

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

16/88

وزارة التعليم و البحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique

n.ed

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT GENIE HYDRAULIQUE

## PROJET DE FIN D'ETUDES

Pour l'Obtention du diplôme d'Ingénieur d'Etat

SUJET

Etude Hydraulique  
D'UNE POMPE CENTRIFUGE

+ 3 ANNEXES

Proposé par :

D<sup>r</sup> THUMA A.

Etudié par :

M<sup>r</sup> BELAHADJI B.

Dirigé par :

D<sup>r</sup> THUMA A.

PROMOTION Juin 1988

DING

EXTRA STIR

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR**  
**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**

وزارة التعليم العالي

Departement: HYDRAULIQUE

المكتبة - المكتبة  
BIBLIOTHEQUE - المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات

مصلحة: البري

Promoteur: Dr THUMA A.

موجه: د. ا. توما

Elève ingénieur: Mr BELAHADJI B.

تلميذ مهندس: بلا حاجي ابراهيم

الموضوع: الدراسة الهيدروليكية لمضخة طاردة مركزية

الملخص: أبعاد هذا الموضوع هي دراسة أهم العناصر التي تساهم في الصناعة الهيدروليكية لمضخة طاردة ذات سرعة نوعية تتراوح بين 10 و 40 . بصفة خاصة دراسة دقيقة حول السيلان ذي المسار المنحني ، تساهم في اختيار أحسن منحني للعجلة المتحركة .  
نظرا لضخامة الحسابات ، أعد برنامج آلي ( BASIC ) على كمبيوتر ( VAX VT 220 )

SUJET:

**ETUDE HYDRAULIQUE D'UNE  
POMPE CENTRIFUGE**

RESUME:

Ce sujet a pour fin l'étude des principaux éléments permettant la construction hydraulique d'une pompe centrifuge dont la vitesse spécifique est préalablement située entre 10 et 40. En particulier une étude minutieuse de l'écoulement méridien, contribuant au choix du meilleur profil de la roue mobile, a été faite.

Vu l'immensité des calculs, un programme informatique générale est établi en BASIC sur le mini ordinateur VAX VT220.

SUBJECT:

**HYDRAULIC STUDY OF A  
CENTRIFUGAL PUMP**

ABSTRACT:

The aim of this work is to study the principal elements leading to the design of a centrifugal pump with a specific speed of 10 to 40. Specially, a detailed study of the meridian flow contributing to the best choice of the profil of the mobil wheel has been done.

Due to the enourmous computation, a general purpose program has been developed and has been incorporated into a computer VAX VT220.

# Remerciements

Ce travail a été effectué sous la direction du docteur THUMA Antal. Qu'il me soit permis de lui exprimer ma profonde reconnaissance pour son suivi, pour le soin exceptionnel qu'il a bien voulu apporter à la lecture du présent mémoire et pour les remarques et les conseils pertinents qu'il a formulés.

Ma vive gratitude va à monsieur MOULOUDI yahia pour sa disponibilité gratuite à tout moment.

Monsieur ABDERRAHIM Djamel a su être un bon chef de département, je suis heureuse de lui exprimer ma gratitude.

Que M<sup>elle</sup> BENMAMAR saïda veuille bien trouver ici ma reconnaissance pour sa compréhension et son soutien moral.

Mes remerciements vont également à messieurs MITRIVELLI et TAGUI Lade pour avoir participé efficacement à ma formation.

Je remercie enfin, tous les autres professeurs dont j'ai suivi les cours.

## Dédicaces

je dédie ce présent mémoire :

- ~ A ma mère
- ~ A ma mère
- ~ A ma mère
- ~ A mon père
- ~ A mes frères et soeurs
- ~ A la famille KHEDIM
- ~ A toute la section AIKIDO
- ~ A tous mes amis (es) .

# SOMMAIRE

Première partie :

INTRODUCTION  
ET THEORIE DES POMPES  
CENTRIFUGES

INTRODUCTION . . . . .	1
1. MOTIONS FONDAMENTALES . . . . .	1
2. CONSTITUTION ET MODE DE FONCTIONNEMENT . . . . .	2
chapitre unique: THEORIE DES POMPES CENTRIFUGES . . . . .	6
1.1. CARACTERISTIQUES DES POMPES CENTRIFUGES . . . . .	6
1.1.1. Hauteurs . . . . .	6
1.1.2. Débits . . . . .	7
1.1.3. Puissances . . . . .	8
1.1.4. Pertes . . . . .	9
1.1.5. Rendements . . . . .	9
1.2. VITESSE SPECIFIQUE . . . . .	11
1.3. TRIANGLE DES VITESSES . . . . .	11
1.4. HAUTEUR THEORIQUE - THEORIE D'EULER . . . . .	13
1.5. ECOULEMENT REEL DANS LA ROUE . . . . .	18
1.5.1. Répartition des pressions et des vitesses . . . . .	19
1.5.2. Circulation relative . . . . .	20
1.5.3. Influence de l'épaisseur de l'aube . . . . .	21

Deuxième partie

## CALCUL HYDRAULIQUE DE LA ROUE MOBILE

PREAMBULE . . . . .	23
DONNÉES DE DÉPART . . . . .	23
chapitre premier : CALCUL DES DIMENSIONS PRINCIPALES. . . . .	25
1.1. PARAMETRES DE DÉPART . . . . .	26
1.1.1. Nombre de tours spécifique . . . . .	26
1.1.2. Rendements . . . . .	26
1.1.3. Hauteur théorique - Débits interne et de fuite . . . . .	28
1.1.4. Puissances utile, totale et interne . . . . .	28
1.1.5. Pertes . . . . .	28
1.1.6. Nombre d'aube . . . . .	29
1.2. PARAMETRES DE SORTIE . . . . .	29
1.2.1. Vitesse méridienne à la sortie . . . . .	30
1.2.2. Angle de sortie d'aube à nombre d'aubes infini . . . . .	30
1.2.3. Le rapport $D_{1e}/D_2$ . . . . .	30
1.2.4. Coefficient de défaut de puissance . . . . .	30
1.2.5. Coefficient de pression et de débit . . . . .	32
1.2.6. Vitesse périphérique à la sortie . . . . .	35
1.2.7. Diamètre extérieur de la roue . . . . .	35
1.2.8. Angle d'aube à la sortie . . . . .	35
1.2.9. Largeur à la sortie . . . . .	36
1.2.10. Calcul de l'épaisseur d'aube . . . . .	38

1.31. PARAMETRES D'ENTRÉE . . . . .	38
1.3.11. Diamètre de l'arbre . . . . .	38
1.3.21. Diamètre du moyeu . . . . .	40
1.3.31. La vitesse méridienne à l'entrée . . . . .	40
1.3.41. Vitesse et diamètre d'entrée . . . . .	40
1.3.51. Les autres paramètres d'entrée . . . . .	42
 Chapitre II : DETERMINATION DE LA COUPE MERIDIENNE . . . . .	 48
1.11. HYPOTHESES . . . . .	48
1.21. VARIATION DE LA LARGEUR "b" EN FONCTION DU DIAMETRE "D" . . . . .	48
1.31. EQUATION DES FLASQUES DU PROFIL . . . . .	48
1.41. TRACÉ DE LA COUPE MERIDIENNE . . . . .	50
 chapitre III : ETUDE DE L'ECOULEMENT MERIDIEN . . . . .	 53
3.11. INTRODUCTION . . . . .	53
3.21. EQUATIONS AUX DIFFERENCES FINIES . . . . .	57
3.31. RESOLUTION DE L'EQUATION DE POISSON . . . . .	57
3.41. FORMULATION DES SOLUTIONS DE L'EQUATION DE POISSON - METHODE DE RELAXATION . . . . .	59
3.51. GENERALISATION DE LA METHODE DE RELAXATION . . . . .	61
3.61. APPLICATION DE LA METHODE DE RELAXATION POUR LE CAS DE L'ECOULEMENT MERIDIEN . . . . .	63
3.6.11. Hypothèses et formulation du problème . . . . .	63
3.6.21. Valeurs des fonctions de courants . . . . .	66
3.6.31. Tracé des lignes de courant . . . . .	71

chapitre IV :	CALCUL DE L'AUBAGE .	74
chapitre V :	ANALYSE DES RESULTATS .	79

Troisième partie

NOTIONS DE VOLUTE  
 ET ELEMENTS DE CONSTRUCTION

chapitre I :	NOTION DE VOLUTE .	81
chapitre II :	ELEMENTS DE CONSTRUCTION .	82
11.	Element d'aménagé du liquide à la roue - Tubulure d'aspiration .	82
21.	Roue .	83
31.	Etanchéité de la roue .	84
41.	Presse - etoupe .	85
51.	Arbre .	86
61.	Clavette .	87
71.	Roulement .	88
81.	Palier .	89
91.	Moteur .	89

Quatrième partie :

CONCLUSION .	90
BIBLIOGRAPHIE .	92

ANNEXE : PARTIE INFORMATIQUE

- ORGANIGRAMME GÉNÉRAL
- PROGRAMME (Listing)
- RESULTATS (Listing)

## INTRODUCTION

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique1/. NOTIONS FONDAMENTALES:

On appelle pompe, une machine qui sert à élever les liquides d'un niveau inférieur à un niveau supérieur; ou autrement dit à refouler les liquides d'une région à faible pression vers une région à haute pression.

Parmi toute la gamme de pompes; le développement des "pompes centrifuges" a été d'une rapidité sans commune mesure en vertu des progrès réalisés dans l'emploi de la force motrice électrique. A l'heure; il n'existe pratiquement aucune limite - Extremum - des valeurs du débit ou de la hauteur d'élevation. De tels progrès dans le développement et l'utilisation la plus universelle des pompes centrifuges dans maintes industries et techniques sont dûs à plusieurs facteurs:

- l'aptitude de fonctionnement à grandes vitesses de rotation, d'où la possibilité d'accouplement direct à des moteurs électriques;
- le minimum de parties mobiles;
- les meilleurs rendements;
- enfin l'encombrement réduit; d'où un prix et des frais d'installation modérés relativement au volume liquide déplacé et éventuellement un bas coût d'exploitation.

Toujours est-il - que pour éviter tout jugement non argumenté;

il faut peser le pour et le contre ; ce dernier réside dans les critiques apportées aux pompes centrifuges qui ne sont autres qu'un rendement inférieur à faible débit et grande hauteur d'élevation ; un arrêt de l'élevation d'eau en cas de cavitation . Et quant à la nécessité d'un amorçage avant la mise en marche ; ceci n'étant plus considéré comme un défaut du fait de l'apparition des nouvelles pompes centrifuges qui sont auto-amorçantes.

Cependant pour établir une synthèse plus exacte des pompes centrifuges ; il importe d'examiner de près tous les organes constitutifs de la pompe centrifuge ; ainsi que l'utilité de chacun d'eux .

## 21. CONSTITUTION ET MODE DE FONCTIONNEMENT :

La dénomination de pompe centrifuges englobe une vaste variété de pompes où le pompage de liquides ( ou production de pression ) se fait par la rotation d'une roue . Cependant lorsque la pression totale ne peut pas être engendrée avec un bon rendement par une seule roue ; il importe alors de considérer plusieurs roues montées en série qui définissent ce qu'on appelle „ pompe multicellulaire ”.

Le présent projet traitera seulement les pompes centrifuges monocellulaire qui ont pour fonction d'élever un débit  $Q$  à une hauteur  $H$  . Le liquide ; pour lequel il est question ; est l'eau . Du point de vue conception ; à part les différences de détails imposés

## INTRODUCTION

par des applications particulières et par des impératifs mécaniques; chaque pompe centrifuge se compose de deux éléments principaux :

- Une roue formée d'aubages et caractérisée par l'angle de ses aubages ; par les différents diamètres et largeurs ; et éventuellement par la vitesse à laquelle elle doit tourner . Cette roue est fixée sur un arbre au moyen d'une clavette évitant une possible translation de la roue . Cette dernière est entraînée par un moteur par le biais d'un accouplement souvent élastique assuré par des éléments flexibles .

- Le corps de la pompe qui détermine la trajectoire de l'eau à l'entrée et à la sortie de la roue ; et qui admet pour élément essentiel la volute .

La pompe centrifuge doit transmettre à l'eau une énergie mécanique qui est nécessaire ; non seulement pour élever l'eau ; mais aussi pour surmonter les pertes hydrauliques occasionnées le long de la conduite de refoulement . Cette énergie doit donc comporter :

- La hauteur représentative de la vitesse  $V^2/2g$  qui est la hauteur de laquelle devrait tomber la molécule liquide en chute libre dans le vide pour acquérir la vitesse  $V$  . ( $V^2/2g$  est appelé aussi énergie cinétique) .

- L'Énergie de pression  $P/\bar{w}$  (ou encore appelée hauteur représentative de la pression) ; nécessaire au passage théorique du liquide de la pression nulle à la pression réelle .

- L'Énergie potentielle  $Z$  due aux forces de pesanteur .

- $\Sigma h_p$  : pertes de charges occasionnées le long de la conduite de refoulement .

Ainsi qu'il découle de ces considérations ; l'énergie mécanique totale

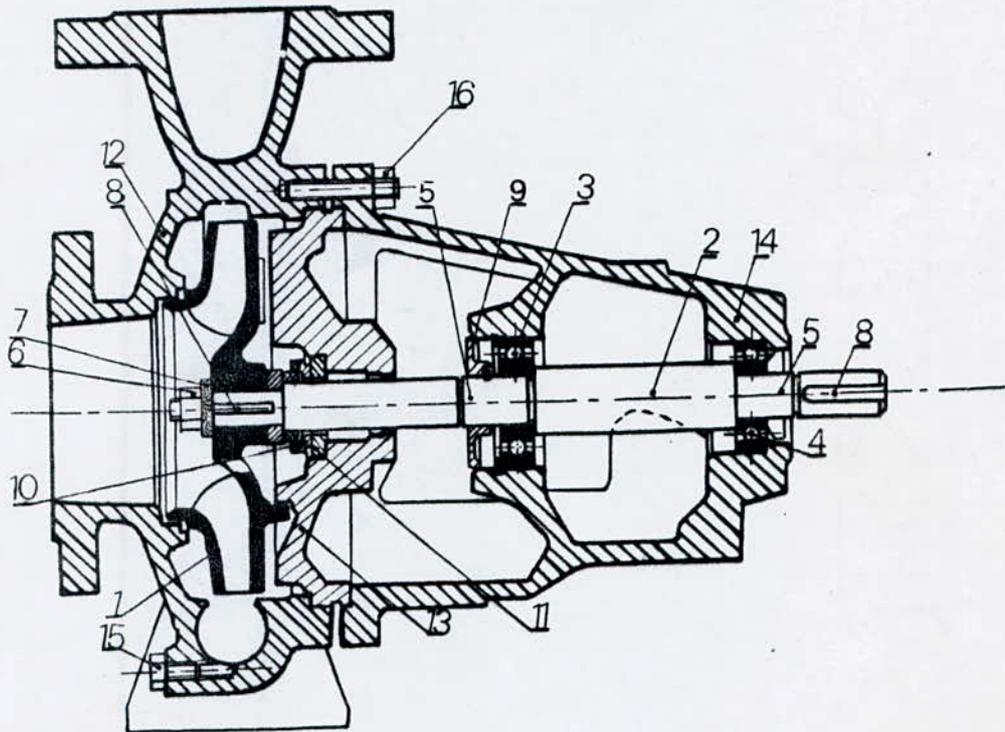
## INTRODUCTION

communiquée par la pompe à l'eau prend la forme suivante :

$$E_m = H = \frac{P}{\omega} + \frac{V^2}{2g} + \sum \zeta + \sum h_p$$

Le principe de fonctionnement d'une pompe centrifuge consiste dans l'augmentation du moment cinétique du liquide ; pour ce faire ; sous l'effet de la rotation de la roue et grâce à la forme appropriée de ses aubes ; l'eau ; qui arrive dans l'ocillard de la roue par la tubulure d'aspiration ; est projetée à la périphérie et ; de ce fait ; engendre une dépression qui provoque un appel des tranches d'eau suivantes ; il en résulte par suite ; un écoulement continu de la veine liquide ; laquelle est recueillie par la volute ; et dirigée dans la conduite de refoulement (Voiz FIG1 : Schéma détaillé d'une pompe centrifuge).

# fig1. Pompe centrifuge



## NOMENCLATURE :

- |                           |                                |
|---------------------------|--------------------------------|
| 1. Roue                   | 9. Déflecteur                  |
| 2. Arbre                  | 10. Presse-étoupe              |
| 3. Roulement              | 11. Bague fixe                 |
| 4. Roulement axial        | 12. Corps de pompe             |
| 5. Graisseur de roulement | 13. Fond de boîte de garniture |
| 6. Ecrou de blocage       | 14. Corps de palier            |
| 7. Rondelle d'écrou       | 15. Bouchon de vidange         |
| 8. Clavette               | 16. Vis de fixation            |

**THEORIE DES POMPES CENTRIFUGES**

1.1. CARACTERISTIQUES DES POMPES CENTRIFUGES :

Les pompes centrifuges sont généralement caractérisées par deux grandeurs principales à savoir la hauteur et le débit ; toutefois la détermination du rendement est nécessaire pour l'évaluation du degré de perfection hydraulique et mécanique de la pompe. Cette notion de rendement est intimement liée aux notions de pertes et de puissances .

