

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : HYDRAULIQUE



PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

**Etude dynamique d'un  
barrage en terre par la  
méthode des différences  
finies centrales**

Proposé par :

Melle ZERFA

Etudié par :

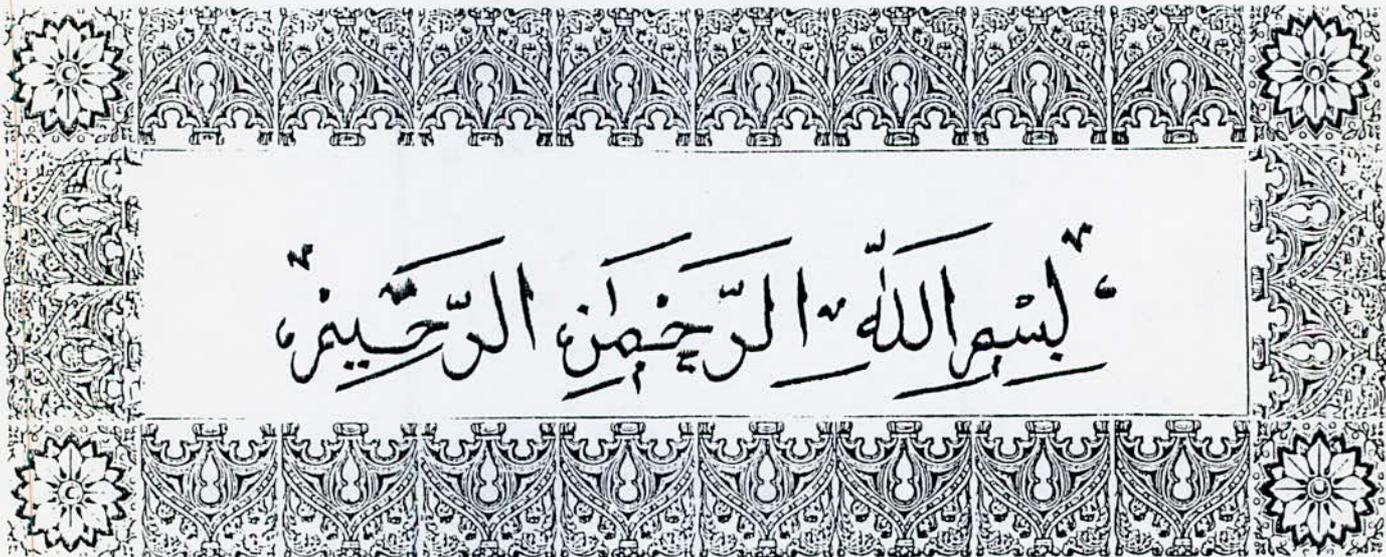
Mr Y. KHERROUB

Dirigé par :

Melle ZERFA

PROMOTION : 1988

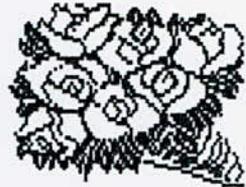
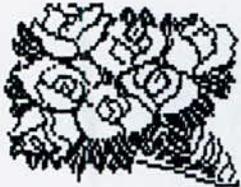
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

المدرسة الوطنية  
BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

# Dedicates



A ma mère.

A mon père.

A mes frères et soeurs.

A tous mes amis (es) et camarades.

*Youcef*

# Remerciements

C'est avec un grand honneur que je témoigne ma profonde gratitude et reconnaissance à tous ceux qui, de près comme de loin, ont contribué à la réalisation de mon étude et en particulier:

#A mademoiselle ZERFA, ma promotrice pour son aide et ses conseils précieux.

#A tous mes professeurs qui ont contribué à ma formation et sans lesquels cette étude n'aurait pas eu lieu.

#Au personnel du centre de calcul.

Je tiens également à remercier mes soeurs, dont l'aide et la coopération pour la correction des erreurs, m'ont été d'un grand secours.

Sans oublier YASMINA pour son soutien moral et l'enthousiasme dont elle a fait preuve en m'aidant à dactylographier mon manuscrit.

Y. KHERROUB

Departement: HYDRAULIQUE

مصلحة: الري

Promoteur: Melle ZERFA

الموجه: الأنسة زرفة

Elève ingénieur: Mr KHERROUB Youcef

تلميذ مهندس: خروب يوسف

الموضوع: دراسة ديناميكية لسد ترابي بطريقة الفروق المنتهية المركزية.

ملخص: الدراسة تتضمن برنامج حسابي بلغة " الفورترون " ( FORTRAN ) مستعملا طريقة العناصر المنتهية. وحلول المعادلات التفاضلية بطريقة الفروق المنتهية المركزية.

هذا البرنامج يسمح لسد ترابي متعرض للزلازل بتقييم :

\*\* التحركات النووية (العقدية) \*\* الاجهادات والتشويهاات.

الفرضيات هي مايلي : \*\* العناصر ذوي نفس العوامل ل 8 عقد .

\*\* التشويهاات المستوية \*\* حساب مزدوج الأبعاد \*\* مرونة مسطحة .

SUJET:

ETUDE DYNAMIQUE D'UN BARRAGE EN TERRE PAR LA  
METHODE DES DIFFERENCES FINIES CENTRALES

RESUME:

L'étude consiste à élaborer un programme de calcul en langage FORTRAN utilisant la méthode des éléments finies et résolution des équations différentielles par la méthode des différences finies centrales.

Ce programme nous permet, pour un barrage en terre soumis à une excitation sismique d'estimer :

\*\* Les déplacements nodaux \*\* les contraintes et déformations

Les hypothèses sont les suivantes:

\*\* Calcul bidimensionnel

\*\* Déformations planes

\*\* Eléments isoparamétriques à 8 noeuds

\*\* Elasticité linéaire

SUBJECT:

DYNAMIC ANALYSIS OF EARTH DAM WITH CENTRAL  
DIFFERENTS FINIT METHOD

ABSTRACT:

The aim of this subject is to elaborate calculating program with FORTRAN language using differents finit elements method and resolution of differential equations with central finit differents method.

With this program we can estimate for an earth dam, under an earthquake excitation:

\*\* Nodal displacements

\*\* Stresses and deformations

The hypothesis are :

\*\* Bidimensional calculation

\*\* plain deformations

\*\* Isoparametric elements with 8 nodes

\*\* Linear elasticity

# SOMMAIRE

INTRODUCTION.....	1
<u>Chapitre1. ELEMENTS DE SISMOLOGIE</u>	
I./ ORIGINE DES TREMBLEMENTS DE TERRE.....	2
II./ ETUDE DES TREMBLEMENTS DE TERRE.....	2
III./ SISMOGRAPHE.....	3
<u>Chapitre2. COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES BARRAGES EN TERRE</u>	
I./ GENERALITES.....	5
II./ DIFFERENTS TYPES DE RUPTURES.....	5
<u>Chapitre3. DIFFERENTES METHODES DE CALCUL DES STRUCTURES</u>	
I./ METHODE DES FORCES.....	8
II./ METHODE DES DEPLACEMENTS.....	10
III./ METHODE DES ELEMENTS FINIS.....	12
<u>Chapitre4. METHODE DES ELEMENTS FINIS</u>	
I./ GENERALITES.....	13
II./ PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.....	13
III./ SUBDIVISION OU DISCRETISATION DES STRUCTURES.....	14
IV./ PROGRAMATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.....	15
V./ ETAPES CARACTERISTIQUES D'UN PROGRAMME D'ELEMENTS FINIS.....	16
VI./ METHODES NUMERIQUES DE RESOLUTION DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES.....	18
VII./ METHODE DE CONSTRUCTION DES FONCTIONS D'INTERPOLATION..	18
VIII./ FORME D'ELEMENTS CLASSIQUES.....	21
IX./ PRESENTATION DU PROGRAMME M.E.F.....	22
X./ DIFFERENTS BLOCS FONCTIONNELS DU PROGRAMME M.E.F.....	23
XI./ ENCHAINEMENT DES DIFFERENTS BLOCS.....	26
XII./ NORMES DE PROGRAMMATION.....	27
<u>Chapitre5. BASES DE LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUES</u>	
I./ INTRODUCTION.....	28
II./ THEORIE DE L'ELASTICITE.....	28

Chapitre 6. FORMULATION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT

I./ EQUATION DU MOUVEMENT.....	33
II./ FORMULATION MATRICIELLE.....	34
III./ CALCUL DES MATRICES ELEMENTAIRES.....	35

Chapitre 7. RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME

I./ INTRODUCTION.....	43
II./ PRESENTATION DE LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES.....	44
III./ INTEGRATION DU SYSTEME DU SECOND ORDRE PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES CENTRALES.....	46
IV./ ORGANIGRAMME.....	50

CONCLUSION..... 54

RECOMMANDATION..... 55

BIBLIOGRAPHIE..... 57

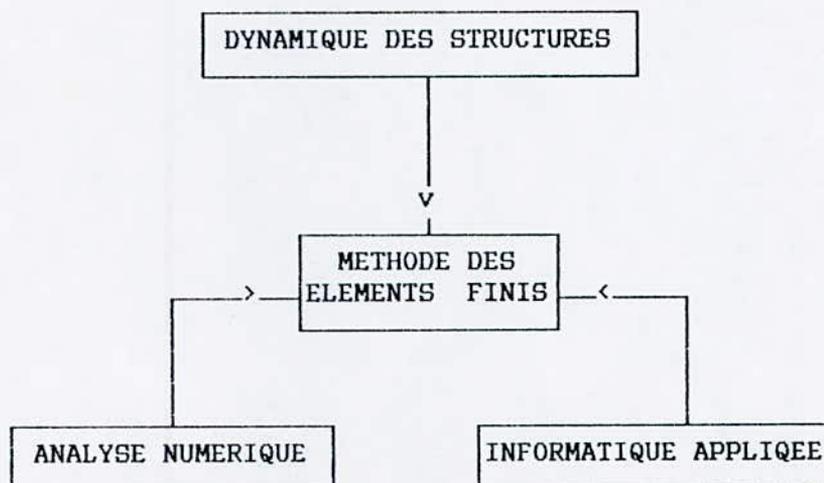
# PREAMBULE

Cette étude présente un programme model en langage FORTRAN élaboré et exécuté par un mini-ordinateur VAX VT220. c'est un programme très général qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique : problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaire, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions. En outre, il s'adapte très bien aux milieux hétérogènes très souvent rencontrés dans la pratique de l'ingénieur.

Ce programme a donné lieu à un développement d'algorithmes divers de résolution des systèmes linéaires, d'inversion de matrices, de recherche des valeurs propres, d'intégration des systèmes d'équations différentielles. Cependant il nous a permis de nous initier aux principaux problèmes et algorithmes rencontrés dans un programme général d'éléments finis

La méthode des éléments finis qui nécessite un tel programme fait appel aux trois domaines suivants:

- \* Science de l'ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles.
- \* Méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques.
- \* Programmation et informatique pour exécuter efficacement les calculs sur l'ordinateur.



# INTRODUCTION

## I N T R O D U C T I O N

Les grands ouvrages en général et les barrages en particulier sont assujettis à une étude dynamique minutieuse . C'est une étude préventive importante , surtout en zone sismique car elle permet d'éviter les dégâts catastrophiques provoqués par les tremblements de terre .

Le calcul dynamique des barrages en terre est synonyme d'analyse du comportement sismique, car c'est le seul effet dynamique que doit supporter l'ouvrage. Les barrages en terre situés dans les zones sismiques (cas de l'Atlas nord-Africain) nécessitent le calcul de la réponse de la structure à l'action des mouvements du terrain; c'est un problème d'une complexité considérable où l'emploi de méthodes numériques utilisant les ordinateurs s'avère très utile et constitue un instrument particulièrement efficace. Dans ce projet de fin d'étude, pour la résolution des systèmes du second ordre, l'utilisation de la méthode des différences finies se révèle nécessaire si l'on veut améliorer le programme pour un comportement non linéaire (linéaire équivalent) .

Il y'a lieu de noter également que les séismes les plus importants sont ceux provoqués par les mouvements aux frontières des plaques tectoniques, c'est le cas de l'Atlas Algérien situé aux frontières des deux plaques tectoniques Africaine et Eurasienne.

Enfin, le but des calculs est l'amélioration de la sécurité et du comportement du barrage en exploitation, ainsi que la recherche du projet le plus économique, compte tenu des contraintes imposées.

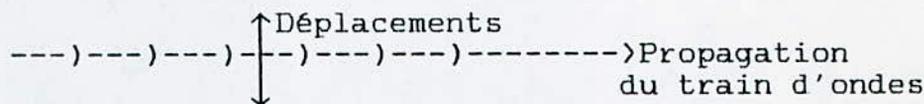
CHAPITRE 1

**ELEMENTS DE  
SISMOLOGIE**



### \*Ondes S ou ondes transversales

Elles se déplacent avec une vitesse de 4 à 5 Km/s et s'accompagnent d'une distorsion dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation provoquant un cisaillement sans changement de volume .



