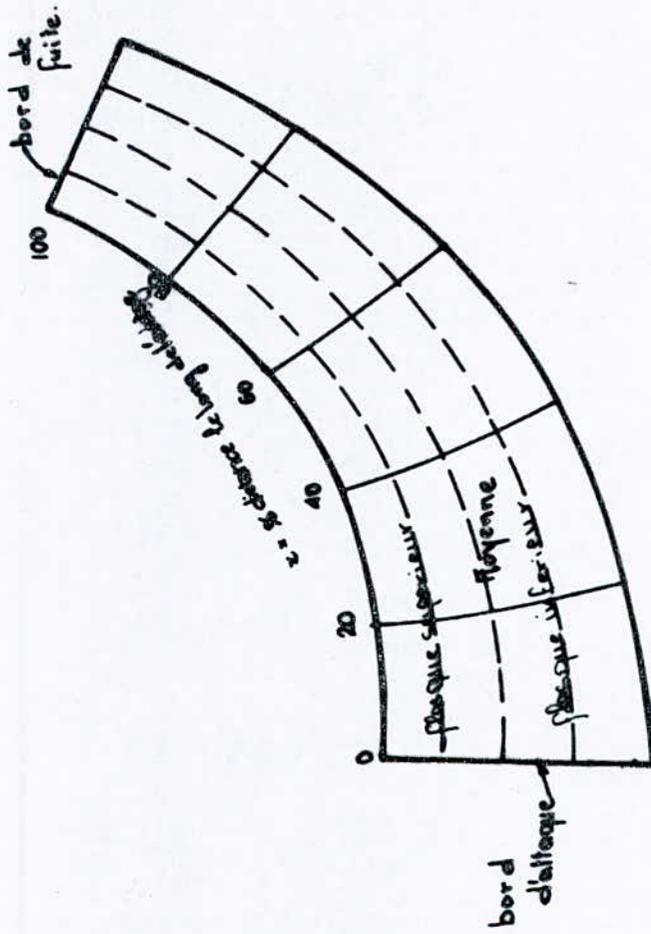
$m_0 + 3m$	7.76	0.855	29.92
$m_0 + 4m$	7.62	0.925	32.182
$m_0 + 5m$	7.34	0.995	34.44
$m_0 + 10m$	7.06	1.1	36.98

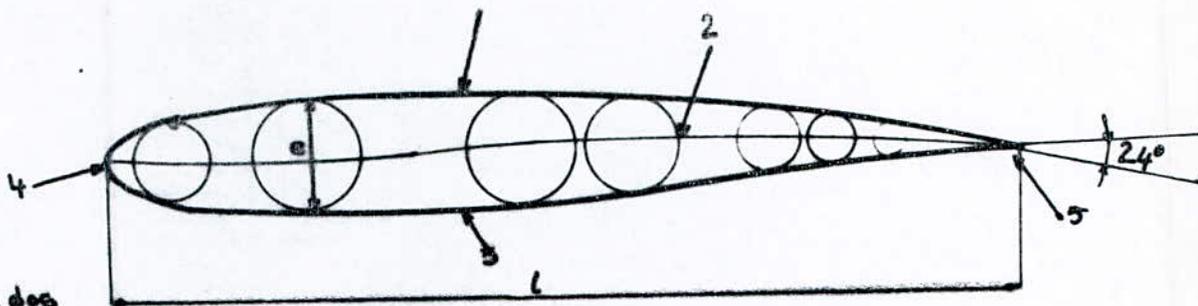
. ligne inferieure : "Hub" pos $m = 3.05$; $m_0 = 0.381$.

m_0	20.44	0.1047	17.78
$m_0 + m$	9.73	0.314	18.06
$m_0 + 2m$	9.32	0.488	18.62
$m_0 + 3m$	8.89	0.625	19.86
$m_0 + 4m$	8.46	0.729	20.88
$m_0 + 5m$	8.33	0.817	22.43
$m_0 + 6m$	8.05	0.889	24.56
$m_0 + 7m$	7.96	0.948	26.95
$m_0 + 8m$	7.62	1.012	29.64
$m_0 + 9m$	7.34	1.082	32.46
$m_0 + 10m$	7.06	1.169	35.28