Le schéma suivant comprend presque toutes les caractéristiques d'une pompe centrifuge .

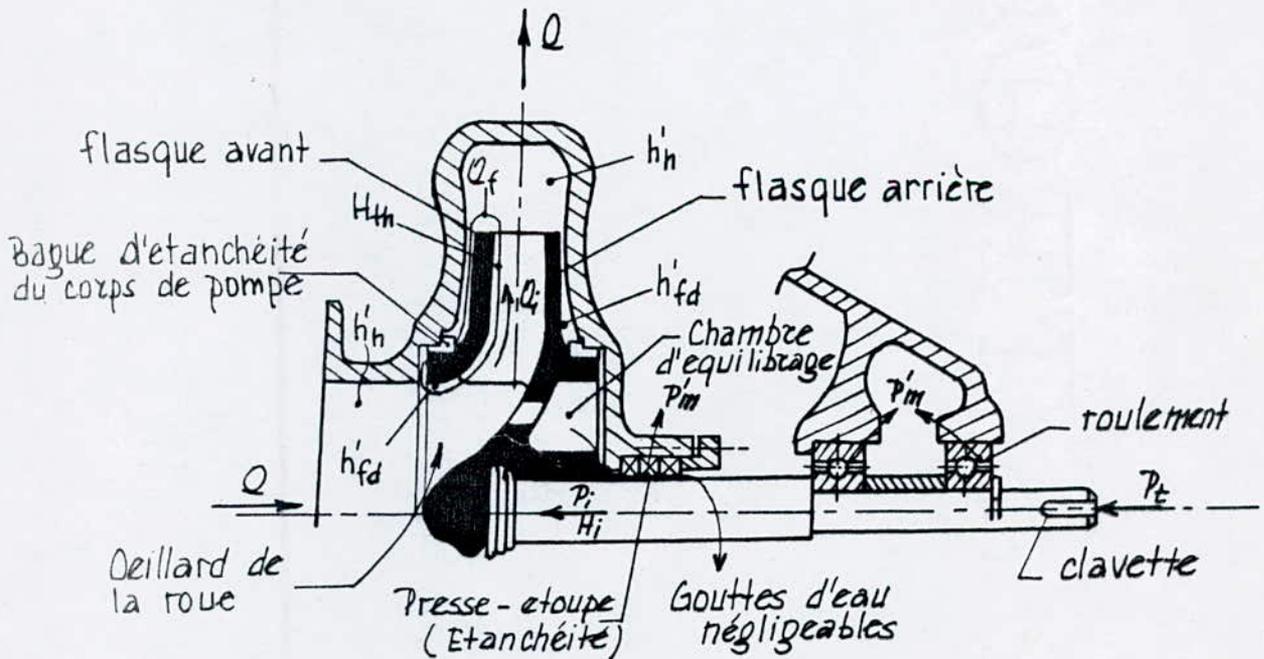


FIG I.01

1.1.1. Hauteurs :

Vu l'importance de la hauteur théorique ; celle-ci sera étudiée

## II. THEORIE DES POMPES CENTRIFUGES

séparément dans un sous-chapitre plus bas.

### Hauteur d'élevation totale :

La hauteur d'élevation totale ou encore appelé hauteur manométrique totale s'exprime en mètre par l'accroissement de l'énergie de pression transmise au liquide par la roue. Elle se rapporte donc à la différence des pressions entre l'entrée et la sortie de la pompe, et prend la forme suivante :

$$H = \frac{P_s - P_0}{\bar{\omega}} + \frac{v_s^2 - v_0^2}{2g} + h_d$$

où :

$P_s$  et  $P_0$  : sont les pressions ; en [Pa] ; respectivement à la sortie et à l'entrée ;

$v_s$  et  $v_0$  : sont les vitesses respectives en [m/s] ;

$h_d$  : est la différence géodésique entre les points de prises de pressions ;

$\bar{\omega}$  : est le poids spécifique du fluide en [ $\frac{N}{m^3}$ ] ;

$g$  : est l'accélération de pesanteur qui vaille  $9.81 \frac{m}{s^2}$  ;

$H$  : est exprimé en mètres de fluide .

### 1.1.2/ Débits :

Le volume de liquide pompé par unité de temps s'appelle débit et est généralement exprimé en litres par seconde ou en mètre cube par heure .

#### 1.1.2.1/ Débit réel :

Le débit réel  $Q$  est celui disponible à l'orifice de refoulement augmenté du débit indispensable au refroidissement des paliers

et presse-étoupe ; si le prélèvement du liquide a lieu avant l'orifice de refoulement.

### 1.1.2.21. Débit interne :

Le débit interne  $Q_i$  est égal à l'intensité du courant dans la section de sortie de la roue ; ce qui le fait aussi appeler débit de la roue. En outre c'est le débit total traversant la roue ; se composant du débit utile  $Q$  et du débit de fuite  $Q_{int}$  :

$$Q_i = Q + Q_{int} \dots \dots \dots (0)$$

ce débit est pris comme base de calcul pour les pompes centrifuges.

### 1.1.31. Puissances :

#### 1.1.3.11. Puissance utile :

La puissance utile  $P$  d'une pompe centrifuge de débit utile  $Q$  et de hauteur d'élevation utile  $H$  s'exprime par :

$$P = Q \cdot \bar{\omega} \cdot H \dots \dots \dots (1)$$

#### 1.1.3.21. Puissance totale :

Par puissance totale  $P_t$  ; on entend la puissance mécanique absorbée sur l'arbre ou l'accouplement de la pompe. Elle est définie par la formule suivante :

$$P_t = P / \eta \dots \dots \dots (2)$$

#### 1.1.3.31. Puissance interne :

La puissance interne ou puissance absorbée par la roue est la puissance totale diminuée de la perte de puissance

## II. THEORIE DES POMPES CENTRIFUGES

mécanique c'est-à-dire :

$$P_i = P_t - P'_m \quad \dots \quad (2')$$

### 1.1.4. Pertes :

Toute la hauteur d'une pompe centrifuge est produite par la roue. Les autres éléments de la pompe ne contribuent en aucune sorte à la production de la hauteur mais provoquent des pertes inévitables qui subsistent sous plusieurs formes :

#### 1.1.4.1. Pertes hydrauliques :

La partie d'énergie cinétique ; transmise par la roue mobile ; qui n'est pas transformée en pression et l'énergie de pression qui est absorbée par le frottement des canaux de la pompe constituent les pertes hydrauliques symbolisées par  $h_h$ .

#### 1.1.4.2. Pertes par fuite :

Symbolisées par  $Q_{int}$  ou  $Q_f$  et encore appelées pertes de débits ; les pertes par fuite ont lieu dans les jeux entre les parties fixes de la pompe.

#### 1.1.4.3. Pertes mécaniques :

Les pertes mécaniques  $P'_m$  comprennent les pertes de puissance dans les paliers ; les presses-étoupe ainsi que les frottements des disques tournants de la roue.

### 1.1.5. Rendements :

#### 1.1.5.1. Rendement hydraulique :

Le rendement hydraulique est le rapport entre les hauteurs d'élevations totale et théorique c'est-à-dire :  $\eta_h = H/H_{th}$

$$\eta_h = \frac{H}{H_{th}} = \frac{H}{H+h'_h} \quad \dots \quad (3)$$

### 1.1.5.2. Rendement volumétrique :

Le débit disponible au refoulement de la pompe est inférieur à celui qui traverse la roue de la quantité perdue par fuite ; le rapport des deux débits est appelé rendement volumétrique et s'écrit sous la forme :

$$\eta_v = \frac{Q}{Q_i} = \frac{Q}{Q+Q_{int}} \quad \dots \quad (4)$$

### 1.1.5.3. Rendement interne :

Le rendement interne est défini par le produit :

$$\eta_i = \eta_h \cdot \eta_v \quad \dots \quad (5)$$

### 1.1.5.4. Rendement mécanique :

Le rendement mécanique d'une pompe centrifuge est le rapport de la puissance  $P_i$  absorbée par la roue et la puissance totale :

$$\eta_m = \frac{P_i}{P_t} = \frac{P_t - P'_m}{P_t} \quad \dots \quad (6)$$

### 1.1.5.5. Rendement global :

Le rendement global est le rapport entre la puissance  $P$  fournie par la pompe et la puissance totale c'est-à-dire :

$$\eta = \frac{P}{P_t} \quad \dots \quad (7)$$

ou autrement en moyennant toutes les formules précédentes ; on peut trouver une relation entre les rendements partiels et le rendement global. Cette relation s'écrit comme suit :  $\eta = \eta_h \cdot \eta_v \cdot \eta_m$

$$\eta = \eta_h \cdot \eta_v \cdot \eta_m \quad \dots \quad (8)$$

### 1.21. VITESSE SPECIFIQUE :

La vitesse spécifique ou nombre de tours spécifique ; encore appelé nombre de BRAUER est un critère de similitude des pompes centrifuges . Elle est utilisée pour caractériser le type de pompe ; plus exactement l'aspect de la roue ( radiale ; axiale ; mixte etc ... ) . Elle est calculée pour le point de rendement optimum par la formule suivante :

$$n_q = n \cdot Q^{1/2} \cdot H^{-3/4} \quad \dots \quad (9)$$

où ;

$n$  : est la vitesse de rotation de la roue en [trs/mn] ;

$Q$  : le débit en [m<sup>3</sup>/s] ;

$H$  : la hauteur en [m] .

Le sens physique de la vitesse spécifique est le nombre de tours à la minute d'une pompe qui eleverait de 1 mètre un débit de 1 m<sup>3</sup>/s avec une roue géométriquement semblable à celle de la pompe considérée .

### 1.31. TRIANGLE DES VITESSES :

L'écoulement du liquide à travers la roue présente une certaine périodicité ; il est donc quasi-stationnaire et ne tient compte que des valeurs moyennes ; en particulier les vitesses moyennes qui sont définies de la façon suivante :

—  $C$  : Vitesse absolue de l'écoulement envisagé par rapport

## II. THEORIE DES POMPES CENTRIFUGES

au corps de la pompe et qui admet pour composantes :

•  $C_m$  : composante méridienne ou radiale ou encore connue sous le nom de débitante du fait qu'elle est proportionnelle au débit.

•  $C_u$  : composante tangentielle ou circonférentielle

-  $u$  : Vitesse périphérique de la roue ou d'entraînement ou encore appelée vitesse propre à la roue, elle vaut :

$$u = \frac{\pi D n}{60} \quad [m/s] \quad \dots \quad (10)$$

où :  $D$  : est le diamètre en  $[m]$  à un point donné de la roue ;  
 $n$  : le nombre de tours par minute.

-  $W$  : Vitesse relative de l'écoulement considérée par rapport à la roue. Et afin que l'écoulement se fait sans heurt ; la vitesse  $W$  doit être tangente à l'aubage.

Liées graphiquement par la relation vectorielle :

$$\vec{C} = \vec{u} + \vec{W} ;$$

ces vitesses moyennes, ainsi définies, forment en chaque point du filet liquide un diagramme triangulaire appelé triangle de vitesse ; en particulier les figures I.2.a1. et I.2.b1. suivantes représentent les triangles de vitesses à l'entrée et à la sortie de la roue caractérisés respectivement par les indices 1 et 2 (les angles  $\beta_1$  et  $\beta_2$  seront définis ultérieurement).

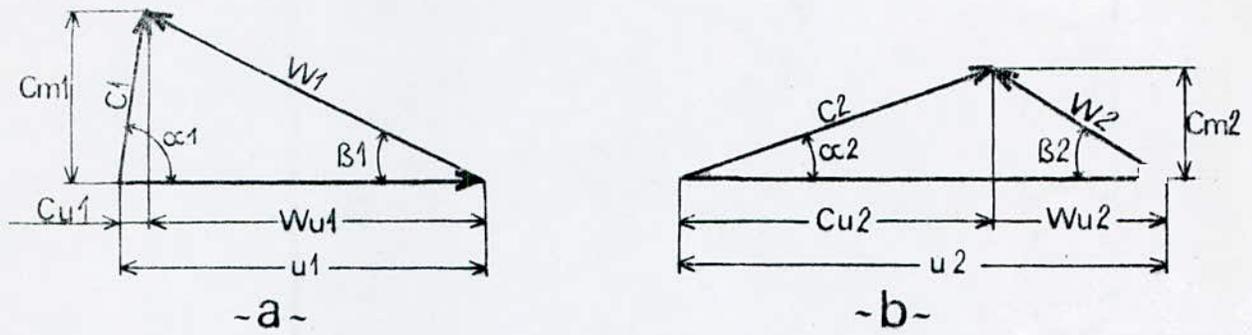


fig I.2 - a/. Triangle des vitesses à l'entrée  
 b/. Triangle des vitesses à la sortie.

À l'entrée ; l'eau pénètre radialement ; ainsi la vitesse absolue  $C_1$  fait avec  $u_1$  un angle  $\alpha_1$  voisin de  $\pi/2$ .  
 Les triangles des vitesses construits ci-dessus représentent en outre les états du mouvement d'entrée et de sortie de la roue tournant à la vitesse angulaire constante  $\omega$ .

### 1.41. HAUTEUR THEORIQUE - THEORIE D'EULER :

On obtient l'expression de la hauteur théorique d'une pompe centrifuge en appliquant le théorème du moment cinétique à la masse de liquide traversant deux aubes consécutives de la roue. Ce théorème énonce que la variation du moment cinétique par unité de temps d'un corps par rapport à son axe de révolution est égale au couple résultant sur cet axe des forces appliquées à ce corps. A part le fait qu'on néglige les forces de frottements ; les forces de pesanteurs quant-à elles n'interviennent pas du moment que la roue tourne horizontalement.

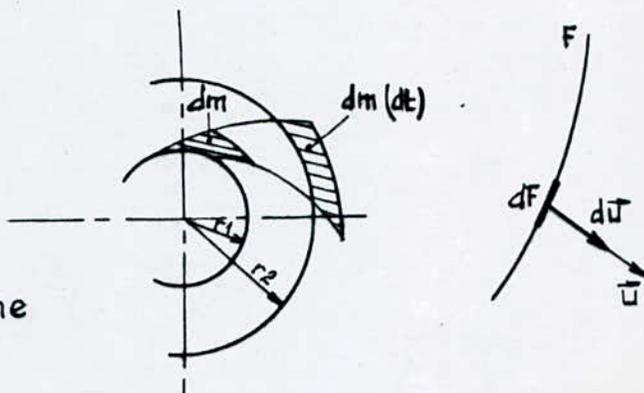
Conformément aux deux précédentes hypothèses ; le théorème

du moment cinétique se traduit par l'équation :

$$\int_F \vec{r} \wedge (\vec{c} \rho dF) = - \int_F \vec{r} \wedge \rho dF \dots \dots \dots (\alpha)$$

avec  $d\vec{F} = \vec{u} \cdot dF$

où ;  $dF$  : représente la section que traverse la tranche d'eau  $dm$  à l'instant  $dt$ . La Figure ci-contre montre l'état de la tranche d'eau après un instant  $dt$ .