### \*Ondes de surface

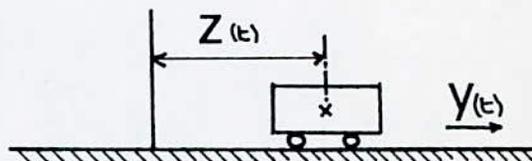
Ces ondes voyagent le long de la frontière entre deux milieux et à la surface de la terre (ondes de Rayleigh).

Les ondes superficielles ne contribuent pas tellement à l'accélération du terrain, sauf dans le cas de structures flexibles. En génie parasismique, on étudie surtout l'effet des ondes internes P et S.

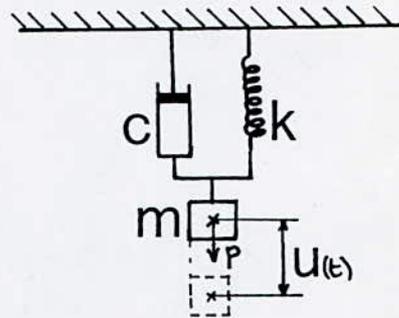
## III./ SISMOGRAPHE

Le sismographe est un appareil qui permet de mesurer les mouvements de la terre. Pour pouvoir mesurer le déplacement  $y(t)$  du sol alors que tout est en mouvement, on utilise une masse et un point fixe par rapport au sol.

$y(t)$  : Déplacement absolue  
 $z(t)$  : déplacement relatif



Pour éviter les déplacements importants de la masse par rapport au sol, on utilise un ressort et pour éviter les vibrations libres du système un amortisseur est mis en place. On forme ainsi un oscillateur simple qui constitue l'élément de base pour étudier la dynamique des structures.



$c$  : amortissement  
 $k$  : raideur du ressort  
 $u(t)$  : déplacement

Ecrivons l'équation du mouvement, sachant que  $U(t)$  est le déplacement absolue de la masse .

$$F_1 + F_2 + P(t) = m \cdot \ddot{u}$$

avec:

$F_1 = -k \cdot u$  : Force de rappel du ressort.  
 $F_2 = -c \cdot \dot{u}$  : Force due à l'amortissement.  
 $P(t)$  : Force extérieure appliquée.  
 $u$  : Déplacement

D'où il vient :

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = P(t)$$

Donc

$$\ddot{u} + \frac{c \cdot \dot{u}}{m} + \frac{k}{m} u = \frac{P(t)}{m}$$

$\frac{k}{m} = \omega_n^2$  : Pulsation ou fréquence propre du système sans amortissement

Alors

$$\ddot{u} + 2 \cdot \omega_n \cdot \xi \cdot \dot{u} + \omega_n^2 \cdot u = \frac{P(t)}{m}$$

$\xi = \frac{c}{C_c}$  : Rapport d'amortissement critique

$C_c = 2 \cdot \sqrt{k \cdot m}$  : Amortissement critique

CHAPITRE 2

**COMPORTEMENT  
DYNAMIQUE  
DES BARRAGES  
EN TERRE**

## COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES BARRAGES EN TERRE

### I. / GENERALITES

Le calcul dynamique des barrages en terre sous-entend l'analyse du comportement sismique car c'est le seul effet dynamique que doit subir l'ouvrage. Parmi les cas de charges, on a les forces d'origine sismique qu'on introduit sous forme de charges statiques équivalentes obtenues par multiplication du coefficient sismique (accélération) par la masse de l'ouvrage et majoration de ce produit de la masse d'eau stockée. En outre, on a toujours supposé que seule la composante horizontale dirigée vers l'amont de la secousse ajoute des efforts importants. Cette force sismique ajoutée aux autres efforts statiques donne la charge totale qui agit sur l'ouvrage .

### II. / DIFFERENTS TYPES DE RUPTURES

Il existe plusieurs types de rupture, parmi lesquels on distingue :

#### \*Phénomène de liquéfaction des matériaux sableux

Ce phénomène résulte d'une augmentation maintenue de la pression intersticielle entraînant une chute de la contrainte latérale effective . Les déformations correspondantes peuvent-être soit très importantes dans le cas des sols laches, qui perdent complètement leur résistance au cisaillement, soit limitées dans le cas des sols denses .

La dissipation, en fin de séisme, des surpressions intersticielles engendrées dans les couches profondes, provoque un écoulement ascendant (geysers de sable) qui peut parfois entraîner la liquéfaction des couches superficielles .

Ce phénomène est très important dans le cas des barrages en terre ou en matériaux locaux, il doit donc toujours être envisagé.

### \*Rupture dans la fondation

Le mouvement d'une faille traversant la fondation d'un barrage peut provoquer des infiltrations et une perte de résistance du matériau de la fondation et par suite la rupture ou le cisaillement du barrage .

Pour prévoir ce phénomène il faut :

- \* Vérifier la stabilité locale de la fondation et la stabilité globale de l'ouvrage .
- \* Evaluer l'influence de la modification du régime hydraulique sur la stabilité du massif .

Donc le contrôle de la fondation rocheuse avant et pendant la vie du barrage est indispensable ; on parle de l'oscultation de l'ouvrage .

### \*Effet de la pression intersticielle

Les effets de l'eau sont liés à la pression et à la vitesse d'écoulement. La pression crée une instabilité, soit à l'émergence sur le parement amont, soit dans le massif.

la pression intersticielle est celle qui s'établit dans l'eau incluse entre les grains de la terre ou les feuilles d'argiles. cette pression réduit la résistance apparente au cisaillement du matériau selon la loi de Coulomb .

$$\tau_{\max} = c' + (\sigma - U) \cdot \operatorname{tg} \varphi'$$

Où :  $\varphi'$  : Angle de frottement interne.  
 $c'$  : Cohésion.  
 $U$  : Pression intersticielle.

Par sa vitesse, l'eau tend à éroder en entraînant la matière. Au pire des cas, on a le renard qui évacue d'abord de proche en proche les éléments fins de la terre, ensuite les plus gros .

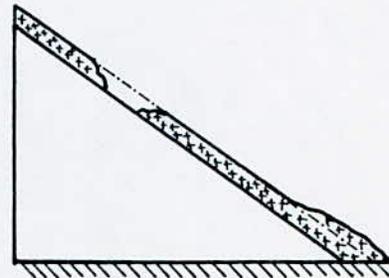
### \*Glissements dans la digue

Les glissements sont engendrés par les écroulements de terrains qui se produisent soit naturellement, soit à la suite de travaux effectués par l'homme. Ces mouvements sont classés en quatre familles :

- Ecoulements
- Glissements proprement dits
- Coulées boueuses
- Mouvements de fluage

Les glissements sont fréquents et se produisent généralement dans les matériaux meubles, on distingue deux types de glissements :

#Les glissements plan qui se produisent sur des couches planes peu épaisses .



\*\*Glissement plan\*\*

#les glissements rotationnels dans lesquels se produit un basculement de la masse glissée le long d'une surface courbe plus ou moins circulaire .



\*\*glissement rotationnel\*\*

### \*Rupture de l'un des ouvrages annexes

La destruction ou l'obstruction du déversoir ou de l'un des ouvrages de vidange peuvent conduire à un déversement sur le barrage donc sa rupture .

CHAPITRE 3

**DIFFERENTES  
METHODES DE  
CALCUL DES  
STRUCTURES**

## D I F F E R E N T E S   M E T H O D E S   D E C A L C U L   D E S   S T R U C T U R E S

Les méthodes de calcul des structures discrètes composées d'un nombre fini de structures élémentaires sont :

-La méthode qui consiste à calculer soit les réactions inconnues (méthode des forces), soit les déplacements inconnus (méthode des déplacements) et qui s'applique aux structures les plus générales .

-La méthode des éléments finis applicable aux structures continues à deux ou trois dimensions. La discrétisation de ces structures en éléments finis ne peut être faite que moyennant des hypothèses simplificatrices dont l'expérience permet de juger de la validité. Cette méthode, moyennant le calcul numérique, permet la résolution d'équations aux dérivées partielles linéaire du second ordre.

### I. / METHODE DES FORCES

C'est une méthode utilisant la théorie des matrices pour déterminer les forces internes d'une structure soumise à des charges données. Le comportement des composantes élémentaires aussi bien que celui de toute la structure est régi par les deux principes fondamentaux suivants:

#### \*Condition d'équilibre:

Les forces agissant sur la structure ou ses composants considérés comme corps libres doivent être en équilibre. Ainsi pour l'ensemble de la structure, les forces sont les charges extérieures et les réactions. Pour chaque élément de la structure, les forces sont les charges extérieures et les forces internes .

#### \*Condition de compatibilité:

Les déplacements de la structure ou de ses éléments doivent être compatibles; pour qu'il en soit ainsi, l'extrémité fixe de la structure doit avoir un déplacement nul.

Exemple: Un treillis sur lequel on aura pratiqué un nombre fini de sections aura obligatoirement des déplacements relatifs nuls de chaque côté de ces sections.

En plus de ces deux conditions, le comportement de la structure doit satisfaire aux conditions aux limites et à la loi de Hooke qui décrit le rapport entre la charge et la déformation du matériau (dans le cas du comportement linéaire). En ce qui concerne les structures élastiques, nous supposons que la déformation est proportionnelle à la charge. Autrement dit, le rapport est linéaire.

**\*Marche à suivre pour résoudre les problèmes sur les structures par la méthode des forces:** Pour résoudre une structure statiquement indéterminée la méthode des forces se résume comme suit :

a/ Déterminer le nombre d'inconnues surabondantes définies par une matrice colonne X (matrice des forces surabondantes)

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Bmatrix} \quad n: \text{Nombre d'inconnues en trop.}$$

b/ Définir les charges extérieures par une matrice colonne Q

$$Q = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{Bmatrix} \quad q: \text{Nombre de forces extérieures.}$$

c/ déterminer les matrices de transformation, soit par les méthodes de la statique soit par les méthodes de transformation des matrices qui fournissent un processus systématique pour la programmation.

d/ Déterminer les matrices de déformabilité de chaque barre ( $f_1, f_2, \dots, f_n$ ) avec lesquelles on écrit la matrice diagonale F.

e/ Calculer la matrice de déformabilité des forces surabondantes

$$F_x = U_x^T \cdot F \cdot U_x$$

f/ Calculer la matrice de déformabilité, charges extérieures-déplacements surabondants.

$$F_o = U_x^T \cdot F \cdot (U_o + U_o')$$

g/ Inverser la matrice de déformabilité des forces surabondantes

$$F_x^{-1}$$

h/ Calculer la matrice des forces surabondantes.

$$X = -F_x^{-1} \cdot F_o \cdot Q$$

i/ Enfin, la matrice des forces surabondantes est:

$$T = U_o \cdot Q + U_x \cdot X$$

## II./ METHODE DES DEPLACEMENTS

Dans la méthode des déplacements, comme dans celle des forces, une structure est considérée comme un assemblage de composantes élémentaires. Les points de jonction de ces composantes, sont appelés des noeuds. La différence fondamentale dans l'emploi de la méthode des déplacements réside dans le fait que les déplacements hors des noeuds sont pris comme inconnus.

La condition de compatibilité, citée plus haut est satisfaite en premier lieu en faisant correspondre le déplacement des noeuds avec celui des barres composant l'élément. On relie ensuite les forces dans les barres aux déplacements du point nodal, par une

matrice définie comme étant la rigidité de chaque barre et désignée par la petite lettre  $k$ . Les forces nodales sont reliées aux déplacements des noeuds par une matrice de rigidité de la structure et désignée par la lettre capitale  $K$  obtenue par une suite de transformations matricielles à partir de la matrice de rigidité élémentaire  $k$ , propre à chaque barre.

Finalement, selon les conditions d'équilibre, les forces nodales obtenues à partir des déplacements inconnus des noeuds et de la matrice  $K$  doivent équilibrer les charges extérieures aux noeuds. Si les charges extérieures sont données, on peut trouver les déplacements inconnus des noeuds et ainsi les forces dans les barres et les déformations de la structure entière.

**\*Marche à suivre pour résoudre les problèmes sur les structures par la méthode des déplacements:** Pour résoudre des structures planes, la méthode des déplacements peut-être résumée comme suit:

a/ Déterminer le nombre de déplacements indépendants des noeuds. Les déplacements indépendants des noeuds sont groupés dans une matrice colonne  $D$

b/ Déterminer la matrice de transformation des déplacements  $U_d$ .

c/ Déterminer les matrices particulières de rigidité des barres ( $k_1, k_2, \dots, k_n$ )

d/ Ecrire la matrice diagonale composée par assemblage des matrices de rigidité des barres.