. $\lambda = \pi/5$

. $h_1 = h_2 = 2.50 \text{ cm.}$





1. extrados

2. ligne médiane ou squelette du profil

3. intrados

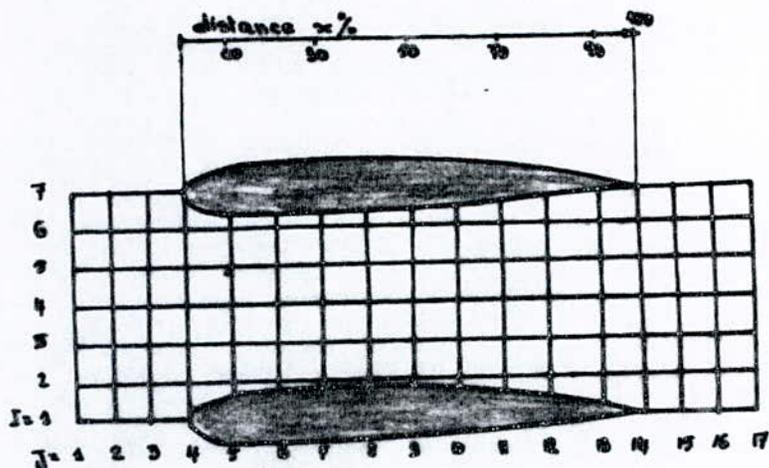
4. bord d'attaque

5. bord de fuite

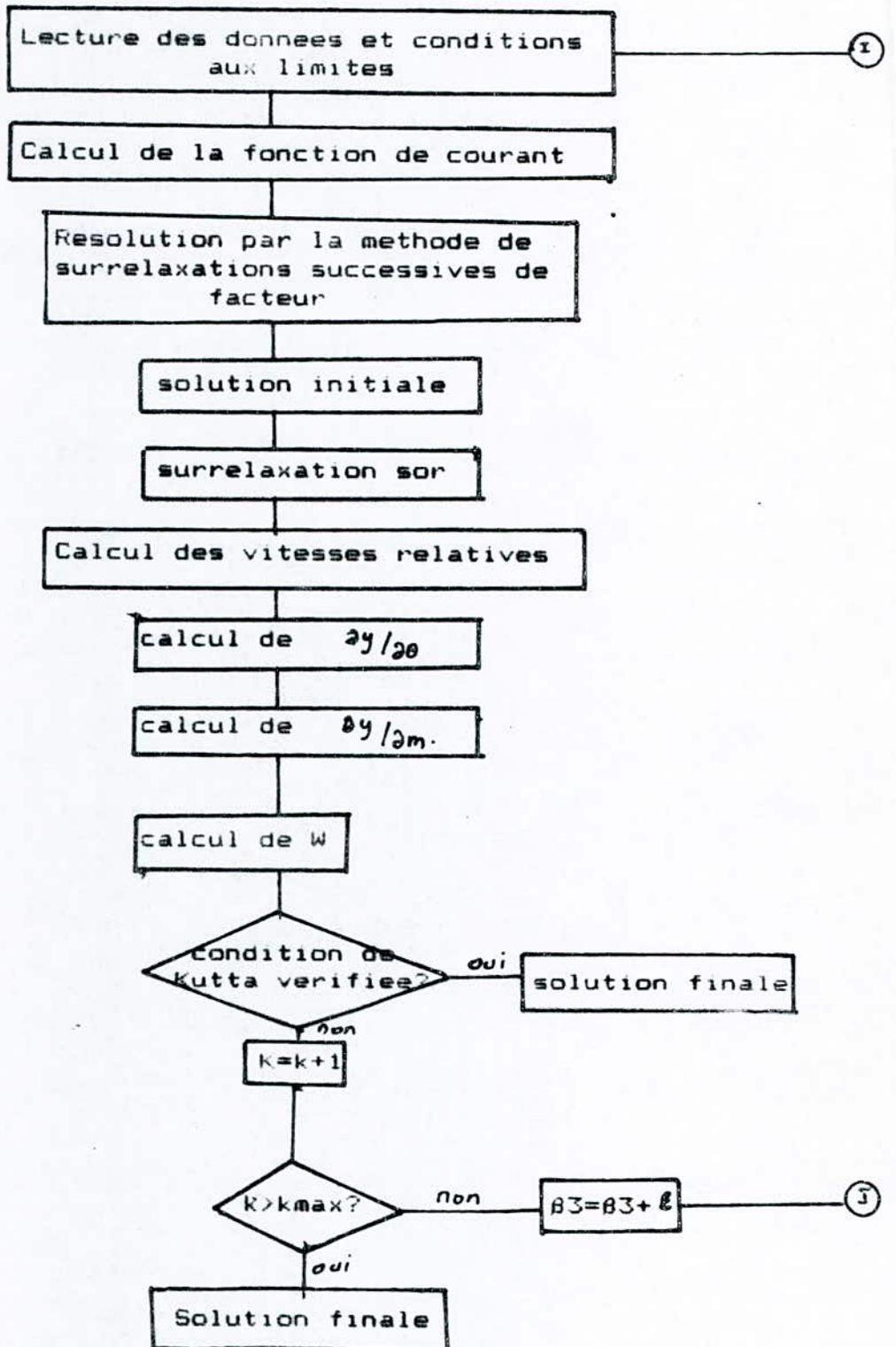
e: épaisseur de l'aube

L: corde du profil

Maillage utilisé



ORGANIGRAMME GENERAL



BIBLIOGRAPHIE

- ANDERSON, J. Fundamentals of aerodynamics and flow in turbomachines (ed.1982)
- BOUMAH RAT Methodes numeriques appliquees (OPU 1983)
- COMOLET Mecanique des fluides (ed.1983)
- PELLETIER Techniques numeriques appliquees au calcul scientifique (ed. 1982)
- SEDILLE, M. Turbomachines hydrauliques et thermiques (tome II) (ed.1967)
- STEPANOFF, A. J Pompes centrifuges et à helices (Dunod 1961)
- TROSKOLANSKI Turbomachines theorie-trace-construction (ed. 1982)
- VAVRA Aerothermodynamics and flow in turbomachines (ed. 1960)
- KATSANIS , T Use of arbitrary quasi-orthogonals for calculating flow on blade to blade surface in turrbomachines NASA TN D-2809, 1964
- ZBOULLI R. Contribution à l'étude du couplage écoulement sain-couche limite dans un calcul de grille d'aubes. These de doctorat. E.N.S.A.M. de Lille. 1984
Lille.
-