Compte tenu du théorème de conservation de quantité de mouvement ; le débit massique peut se formuler comme suit :

$$\dot{m} = dm/dt = 2\pi r_1 b_1 c_{r1} \rho = \dots = 2\pi r_i b_i c_{ri} \rho = \dots = 2\pi r_2 b_2 c_{r2} \rho$$

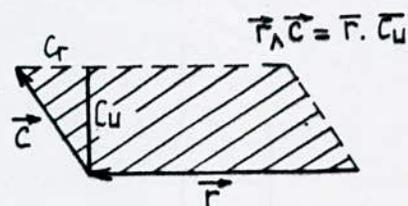
Soit en général une section  $F_i$  tel que :  $F_i = 2\pi r_i b_i$  ; il vient :

$$\dot{m} = F_i c_{ri} \rho \dots \dots \dots (\beta)$$

Sachant que le couple résultant (moment théorique) est  $|\int_F \vec{r} \wedge \rho dF|$  ; il en résulte selon (α) que :

$$M_{th} = |\int_F \vec{r} \wedge \vec{c} (\vec{c} \rho dF)| \dots \dots \dots (\gamma)$$

D'autre part comme le montre la figure ci-dessous ; le produit vectoriel  $\vec{r} \wedge \vec{c}$  est égal au produit  $r \cdot c_u$  ; en effet :



Considérons le triangle des vitesses à un certain rayon  $r$  (voir FIG I-3) ;

et supposons que le sens positif correspond au sens des aiguilles

d'une montre. D'après l'analyse vectorielle ; on peut écrire :

$$(\vec{r}, \vec{c}) = (\vec{r}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{c})$$

avec :  $(\vec{r}, \vec{u}) = +\pi/2$  et  $(\vec{u}, \vec{c}) = +\alpha$

D'où :  $(\vec{r}, \vec{c}) = \frac{\pi}{2} + \alpha$

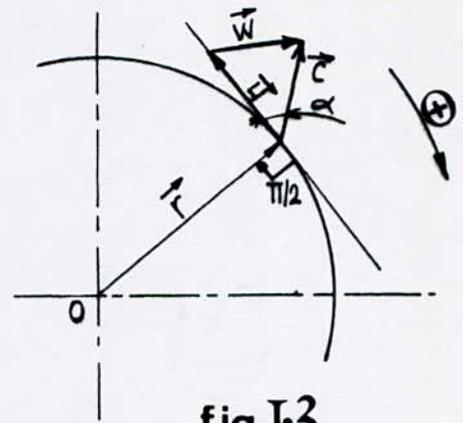


fig I:3

D'autre part ; le produit vectoriel s'écrit :

$$\vec{r} \wedge \vec{c} = r \cdot c \cdot \sin(\vec{r}, \vec{c}) = r \cdot c \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = r \cdot c \cdot \cos \alpha$$

or selon le triangle des vitesses donné par la figure I:2 ; le produit  $c \cdot \cos \alpha$  n'est autre que la composante périphérique,  $c_u$  de la vitesse absolue  $\vec{c}$  ; il vient donc :

$$\vec{r} \wedge \vec{c} = r \cdot c_u \quad \dots \quad (0)$$

Il reste à développer le produit scalaire :

$$\vec{c} \cdot d\vec{F} = c \cdot dF \cdot \cos(\vec{c}, d\vec{F})$$

Avec :  $(\vec{c}, d\vec{F}) = (\vec{c}, \vec{u}) + (\vec{u}, d\vec{F}) = -\alpha + \pi/2$  d'où :

$$\vec{c} \cdot d\vec{F} = c \cdot dF \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = c \cdot dF \cdot \sin \alpha$$

Il se trouve que le produit  $c \cdot \sin \alpha$  n'est autre que la composante radiale  $c_r$  de la vitesse absolue  $\vec{c}$  ; on aura donc :

$$\vec{c} \cdot d\vec{F} = c_r \cdot dF \quad \dots \quad (1)$$

En substituant dans l'équation (0), les termes correspondant donnés par les relations (0) et (1), on aura :

$$M_{th} = \left| \int_F r \cdot c_u (r \cdot c_r) dF \right|$$

Si l'on étale cette intégrale de la borne  $F_1$  à la borne  $F_2$  ; qui correspondent

respectivement à l'entrée et à la sortie ; on aura :

$$M_{th} = r_2 c u_2 (\rho c r_2 F_2) - r_1 c u_1 (\rho c r_1 F_1)$$

En vertu de (β) on a :

$$\dot{m} = \rho c r_1 F_1 = \rho c r_2 F_2 \quad \text{d'où :}$$

$$M_{th} = \dot{m} (r_2 c u_2 - r_1 c u_1)$$

D'autre part :

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{d(\rho V)}{dt} = \rho \cdot \frac{dV}{dt}$$

Et si on considère la totalité des aubes alors :  $\frac{dV}{dt} = Q$  ; il en résulte :

$$\dot{m} = \rho \cdot Q$$

En définitive le couple résultant sera donné par la formule :

$$\boxed{M_{th} = \rho Q (r_2 c u_2 - r_1 c u_1)} \dots \dots (11)$$

L'équation (11) est appelée equation fondamentale des turbopompes.

On définit la puissance théorique fournie par les aubes de la roue comme étant le produit du couple résultant et de la vitesse angulaire de la roue :

$$P_{th} = M_{th} \cdot \omega \quad \dots \dots (12)$$

Il se trouve que cette puissance théorique soit aussi égale à :

$$P_{th} = \rho g Q H_{th} \quad \dots \dots (13)$$

En identifiant les relations (12) et (13) ; on peut écrire :

$$\rho g Q H_{th} = M_{th} \cdot \omega$$

En tenant compte de l'équation (11) , on aura une autre forme .

# II. THEORIE DES POMPES CENTRIFUGES

$$\rho g Q H_{th} = \rho Q \omega (r_2 c_{u2} - r_1 c_{u1}) ;$$

ou encore :

$$g H_{th} = \omega (r_2 c_{u2} - r_1 c_{u1})$$

En substituant aux termes appropriés les relations :

$$u_1 = r_1 \omega \quad \text{et} \quad u_2 = r_2 \omega \quad ; \quad \text{on obtient :}$$

$$H_{th} = \frac{1}{g} (u_2 c_{u2} - u_1 c_{u1}) \dots \dots \dots (12)$$

L'équation (12) est appelée EQUATION D'EULER ; c'est pourquoi la hauteur théorique prend souvent le nom de hauteur d'EULER .

En particulier, si le liquide arrive sans prérotation, c'est-à-dire que l'entrée de l'eau dans la roue est libre ; le triangle des vitesses prend la forme ci-contre .

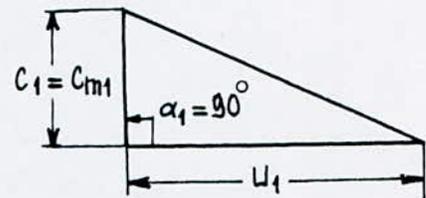


fig I-4 Triangle des vitesses à l'entrée en cas d'entrée libre de l'eau dans la roue .

Dans ce cas, la composante périphérique  $c_{u1}$  de la vitesse absolue  $c_1$  est nulle ; en effet :

$$c_{u1} = c_1 \cdot \cos \alpha_1 = c_1 \cdot \cos (90^\circ) = 0$$

En de telles circonstances, l'équation d'EULER (12) prend la forme :

$$H_{th} = \frac{u_2 c_{u2}}{g} \dots \dots \dots (13)$$

Déterminons à présent les composantes de la hauteur théorique : l'équation de BERNOULLI concernant un champ rotatif s'écrit :

$$\left[ \frac{W^2}{2} - \frac{u^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} \right]_1 + W' = 0$$

Or selon les hypothèses ; on a négligé les frottements et l'effet de la pesanteur ; donc on aura :  $\left[ \frac{W^2}{2} - \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right]_1 = 0 \dots \dots \dots (3)$

## II. THEORIE DES POMPES CENTRIFUGES

D'après le triangle des vitesses on a :  $\vec{c} = \vec{u} + \vec{w}$  ; d'où :

$$\vec{w} = \vec{c} - \vec{u} \quad ; \quad w^2 = c^2 + u^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{c}$$

L'équation (3) devient ainsi :

$$\left[ \frac{c^2 + u^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{c}}{2} - \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right]_1 = 0 \quad ; \quad \text{ou encore :}$$

$$\left| \frac{c^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right|_1 = |\vec{u} \cdot \vec{c}|_1^2$$

or :  $\vec{u} \cdot \vec{c} = u \cdot c \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{c}}) = u \cdot c \cdot \cos \alpha = u \cdot c_u$  ; d'où :

$$\left| \frac{c^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right|_1 = |u \cdot c_u|_1^2 \quad ; \quad \text{ou autrement :}$$

$$\frac{c_2^2 - c_1^2}{2} - \frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{c_{u2} \cdot u_2 - c_{u1} \cdot u_1}{1}$$

En multipliant les deux membres de cette dernière équation par le terme  $1/g$  ; on obtient :

$$\frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} = \frac{c_{u2} \cdot u_2 - c_{u1} \cdot u_1}{g} \dots \dots (\mu)$$

Soit ;  $H_c = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g}$  : l'augmentation de l'énergie cinétique due à l'augmentation de la vitesse.

$H_p = \frac{p_2 - p_1}{\rho g}$  : l'énergie potentielle caractérisée par un accroissement de pression.

En vertu de ces considérations et l'équation (12) ; la hauteur théorique prendra une autre forme selon ( $\mu$ ) :

$$H_{th} = H_p + H_c \dots \dots (14)$$

$H_{th}$  est aussi appelée énergie transférée.

### 1.51. ECOULEMENT REEL DANS LA ROUE :

L'analyse physique de l'écoulement d'un liquide réel dans

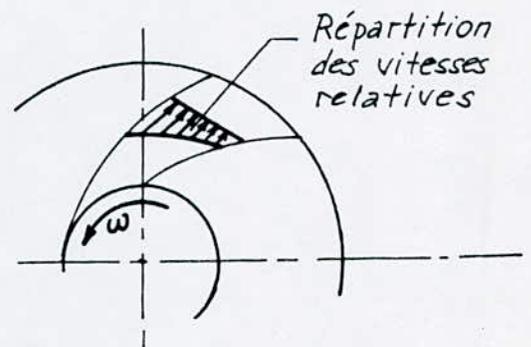
## II. THEORIE DES POMPES CENTRIFUGES

la roue d'une pompe centrifuge s'appuie sur le fait expérimentalement vérifié que l'allure des lignes de courants d'un liquide réel dans des conduites ressemble à celle d'un liquide parfait dans les conduites de forme identique.

Dans la réalité ; l'écoulement d'un liquide dans la roue a le caractère d'un mouvement périodiquement symétrique par rapport à l'axe de la roue. Et on peut considérer les aubes de la roue comme des surfaces de discontinuités dont la traversée fait apparaître des discontinuités de pression et de vitesse. Du moment que le liquide ne traverse pas les surfaces des aubes ; le passage de la face arrière à la face avant doit faire apparaître une discontinuité des composantes des vitesses tangentes aux deux côtés de l'aube.

### 1.5.11. Répartition des pressions et des vitesses :

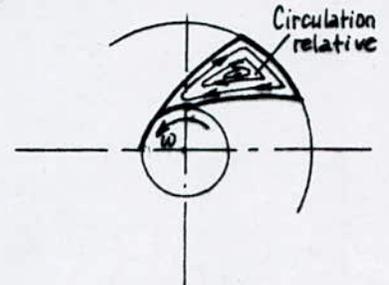
La transmission de la puissance par la roue à l'eau produit une différence de pression entre l'extrados (face convexe) et l'intrados (face concave) des aubes. La pression du côté de l'extrados (qui exerce la poussée) est évidemment plus grande que celle du côté de l'intrados. Le passage de l'intrados à l'extrados fait apparaître une discontinuité de pression. Comme le montre la figure ci-contre ;



les vitesses relatives sont plus élevées du côté de l'extrados que du côté de l'intrados de l'aube. La répartition des vitesses relatives est également influencée par la circulation relative.

### 1.5.21. Circulation relative :

La particule d'eau tourne dans le sens inverse à celui de la vitesse de rotation de la roue ; tout en se dirigeant vers l'extérieur. Le mouvement de toutes les particules définit ce qu'on appelle circulation relative ou tourbillon relatif (voir figure ci-contre)



D'autre part l'équation d'EULER est fondée sur l'hypothèse que l'écoulement de l'eau dans la roue est un mouvement à symétrie de révolution et que le champ du courant est formé par un nombre infini de lignes de courants cohérentes ; ainsi la reproduction analytique des écoulements dans les canaux de la roue consiste à supposer un nombre infini d'aubes congruentes infiniment minces. Ceci équivaut à supposer une symétrie de révolution parfaite par rapport à l'axe de la roue. Le triangle de vitesse change sa configuration comme le montre la figure I.5/ suivante :

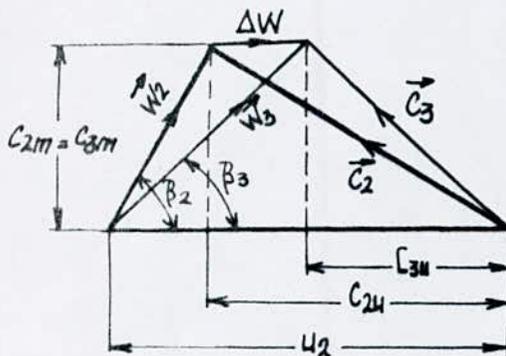


fig I.5

ici ;  $\Delta W$  : est la différence de vitesses relatives ;

$C_{2u}$  : correspond au nombre d'aubes infini ;

$C_{3u}$  : correspond au nombre d'aubes fini.

Selon l'équation d'EULER (13) (sans prérotation) on a :

$$H_{th\infty} = u_2 C_{2u} / g \quad ; \quad H_{th} = u_2 C_{3u} / g \quad \dots \dots (17)$$

comme le montre la figure I-51. :

$$C_{2u} > C_{3u} \quad \text{et} \quad u_2 \text{ est commune ;}$$

il en résulte d'après les relations (V) que :

$$H_{th} < H_{th\infty} \quad \dots \quad (E)$$

Sachant que  $H_{th}$  est l'énergie transférée et que  $H_{th\infty}$  est celle qui correspond au modèle mathématique donc fictive ; alors la différence " $H_{th\infty} - H_{th}$ " s'appelle manque d'énergie ; elle est due au tourbillon relatif. Cette différence n'est pas une perte puisqu'elle ne se manifeste pas par une augmentation de chaleur ; c'est donc un manque à gagner, d'où l'introduction d'un coefficient " $\lambda$ " appelé coefficient de défaut de puissance qui est tel que :

$$H_{th} = \lambda H_{th\infty} \quad \dots \quad (15)$$

Il est évident que  $\lambda$  est inférieur à 1 .

### 1.5.31. Influence de l'épaisseur de l'aube :

Les aubes d'épaisseur finie produisent une augmentation de la vitesse d'écoulement pour une modification relativement insignifiante du champ de courant, et par conséquent un accroissement des angles d'entrée, qui provoque d'avantage de prérotation. Quant aux angles de sortie ; ceux-ci subissent une réduction lorsque l'épaisseur de l'aube est augmentée .

Du point de vue construction on a trouvé avantageux d'amincir le bord de fuite des aubes ; ce qui a pour effet de réduire doucement la vitesse d'écoulement. On définit dans ce contexte un coefficient

## II. THEORIE DES POMPES CENTRIFUGES

$\psi$  appelé coefficient de contraction définit comme suit :

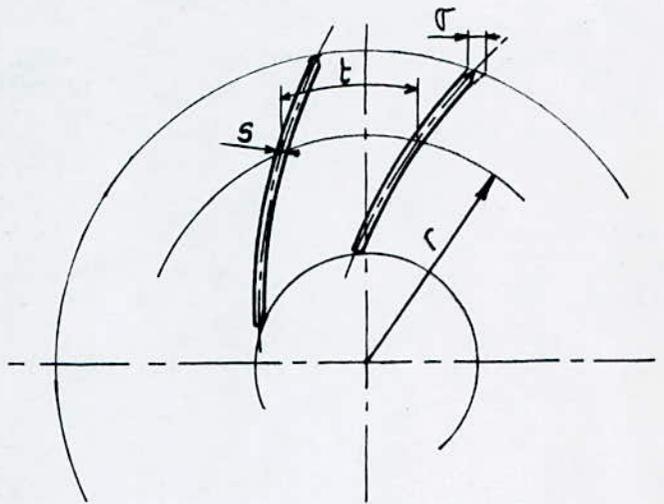
$$\psi = \frac{t - \sigma}{t} \quad \dots \quad (16)$$

où ;  $t$  : est le pas tracé sur la circonférence de rayon  $r$  comme l'indique la figure ci-dessous ;

$$t = \frac{\pi D}{N} \quad \dots \quad (D)$$

$N$  : est le nombre d'aube ;

$\sigma$  : longueur d'arc occupé par l'arête de l'aube ; en outre c'est la projection de l'épaisseur  $s$  de l'aube sur le sens tangent à la circonférence . Elle est donnée par la relation suivante :



$$\sigma = \frac{s}{\sin \beta} \quad \dots \quad (v)$$

## PREAMBULE

Les performances hydrauliques espérés de notre pompe à savoir la hauteur et le débit, étant fixés. Le problème réside dans le choix du nombre de tours qui est fonction :

- du type du moteur d'entraînement : Si  $\eta \uparrow$  alors  $n \uparrow$  ;
- du nombre de tours spécifique : Si  $n_q \uparrow$  alors  $n \uparrow$  ;
- des dimensions de la roue : Si  $D \uparrow$  alors  $n \uparrow$  et  $n \downarrow$  .

Cependant pour pallier à ce problème ; on fixe le nombre de tours de telle façon que le nombre de tours spécifique soit dans le domaine des pompes centrifuges monocellulaire. A ce moment là, le calcul des dimensions principales de la roue se fera essentiellement à partir des trois données  $Q$ ,  $H$  et  $n$ .

Le type du moteur fera l'objet d'un paragraphe dans la troisième partie de la présente thèse.