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & & & & 0 \\ & k_2 & & & \\ & & k_3 & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & \cdot & \\ & & & & & k_n \end{bmatrix}$$

e/ Calculer la matrice de rigidité de la structure par la formule :

$$K_p = U_d^T \cdot K \cdot U_d$$

f/ Déterminer la matrice des forces nodales P par réduction de toutes les charges aux noeuds. Quand les charges extérieures agissent sur les noeuds, elles sont transformées en forces nodales en prenant simplement les composantes de ces charges dans la direction des déplacements indépendants des noeuds.

g/ Calculer les déplacements indépendants des noeuds par la formule suivante:

$$D = Kp^{-1}$$

### III./ METHODE DES ELEMENTS FINIS

Pour la présentation de la méthode des éléments finis, nous lui consacrerons le chapitre suivant.

CHAPITRE 4

**METHODE DES  
ELEMENTS FINIS**

## M E T H O D E   D E S   E L E M E N T S   F I N I S

### I. / GENERALITES

La méthode des éléments finis est une extension des techniques d'analyse des structures en dimension deux et trois. Cette méthode fut utilisée par l'industrie aéronotique qui avait un besoin urgent d'étude précise des cellules d'avion complexes. L'efficacité des calculateurs automatiques contribua à partir de 1950 au développement rapide des méthodes matricielles.

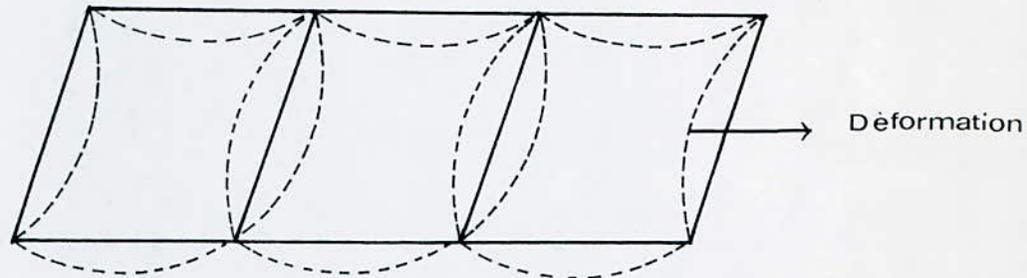
Ces dernières années, la méthode des éléments finis a été progressivement considérée par tous les ingénieurs comme une méthode d'étude d'une grande valeur. Permettant d'obtenir des solutions satisfaisantes pour un grand nombre de problèmes jusque là considérés comme insolubles, de grands efforts de recherches lui sont encore consacrés, permettant d'élargir le champ d'application.

### II. / PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Le concept de base de la méthode des éléments finis et de l'analyse matricielle des structures, consiste à considérer la structure comme un ensemble d'éléments indépendants. L'idée nouvelle de cette méthode est l'utilisation d'éléments à deux ou trois dimensions pour la modélisation des structures continues.

Pour les structures treillis, les éléments sont naturellement liés entre eux par les noeuds, de telles structures peuvent donc facilement être étudiées par cette méthode. Dans une structure continue, comme par exemple le mur d'une retenue, la subdivision naturelle n'existe pas, donc une telle structure doit être artificiellement divisée en éléments avant d'appliquer la méthode matricielle.

Les éléments sont généralement choisis de forme quadrilatérale ou triangulaire. En réalité, ces éléments sont reliés uniquement par leurs noeuds. Il est clair que cette supposition rend la structure beaucoup plus flexible qu'en réalité puisqu'elle permet le type de mouvements de la figure suivante:



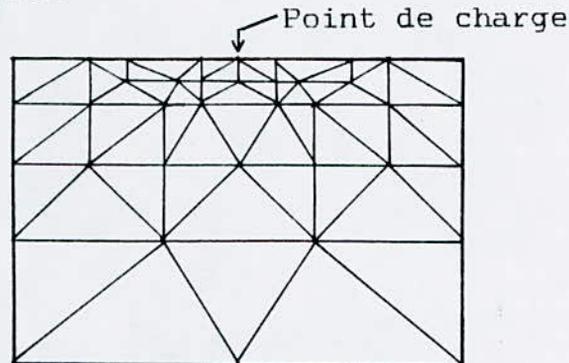
\*Type de déformations dans le cas où seule la continuité aux noeuds est assurée.

Donc, comme l'a établi Mr Clough, "les éléments finis ne sont pas de simples morceaux découpés dans la structure, mais des types spéciaux d'éléments élastiques ou non contraints de se déformer de façon spécifique de telle sorte que la continuité de l'assemblage tende à être maintenue"

### III./ SUBDIVISION OU DISCRETISATION DES STRUCTURES

Notons que la précision de la solution augmente avec le nombre d'éléments considérés. en outre, on doit se rendre compte que cette augmentation rend plus grand le temps de calcul nécessaire pour obtenir la solution et devient de se fait plus couteuse.

Pour économiser le temps de calcul sans perte de précision, on peut utiliser une subdivision graduelle en élément pour une étude plus détaillée des régions de la structure où l'on attend une grande concentration des contraintes. La figure suivante montre cet état de fait.



\*Cas de maillage graduelle.

#### IV./ PROGRAMMATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Un programme d'éléments finis type est composé d'une série de modules qui peuvent se prêter à différentes utilisations.

Les modules classiques sont:

- Entrée des données (détermination des matrices élémentaires)
- Assemblage des matrices (formation des équations)
- Résolution des équations
- Calcul préliminaire (contraintes et déformations)
- Sortie des résultats.

Au niveau de la programmation, ces modules interviennent en tant que sous-programmes. Dans de tels systèmes, le programme principal est un programme très simple qui permet seulement d'appeler et de relier les divers sous-programmes dans l'ordre convenable et de revenir au début de la section de contrôle.

## V./ ETAPES CARACTERISTIQUES D'UN PROGRAMME D'ELEMENTS FINIS

Un programme d'éléments finis comporte des blocs fonctionnels caractéristiques qui sont les suivants:

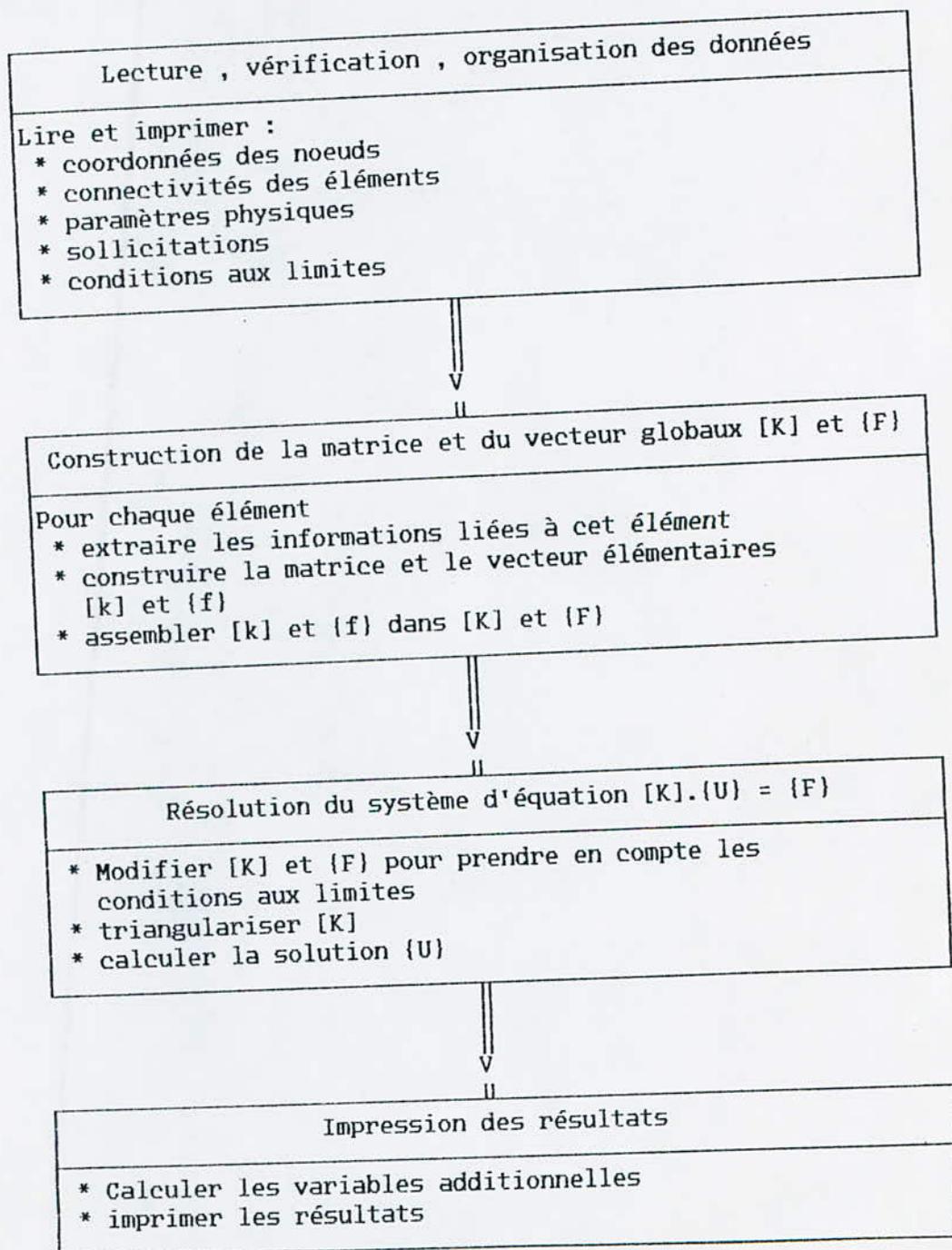
1\_) Un bloc de lecture, vérification et organisation des données décrivant le maillage, les paramètres physiques (conductivité, modules d'élasticité etc...), les sollicitations et les conditions aux limites.

2\_) Des blocs spécialement conçus pour la construction et l'assemblage des matrices et des vecteurs élémentaires, pour former les matrices et les vecteurs globaux.

3\_) Un autre bloc destiné à résoudre le système d'équations, après prise en compte des conditions aux limites.

4\_) Ensuite, un bloc de calcul des variables additionnelles (gradient, contraintes, réactions, charges, pressions etc...) et d'impression des résultats.

Dans notre programme, ces différents blocs fonctionnels s'enchainent comme le montre le schéma synoptique suivant:



\*Enchaînement des blocs fonctionnels caractéristiques d'un programme d'éléments finis.

**VI./ METHODES NUMERIQUES DE RESOLUTION DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES** (Equations aux dérivées partielles en bi ou tridimensionnelle).

Nous citerons à ce sujet la **méthode des différences finies** par laquelle l'équation différentielle est approchée à l'aide de valeurs discrètes des variables en un certain nombre de points.

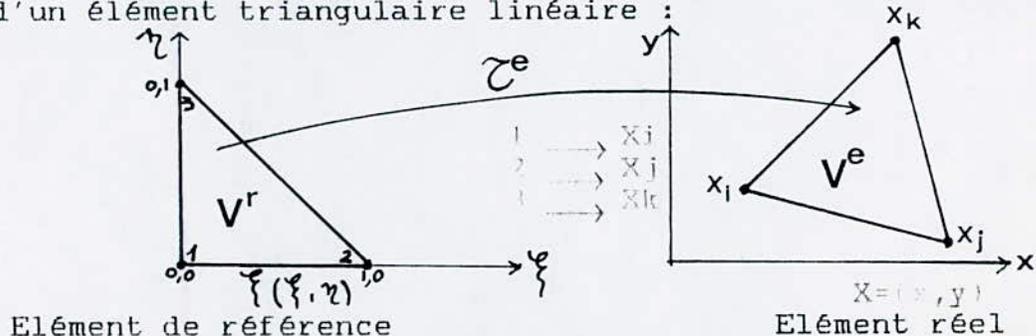
On notera que ces méthodes ont connu un grand essort grâce à l'apparition d'un moyen de calcul très important (L'ordinateur). Ce moyen a accru, dans de très larges mesures, les possibilités de résolution d'équations aux dérivées partielles.

**VII./ METHODE DE CONSTRUCTION DES FONCTIONS D'INTERPOLATION**

Le programme M.E.F utilise pour la construction des fonctions d'interpolation la méthode dite PNINV (méthode du PN inverse). Avant de détailler cette méthode passons en revue une notion essentielle :

**\*Eléments de référence**

Pour simplifier la définition analytique des éléments de forme complexe et dans le but de formuler un élément fini réel de manière intrinsèque (indépendement de l'orientation des axes), on introduit la notion d'**élément de référence** qui est un élément de forme très simple  $V^r$  repéré dans un **espace de référence**, qui peut être transformer en chaque élément réel  $V^e$  par une transformation géométrique bijective  $\tau^e$ . Par exemple dans le cas d'un élément triangulaire linéaire :



La transformation  $\tau^e$  définit les coordonnées  $X^e$  de chaque point de l'élément réel à partir des coordonnées  $\xi$  du point de l'élément de référence :

$$\tau^e: \xi \longrightarrow X^e = X^e(\xi)$$

La transformation  $\tau^e$  dépend de la forme et de la position de l'élément réel, donc des coordonnées des noeuds géométriques qui le définissent. Donc chaque élément réel a sa propre transformation  $\tau^e$ :

$$\tau^e: \xi \longrightarrow X^e = X^e(\xi, X_i, X_j, X_k, \dots)$$

Où  $X_i$ ,  $X_j$  et  $X_k$  sont les coordonnées des noeuds géométriques qui appartiennent à l'élément  $e$ .