DONNÉES DE DEPART :

Le programme informatique qui sera joint sur le listing est général. Le choix de  $H$ ,  $Q$  et  $n$  sera selon la guise de l'utilisateur du programme ; cependant j'attires l'attention sur le fait que ce choix est tel que le nombre de tours spécifique doit se situer dans la fourchette  $[10, 40]$  ; qui correspond à une pompe centrifuge monocellulaire (à passage radial). En particulier le listing

resultat correspond à un nombre de tours spécifique moyen ; c'est à dire de l'ordre de 25 .

Les données attribuées sont :

La pompe est destinée à relever un débit de 60 litres par seconde à 35 mètres de hauteur . Elle est accouplée à un moteur (Electrique : comme on le verra dans la partie 3) tournant à 1450 tours par minute .

Les données seront utilisées pour la détermination des dimensions principales de la roue mobile .

# CALCUL DES DIMENSIONS PRINCIPALES

L'analyse physique de l'écoulement du liquide dans la roue, ainsi que l'équation fondamentale d'EULER et les triangles de vitesses d'entrée et de sortie (voir partie théorie) ; montrent que les notions suivantes sont intimement liées :

- La hauteur d'élévation  $H$  ;
- La vitesse périphérique  $u_2$  ;
- L'angle de sortie de l'aube  $\beta_2$  ;
- La vitesse méridienne  $c_{m2}$  ;
- Le nombre d'aubes  $N$  ; etc . . .

Ainsi pour pouvoir calculer les dimensions principales de la roue pour une hauteur  $H$ , un débit  $Q$  et un nombre de tours  $n$  figés ; il faudra admettre d'avance les valeurs de certaines variables, et ceci en les calculant à partir des formules empiriques .

N.b. : Toutes les formules empiriques employées dans la partie calcul sont élaborées à partir des théories et, partant, des constatations statistiques résultant d'un grand nombre d'expériences .

Le calcul des dimensions principales se fait en nuancant entre les paramètres de départ (se rapportant globalement à la pompe) et les paramètres d'entrée et de sortie (se rapportant à la roue). Il est à noter que toutes les références à un point de ce présent mémoire ;

## I.1. CALCUL DES DIMENSIONS PRINCIPALES

vont contenir le numéro de la partie, celui du chapitre et celui de l'équation ou la figure ou même le paragraphe considéré.

### I.11. PARAMETRES DE DEPART :

Les paramètres sont :

#### 1.1.11. Nombre de tours spécifique :

Le nombre de tours spécifique est calculé à partir de la formule (1, I, 9).

#### 1.1.21. Rendements :

Pour les définitions : voir partie théorie.

#### 1.1.2.11. Rendements volumétrique - Global :

Il existe deux possibilités pour le calcul du rendement volumétrique :

- Soit à partir de la formule empirique du rendement volumétrique ;
- Soit à partir du rendement standard.

Le programme informatique qui sera joint est encore général à ce propos là, puisqu'il offre à son utilisateur le libre choix entre les deux possibilités, selon le test suivant :

Si  $T=1$  : ça sera la première solution ( $\eta_v$ ) ;

Si  $T \neq 1$  : ça sera la seconde solution ( $\eta_{st}$ ).

#### a1. Première solution :

Vu que notre pompe centrifuge est à nombre de tours spécifique faible (environ 25 ; comme vous le verrez sur le listing-résultat) ; le rendement volumétrique en fonction de  $nq$  sera représenté par l'abaque 1 (voir ultérieurement), ou explicité par la formule empirique suivante :

$$\eta_v = 1 - \left( 0,4 + \frac{0,3}{\sqrt{Q}} \right) \cdot \frac{1,0586}{nq} \dots (1)$$

## II. CALCUL DES DIMENSIONS PRINCIPALES

où le débit  $Q$  est donné en  $[m^3/s]$ .

Le rendement global est selon CZIBERE :

$$\eta = \eta_v^6 \quad \dots \quad (2)$$

bl. Deuxième solution :

Concernant cette deuxième solution ; il faut voir la statique des rendements des pompes déjà étudiées . Pour ce faire, on considère un rendement parmi la gamme des meilleurs rendements des pompes fabriquées dans le monde . Ce rendement porte le nom de rendement standard et est représenté par l'abaque 2 dit diagramme de HAJDU . Il est autrement explicité par la formule empirique suivante :

$$\eta_{st} = 50,5 + 3,18 \frac{n}{60} \cdot Q + 0,06 \cdot nq + \left( 110 + 16,4 nq - 71,9 \frac{n}{60} \cdot Q \right)^{1/2} \quad \dots \quad (3)$$

où :  $\eta_{st}$  est exprimé en pourcentage ;  
 $Q$  en  $[m^3/s]$  ;  
 $n$  en  $[tr/mn]$  .

Après quoi , selon la capacité de notre usine ; on exprime le rendement global en fonction du rendement standard ( généralement on procède à une diminution par rapport au  $\eta_{st}$  ) . Pour ce qui est de notre cas ; on assimile le rendement global comme suit :

$$\eta = \eta_{st} / 100 \quad \dots \quad (4)$$

avec :  $\eta_{st}$  en % .

En vertu de l'équation (2) , on peut formuler le rendement  $\eta_v$  :

$$\eta_v = \sqrt[6]{\eta} \quad \dots \quad (5)$$

1.1.2.21. Rendements hydraulique, interne et mécanique : Ils sont tel que :

## II. CALCUL DES DIMENSIONS PRINCIPALES

Le rendement hydraulique a été estimé, en fonction du rendement  $\eta_{st}$ , par CZIBERE, d'après la formule :

$$\eta_H = \sqrt{\eta_{st}/100} = \sqrt{\eta} \quad \dots \quad (6)$$

D'après la formule (1, I, 5), le rendement interne s'exprime par :

$$\eta_i = \eta_H \cdot \eta_v \quad \dots \quad (7)$$

Le rendement mécanique est d'après la formule (1, I, 8) :

$$\eta_m = \frac{\eta}{\eta_H \cdot \eta_v} = \frac{\eta}{\eta_i} \quad \dots \quad (8)$$

### 1.1.31. Hauteur théorique - Débits interne et de fuite :

La hauteur théorique est d'après la formule (1, I, 3) :

$$H_{th} = H / \eta_H \quad \dots \quad (9)$$

Quant- au débit interne, il est régi directement par la formule (1, I, 0), ou encore à partir de la formule (1, I, 4) tel que :

$$Q_i = Q / \eta_v \quad \dots \quad (10)$$

D'après la formule (1, I, 0), le débit de fuite ou le débit interstitiel est exprimé par :

$$Q_{int} = Q_f = Q_i - Q \quad \dots \quad (11)$$

### 1.1.41. Puissances utile, totale et interne :

Les puissances utile et totale sont exprimées respectivement par les formules (1, I, 1) et (1, I, 2). Quant-à la puissance interne elle est d'après l'équation (1, I, 6) :

$$P_i = P_t \cdot \eta_m \quad \dots \quad (12)$$

### 1.1.51. Pertes :

La perte hydraulique est d'après (1, I, 3) :  $h'_H = H_{th} - H$

## II. CALCUL DES DIMENSIONS PRINCIPALES

$$h'_H = H_{th} - H \quad \dots \quad (13)$$

De la formule (1,I,0) ; on peut exprimer la perte par fuite comme suit:

$$Q_f = Q_i - Q = Q \left( \frac{1}{\eta_v} - 1 \right) \quad \dots \quad (14)$$

La perte mécanique peut s'exprimer en vertu de l'équation (1,I,2') comme suit :

$$P'_m = P_t - P_i \quad \dots \quad (15)$$

### 1.1.61. Nombre d'aubes :

Les expériences de STEPANOFF ont montrées que le nombre d'aube  $N$  varie linéairement en fonction du nombre de tours spécifique selon la loi suivante :

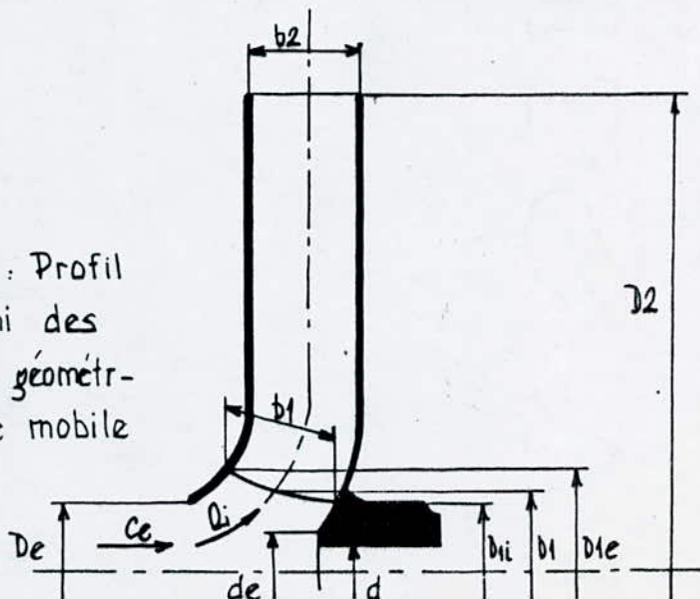
$$N = 22,71 \cdot nq^{-0,3562} \quad \dots \quad (16)$$

cette équation se traduit par une droite représentée par l'abaque 3. ( $N$  sera pris entier).

### I-21. PARAMETRES DE SORTIE :

Avant d'entamer cette partie , il sera intéressant d'établir un schéma représentatif de toutes les caractéristiques géométriques de la roue .

**fig 1** : Profil de la roue muni des caractéristiques géométriques de la roue mobile



## II. CALCUL DES DIMENSIONS PRINCIPALES

### 1.2.11. Vitesse méridienne à la sortie :

Elle est donnée par la formule de A.J. STEPANOFF :

$$C_{m2} = K_{cm2} \sqrt{2gH} \quad (17)$$

où :  $C_{m2}$  est exprimée en [m/s] ;

H en [m] et g en [m/s<sup>2</sup>].

avec  $K_{cm2}$  : le coefficient de la vitesse méridienne à la sortie, il est déterminé sur la base du tracé des turbopompes de rendement élevé et est calculé à partir de la formule empirique suivante :

$$K_{cm2} = 0,02 \cdot nq^{5/9} \quad (18)$$

(il est représenté par l'abaque 4).

### 1.2.21. Angle de sortie d'aube à nombre d'aubes infini :

Désigné par  $\beta_{2\infty}$  et représenté par l'abaque 5, l'angle d'aube à la sortie à nombre d'aube infini est donné par la formule empirique suivante :

$$\beta_{2\infty} = 17,84 \cdot \left(\frac{nq}{10}\right)^{0,258} \quad (19)$$

### 1.2.31. Le rapport $D_{1e}/D_2$ :

Les expériences faites par Stépanoff ont conduit à une relation compliquée entre le rapport  $D_{1e}/D_2$  et le nombre de tours spécifique  $nq$  :

$$\frac{D_{1e}}{D_2} = 0,25 + 0,00853 \cdot nq - 0,0000541 nq^2 + 2,39 \cdot 10^{-7} nq^3 - 4,48 \cdot 10^{-10} nq^4 \quad (20)$$

Cette relation complexe est interprétée par l'abaque 6.

### 1.2.41. Coefficient de défaut de puissance :

Le coefficient de défaut de puissance est d'après PFLEIDERER caractérisé par le nombre d'aube N et par la nature de l'écoulement,

## II. CALCUL DES DIMENSIONS PRINCIPALES

il est donné par la formule suivante :

$$\lambda = \frac{N}{N+e} \quad (21)$$

avec :

$N$  : nombre d'aube

$e$  : caractéristique de l'écoulement, il est tel que :

$$e = \psi' \cdot a \quad (\alpha)$$

où :

$$\psi' = 0,6 + 0,6 \cdot \sin \beta_{200} \quad (\beta)$$

$$a = \frac{r_2^2}{S} \quad (\gamma)$$

ici, l'angle  $\beta_{200}$  est donné par l'équation (19) ;

$r_2$  : le rayon à la sortie de la roue (comme le montre la figure ci-contre) ;

$S$  : le moment statique de la ligne de courant moyenne par rapport à l'axe de la roue ; il est donné par l'intégrale suivante :

$$S = \int_{r_{1e}}^{r_2} r \cdot dm \quad (\delta)$$

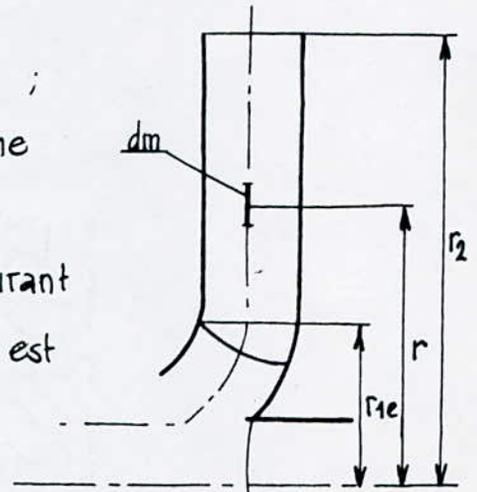


fig 2

Du moment que le nombre de tours spécifique est compris entre 10 et 40, la roue est donc à passage radiale, ce qui permet d'écrire :

$$dm = dr \quad (\epsilon)$$

Ainsi l'équation (8) prend la forme :

$$S = \int_{r_{1e}}^{r_2} r \cdot dr = \frac{1}{2} r^2 \Big|_{r_{1e}}^{r_2} = \frac{1}{2} (r_2^2 - r_{1e}^2) = \frac{r_2^2}{2} \left( 1 - \frac{r_{1e}^2}{r_2^2} \right) \quad (\zeta)$$

Par suite l'équation (8) devient :

$$a = \frac{r_2^2}{\frac{r_2^2}{2} \left( 1 - \frac{r_{1e}^2}{r_2^2} \right)} = \frac{2}{1 - \frac{r_{1e}^2}{r_2^2}}$$

ou encore :

$$a = \frac{2}{1 - (D_{1e}/D_2)} \quad (\eta)$$

## II. CALCUL DES DIMENSIONS PRINCIPALES

En vertu des relations  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  et  $(\eta)$  ; l'équation (21) devient :

$$\lambda = \frac{N}{N + (0,6 + 0,6 \sin \beta_{200}) \cdot \frac{2}{1 - \left(\frac{D_{1e}}{D_2}\right)^2}} \quad (20)$$

La relation (20) est une forme générale du coefficient de défaut de puissance  $\lambda$ , où les paramètres  $N$ ,  $\beta_{200}$  et  $D_{1e}/D_2$  sont respectivement donnés par les équations (16), (19) et (20).

### 1.2.51. Coefficient de pression et de débit :

Le coefficient de pression ou de hauteur est défini par le biais de l'analyse addimensionnelle comme suit :

$$\psi = \frac{2gH}{u_2^2} \quad (21)$$

Le coefficient de débit est utilisé comme une constante de tracé caractérisant le débit ; il est défini par :

$$\varphi = \eta_v \cdot [m_2 / u_2] \quad (22)$$

où le rapport  $[m_2 / u_2]$  est appelé coefficient de débit théorique :

$$\varphi_{th} = [m_2 / u_2] \quad (23)$$

La vitesse périphérique  $u_2$  étant inconnue ; il faudra donc trouver une autre forme où le coefficient de débit  $\varphi$  s'exprime en fonction des paramètres déjà calculés. Pour ce faire, il faut considérer l'équation d'EULER (1, I, 13) ; c'est-à-dire on suppose que le liquide arrive sans prérotation :

$$H_{th} = u_2^2 / g \quad (24)$$

L'équation (1, I, 15) permet d'écrire :

$$H_{th} = \lambda \cdot H_{th0} ;$$

ou encore :

$$[u_2] = \lambda \cdot [u_{200}] \quad (25)$$

ainsi, l'équation (k) prend la forme :

$$H_{th} = \lambda \cdot C_{u2\infty} \cdot u_2 / g \quad (\mu)$$

le triangle des vitesses (1, I, FIG 2) nous permet de déduire :

$$\operatorname{tg} \beta_{2\infty} = \frac{C_{m2}}{u_2 - C_{u2}} \quad ; \quad \text{d'où} : \quad C_{u2\infty} = u_2 - \frac{C_{m2}}{\operatorname{tg} \beta_{2\infty}} \quad (\nu)$$

compte tenu de (ν) ; la relation (μ) devient :

$$H_{th} = \lambda \frac{u_2}{g} \left( u_2 - \frac{C_{m2}}{\operatorname{tg} \beta_{2\infty}} \right)$$

D'autre part, la hauteur d'élevation H est telle que :

$$H = \eta_h H_{th} \quad ; \quad \text{d'où} :$$

$$H = \eta_h \cdot \lambda \frac{u_2}{g} \left( u_2 - \frac{C_{m2}}{\operatorname{tg} \beta_{2\infty}} \right) \quad (\xi)$$

Multipliant les deux membres de l'équation (ξ) par  $\frac{2g}{u_2^2}$  ; il vient :

$$\frac{2gH}{u_2^2} = 2\lambda \eta_h \cdot \frac{1}{u_2} \left( u_2 - \frac{C_{m2}}{\operatorname{tg} \beta_{2\infty}} \right)$$

Il se trouve que selon l'équation (2, I, 22) ; le terme  $2gH/u_2^2$ , n'est autre que le coefficient de pression  $\psi$  d'où :

$$\psi = 2\lambda \eta_h - 2\lambda \eta_h \cdot \frac{C_{m2}}{u_2 \cdot \operatorname{tg} \beta_{2\infty}} \quad (\theta)$$

selon l'équation (2, I, 23) ; on a :  $\frac{C_{m2}}{u_2} = \frac{\varphi}{\eta_v}$

Ainsi l'équation (θ) ; s'écrit autrement :

$$\psi = 2\lambda \eta_h - 2\lambda \eta_h \frac{\varphi}{\eta_v \cdot \operatorname{tg} \beta_{2\infty}} \quad (\text{I})$$

D'autre part ; vue la relation (2, I, 17) de A.J. STEPANOFF on a :

$$C_{m2}^2 = K_{cm2}^2 \cdot 2gH$$

## II. CALCUL DES DIMENSIONS PRINCIPALES

d'où :

$$\Psi = \frac{2gH}{u_2^2} = \frac{\Gamma m^2}{u_2^2 \cdot K cm^2} = \frac{\varphi^2}{\eta_v^2 \cdot K cm^2} \dots \dots \dots (9)$$

En identifiant les relations (9) et (8), on aura :

$$2\lambda \eta_h - \frac{2\lambda \eta_h \varphi}{\eta_v \cdot \text{tg } \beta_{200}} = \frac{\varphi^2}{\eta_v^2 \cdot K cm^2}$$

on obtient finalement une equation du second degré :

$$\varphi^2 + \frac{2\lambda \eta_h \eta_v K cm^2}{\text{tg } \beta_{200}} \varphi - 2\lambda \eta_h^2 \eta_v^2 K cm^2 = 0 \dots (10)$$

Soit :

$$A = 2\lambda \eta_h \eta_v K cm^2 \dots \dots \dots (11)$$

D'où :

$$\varphi^2 + \frac{A}{\text{tg } \beta_{200}} \varphi - A \eta_v = 0$$

Les racines seront donc :

$$\varphi = -\frac{A}{2 \text{tg } \beta_{200}} \pm \sqrt{\left(\frac{A}{2 \text{tg } \beta_{200}}\right)^2 + A \eta_v}$$

Soit :

$$B = \frac{A}{2} = \lambda \eta_h \eta_v K cm^2 \quad ; \quad \text{on aura :}$$

$$\varphi = -\frac{B}{\text{tg } \beta_{200}} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{\text{tg } \beta_{200}}\right)^2 + 2B \eta_v}$$

la valeur de l'expression sous radical doit être prise avec son signe positif, sans quoi le coefficient de débit " $\varphi$ " serait négatif :

$$\varphi = -\frac{B}{\text{tg } \beta_{200}} + \sqrt{\left(\frac{B}{\text{tg } \beta_{200}}\right)^2 + 2B \eta_v} \dots \dots (24)$$

avec :

$$B = \lambda \eta_h \eta_v K cm^2$$

Ainsi, le coefficient de débit " $\varphi$ " est calculé à partir de la formule (24),

où les paramètres  $\eta_v$ ,  $\eta_h$ ,  $K_{m2}$ ,  $\beta_{2\infty}$  et  $\lambda$  sont respectivement donnés par les relations (1) ou (5), (6), (18), (19) et (21).

### 1.2.61. Vitesse périphérique à la sortie :

Compte tenu de la relation (2, I, 23), la vitesse périphérique à la sortie se calcul par le biais de la formule suivante :

$$u_2 = \frac{\eta_v C_{m2}}{\varphi} \quad \dots \quad (25)$$

ici  $\eta_v$ ,  $C_{m2}$  et  $\varphi$  sont respectivement donnés par les formules (1), (17) et (24).

### 1.2.71. Diamètre extérieur de la roue :

Sachant que la vitesse périphérique à la sortie est telle que :

$$u_2 = \pi D_2 n / 60 \quad ; \quad \text{il en résulte :}$$

$$D_2 = \frac{60 \cdot u_2}{\pi \cdot n} \quad \dots \quad (26)$$

Ainsi, le diamètre extérieur de la roue est calculé à partir de la formule (26).

### 1.2.81. Angle d'aube à la sortie :

D'après le triangle des vitesses (Fig 1, I, 26), on peut écrire :

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{C_{m2}}{u_2 - C_{u2}}$$

où la vitesse  $C_{u2}$  (composante périphérique de la vitesse absolue  $\vec{c}$ ) est donnée, d'après l'équation d'EULER (1, I, 13), par :

$$C_{u2} = g H_{th} / u_2$$

En définitive, l'angle d'aube à la sortie est donné par la formule

ci-après :

$$\beta_2 = \text{Arctg} \left( \frac{C_{m2}}{u_2 - \frac{g H_{th}}{u_2}} \right) \quad \dots \quad (27)$$

où ;  $H_{th}$  ,  $C_{m2}$  et  $u_2$  sont respectivement donnés par les relations (9) , (17) et (25) .

1.2.91. Largeur à la sortie :

Le nombre de tours spécifique est selon (1, I, 9) :

$$nq = n \cdot Q^{1/2} \cdot H^{-3/4} \quad \dots \quad (v)$$

où, le nombre de tours  $n$  est d'après l'équation (26) :

$$n = 60 \cdot u_2 / \pi \cdot D_2 \quad \dots \quad (w)$$

la hauteur  $H$  est déduite de l'équation (22) :

$$H = \frac{\psi \cdot u_2^2}{2g} \quad \dots \quad (x)$$

D'autre part , selon l'équation (2, I, 10) on a :

$$Q = \eta_v Q_i = \eta_v (\pi D_2 b_2 C_{m2} \psi_2)$$

Compte tenu de l'équation (2, I, 25) :  $\eta_v C_{m2} = \varphi \cdot u_2$  ; il vient :

$$Q = \pi D_2 b_2 \varphi u_2 \psi_2 \quad \dots \quad (y)$$

En substituant aux termes appropriés de l'équation (v) , les relations (w) , (x) et (y) , on obtient :

$$nq = \frac{60 \cdot u_2}{\pi D_2} \cdot (\pi D_2 b_2 \varphi u_2 \psi_2)^{1/2} \cdot \left( \psi \cdot \frac{u_2^2}{2g} \right)^{-3/4}$$

Après développement , les termes en  $u_2$  disparaissent , et en bloquant toutes les constantes on aura :

$$nq = \frac{60 \cdot \pi^{1/2}}{\pi (2g)^{-3/4}} \cdot D_2^{-1} (D_2 b_2 \varphi \psi_2)^{1/2} \cdot \psi^{-3/4}$$

## II. CALCUL DES DIMENSIONS PRINCIPALES

ou encore :

$$nq = 315,57 \cdot \frac{(b_2 \psi \psi_2)^{1/2}}{D_2^{1/2} \psi^{3/4}} \quad d'nu$$

$$nq^2 = (315,57)^2 \cdot \frac{b_2 \psi \psi_2}{D_2 \psi^{3/2}}$$

finalement la largeur à la sortie sera :

$$b_2 = \frac{nq^2 \cdot D_2 \cdot \psi^{3/2}}{315,57^2 \cdot \psi \psi_2} \quad (28)$$

où,  $\psi$  est donné par l'équation (2, I, 22) ;

$b_2$  est exprimé en mètre ;

$D_2$  est exprimé en mètre

À part le coefficient de rétrécissement  $\psi_2$ , tous les termes de l'équation (28) sont connus, ainsi pour pouvoir calculer la largeur à la sortie, il faudra connaître  $\psi_2$ . Pour ce faire, un calcul itératif s'impose, en procédant comme suit :

- On prend une valeur arbitraire du coefficient de rétrécissement  $\psi_2$  située dans la fourchette  $[0,90 ; 0,95]$  ;
- On calcule la largeur  $b_2$  conformément à la relation (28) ;
- En utilisant la relation ( $\psi$ ), on peut calculer  $\psi_2$  :

$$\psi_{2c} = \frac{Q}{\pi D_2 b_2 \psi \psi_2}$$

ici, l'indice "c" signifie la valeur calculée ;

- On procède au test :

si  $\left| \frac{\psi_{2c} - \psi_2}{\psi_{2c}} \right|$  est inférieur à la précision voulue alors on

accepte  $\psi_2$  et la largeur  $b_2$  calculée par la relation (28). Dans le

## II. CALCUL DES DIMENSIONS PRINCIPALES

cas contraire, on attribue à  $\psi_2$  la valeur calculée  $\psi_{2c}$  et on refait les calculs jusqu'à obtention de la précision voulue.

### 1.2.101. Calcul de l'épaisseur de l'aube :

Compte tenu de l'équation (1, I, omicron, 0<sup>o</sup>) , le pas est tel que :

$$t_2 = \frac{\pi D_2}{N} \quad ; \quad \text{avec } D_2 \text{ en [m] et } t_2 \text{ en [m].}$$

La longueur d'arc est donnée, en vertu de l'équation (1, I, 16), par la relation :

$$\sigma_2 = t_2 (1 - \psi_2) \quad ; \quad t_2 \text{ et } \sigma_2 \text{ sont en mètres.}$$

Finalement, l'épaisseur de l'aube est, d'après l'équation (1, I, v), égale à :

$$s = \sigma_2 \cdot \sin \beta_2 \quad \dots \dots \dots (29)$$

où l'épaisseur  $s$ , exprimée par la relation (29) ; sera normalisée, c'est-à-dire estimée au chiffre rond.

### I.31. PARAMETRES D'ENTRÉE :

Les paramètres d'entrée sont :

#### 1.3.11. Diamètre de l'arbre :

Le dimensionnement de l'arbre se fait de telle façon que ce dernier résiste aux efforts appliqués sur lui ; donc le calcul du diamètre de l'arbre se fait du point de vue résistance.

Admettant en premier temps que la puissance totale " $P_t$ " est l'unique charge appliquée. Dans ce cas le diamètre de l'arbre sera :

$$d'_0 = 13,3 \sqrt[3]{\frac{P_t}{n}} \quad \dots \dots \dots (w)$$

## II. CALCUL DES DIMENSIONS PRINCIPALES

avec :  $P_t$  en [KW] ,  $n$  en [trs/mn] et  $d_0$  en [cm] .

En deuxième temps , le diamètre de l'arbre  $d$  est fonction du matériau ;

on a :

$$d_0 = a \cdot d_0$$

où ;  $a$  : est le coefficient du matériau ; il est pris égal à 1 pour le cas de l'acier ( ce qui est le cas du matériau de notre arbre , comme on le verra dans la partie 3 ) , d'où :

$$d_0 = d_0$$

Lors de la construction , la roue étant soumise à une force radiale

$\vec{R}$  , une force axiale  $\vec{A}$  et une force

$\vec{F}_e$  due à l'excentricité  $e$  ( voir figure 3 ci-contre ) . Il en résulte

par l'application de ces forces une augmentation de l'effort appliqué sur

l'arbre , qui se traduit par une augmentation

de 20 à 30% de la valeur de la puissance totale

$P_t$  . Donc en définitive le diamètre de l'arbre

devient :

$$d = (1,2 - 1,3) d_0 \quad ; \quad \text{Soit en moyenne :}$$

$$d = 1,25 d_0$$

ou encore en vertu de l'équation (w) :

$$d = \frac{10,015}{1,25} \sqrt{\frac{P_t}{n}} \quad \dots \dots \dots (30)$$

où ;  $d$  est en [cm] ;  $P_t$  en [KW] et  $n$  en [trs/mn] .

Donc le diamètre de l'arbre est calculé à partir de l'équation (30) ; il sera normalisé dans la partie 3 plus bas .

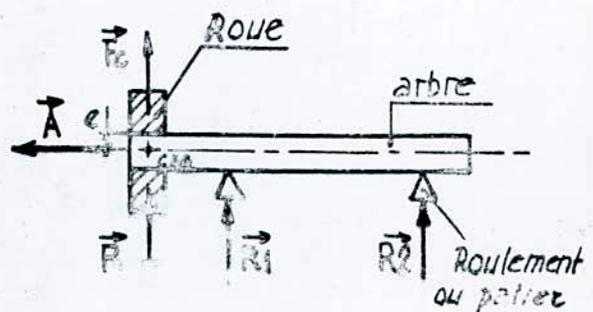


fig 3

## 1.3.21. Diamètre du moyeu :

La forme du moyeu dépend principalement du mode d'accouplement de la roue avec l'arbre. Dans le cas du présent mémoire ; l'accouplement se fait par le biais d'une clavette. Le diamètre du moyeu est donc fonction de la hauteur de clavette, on prévoit généralement 30 à 40% du diamètre de l'arbre comme espace réservé pour la clavette, plus exactement 34% pour ce qui est de notre cas (voir éventuellement la 3<sup>ème</sup> partie), ce qui conduit à écrire :

$$d_e = 1,34 \cdot d \quad \dots \quad (31)$$

où ;  
 $d_e$  : diamètre du moyeu en [cm]  
 $d$  : diamètre de l'arbre calculé par le biais de l'équation (30) et exprimé en [cm].

## 1.3.31. La vitesse méridienne à l'entrée :

La vitesse méridienne à l'entrée est selon A.J. STEPANOFF :

$$C_{m1} = K_{cm1} \sqrt{2gH} \quad \dots \quad (32)$$

où ;  $C_{m1}$  est en [m/s],  $H$  en [m] et  $g$  en [m/s<sup>2</sup>].

$K_{cm1}$  : étant le coefficient de la vitesse méridienne à l'entrée, il nous est fourni par l'abaque 4 en fonction du nombre de tours spécifique. pour  $nq=25$  on a :

$$K_{cm1} = K_{cm2} + 0,0476 = 0,02 nq^{5/10} + 0,0476 \quad \dots \quad (33)$$

## 1.3.41. Vitesse et diamètre d'entrée :

Par définition, la vitesse d'entrée,  $C_e$  est :

$$C_e = \varepsilon \sqrt{2gH} \quad \dots \quad (34)$$

## II. CALCUL DES DIMENSIONS PRINCIPALES

qui correspond à un diamètre d'entrée :

$$D_e = \sqrt{\frac{HQ}{\pi C_e \eta_v} + d_e^2} \quad (35)$$

avec  $\epsilon$  : coefficient de la vitesse d'entrée, pris ; pour une première approximation ; égal à :

$$\epsilon_a = 0,0188 \cdot nq^{2/3} \quad (36)$$

D'après les expériences, ce coefficient " $\epsilon$ " dépend du meilleur rendement et du meilleur point de fonctionnement du point de vue cavitation (voir FIG 4).

Il est pris donc comme une moyenne de  $\epsilon_\eta$  et  $\epsilon_r$  qui sont respectivement les coefficients de la vitesse d'entrée du point de vue rendement et cavitation, on a donc :

$$\epsilon_c = \frac{\epsilon_\eta + \epsilon_r}{2} \quad (37)$$

$\epsilon_\eta$  et  $\epsilon_r$  sont donnés par les formules empiriques suivantes :

$$\epsilon_\eta = \frac{1}{36,8} \left[ \frac{K_1^6}{K_0} \left( 1 - \frac{K_0}{2} \right) \right]^{1/3} \cdot nq^{2/3}$$

$$\epsilon_r = \frac{1}{36,8} \left[ \frac{1}{K_0 \left( \frac{1}{K_1^2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)} \right]^{1/3} \cdot nq^{2/3}$$

où,  $\lambda_1 = 0,3$  ;  $\lambda_2 = 1,2$

$K_0$  : coefficient caractérisant la nature de la pompe ; il est donné par la formule :

$$K_0 = 1 - \left( \frac{d_e}{D_e} \right)^2$$

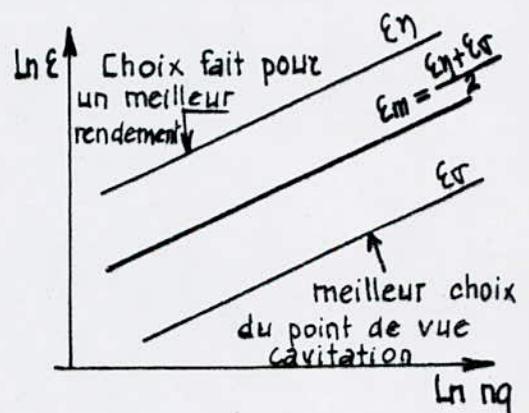


fig 4

## II. CALCUL DES DIMENSIONS PRINCIPALES

$K_1$  : rapport entre les vitesses " $C_e$ " et " $C_{m1}$ ", c'est-à-dire :

$$K_1 = \frac{C_e}{C_{m1}} = \frac{\varepsilon}{K \cos \alpha}$$

Pour le calcul précis de " $C_e$ " et " $D_e$ ", on procède comme suit :

- On calcule  $E_a$  et  $D_e$  par le biais des équations (34) et (35) pour la valeur approximative de  $E_a$  donnée par la relation (36) ;
- On calcule le coefficient de la vitesse d'entrée  $\varepsilon_e$  selon (37) tout en utilisant les valeurs de  $C_e$  et  $D_e$  déjà trouvées.
- On compare  $E_a$  et  $E_c$  :
- o Si l'écart entre  $E_a$  et  $E_c$  est grand, on attribue au coefficient de la vitesse d'entrée la valeur  $E_c$  et on recalcule  $C_e$ ,  $D_e$  et  $\varepsilon$ , jusqu'à obtention de la précision voulue.
- o Si l'écart entre  $E_a$  et  $E_c$  est petit, ce qui est généralement le cas, on considère comme coefficient de la vitesse d'entrée, la moyenne de  $E_a$  et  $E_c$  :

$$\varepsilon = \frac{E_a + E_c}{2}$$

Une fois l'essai de précision du coefficient  $\varepsilon$  est achevé, la vitesse d'entrée  $C_e$  ainsi que le diamètre d'entrée  $D_e$  seront directement calculés par les relations (34) et (35).