Chaque transformation  $\tau^e$  doit satisfaire les propriétés suivantes:

-Elle est bijective en tout point  $\xi$  situé sur l'élément de référence ou sur sa frontière (à tout point  $V$  correspond donc un point et un seul  $V^e$ , et vis versa).

-Les noeuds géométriques de l'élément de référence correspondent aux noeuds géométriques de l'élément réel.

-Chaque portion de frontière de l'élément de référence correspond à la portion de frontière de l'élément réel.

#### Remarque

-Les éléments de référence sont parfois appelés éléments parents.

-La transformation géométrique  $\tau$  peut être interprétée comme un simple changement de variable.

- $\xi$  peut également être considéré comme un système de coordonnées locales lié à chaque élément.

#### \*Matrice Jacobienne

Pour passer du repère de l'élément de référence au repère de l'élément réel, il est nécessaire d'élaborer la matrice jacobienne.

La transformation  $\tau^e$  définit les coordonnées  $X^e$  de chaque point de l'élément réel à partir des coordonnées  $\xi$  du point de l'élément de référence :

$$\tau^e: \xi \longrightarrow X^e = X^e(\xi)$$

La transformation  $\tau^e$  dépend de la forme et de la position de l'élément réel, donc des coordonnées des noeuds géométriques qui le définissent. Donc chaque élément réel a sa propre transformation  $\tau^e$ :

$$\tau^e: \xi \longrightarrow X^e = X^e(\xi, X_i, X_j, X_k, \dots)$$

Où  $X_i, X_j$  et  $X_k$  sont les coordonnées des noeuds géométriques qui appartiennent à l'élément  $e$ .

Chaque transformation  $\tau^e$  doit satisfaire les propriétés suivantes:

-Elle est bijective en tout point  $\xi$  situé sur l'élément de référence ou sur sa frontière (à tout point  $V$  correspond donc un point et un seul  $V^e$ , et vis versa).

-Les noeuds géométriques de l'élément de référence correspondent aux noeuds géométriques de l'élément réel.

-Chaque portion de frontière de l'élément de référence correspond à la portion de frontière de l'élément réel.

#### Remarque

-Les éléments de référence sont parfois appelés éléments parents.

-La transformation géométrique  $\tau$  peut être interprétée comme un simple changement de variable.

- $\xi$  peut également être considéré comme un système de coordonnées locales lié à chaque élément.

#### \*Matrice Jacobienne

Pour passer du repère de l'élément de référence au repère de l'élément réel, il est nécessaire d'élaborer la matrice jacobienne.

Toutes les expressions qui impliquent des dérivées de  $U$  en  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont transformées en dérivées en  $\xi$ ,  $\eta$  et  $\psi$ , et grâce à la matrice de transformation dite matrice jacobienne  $[J]$ .

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \psi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \psi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

Soit:  $\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \psi} \end{Bmatrix} = [J] \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (1)$

Où:  $[J]$  est la matrice jacobienne de la transformation géométrique.

De la même manière, les dérivées en  $X$  d'une fonction s'obtiennent à partir des dérivées en  $\xi$ :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \psi} \end{Bmatrix}$$

Soit

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = [j] \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \psi} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

En portant (2) dans (1), nous obtenons:

$$[j] = [J^{-1}] \quad (3)$$

C'est la matrice  $[j]$  qui est utilisée en pratique, puisque nous devons exprimer les dérivées de  $U$  en  $x$ ,  $y$  et  $z$  à partir des dérivées de  $U$  en  $\xi$ ,  $\eta$  et  $\zeta$ .

Nous utilisons donc l'expression (3) pour calculer  $[j]$  à partir de  $[J]$ . Nous avons supposé la transformation  $\mathcal{C}$  bijective, par conséquent l'inverse de  $[J]$  existe en tout point de l'élément de référence.

### VIII./ FORMES D'ELEMENTS CLASSIQUES

Chaque élément est identifié par un nom décrivant sa forme et par le type de courbe ou de surface que forme sa frontière. De plus on donne le nombre de noeuds géométrique nécessaire pour définir l'élément.

#### \*Eléments à une dimension



Linéaire (2)



Quadratique (3)

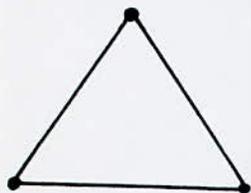


Cubique (4)

#### \*Eléments à deux dimensions

Ce sont des triangles ou quadrilatères dont les côtés sont des courbes polynomiales du premier, deuxième ou troisième degré.

## a) Éléments triangulaires



Linéaire (3)

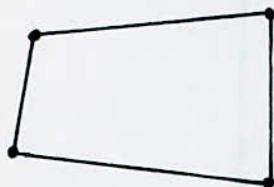


Quadratique (6)



Cubique (9)

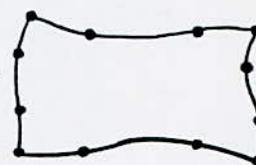
## b) Éléments quadrilatéraux



Linéaire (4)



Quadratique (8)



Cubique (12)

## IX./ PRESENTATION DU PROGRAMME M.E.F

Le programme M.E.F, dans lequel nous développons certains éléments est un programme Franco-Canadien établie par Gouri DHATT et Gilbert TOUZOT écrit en langage Fortran.

En outre, le programme principal M.E.F inclue les possibilités suivantes.

★★ Problèmes à une, deux ou trois dimensions.

★★ Différents nombres de degrés de liberté par noeud.

- \*\* Matrices élémentaires et globales symétriques ou non. symétriques.
- \*\* Problèmes à élasticité linéaire ou non linéaire.
- \*\* Problèmes stationnaires ou non stationnaires.

Pour les problèmes de tailles importantes, le programme M.E.F crée des tables dans une mémoire secondaire (Fichier sur disque) et n'amène en mémoire centrale qu'une partie de chaque table à un instant donné .

Ce programme est structuré de la manière suivante :

a\_) Organisation des données:

- Création des tables de données et connectivités.
- Création de tables contenant des paramètres connus, liés aux éléments ou aux noeuds (propriétés élémentaires ou nodales)
- Création des tables définissant les conditions aux limites.

b\_) Opérations correspondant à chaque élément:

- Détermination des coordonnées et poids (coefficients de pondération) d'intégration.

c\_) Opérations d'assemblage:

Assemblage de la matrice ou du vecteur élémentaire dans une matrice ou un vecteur global.

d\_) Résolution:

Décomposition et résolution d'un système d'équations linéaire.

e\_) Impression des résultats:

## X./ DIFFERENTS BLOCS FONCTIONELS DU PROGRAMME M.E.F

-Le bloc COOR lit les coordonnées des noeuds et le nombre de degré de liberté par noeud. Après vérification, il crée les tables VCORG (coordonnées des noeuds) et KDLNC (nombre de degré de liberté par noeud).

-Le bloc COND lit les conditions aux limites et crée les tables KNEQ (numéro d'équation de chaque degré de liberté) et VDIMP (valeurs des degrés de liberté imposées)

-Le bloc ELEM lit les connectivités puis ,il crée la table KLD.

Il existe d'autres blocs fonctionnels de M.E.F' parmi lesquels :

-Bloc LINM qui assemble puis résoud le système correspondant linéaire.

-Bloc NLIN qui assemble et résoud le système correspondant non linéaire.

Nom	Fonction
IMAG	Impression de toutes les données
COMI	Lecture et impression des commentaires
COOR	Lecture des coordonnées des noeuds
DLPN	Lecture du nombre de degré de liberté par noeud
COND	Lecture des conditions aux limites
PRND	Lecture des propriétés nodales
PREL	Lecture des propriétés élémentaires
ELEM	Lecture des connectivités
SOLC	Lecture des sollicitations concentrées

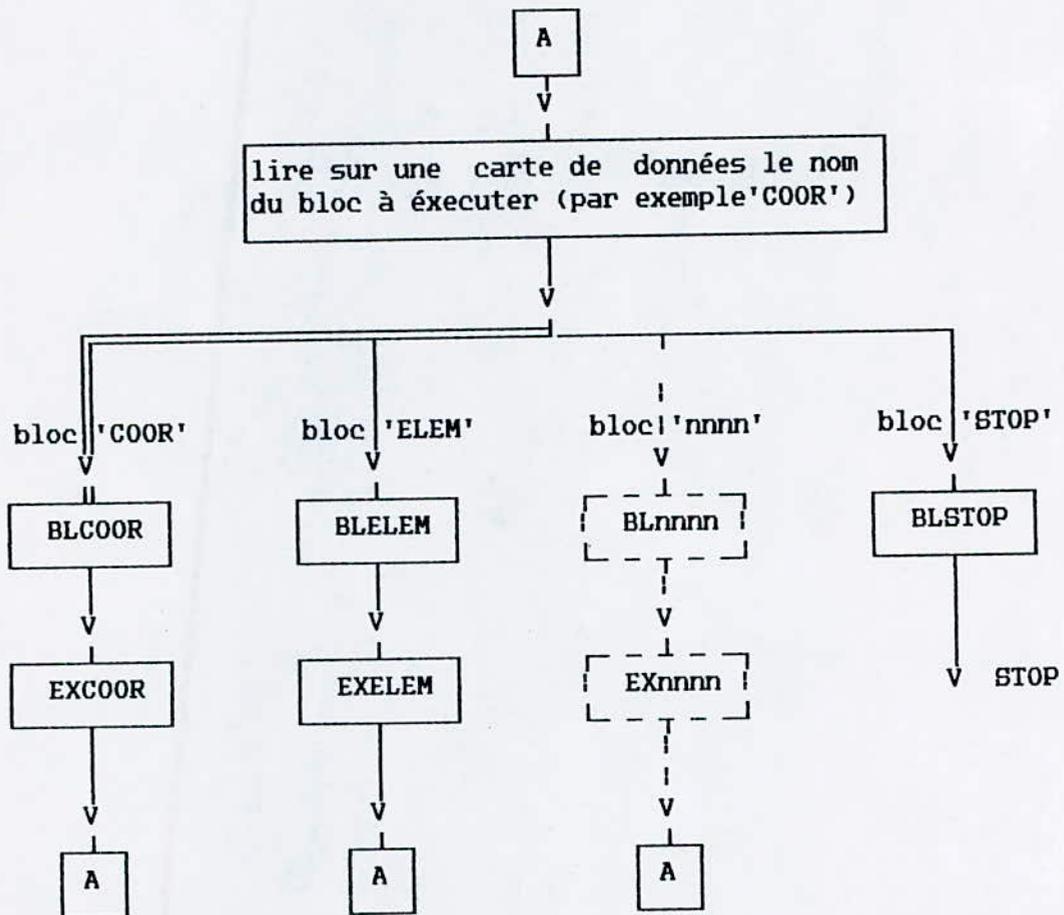
\*Blocs fonctionnels destinés à la lecture et l'organisation des données

Nom	Fonction
SOLR	Assemblage des sollicitations réparties
LINM	Résolution du problème linéaire avec matrice globale stockée en mémoire centrale
LIND	Résolution de problème linéaire avec matrice globale stockée sur disque
NLIN	Résolution d'un problème non linéaire stationnaire
EVOL	Résolution d'un problème non stationnaire
VALP	Calcul des vecteurs et valeurs propres

\*Blocs fonctionnels d'exécution

XI./ ENCHAINEMENT DES DIFFERENTS BLOCS

Le programme principal M.E.F fait l'enchaînement de l'exécution des blocs fonctionnels sous le contrôle de l'utilisateur en appelant les sous-programmes correspondant à chaque bloc :



Le sous-programme BLnnnn exécute les opérations préliminaires suivantes du bloc 'nnnn':

() Il définit les numéros logiques des fichiers sur disque utilisés par le bloc, en prenant éventuellement des valeurs par défaut.

() Il lit les paramètres de contrôle nécessaires, en particulier, pour déterminer la taille des tables du bloc, en utilisant éventuellement des valeurs par défaut.

() Il crée les nouvelles tables qui lui sont nécessaires, en utilisant la technique d'allocation pseudo-dynamique.

() IL appelle le sous-programme EXnnnn

Le sous-programme EXnnnn exécute toutes les opérations nécessaires que doit effectuer le bloc fonctionnel 'nnnn' en faisant appel, si nécessaire, à la librairie générale de sous-programmes.