### 1.3.51. Les autres paramètres d'entrée :

Avant calculé le rapport  $D_e/D_2$  et le diamètre  $D_2$ , on peut déduire directement la valeur du diamètre extérieur à l'entrée par :

$$D_{4e} = D_2 \cdot \frac{D_{1e}}{D_1} \quad \dots \quad (38)$$

L'angle d'inclinaison à l'entrée de la coupe méridienne est donné

## II. CALCUL DES DIMENSIONS PRINCIPALES

par la formule :

$$\alpha = \frac{n_2 - 15}{2} + 45 \quad \dots \dots \dots (39)$$

le calcul de la largeur et du diamètre à l'entrée, ainsi que tous les paramètres d'entrée restants, se fait par voie itérative comme suit :

- D'après EXIBERE, le meilleur rapport entre les deux diamètres  $D_{1i}$  et  $D_{1e}$  est 0,4, on aura donc pour une première estimation, le diamètre intérieur à l'entrée donné par :

$$D_{1i} = 0,4 \cdot D_{1e} \quad \dots \dots \dots (40)$$

- On calcule le diamètre  $D_1$  à l'entrée de la roue comme étant la moyenne de  $D_{1i}$  et  $D_{1e}$  c'est-à-dire :

$$D_1 = \frac{D_{1i} + D_{1e}}{2} \quad \dots \dots \dots (41)$$

la largeur  $b_1$  à l'entrée est formulé par :

$$b_1 = \frac{D_{1e} - D_{1i}}{2 \sin \alpha}$$

vue que le débit interne est donné par :

$$Q_i = \pi D_1 b_1 C_{m1} \psi_1 ;$$

Il en résulte que le coefficient de rétrécissement à l'entrée sera donné par :

$$\psi_1 = \frac{Q_i}{\pi D_1 b_1 C_{m1}}$$

On calcule la vitesse périphérique à l'entrée comme suit :

$$u_1 = \frac{\pi D_1 n}{60} \quad \dots \dots \dots (42)$$

L'angle  $\beta_1$  à l'entrée est donné par la relation :

$$\beta_1 = \arctg \left[ \left( 1,25 - \frac{n_1 - 10}{30} \right) \cdot \frac{C_{m1}}{u_1} \right] \dots (42)$$

- On recalcule le coefficient  $\psi_1$  par le biais de l'équation (1, I, 16) c'est-à-dire :

$$\psi_{1c} = \frac{t_1 - \sigma_1}{t_1}$$

ou encore :

$$\psi_{1c} = \left( \frac{\pi D_1}{\kappa} - \frac{s}{\sin \beta_1} \right) \cdot \frac{N}{\pi D_1} \dots (43')$$

- On procède au test :

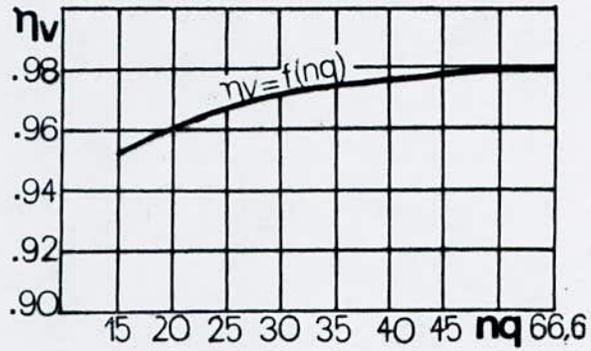
• Si  $\psi_1 \approx \psi_{1c}$  alors on accepte tous les paramètres d'entrée calculés.

• Si l'écart entre  $\psi_1$  et  $\psi_{1c}$  est grand, on attribue à  $\psi_1$  la valeur  $\psi_{1c}$  et on recalcule  $b_1$  telle que :

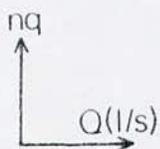
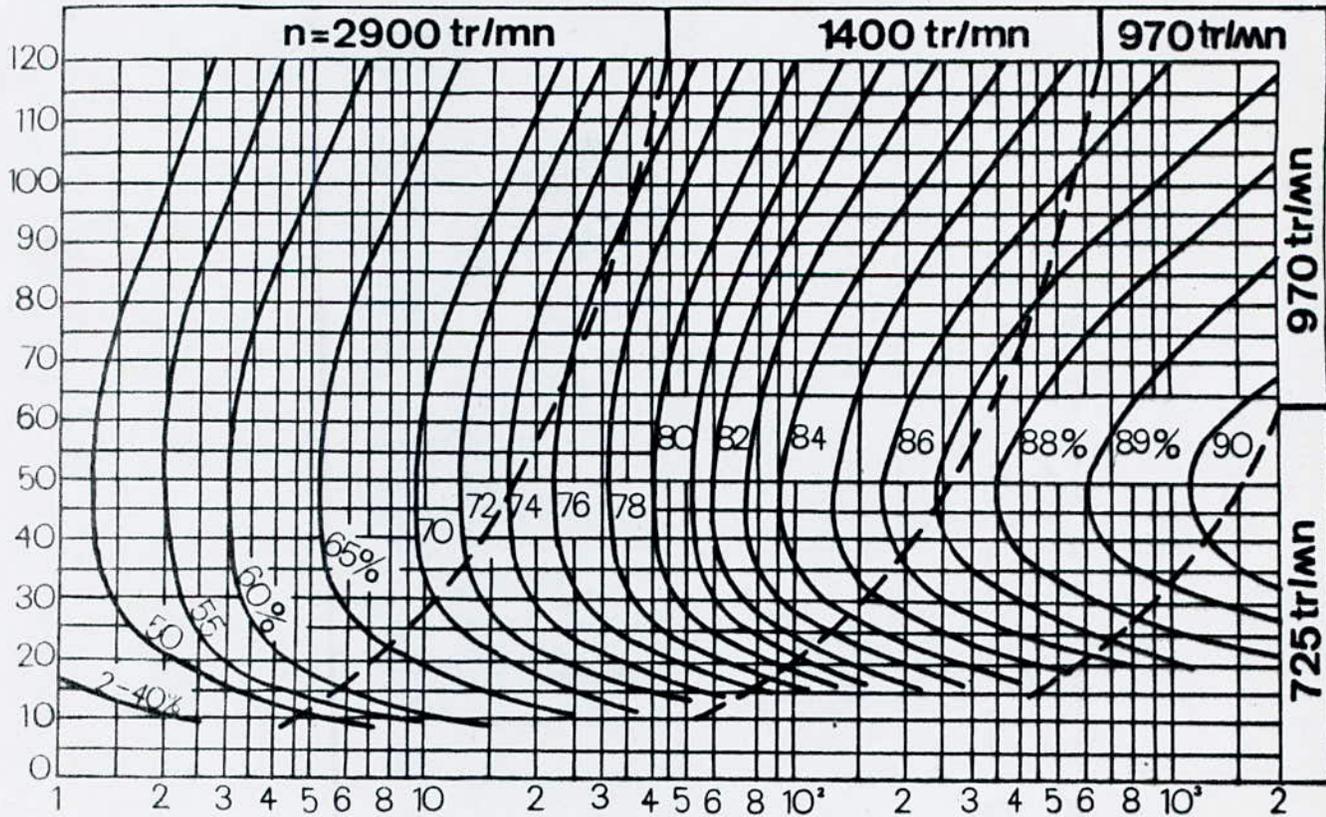
$$b_1 = \frac{Q_i}{\pi \cdot D_1 \cdot C_{m1} \cdot \psi_1} \dots (44)$$

On recalcule aussi  $u_1$ ,  $\beta_1$  et  $\psi_{1c}$  respectivement par le biais des équations (42), (43) et (43') jusqu'à obtention de la précision voulue.

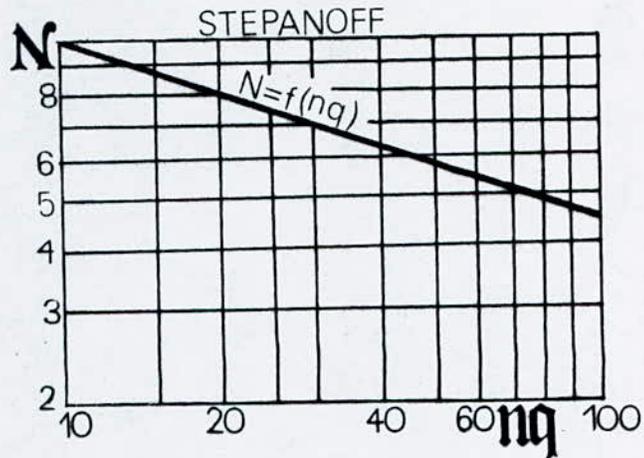
Nb : Les résultats trouvés (voir listing résultats) seront retenus pour la détermination de la coupe méridienne qui fera l'objet du chapitre suivant.



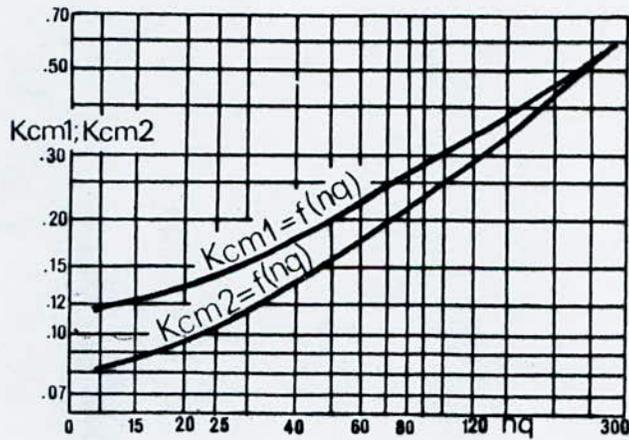
Abaque 1: Rendement volumétrique  $\eta_v$  en fonction du nombre de tours spécifique  $n_q$



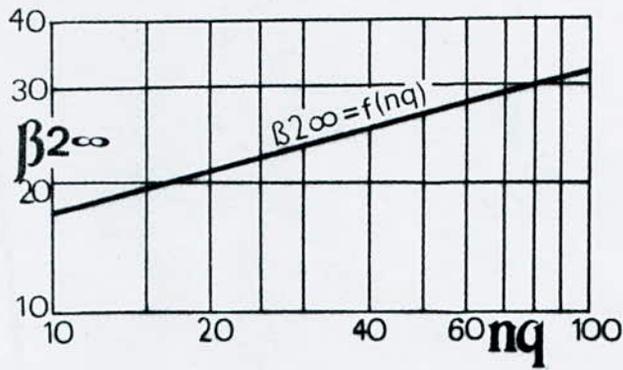
Abaque 2: Diagramme de HAJDU  
(Rendement standard)



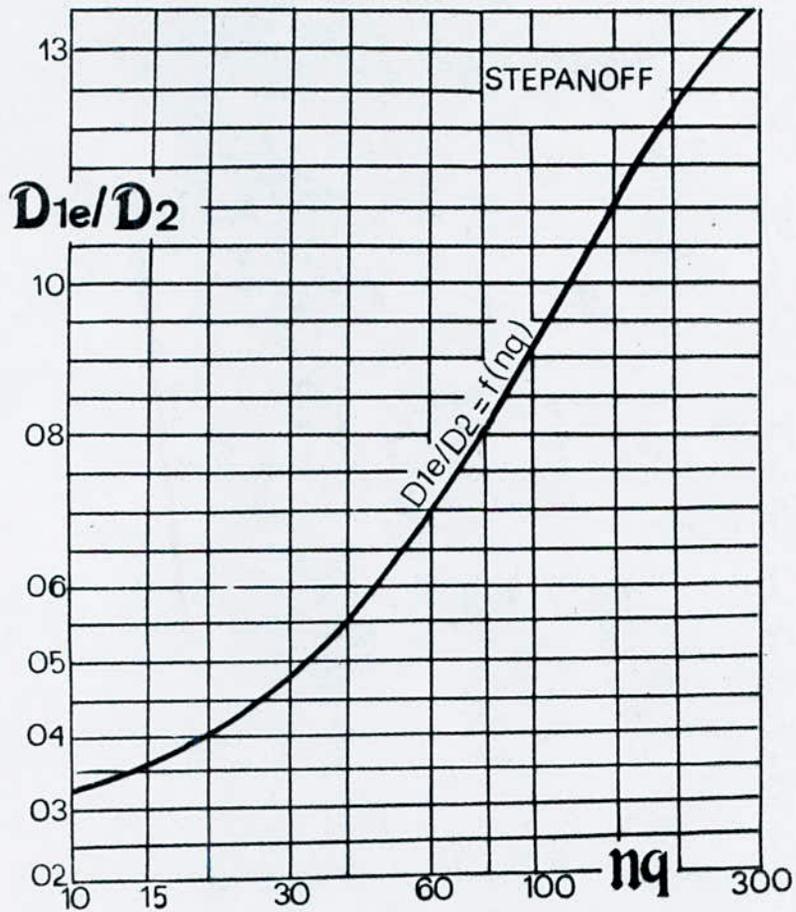
Abaque 3: Nombre d'aubes  $N$  en fonction du nombre de tours spécifique  $nq$



Abaque 4: Coefficients des vitesses méridiennes  $K_{cm1}$  et  $K_{cm2}$  en fonction du nombre de tours spécifique  $nq$



Abaque 5: Angle à la sortie à nombre d'aubes infini  $\beta_{2\infty}$  en fonction du nombre de tours spécifique  $nq$



Abaque 6: Rapport des diamètres  $D_{1e}/D_2$  en fonction du nombre de tours spécifique  $nq$

**CHAPITRE II : DETERMINATION DE LA COUPE MERIDIENNE**

1.1. HYPOTHESES :

La coupe méridienne (ou profil de la roue) peut être construite en supposant ; pour une première approximation ; que la vitesse méridienne  $C_m$  varie graduellement en fonction du diamètre  $D$ , comme le montre la figure 1.

Ainsi pour un diamètre  $D$  quelconque variant entre  $D_1$  et  $D_2$ , la vitesse méridienne correspondante peut être formulée par interpolation comme suit :

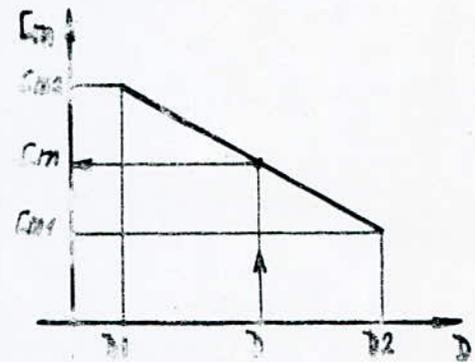


fig 1

$$C_m = C_{m1} - \frac{(C_{m2} - C_{m1})(D_2 - D)}{(D_2 - D_1)} \quad (1)$$

Il en est de même pour l'angle d'aube  $\beta$  (voir figure 2) qui sera interprété par la formule suivante :

$$\beta = \beta_1 - \frac{(\beta_2 - \beta_1)(D_2 - D)}{(D_2 - D_1)} \quad (2)$$

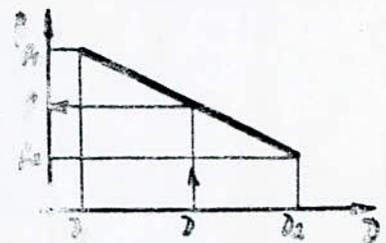


fig 2

les indices 1, 2,  $\beta$  correspondent respectivement à l'entrée et à la sortie de la roue.

1.2.1. Variation de la largeur  $b$  en fonction du diamètre  $D$  :

La largeur  $b$  de la roue est inversement proportionnelle au

### III. DÉTERMINATION DE LA COUPE MÉRIDIENNE

diamètre „D” correspondant, ceci se traduit par la formule suivante :

$$b = \frac{Q}{\eta_v \pi \gamma C_m} \cdot \frac{1}{D} \quad (3)$$

où; le coefficient de retrécissement  $\gamma$  est d'après le chapitre précédent :

$$\gamma = \left( \frac{\pi D}{N} - \frac{S}{\sin \beta} \right) \cdot \frac{N}{\pi D} \quad (4)$$

Avec; S : épaisseur d'aube en mètre ;

N : nombre d'aubes .

L'application des formules (1), (2), (3) et (4), permet de dresser un tableau de variation de  $\beta$ ,  $C_m$ ,  $\gamma$  et  $b$  en fonction de  $D$ , tout en affectant à ce dernier des valeurs variant de  $D_1$  à  $D_2$ .

$D \uparrow$	$\beta \downarrow$	$C_m \downarrow$	$\gamma \uparrow$	$b \downarrow$
--------------	--------------------	------------------	-------------------	----------------

En faisant varier  $D$  de 5 mm, on obtient les résultats figurant sur listing.

#### 1.31. EQUATION DES FLASQUES DU PROFIL :

Les deux flasques avant et arrière du profil doivent, en n'importe quel diamètre  $D$ , être tangents aux cercles de diamètres  $b$ . En considérant pour une première approche que le flasque arrière est vertical, c'est-à-dire perpendiculaire à l'axe de la roue. On peut ainsi déterminer l'équation du flasque avant sous forme de coordonnées cartésiennes  $(X, Y)$  comme suit :

Soient deux cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}_0$  consécutifs et une tangente  $T$  commune aux deux cercles (voir figure 3).

le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $w(b/2, D/2)$  et de rayon  $b/2$  a pour équation dans le repère  $XOY$  :

$$(X - b/2)^2 + (Y - D/2)^2 = (b/2)^2 \quad (5)$$

## II. DETERMINATION DE LA COUPE MERIDIENNE

L'équation de la tangente T est telle que :

$$\vec{\omega M} \cdot \vec{MM_0} = 0$$

Avec :

$$\vec{\omega M} \begin{cases} x - b/2 \\ Y - D/2 \end{cases}$$

$$\vec{MM_0} \begin{cases} x - x_0 \\ Y - Y_0 \end{cases}$$

Le produit scalaire  $\vec{\omega M} \cdot \vec{MM_0}$  devient donc :

$$(x - b/2)(x - x_0) + (Y - D/2)(Y - Y_0) = 0 \quad (6)$$

Les équations (5) et (6) contribuent à former le système suivant :

$$\begin{cases} (x - b/2)^2 + (Y - D/2)^2 = (b/2)^2 \\ (x - b/2)(x - x_0) + (Y - D/2)(Y - Y_0) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Par le biais d'une substitution, on peut à partir du système (7) déterminer les coordonnées cartésiennes du flasque avant en prenant comme le point de départ, le point :

$$\begin{cases} x_0 = b/2 \\ Y_0 = D/2 \end{cases}$$

Nb: voir programme et résultats sur listing

### 1.41. TRACÉ DE LA COUPE MERIDIENNE :

Le flasque avant tracé en considérant les résultats précédemment trouvés, c'est-à-dire les coordonnées cartésiennes (x, Y), sera prolongé

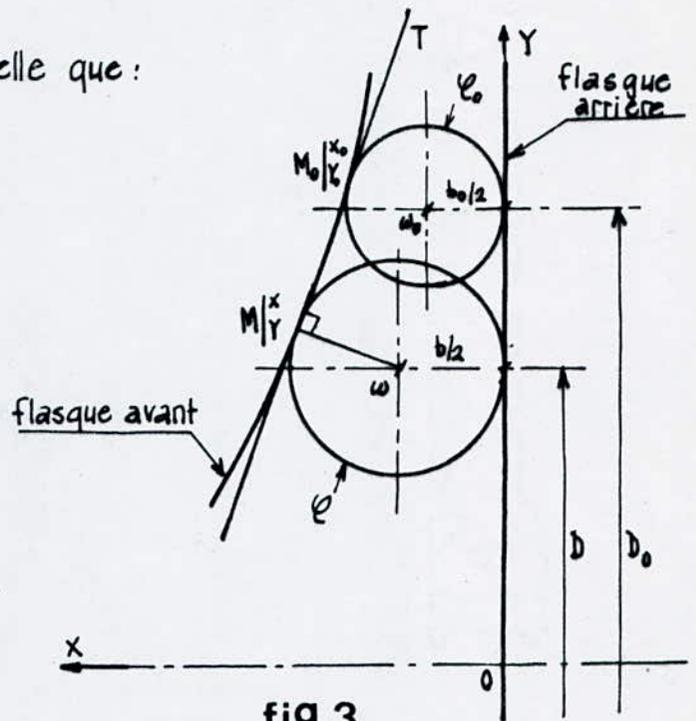


fig 3

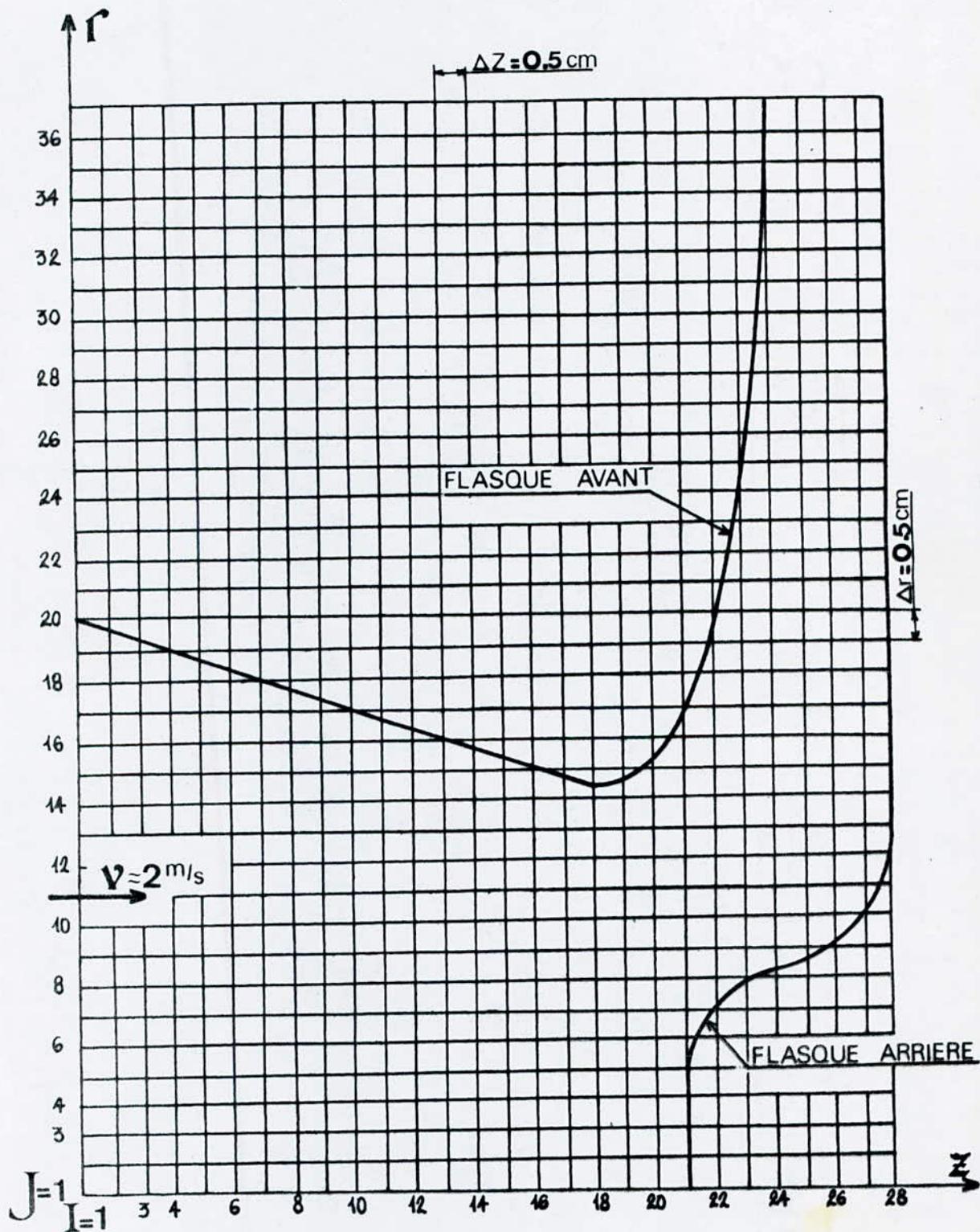
en amont par un convergent de telle sorte qu'à l'entrée de ce dernier, l'eau adhère une vitesse de l'ordre de 1 à 2 m/s. Quant au flasque arrière, il épousera à partir du diamètre d'entrée  $D_1$ , la forme du quart de cercle de rayon  $b_1/2$ , après quoi il sera approché par une verticale.

En tenant compte de toutes ces considérations, on peut finalement représenter à l'échelle 1/1 la coupe méridienne de la roue (voir la figure 4).

La coupe méridienne ainsi tracée ne sera jugée conforme que lorsqu'on trace les lignes de courants ainsi que les aubes de la roue et en analysant la répartition des vitesses le long des lignes de courant et celle de l'énergie cinétique le long des aubes. Ceci fera l'objet des deux chapitres suivants.

# COUPE MERIDIENNE ORIGINALE

(Echelle 1/1)



- fig 4 -

CHAPITRE III : ETUDE DE  
L'ÉCOULEMENT MÉRIDIEN

3.1. INTRODUCTION :

Comme on l'a évoqué précédemment, on doit étudier l'écoulement à travers le profil de la roue (FIG 2, II, 4). Le tracé des lignes de courants ainsi que la détermination de leurs caractéristiques feront l'objet de cette étude. Les méthodes développées pour ce fait se basent essentiellement sur les transformations des équations différentielles partielles qui elles-même constituent l'une des rapides branches développées de l'analyse numérique. Les domaines d'application pour lesquels les équations différentielles s'opèrent (physiques nucléaire, hydraulique, aérodynamique, ...) sont plus vaste surtout par l'utilisation des récents ordinateurs.

3.2. ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES :

La définition classique de la dérivée d'une fonction à une seule variable est :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

Dans un computer digital ; on ne peut pas prendre les limites, on peut cependant considérer la somme (l'erreur comise sera négligable lorsque le processus est continu, c'est-à-dire lorsque  $\Delta x$  est infiniment petit); pour ce faire, il faudra remplacer les dérivées par les équations aux différences finies et considérez par le fait deux variables indépendantes.

Rappelons que la série de TAYLOR pour la fonction de courant  $\psi(x, y)$

au point  $(x_0, y_0)$  (ici on prend le cas où la différence se fait dans la seule direction  $x$ ) s'écrit comme suit :

$$\psi(x, y_0) = \psi(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(\xi, y_0)$$

où,  $\xi$  est compris entre  $x$  et  $x_0$ . Si maintenant on pose  $x = x_0 + \Delta x$  ; on obtient après certains arrangements :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\psi(x_0 + \Delta x, y_0) - \psi(x_0, y_0)}{\Delta x} = - \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(\xi, y_0)$$

Dans un autre contexte si on approxime  $\partial \psi / \partial x$  par :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\psi(x_0 + \Delta x, y_0) - \psi(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

Alors l'erreur comise sera :

$$E_T = - \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(\xi, y_0) \quad \text{avec} \quad x_0 \leq \xi \leq x_0 + \Delta x$$

L'équation (1) est obtenue par la substitution  $x = x_0 + \Delta x$  dans la série de TAYLOR ; le résultat est appelé "Différence par avancée". On peut cependant obtenir une approximation appelée "Différence par reculée" en posant  $x = x_0 - \Delta x$ , le résultat sera :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\psi(x_0, y_0) - \psi(x_0 - \Delta x, y_0)}{\Delta x} \quad (2)$$

Il faudra maintenant faire une approximation de la dérivée seconde de  $\psi$ . La technique est d'écrire l'équation aux différences finies de  $\partial^2 \psi / \partial x^2$  en utilisant comme variable  $\partial \psi / \partial x$ , ainsi pour une différence par Avancée on aura :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0 + \Delta x, y_0) - \frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (3)$$

En se basant sur la formule (2), on peut écrire :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0 + \Delta x, y_0) = \frac{\psi(x_0 + \Delta x, y_0) - \psi(x_0, y_0)}{\Delta x} \dots (4)$$

En substituant (2) et (4) dans (3), on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\psi(x_0 + \Delta x, y_0) - 2\psi(x_0, y_0) + \psi(x_0 - \Delta x, y_0)}{(\Delta x)^2}} \dots (5)$$

L'erreur comise est :

$$E_T = -\frac{(\Delta x)^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4}(z, y_0) \quad \text{avec ; } x_0 - \Delta x \leq z \leq x_0 + \Delta x$$

Par analogie, on peut trouver la dérivée seconde de  $\psi$  par rapport à  $y$ , en considérant que le pas est  $\Delta y$ .

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \frac{\psi(x_0, y_0 + \Delta y) - 2\psi(x_0, y_0) + \psi(x_0, y_0 - \Delta y)}{(\Delta y)^2}} \dots (6)$$

L'erreur comise est dans ce cas :

$$E_T = -\frac{(\Delta y)^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4}(x_0, \eta) \quad \text{avec ; } y_0 - \Delta y \leq \eta \leq y_0 + \Delta y$$

D'autre part l'équation de continuité exprimant l'égalité de la variation de la masse du fluide dans un volume élémentaire et la différence des quantités de fluides entrantes et sortantes pendant un même laps de temps, s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad ; \text{ ou encore :}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) = 0$$

Pour un écoulement permanent où la masse volumique  $\rho$  en un point

### III. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT MÉRIDIEN

quelconque ne dépend pas du temps,  $\partial\psi/\partial t$  s'annule. Si en plus le liquide est incompressible, on aura en définitive :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

L'équation (7) ainsi écrite est vérifiée pour les conditions classiques de DIRICKLET suivantes :

$$\begin{cases} v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (8)$$

Le rotationnel pour un écoulement bidimensionnel  $(x, y)$  peut se formuler comme suit :

$$(\text{rot } \vec{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

En substituant (8) dans la formule précédente, on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -(\text{rot } \vec{v})_z} \quad (9)$$

L'équation (9) ainsi obtenue s'appelle "équation de POISSON"; elle s'écrit autrement :

$$\Delta \psi = -(\text{rot } \vec{v})_z \quad \text{ou encore } \nabla^2 \psi = -(\text{rot } \vec{v})_z$$

Il est à noter qu'un grand nombre de problèmes physiques est régi par l'équation de poisson et parmi lesquels le problème de l'écoulement méridien.

Pour un écoulement à potentiel de vitesse où le rotationnel est nul, l'équation (9) prend la forme suivante :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0} \quad (10)$$

L'équation (10) s'appelle "équation de LAPLACE", qui n'est autre qu'un cas particulier de l'équation de POISSON.