## XII./NORMES DE PROGRAMMATION

Lorsqu'un programme doit être développé et modifié par plusieurs personnes, il est nécessaire de définir des normes de programmation. Dans le programme M.E.F, nous avons adopté les règles suivantes:

### a) Blocs fonctionnels

Chaque bloc fonctionnel a un nom de quatre (4) caractères 'nnnn'. Il lui correspond en général un sous-programme de préparation BLnnnn, un sous-programme d'exécution EXnnnn et un COMMON/nnnn/.

### b) Tables

Une table a un nom, en général de quatre lettres : 'tttt'. Son premier terme se trouve en VA (Ltttt). Son nom dans les sous-programmes d'exécution est :

- \* Vtttt pour une table réelle (par exemple VCORG)
- \* Ktttt pour une table entière (par exemple KLOCE).

CHAPITRE 5

**BASES DE LA  
MECANIQUE DES  
MILIEUX CONTINUS**

## B A S E S   D E   L A   M E C A N I Q U E   D E S M I L I E U X   C O N T I N U S

### I. / INTRODUCTION.

Les mécaniciens des sols auront leurs problèmes résolus s'ils connaissaient l'état de contrainte dans leurs ouvrages; beaucoup d'aspects compliquent cette connaissance que la théorie de la Mécanique des Milieux Continus peut leur apporter dans des cas très simples.

La théorie de la résistance des matériaux (R.D.M) suffit pour analyser le comportement des poutres ou des structures formées de poutres (Portiques, treillis etc...), tandis que la mécanique des milieux continus, c'est à dire la théorie de l'élasticité, plasticité et visco-élasticité est très indispensable pour l'analyse ou le calcul du comportement des structures en général.

### II. / THEORIE DE L'ELASTICITE.

Si on applique des forces à la surface d'un corps en équilibre, les dimensions et la forme de ce dernier changent. Du fait de l'opposition des forces internes à ce changement, lorsque les forces externes cessent, ce corps tend à revenir à son état initial. Cette propriété s'appelle l'élasticité.

On dit qu'un corps est élastique s'il revient à son état initial lorsqu'on cesse de lui appliquer les sollicitations qui le déforment.

\*Equations différentielles dans le cas de l'élasticité linéaire.

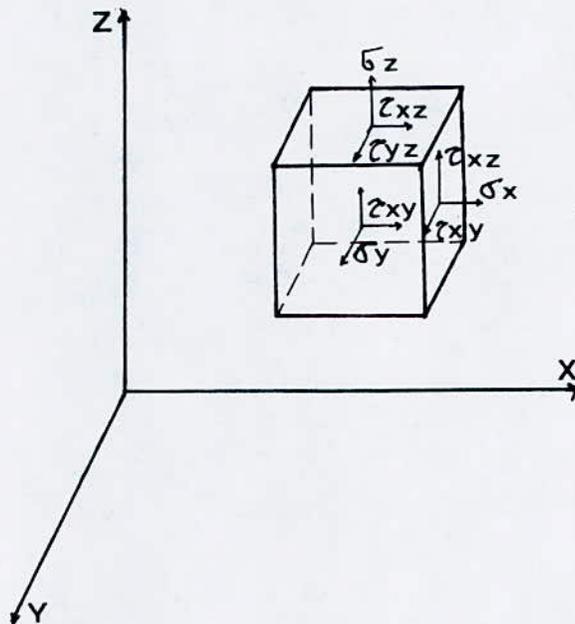
En élasticité linéaire, les déformations sont très petites pour pouvoir avoir des lois de comportement contraintes-déformation linéaires.

La théorie de l'élasticité peut se mesurer en trois ensembles d'équations:

- \* Equations différentielles de l'équilibre.
- \* Equations différentielles: déformations-déplacements.
- \* Lois de comportement des matériaux.

### 1/ Equations différentielles de l'équilibre.

Elles sont fournies par la mécanique des milieux continus. En trois dimensions, pour un élément de volume unitaire  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , nous avons:



$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F(x) = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F(y) = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + F(z) = 0$$

Avec:  $F(x)$ ,  $F(y)$ ,  $F(z)$  Forces de volume par unité de volume.

## 2/ Equations différentielles déformations-déplacements

En bidimensionnel nous avons:

$$\epsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} ; \quad \epsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}$$

En tridimensionnel, il suffit de compléter par les équations suivant l'axe Z, qui sont:

$$\epsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z} ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}$$

## 3/ Loi du comportement élastique des matériaux

Ce sont des équations qui caractérisent les propriétés mécaniques du matériau. Si on prend une éprouvette cylindrique qu'on lui fait subir un essai de traction simple, dans le diagramme contraintes-déformations, la partie linéaire s'exprime algébriquement par la loi de HOOKE qui est la suivante.

$$\sigma_x = E \cdot \epsilon_x$$

\*\* En déformation plane: (  $xz=0$  ;  $yz=0$  ;  $y=0$  )

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

En général, les tenseurs contraintes et déformations sont reliés entre eux par la loi de HOOKE qui se formule matriciellement, dans un problème à trois dimensions, de la façon suivante.

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}$$

$\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de LAME

$$\lambda = \frac{2 \cdot E}{(1+2\nu)(1+\nu)} ; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Avec: E: module d'élasticité de YOUNG  
 $\nu$ : coefficient de POISSON

Donc pour un problème bidimensionnel, nous avons:

\*\* En contraintes planes: (  $\sigma_z=0$  ;  $\tau_{xz}=0$  ;  $\tau_{yz}=0$  )

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

CHAPITRE 6

**FORMULATION DES  
EQUATIONS DU  
MOUVEMENT**

F O R M U L A T I O N   D E S   E Q U A T I O N S  
D U   M O U V E M E N T

I. / EQUATION DU MOUVEMENT

La loi fondamentale de la dynamique est:

$$\sum \text{forces appliquées} = M \cdot \vec{a}$$

Dans notre cas les forces appliquées sont les suivantes:

F1: Force de rigidité élastique interne qui s'oppose aux déplacements.

$$F1 = - K \cdot U$$

F2: Force d'amortissement s'opposant aux vitesses:

$$F2 = - C \cdot \dot{U}$$

F3: Forces extérieures (forces sismiques):

$$F3 = F(t)$$

L'équation du mouvement s'écrit alors:

$$F1 + F2 + F3 = M \cdot \ddot{U}$$

Donc nous aurons:

$$\text{-----}$$

$$! M \cdot \ddot{U} + C \cdot \dot{U} + K \cdot U = F(t) !$$

$$\text{-----}$$

$\ddot{U}$ : Accélération

$\dot{U}$ : Vitesse

U: Déplacement

## II./ FORMULATION MATRICIELLE

Tout système de forces internes ou externes peut s'exprimer comme la somme vectorielle de ses composantes suivant les coordonnées généralisées choisies.

- \*\* Si on impose une déformation généralisée unitaire, celle-ci provoquera des forces dans toutes les directions, soit  $K_{ij}$  la composante de cette force suivant la  $j$ .ième coordonnée. Ainsi, on définit la matrice  $[K]$  : matrice raideure ou matrice de rigidité du système.
- \*\* Si on impose une vitesse de déformation unitaire en  $i$ , celle-ci provoquera des forces d'amortissement dans toutes les coordonnées, soit  $C_{ij}$  la composante de cette vitesse suivant la  $j$ .ième coordonnée. On définit ainsi la matrice  $[C]$  qui est la matrice d'amortissement du système.
- \*\* Enfin, si on impose une accélération unitaire suivant la coordonnée généralisée  $i$ , il apparaîtra en  $j$  une force d'inertie  $M_{ij}$ . la matrice  $[M]$  est appelée matrice masse ou matrice d'inertie.

Les trois matrices formées  $[M]$ ,  $[C]$  et  $[K]$  sont des matrices carrées et symétriques. Donc l'équation du mouvement écrite sous la forme matricielle est :

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F(t)\}$$

- M : Matrice masse
- C : Matrice d'amortissement
- K : Matrice de rigidité
- U : Vecteur global des déplacements nodaux
- $\dot{U}$  : Vecteur global de la première dérivée de U par rapport au temps
- $\ddot{U}$  : Vecteur global de la seconde dérivée de U par rapport au temps
- F(t) : Vecteur global des sollicitations causées par le séisme

### III./ CALCULS DES MATRICES ELEMENTAIRES.

(Pour un élément quadratique à 8 noeuds)

#### \*Matrice rigidité

Les matrices élémentaires d'un élément quadratique isoparamétrique sont régies par l'équation suivante:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( dx \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( dy \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( dz \frac{\partial U}{\partial z} \right) + F(t) = 0$$

Les contraintes dans l'élément s'expriment par :

$$\{\sigma\} = D \cdot \{\varepsilon\}$$

En élasticité linéaire, la forme intégrale à deux dimensions s'écrit :

$$W = \int_V \{\delta \varepsilon\} \cdot [D] \cdot \{\varepsilon\} dv - \int_V \{\delta U\} \cdot \begin{Bmatrix} F_{vx} \\ F_{vy} \end{Bmatrix} dv - \int_S \{\delta U\} \cdot \begin{Bmatrix} F_{sx} \\ F_{sy} \end{Bmatrix} ds$$

Avec :  $\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$  : Sont les déplacements d'un point

$\{\delta U\} = \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{Bmatrix}$  : Sont les variations des déplacements

$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ xz \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ u / y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix}$  : Sont les déformations infinitésimales

$F_{vx}$  ,  $F_{vy}$  : Sont les forces par unité de volume suivant x et y

$F_{sx}$  ,  $F_{sy}$  : Sont les forces de surface

$$[D] = \begin{bmatrix} d1 & d2 & 0 \\ d2 & d1 & 0 \\ 0 & 0 & d3 \end{bmatrix} \text{ : Est la matrice qui relie les contraintes et les déformations}$$

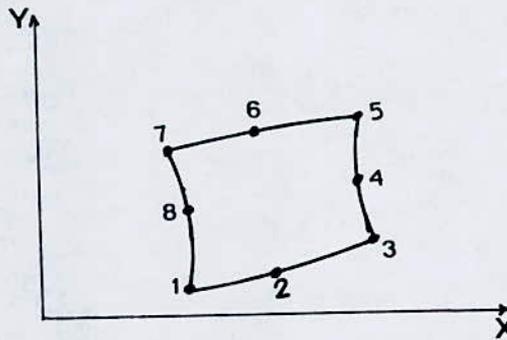
$$d1 = \frac{E(1-\alpha\gamma)}{(1+\gamma)(1-\gamma-\alpha\gamma)} ; \quad d2 = \frac{d1}{(1-\alpha\gamma)} ; \quad d3 = \frac{E}{2(1+\gamma)}$$

E est le module d'Young

$\gamma$  est le coefficient de Poisson

$\alpha$  égal 0 en contraintes planes, égal 1 en déformations planes

Si on utilise un élément quadratique à 8 noeuds, 16 degrés de liberté et 2 degré de liberté par noeud:



$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N] \{U_n\} ; \quad \{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N] \{U_n\}$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N1 & 0 & N2 & 0 & \dots & N8 & 0 \\ 0 & N1 & 0 & N2 & \dots & 0 & N8 \end{bmatrix}$$

$N1, N2, \dots, N8$  sont les fonctions d'interpolation

$$\{Un\} = \begin{bmatrix} u1 & v1 & u2 & v2 & \dots & u8 & v8 \end{bmatrix}$$

$$\{Un\} = \begin{bmatrix} u1 & v1 & u2 & v2 & \dots & u8 & v8 \end{bmatrix}$$

On forme ainsi la matrice de rigidité:

$$[K]_{16 \times 16} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot \det(J) \cdot d\xi \cdot d\eta$$

$$[B]_{3 \times 16} = \begin{bmatrix} N1,x & 0 & N2,x & 0 & \dots & N8,x & 0 \\ 0 & N1,y & 0 & N2,y & \dots & 0 & N8,y \\ N1,y & N1,x & N2,y & N2,x & \dots & N8,y & N8,x \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} Ni,x &= j11 Ni,\xi + j12 Ni,\eta \\ Niy &= j21 Ni,\xi + j22 Ni,\eta \end{aligned}$$

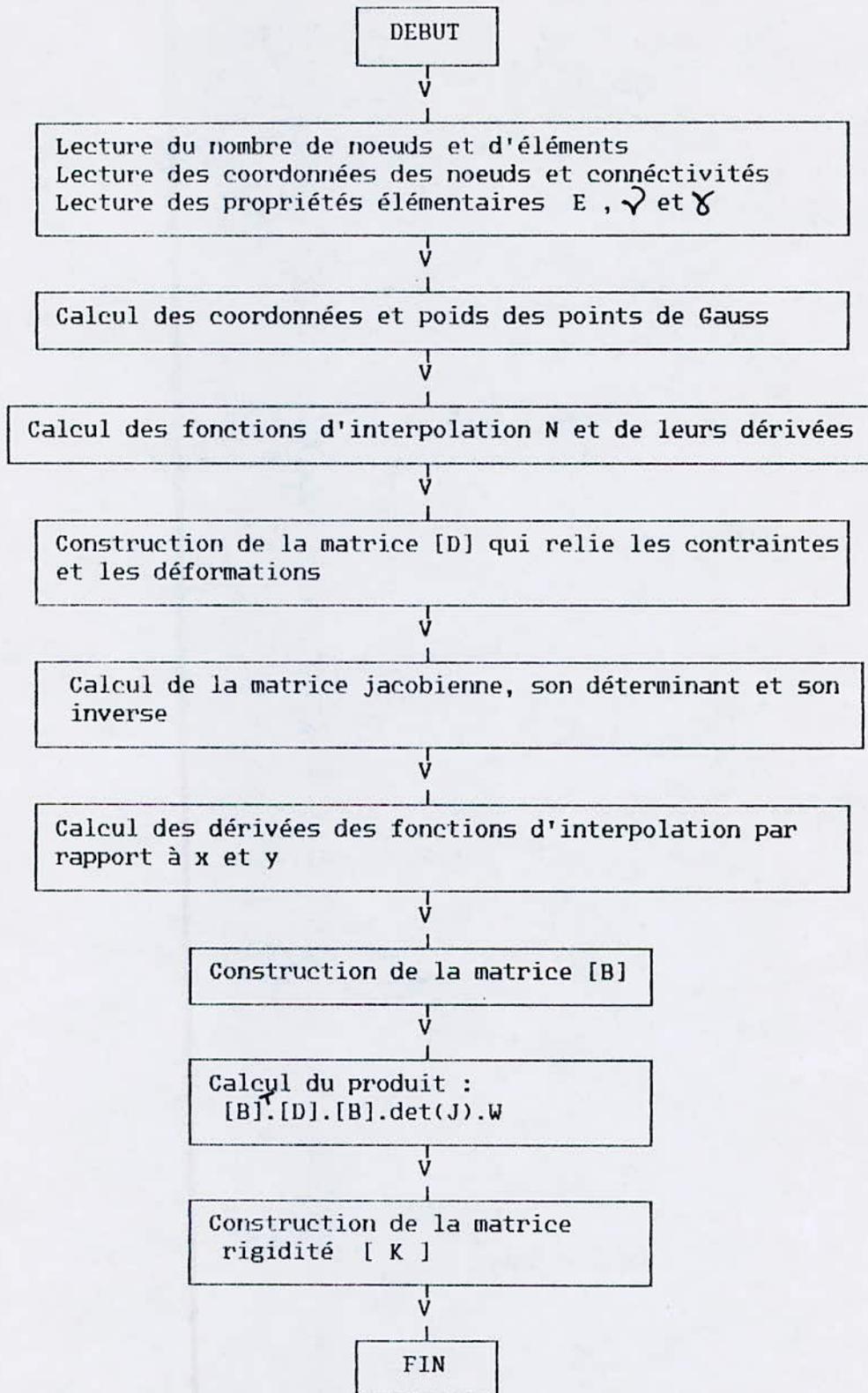
$$j = 1, 2, \dots, 8$$

**\*Calcul de la matrice masse**

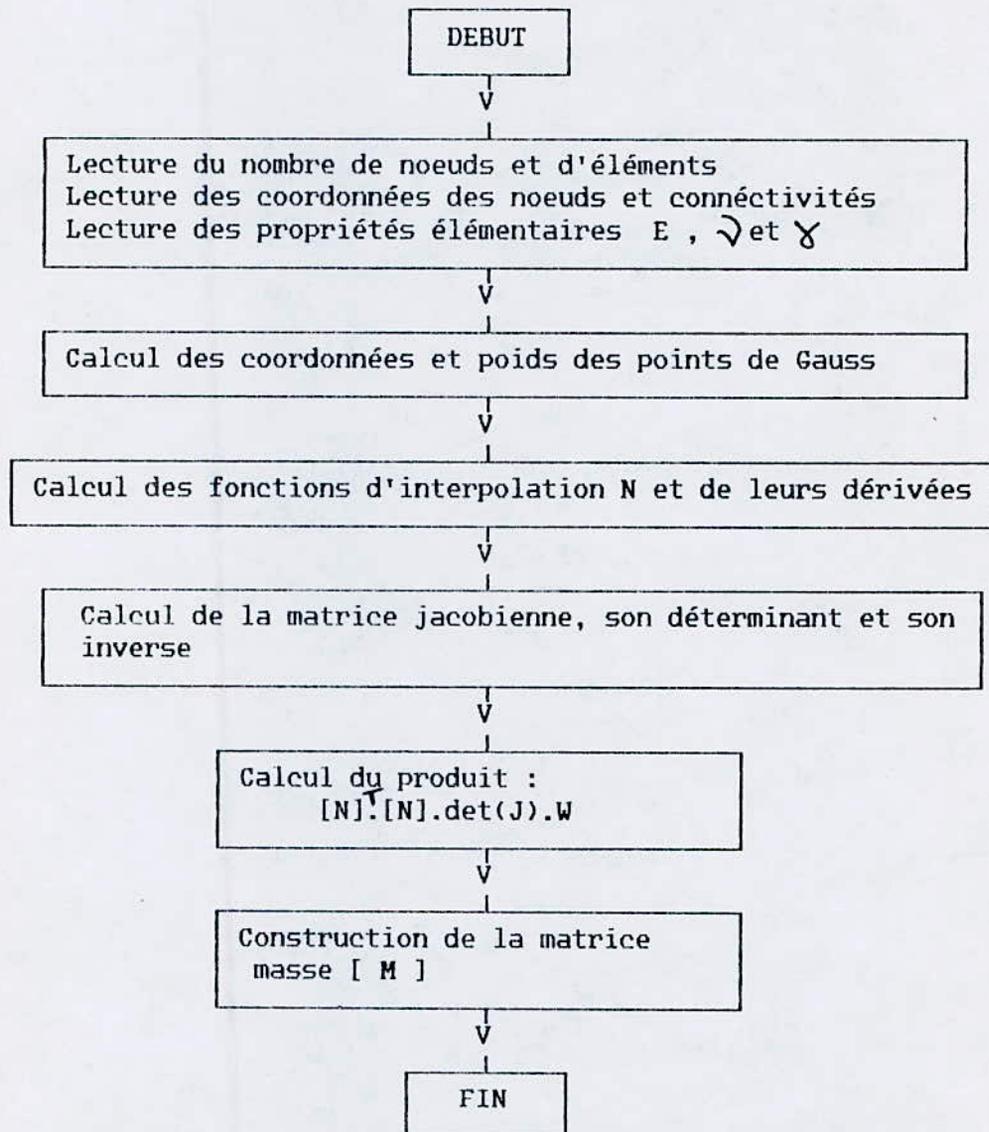
De la même façon, la matrice masse s'écrit:

$$\boxed{\begin{array}{l} ! \\ ! \quad [M]_{16 \times 16} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T \cdot [N] \cdot \det(J) \, d\xi \cdot d\eta \\ ! \end{array} !}$$

Les organigrammes de calcul des matrices élémentaires :matrice et masse sont les suivants.



\* Organigramme de calcul de la matrice rigidité élémentaire [K]



\* Organigramme de calcul de la matrice masse élémentaire [M]

### \*Sous-programmes généraux de calcul des matrices élémentaires

Le programme général M.E.F, peut inclure une bibliothèque d'éléments à une, deux et trois dimensions et concernant des domaines d'application variées: mécanique des fluides, problèmes harmoniques, mécanique des solides. Pour chaque type d'élément "nn", un seul sous programme ELEMnn contrôle les calculs de toutes les matrices et vecteur élémentaires. Pour spécifier quelle opération élémentaire est requise, on a introduit une variable de contrôle ICODE; par exemple:

- ICODE = 2 : exécution des opérations liées à un élément de référence donné et indépendantes de la géométrie réelle. Calcul des fonctions d'interpolation N et de leurs dérivées en  $\gamma$  aux points d'intégration.
- ICODE = 3 : calcul de la matrice rigidité  $[K]$  dans la table VKE.
- ICODE = 4 : calcul de la matrice  $[K_e]$  pour les problèmes non linéaires.
- ICODE = 5 : calcul de la matrice masse  $[M]$  pour les problèmes non stationnaires dans la table VKE
- ICODE = 6 : calcul du vecteur résidu  $\{r\}$  dans la table VFE.
- ICODE = 7 : calcul du vecteur des sollicitations  $\{F\}$  dans la table VFE.
- ICODE = 8 : calcul et impression des gradients  $\{\partial U\}$  .

**REMARQUE**

Le sous-programme ELEMnn n'exécute qu'une seule opération à la fois, définie par la valeur de ICODE . Par exemple pour construire la matrice K et la matrice M , il faut enchaîner les opérations suivantes:

Calcul de K

ICODE = 3

CALL ELEMnn (.....,VKE)

"Sauvegarder VKE dans une table autre que VKE"

Calcul de M

ICODE = 5

CALL ELEMnn (.....,VKE)

"Sauvegarder VKE dans une autre table"

**CONCLUSION**

Dans ce chapitre nous avons considéré un élément quadratique à 8 noeuds et deux degrés de liberté par noeud . Les matrices masse et rigidité ont été calculer grace à un programme de calcul (E.L.E.M.), ces matrices vont être utilisées pour formuler les équations du mouvement que nous allons résoudre dans le chapitre suivant par la méthode des differences finies centrale .

CHAPITRE 7

**RESOLUTION NUMERIQUE  
DU PROBLEME**

## RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME

### I./ INTRODUCTION

Vu la nature aléatoire de l'excitation  $f(t)$  provoquée par l'ébranlement sismique, l'étude de la réponse du barrage en fonction du temps exige une intégration numérique des équations du mouvement. En mécanique des structures on est conduit à écrire des équations aux dérivées partielles. La résolution de ces équations ne peut-être obtenue directement dans le cas où les conditions aux limites ne peuvent-être représentées facilement. Cependant, les méthodes numériques sont les seuls moyens susceptibles d'être utilisées.

De nos jours, ces méthodes numériques d'intégration sont nombreuses, parmi lesquelles on cite, pour les systèmes du second ordre: les méthodes de NEWMARK, de WILSON, des superpositions modales, méthode incrémentale et la méthode des différences finies.

Cette dernière est très utilisée dans les problèmes de mécanique des fluides, mais elle l'est moins en mécanique des solides en raison, probablement, des difficultés dues aux conditions aux limites. Lorsque la solution analytique n'est pas assez simple ou bien pas connue, l'application de la méthode des différences finies constitue un instrument de calcul particulièrement efficace.

Du fait de l'efficacité et de l'accessibilité de cette méthode, on procédera à la résolution de notre système d'équations (linéaire, non stationnaire) par la méthode des différences finies centrales qui constitue un outil puissant. On est alors conduit à un système d'équations linéaires simultanées et les solutions de ces équations sont les réponses finales du problème considéré.

## II. / PRESENTATION DE LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES

Alors que la méthode des éléments finis est basée sur une discretisation physique de la structure, la méthode des différences finies procède par discrétisation numérique des équations du problème à résoudre.

### \*Représentation des dérivées par les différences finies

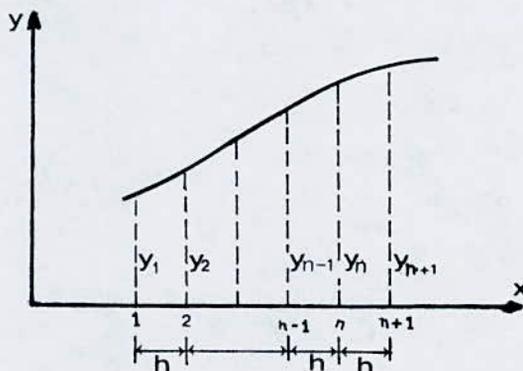
Les dérivées d'une fonction  $y(x)$  sont définies comme étant la variation de  $y$  ou de ses dérivées par rapport à  $x$  et elles sont représentées de la façon suivante :

Dérivée première :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

Dérivée seconde:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta}{\Delta x} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} - \frac{y(x) - y(x - \Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x}$$



Ainsi qu'on peut le voir sur la figure précédente, quand  $x$  ne tend pas vers zéro mais vers une valeur finie  $h$ , les dérivées au point  $x = x$  sont représentées par des expressions en fonctions des différences finies, ainsi :

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} \quad \text{ou} \quad \frac{y_n - y_{n-1}}{h}$$

$$\left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right) = \frac{(y_{n+1} - y_n)/h - (y_n - y_{n-1})/h}{h} = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2}$$

Les différences d'ordre supérieur peuvent être déduites de la même façon. Le symbole  $\Delta$  utilisé dans ces expressions est appelé **opérateur de différence**. Ainsi la différence première  $\Delta y$  est  $y_n - y_{n-1}$  et la différence seconde  $\Delta^2 y$  est  $y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}$ .

Les dérivées  $dy/dx$ ,  $d y/d x$ , etc..., sont représentées respectivement par les différences finies  $\Delta y$ ,  $\Delta^2 y$ , etc..., divisées par  $h$ ,  $h^2$ , etc...

En utilisant différents groupes de points, nous pouvons exprimer les différences finies en un point de trois manières différentes qui sont: Les différences finies en arrière, les différences finies en avant et les différences finies centrales.

Pour la résolution de nos équations différentielles du second ordre, nous utiliserons les différences finies centrales qui utilisent les points situés symétriquement par rapport au point considéré. L'expression  $\Delta y_{n+1/2}$  indique la différence finie prise au point situé à mi-chemin entre  $x = x_{n+1}$  et  $x = x_{n+2}$ .

En général, on constate que les coefficients des ordonnées  $y$  de la  $n$ -ième différence finie sont les coefficients du développement du binôme  $(a - b)^n$  pour les différences en arrière, en avant ou pour les différences finies centrales. Les différences centrales d'ordre  $(n)$  impaires sont déduites de la différence (avec intervalle égal à  $2h$ ) de la différence d'ordre  $(n - 1)$  des points  $y_{n+1}$  et  $y_{n-1}$ . Ainsi l'expression des différences finies du troisième ordre s'établit comme suit :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} \right)_n &= \frac{(\Delta^2 y_{n+1})/h^2 - (\Delta^2 y_{n-1})/h^2}{2h} \\ &= \frac{y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_{n-1} - y_{n-2}}{2h^3} \end{aligned}$$

La figure suivante montre la disposition en tableau.

$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$2\Delta y_n$	$\Delta^2 y_n$	$2\Delta^3 y_n$	$\Delta^4 y_n$
$y_{n+2}$	$\Delta y_{n+3/2}$	$\Delta^2 y_{n+1}$	$\Delta^3 y_{n+1/2}$			+1	+1
$y_{n+1}$	$\Delta y_{n+1/2}$	$\Delta^2 y_n$	$\Delta^3 y_{n+1/2}$	+1	+1	-2	-4
$y_n$	$\Delta y_{n-1/2}$	$\Delta^2 y_n$	$\Delta^3 y_{n-1/2}$	0	-2	0	+6
$y_{n-1}$	$\Delta y_{n-3/2}$	$\Delta^2 y_{n-1}$	$\Delta^3 y_{n-1/2}$	-1	+1	+2	-4
$y_{n-2}$						-1	+1

\*\*différences au centre

### III. / INTEGRATION DU SYSTEME DU SECOND ORDRE PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES CENTRALES.

Rappelons l'expression du système du second ordre

$$[M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} = \{F(t)\} \quad t > t_0 \quad (\dots 1)$$

pour  $t = t_0$   $\{U\}$  et  $\{\dot{U}\}$  sont données

La méthode des différences finies centrales est une méthode explicite qui utilise l'expression du système précédent à l'instant  $t$ , ainsi que les approximations des dérivées par différences finies centrées suivantes :

$$\{\ddot{U}\} = \frac{(\{U_{t+\Delta t}\} - 2\{U_t\} + \{U_{t-\Delta t}\})}{\Delta t^2} \quad (\dots 2)$$

$$\{\dot{U}\} = \frac{(\{U_{t+\Delta t}\} - \{U_{t-\Delta t}\})}{2\Delta t} \quad (\dots 3)$$

En remplaçant  $\{\ddot{U}\}$  et  $\{\dot{U}\}$  par leurs valeurs dans l'équation (1), nous obtenons l'expression suivante :

$$[M] \frac{(\{U_{t+\Delta t}\} - 2\{U_t\} + \{U_{t-\Delta t}\})}{\Delta t^2} + [C] \frac{(\{U_{t+\Delta t}\} - \{U_{t-\Delta t}\})}{2\Delta t} + [K] \{U_t\} = \{F(t)\} \quad (\dots 4)$$

après développement, le système s'écrira :

$$\left[ \underbrace{\frac{[M]}{\Delta t^2} + \frac{[C]}{2\Delta t}}_{A1} \right] \{U_{t+\Delta t}\} + \left[ \underbrace{[K] - \frac{2[M]}{\Delta t^2}}_{A2} \right] \{U_t\} + \left[ \underbrace{\frac{[M]}{\Delta t^2} - \frac{[C]}{2\Delta t}}_{A3} \right] \{U_{t-\Delta t}\} = \{F(t)\}$$

$A1$ ,  $A2$  et  $A3$  étant des constantes

Pour  $t=t_0$  et  $\Delta t=1$   $t$ : pas

Nous aurons :

$$\{U_{t_0+1}\} [A1] + \{U_{t_0}\} [A2] + \{U_{t_0-1}\} [A3] = F(t)$$

Alors :

$$\begin{array}{l}
 \text{pour } t=1\Delta t \rightarrow U_2 A_1 + \overbrace{U_1 A_2}^{\text{connue}} = F(1) \\
 \text{pour } t=2\Delta t \rightarrow U_3 A_1 + U_2 A_2 + \overbrace{U_1 A_3}^{\text{connue}} = F(2) \\
 \text{pour } t=3\Delta t \rightarrow U_4 A_1 + U_3 A_2 + U_2 A_3 = F(3) \\
 \text{pour } t=4\Delta t \rightarrow U_5 A_1 + U_4 A_2 + U_3 A_3 = F(4) \\
 \text{pour } t=5\Delta t \rightarrow U_6 A_1 + U_5 A_2 + U_4 A_3 = F(5) \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots
 \end{array}$$

Donc nous obtenons des équations linéaires simultanées qui forment une matrice tridiagonale facilement résolvable par la méthode de GAUSS et qui est la suivante :

$$\begin{array}{c}
 U_2 \quad U_3 \quad U_4 \quad U_5 \quad U_6 \dots \\
 \hline
 \left[ \begin{array}{ccccc}
 A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\
 A_2 & A_1 & 0 & 0 & 0 \dots \\
 A_3 & A_2 & A_1 & 0 & 0 \dots \\
 0 & A_3 & A_2 & A_1 & 0 \dots \\
 0 & 0 & A_3 & A_2 & A_1 \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c}
 U_1 \\
 U_2 \\
 U_3 \\
 U_4 \\
 U_5 \\
 \vdots \\
 \vdots
 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c}
 F(1) - U_1 A_2 \\
 F(2) - U_1 A_3 \\
 F(3) \\
 F(4) \\
 F(5) \\
 \vdots \\
 \vdots
 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

Pour simplifier le travail nous opèrerons de la manière suivante:

Dans l'équation (4), on transpose  $F(t)$ , on factorise et on multiplie par  $t$ , nous obtenons :

$$\underbrace{\Delta t^2 \{ F(t) \} + [M] (2 \{ U_t \} - \{ U_{t-\Delta t} \}) + \frac{\Delta t}{2} [C] \{ U_{t-\Delta t} \} - \Delta t^2 \cdot [K] \{ U_t \}}_{\{ R(t) \}} =$$

$$\underbrace{\left[ [M] + \frac{\Delta t}{2} [C] \right]}_{[\bar{K}]} \{ U_{t+\Delta t} \}$$

Alors  $[\bar{K}] = [M] + \frac{\Delta t}{2} [C]$

Donc 
$$\boxed{[\bar{K}] \{ U_{t+\Delta t} \} = \{ R(t) \}}$$

A l'instant  $t=t_0$ ,  $\{ U_0 \}$  et  $\{ \dot{U}_0 \}$  sont connues et  $\{ \ddot{U}_0 \}$  peut être évalué grâce à (1) de plus  $\{ U_{t_0-\Delta t} \}$  est évalué en éliminant  $\{ U_{t+\Delta t} \}$  entre les deux relations (2) et (3) écrites à l'instant  $t=t_0$ :

$$\{ U_{t_0-\Delta t} \} = \{ U_0 \} - \Delta t \{ \dot{U}_0 \} + \frac{\Delta t^2}{2} \{ \ddot{U}_0 \}$$

On note que  $\Delta t$  doit être assez petit pour que les erreurs des approximations (2) et (3) soient acceptables.

Pour faire cette procédure de calcul nous avons élaborer un programme en langage FORTRAN qui utilise la méthode de GAUSS pour résoudre le système; l'organigramme est le suivant:

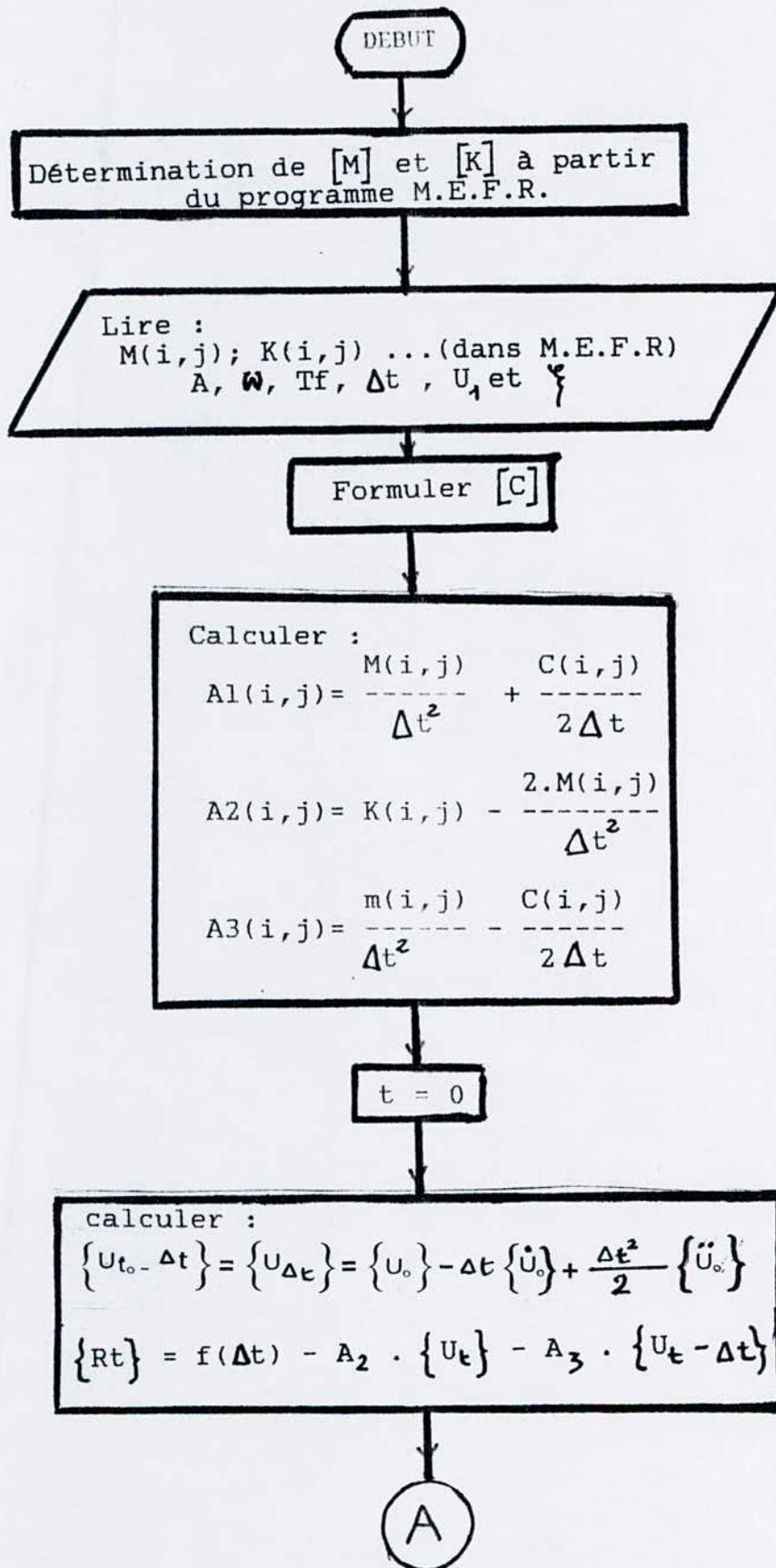
#### IV. / ORGANIGRAMME

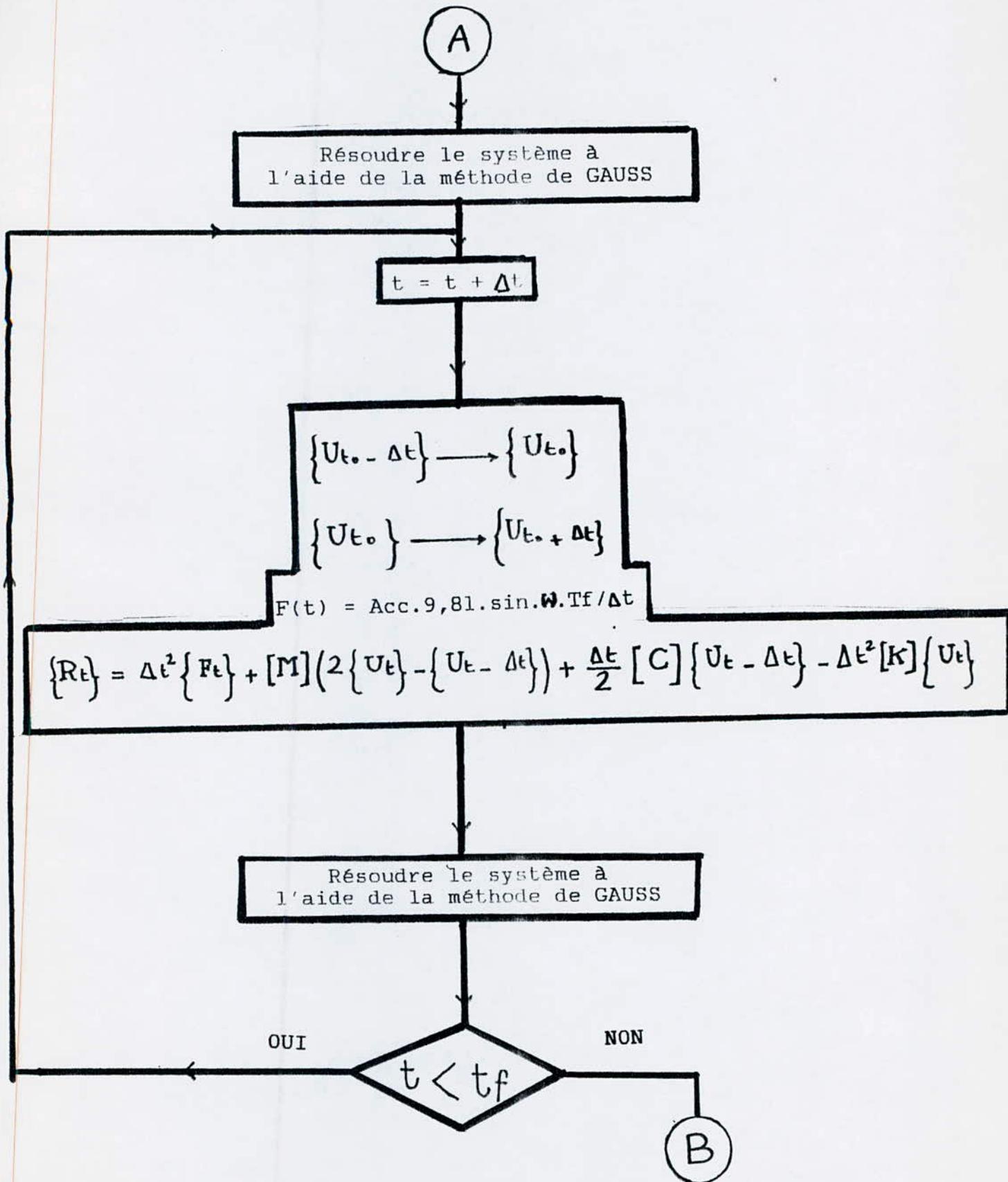
Au fur et à mesure que les programmes deviennent plus complexes, un organigramme devient de plus en plus utile pour l'organisation, la conception et la structuration d'un programme.

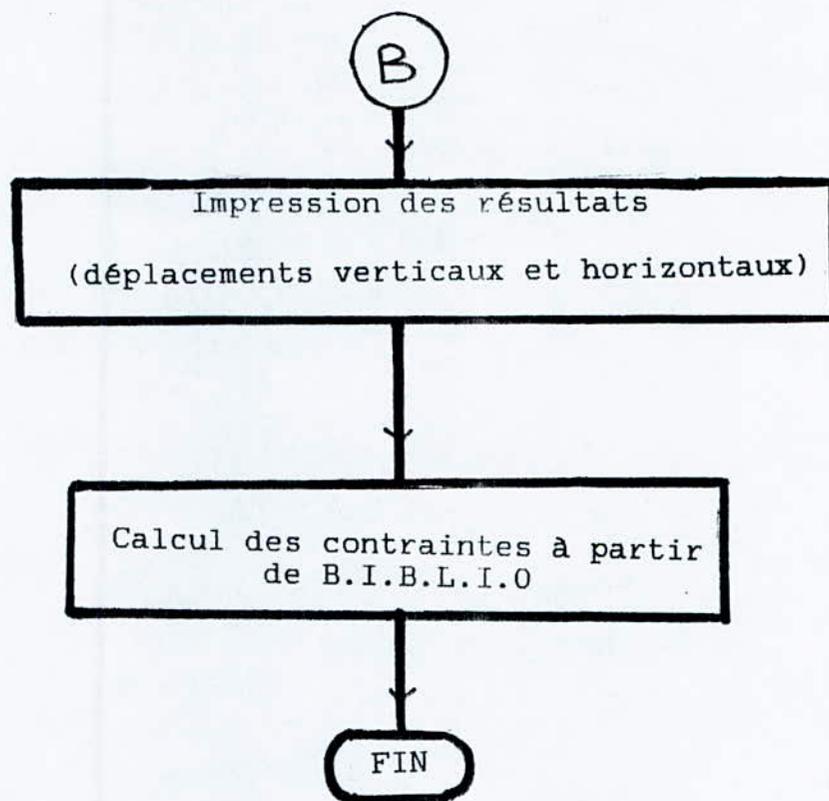
L'organigramme est la représentation graphique d'un algorithme; pour l'algorithme de la méthode des éléments finis, c'est une image des étapes de cet algorithme ainsi qu'une vision du passage du contrôle entre ces étapes. ( Un algorithme est une méthode de résolution de problèmes).

En particulier, dans un organigramme, nous mettons chaque opération, instruction ou série d'instructions dans une boîte, et indiquons le passage du contrôle par des lignes fléchées entre ces boîtes . De plus, les différents types d'opérations sont représentés par des formes de boîtes différentes; par exemple, le début et la fin sont représentés par un ovale, un calcul ou une opération autre qu'une question est représenté par un rectangle, une décision (test) est représenté par un losange .etc....

Si un organigramme continue sur une autre page ou s'il est difficile de connecter deux boîtes, nous utilisons un petit cercle étiqueté pour représenter cette connexion ou continuation.







### CONCLUSION

Après résolution des équations du mouvement, le sous-programme de résolution nous permet d'avoir les déplacements verticaux et horizontaux dans le corps du barrage. On introduit ces résultats sous-forme de données dans le sous-programme B.I.B.L.I.O. et on aura les contraintes dans le corps du barrage.

Les résultats définitifs ne seront pas d'une grande précision, vu les approximations faites.

# CONCLUSION

Notre travail nous a permis de remarquer et d'apprécier la puissance, l'efficacité et l'accessibilité des méthodes des éléments finis et différences finies.

En outre, le programme M.E.F. utilisé est un programme à structure modulaire et présente des facilités de développement très variées .

Ce travail nous aurait également permis de voir la distribution des déplacements et des contraintes dans le corps du barrage grâce à un calcul dynamique et, de ce fait, de localiser les zones du barrage les plus sollicitées . Mais faute de temps et à cause des pannes fréquentes de l'ordinateur, les calculs n'ont pas été complètement achevés .

Les résultats trouvés par le programme M.E.F. ne seraient pas d'une bonne précision, étant donné que les hypothèses et les approximations faites manquent de précision :

- \*\* Approximation par éléments finis.
- \*\* approximation de l'excitation sismique appliquée.  
(pour évaluer la charge sismique exacte, une étude statistique doit être faite.)
- \*\* Modélisation incomplète du barrage en éléments finis.  
(absence de renseignements sur les conditions de fondation.)
- \*\* Absence de l'interaction: barrage - eau - fondation.  
(les interactions: barrage-eau et barrage-fondation sont traitées séparément, il est donc indispensable de mettre au point des techniques de calcul de l'ensemble, permettant d'étudier le comportement dynamique global barrage-eau-fondation.)
- \*\* Réponse dynamique non linéaire.  
(l'hypothèse supposant l'ouvrage d'une parfaite élasticité linéaire, comporte une sérieuse limitation. On doit donc effectuer un calcul non élastique (visco-plastique) tenant compte du comportement réel du sol sous l'effet du chargement sismique.)

Pour corriger cela on a jugé utile de suggérer les quelques recommandations suivantes pour avoir une meilleure appréciation sur le calcul dynamique .

## R E C O M M A N D A T I O N S

Le calcul dynamique et l'estimation du comportement sismique des barrages sont très importants, non seulement pour les projets de barrages à construire dans les régions sismiques, mais aussi pour l'appréciation des conditions de sécurité des barrages existants dans les zones de séismes peu fréquents .

Pour s'approcher beaucoup plus de la réalité, donc pour avoir un calcul dynamique qui permet une estimation plus sûre du comportement de ces ouvrages; nous proposons une amélioration de l'étude qui comporte les huit recommandations énumérées ci après.

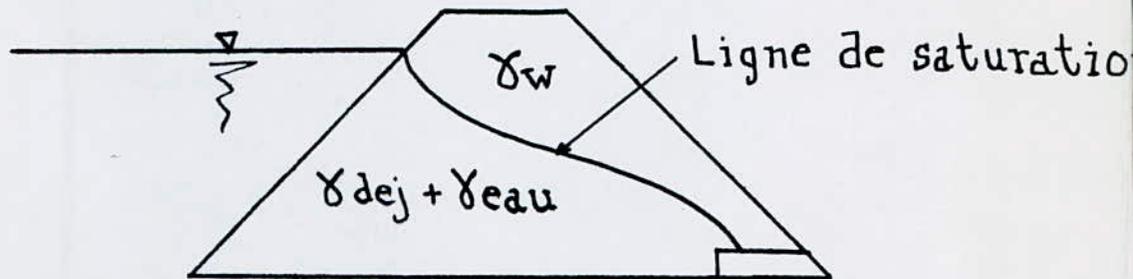
- 1\_) Un calcul non élastique (visco-plastique), touchant beaucoup plus la réalité.
- 2\_) Une amélioration de la représentation par éléments finis dans la fondation, pour tenir compte de l'interaction entre le barrage et sa fondation; c'est à dire que l'on doit inclure la fondation dans le maillage du barrage discrétisé.
- 3\_) Une précision sur la charge sismique appliquée; en estimant l'excitation sismique maximale, soit à l'aide d'un spectre, soit par l'évolution du séisme en fonction du temps.
- 4\_) Tenir compte de la pression hydrodynamique de l'eau sur le barrage car en cas de séisme, l'eau du réservoir oscille, et donne lieu à cette pression. Nous devons donc inclure l'analyse du système barrage-réservoir.
- 5\_) Faire un calcul global qui permet d'étudier le comportement du système barrage-eau-fondation.
- 6\_) Inclure au programme une subroutine ou un logiciel de graphisme, qui permet de visualiser la structure avant et après les déformations.
- 7\_) Faire un calcul en tri-dimensionnel

8\_) Tenir compte des pressions intersticielles, dont le calcul peut se faire par deux méthodes.

a) On trace la ligne de saturation pour distinguer les deux parties, l'une humide et l'autre saturée.

On sait que  $\gamma_{sat} = \gamma_{dej} + \gamma_w$

On laisse donc le programme tel quel et on ajoute les propriétés élémentaires de l'eau qui est supposée être le 3eme matériau.



b) Modifier le sous-programme ELEM02:

\* Au niveau du sous-programme D02, il faut ajouter au termes diagonaux de la matrice  $d$  qui relie contraintes-deformations le terme  $K_w$ .

\* L'appel du sous-programme (CALL D02) se fait par un code.

\* Rajouter l'impression de la pression intersticielle au niveau du sous-programme ELEM02.

$$P_w = K_w (\epsilon_x + \epsilon_y)$$

# Bibliographie

- (1)\_ G. DHATT et G. TOUZOT  
- Une représentation de la méthode des éléments finis  
(1984)
- (2)\_ P. FORAY  
- Eléments de sismologie  
- Comportement dynamique des barrages en terre et en enrochement  
(1984)
- (3)\_ C. DAVIDOVICI  
- Calcul dynamique des structures en zone sismique  
(1982)
- (4)\_ R. VALID  
- La mécanique des milieux continus et le calcul des structures  
(1977)
- (5)\_ J. COURBAN  
- Calcul des structures  
(1972)
- (6)\_ P.G. WANG  
- Calcul des structures par la méthode numérique et matricielle  
(1969)
- (7)\_ E. ABSI  
- Méthode de calcul numérique en élasticité  
(1980)
- (8)\_ C. MASSONNET et G. FONDER  
- Calcul des structures sur ordinateur  
(1972)
- (9)\_ COMMISSION INTERNATIONALE DES GRANDS BARRAGES  
- Les méthodes des éléments finis appliquées aux calculs et à la conception des barrages  
(1978)