Les équations de POISSON et de LAPLACE comptent parmi les équations "ELLIPTIQUES" du fait qu'elles ont la forme :

$$\gamma \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = A \quad \text{et où } \gamma \text{ est positif } (\gamma = 1)$$

### 3.31. RESOLUTION DE L'EQUATION DE POISSON :

On considère dans un cas particulier un rectangle de largeur  $A$  et de hauteur  $B$  (voir figure 1). On divise la largeur  $A$  en " $n$ " intervalles et la hauteur  $B$  en " $m$ " intervalles. On obtient ainsi  $(n-1)(m-1)$  points

d'intersection (noeuds). On doit

écrire l'équation différentielle

dans chaque noeud et résoudre

ensuite le système résultant des

équations simultanées. Il faut

tout d'abord attribuer aux noeuds

des indices ; l'intersection de la  $i^{\text{ème}}$  colonne avec la  $j^{\text{ème}}$  ligne

donne un point noté  $P(i, j)$ . Si on prend comme origine le point

$(0, 0)$ , on peut formuler les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \psi_{i,0} = f_{i,0} & i = 0, 1, 2, \dots, n. \\ \psi_{i,m} = f_{i,m} & \dots \dots \dots (11) \\ \psi_{0,j} = t_{0,j} & j = 0, 1, 2, \dots, m \\ \psi_{n,j} = t_{n,j} & \dots \dots \dots \end{cases}$$

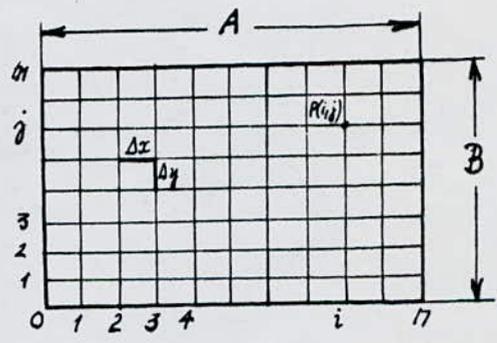


fig 1

En substituant aux termes appropriés de l'équation de poisson (9)

les relations données par (5) et (6), on obtient :

$$\frac{\psi(x_0 + \Delta x, y_0) - 2\psi(x_0, y_0) + \psi(x_0 - \Delta x, y_0)}{(\Delta x)^2} + \frac{\psi(x_0, y_0 + \Delta y) - 2\psi(x_0, y_0) + \psi(x_0, y_0 - \Delta y)}{(\Delta y)^2} = -(\text{rot } \vec{v})_z$$

Si on multiplie le tout par  $(\Delta y)^2$  et on pose :

$$\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad ; \quad \text{on obtient :}$$

$$\lambda^2 \psi(x_0 + \Delta x, y_0) - 2\lambda^2 \psi(x_0, y_0) + \lambda^2 \psi(x_0 - \Delta x, y_0) + \psi(x_0, y_0 + \Delta y) - 2\psi(x_0, y_0) + \psi(x_0, y_0 - \Delta y) = -(\Delta y)^2 (\text{rot } \vec{v})_z$$

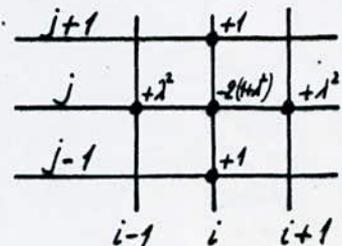
Si maintenant au lieu du couple  $(x_0, y_0)$  ; on utilise la notation  $(i, j)$  ; il vient :

$$\lambda^2 \psi_{i+1, j} + \lambda^2 \psi_{i-1, j} + \psi_{i, j+1} + \psi_{i, j-1} - 2(1 + \lambda^2) \psi_{i, j} = -(\Delta y)^2 (\text{rot } \vec{v})_z \quad \dots (12)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{et} \quad j = 1, 2, \dots, m-1)$$

On peut définir ainsi un système de  $(m-1)(n-1)$  équations linéaires algébriques à  $(m+1)(n+1)$  inconnues  $\psi_{i, j}$ . Les conditions aux limites (11) permettent d'éliminer  $2(m+n)$  inconnues, ainsi on aura un système de  $(m-1)(n-1)$  équations au même nombre d'inconnues, lequel peut être résolu par la méthode dite de relaxation, qui sera étudiée plus bas. En conséquence l'équation de POISSON est résoluble.

Pour n'importe quel point  $P(i, j)$ , on peut représenter le premier membre de l'équation (12) schématiquement par le tracé de 5 points (voir figure ci-contre), tout en affectant à chacun d'eux un coefficient. Le résultat est appelé "stencil de la méthode".



Pour  $\lambda=1$ , c'est-à-dire le cas où les pas selon  $x$  et  $y$  sont identiques ( $\Delta x = \Delta y$ ); l'équation (12) s'écrit autrement :

$$\Psi_{i,j} = \frac{1}{4} \left[ \Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1} + \Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j} + (\Delta y)^2 (\text{rot } \vec{v})_z \right] \quad \dots (13)$$

Pour un écoulement irrotationnel (Equation 10<sup>e</sup> de LAPLACE) on a :

$$\Psi_{i,j} = \frac{1}{4} \left[ \Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1} + \Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j} \right] \quad \dots \dots \dots (14)$$

L'équation (14) signifie que la valeur de la fonction de courant  $\Psi_{i,j}$  est la moyenne des valeurs des quatre fonctions de courant voisines : nord, sud, est et ouest.

Finalement notons une question cruciale qui permettra de faire le point sur la validité de la méthode : Est-ce-que quand  $\Delta x \rightarrow 0$  et  $\Delta y \rightarrow 0$ ; les solutions données par les équations aux différences finies (équation (12)) sont proche de celles données par les équations différentielles (équation de poisson (9)) ? . Sans aucune preuve, la réponse est oui pour les équations elliptiques telles que les notre ; cependant pour les équations paraboliques et hyperboliques il est nécessaire d'observer certaines restrictions pour garantir la convergence de la méthode.

### 3.41. FORMULATION DES SOLUTIONS DE L'EQUATION DE POISSON - METHODE DE RELAXATION :

On a vu précédemment que l'équation de poisson était résolvable ; maintenant pour formuler les solutions proprement dites, il faut trouver les valeurs des fonctions de courant en

chaque noeud. Pour ce faire écrivons l'équation (13) en détail (ici  $\lambda=1$ , il faut noter que le résultat est le même pour  $\lambda > 0$ ). On commence par  $i=1, j=1$  et on fixe par exemple  $j$  tout en variant  $i$  de 1 à  $n-1$  :

$$\psi_{1,1}^{(1)} = \frac{1}{4} \left[ f_{1,0} + f_{0,1} + \psi_{2,1}^{(0)} + \psi_{1,2}^{(0)} + (\Delta y)^2 (\text{rot } \vec{v})_{1,1}^{(0)} \right]$$

$$\psi_{2,1}^{(1)} = \frac{1}{4} \left[ f_{2,0} + \psi_{1,1}^{(1)} + \psi_{3,1}^{(0)} + \psi_{2,2}^{(0)} + (\Delta y)^2 (\text{rot } \vec{v})_{2,1}^{(0)} \right]$$

$$\psi_{3,1}^{(1)} = \frac{1}{4} \left[ f_{3,0} + \psi_{2,1}^{(1)} + \psi_{4,1}^{(0)} + \psi_{3,2}^{(0)} + (\Delta y)^2 (\text{rot } \vec{v})_{3,1}^{(0)} \right]$$

$$\vdots$$

$$\psi_{n-1,1}^{(1)} = \frac{1}{4} \left[ f_{n-1,0} + f_{n,1} + \psi_{n-2,1}^{(0)} + \psi_{n-1,2}^{(0)} + (\Delta y)^2 (\text{rot } \vec{v})_{n-1,1}^{(0)} \right]$$

$$\psi_{1,2}^{(1)} = \frac{1}{4} \left[ f_{0,2} + \psi_{1,1}^{(1)} + \psi_{2,2}^{(0)} + \psi_{1,3}^{(0)} + (\Delta y)^2 (\text{rot } \vec{v})_{1,2}^{(0)} \right]$$

$$\psi_{2,2}^{(1)} = \frac{1}{4} \left[ \psi_{2,1}^{(1)} + \psi_{1,2}^{(1)} + \psi_{3,2}^{(0)} + \psi_{2,3}^{(0)} + (\Delta y)^2 (\text{rot } \vec{v})_{2,2}^{(0)} \right]$$

.....

Ici les indices inférieurs sont les  $i, j$ ; les indices supérieurs représentent le numéro d'itération. On pourra pour une première approximation prendre toutes les  $\psi_{i,j}^{(0)}$  nulles. Les  $f_{i,j}$  sont donnés par les conditions aux limites (11).

On remarque la nécessité de l'emploi d'un ordinateur et par ailleurs celle de deux compteurs "DO"; l'un pour parcourir  $j$  de 1 jusqu'à  $m-1$ ; l'autre pour varier  $i$  de 1 à  $n-1$ . Chaque couple  $(i, j)$  identifie un noeud et en chaque noeud on résoud l'équation (13) pour trouver  $\psi_{i,j}$ . Lorsque la nouvelle valeur est déterminée, on la compare avec la valeur de la précédente itération. La plus grande

différence trouvée sera comparée avec une certaine précision "p" pour déterminer la convergence. Si le processus ne converge pas ou on n'a pas encore atteint la précision "p" voulue ; on refait l'itération qui correspond au parcours de  $(n-1)(m-1)$  noeuds.

La condition d'arrêt est :

$$\max | \psi_{ij}^{(k)} - \psi_{ij}^{(k-1)} | \leq p$$

La précédente méthode décrite c'est-à-dire celle de GAUSS-SEIDEL appliquée aux équations elliptiques aux différences finies s'appelle "méthode de remplacements successifs" ou encore "méthode de relaxation".

#### 3.51. GENERALISATION DE LA METHODE DE RELAXATION :

La méthode de relaxation décrite précédemment est applicable pour un profil rectangulaire. Pour le cas de notre profil (voir figure 4 du précédent chapitre) ; la forme des flasques avant et arrière contribue à la formation des étoiles tronquées. Dans de telles étoiles où les longueurs "S<sub>i</sub>" des quatre bras ne sont pas toutes identiques (voir figure 2), la formule permettant de calculer la valeur de la fonction de courant dans le noeud correspondant se développe comme suit :

Nb: Dans tout ce qui suit on va utiliser la notation  $\psi_k$  au lieu de  $\psi_{ij}$  ; où k est le numéro du noeud considéré.

Le développement limite d'ordre "n" autour du point "0" s'écrit de la façon suivante :

$$\psi_k = \psi_0 + S_x \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_0 + \dots + \frac{S_x^n}{n!} \left( \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} \right)_0$$

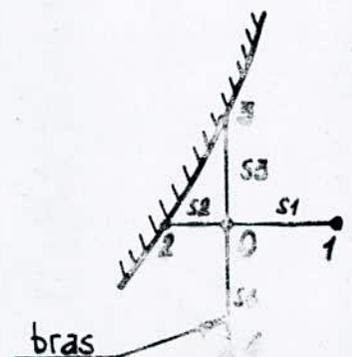


FIG. 2  
31

pour un développement du deuxième ordre on a :

$$\psi_1 - \psi_0 = s_1 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_0 + \frac{s_1^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_0$$

$$\psi_2 - \psi_0 = -s_2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_0 + \frac{s_2^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_0$$

$$\psi_3 - \psi_0 = s_3 \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_0 + \frac{s_3^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_0$$

$$\psi_4 - \psi_0 = -s_4 \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_0 + \frac{s_4^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_0$$

En se basant sur les paragraphes précédents on va formuler sans démonstration les dérivées premières et secondaires de  $\psi$  :

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_0 = \frac{s_2^2 \psi_1 - s_1^2 \psi_2 + (s_1^2 - s_2^2) \psi_0}{s_1 s_2 (s_1 + s_2)} \quad (15)$$

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_0 = \frac{s_4^2 \psi_3 - s_3^2 \psi_4 + (s_3^2 - s_4^2) \psi_0}{s_3 s_4 (s_3 + s_4)} \quad (16)$$

$$\left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_0 = \frac{s_1 \psi_2 + s_2 \psi_1 - (s_1 + s_2) \psi_0}{\frac{1}{2} s_1 s_2 (s_1 + s_2)} \quad (17)$$

$$\left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_0 = \frac{s_3 \psi_4 + s_4 \psi_3 - (s_3 + s_4) \psi_0}{\frac{1}{2} s_3 s_4 (s_3 + s_4)} \quad (18)$$

Par substitution de (17) et (18) dans l'équation de poisson (9) ; on obtient après certaines transformations :

$$\psi_0 = \frac{\frac{\psi_1}{s_1(s_1+s_2)} + \frac{\psi_2}{s_2(s_1+s_2)} + \frac{\psi_3}{s_3(s_3+s_4)} + \frac{\psi_4}{s_4(s_3+s_4)} + \frac{1}{2} (\text{rot } \vec{v})_z}{\frac{1}{s_1 \cdot s_2} + \frac{1}{s_3 \cdot s_4}} \quad (19)$$

L'équation (19) ainsi trouvée permet le calcul de la valeur de la fonction de courant dans le noeud d'une étoile quelconque (tronquée). Pour

une étoile normale c'est-à-dire :

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \Delta x = \Delta y \quad ;$$

on retrouve la même relation que celle donnée par l'équation (13).

Conséquence:

Les équations (13) et (19) sont appelées équations de relaxations respectivement pour une étoile normale et une étoile tronquée. Elles sont prises comme équations de base pour l'étude de l'écoulement méridien qui fera l'objet du paragraphe suivant :

3.61. APPLICATION DE LA MÉTHODE DE RELAXATION POUR LE CAS DE L'ÉCOULEMENT MÉRIDIEN :

3.6.11. Hypothèses et formulation du problème:

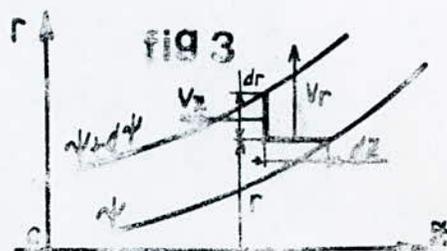
La reproduction analytique de l'écoulement à travers le profil de la roue consiste à supposer que les vitesses absolues et relatives de l'écoulement sont exclusivement fonction des coordonnées  $r$  et  $z$  et ne dépendent pas de l'angle  $\theta$  ; il vient :

$$V_\theta = 0 \quad ;$$

les lignes de courants représentant le champ d'écoulement tridimensionnel sont maintenant projetées sur un plan méridien  $rz$  passant par l'axe de la roue ; de cette façon on ramène nos considérations à un écoulement bidimensionnel représenté par la figure 3 ci-contre.

Le débit passant entre deux lignes de courant voisines  $\psi$  et  $\psi + d\psi$  est :

$$dq = 2\pi r d\psi \quad \dots \dots (20)$$



La formule (20) n'est valable que pour les hypothèses citées plus haut où le débit réellement représenté en tridimensionnel est projeté sur un bidimensionnel.

D'autre part le débit élémentaire est défini comme suit :

$$dq = 2\pi r V_z dr - 2\pi r V_r dz \quad \dots \quad (21)$$

En identifiant (20) et (21), la fonction de courant élémentaire sera telle que :

$$d\psi = r \cdot V_z dr - r V_r dz \quad \dots \quad (22)$$

Or mathématiquement la dérivée totale de  $\psi(r, z)$  est :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} dz + \frac{\partial \psi}{\partial r} dr$$

Il vient :

$$V_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad \dots \quad (23)$$

$$V_r = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \dots \quad (24)$$

La connaissance des vitesses  $V_z$  et  $V_r$  permet de développer la formule du rotationnel :

$$(\text{rot } \vec{v})_\theta = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)$$

$$(\text{rot } \vec{v})_\theta = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \left( -\frac{1}{r^2} \right) \quad ; \text{ d'où on a :}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} = -r (\text{rot } \vec{v})_\theta} \quad \dots \quad (25)$$

L'équation (25) ainsi trouvée décrit l'écoulement méridien à travers le profil de la roue. Sa résolution est analogue à celle de l'équation de poisson (9). Les solutions (13) et (19) seront reproduites ici avec un certain changement dû au terme  $-\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r}$  et au facteur "r"

figurant en plus dans l'équation (25). Le rayon  $r$  tel qu'il est représenté sur la figure 4 ci-contre est défini comme suit :

$$r = k \cdot S_4$$

où,  $k$  est défini en fonction de la position du noeud dans le profil.

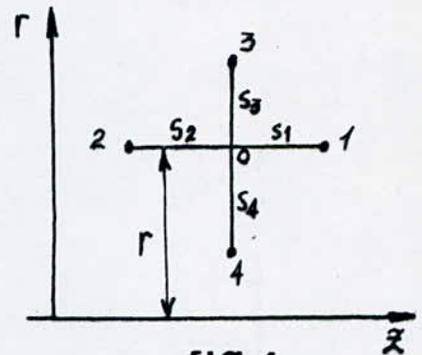


fig 4

Compte tenu de toutes ces considérations, la formule de relation pour une étoile tronquée s'écrit :

$$\psi_0 = \frac{\frac{2\psi_1}{S_1(S_1+S_2)} + \frac{2\psi_2}{S_2(S_1+S_2)} + \frac{(2k-1)\psi_3}{kS_3(S_3+S_4)} + \frac{(2k-\frac{S_3}{S_4})\psi_4}{kS_4(S_3+S_4)} + kS_4(\text{rot } \vec{v})_0}{\frac{2}{S_1 \cdot S_2} + \frac{2}{S_3 \cdot S_4} + \frac{S_3 - S_4}{kS_3 S_4^2}} \quad (26)$$

Les vitesses développées à partir des formules (23) et (24) prennent les formes suivantes :

$$V_z = \frac{S_4^2 \psi_3 - S_3^2 \psi_4 + (S_3^2 - S_4^2) \psi_0}{k S_3 S_4^2 (S_3 + S_4)} \quad (27)$$

$$V_r = - \frac{S_2^2 \psi_1 - S_1^2 \psi_2 + (S_1^2 - S_2^2) \psi_0}{k S_1 S_2 (S_1 + S_2) S_4} \quad (28)$$

Pour une étoile normale, la formule de relaxation est déduite de la formule (26) en posant :

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \Delta r = \Delta z$$

le résultat obtenu sera donc :

$$\psi_0 = \frac{\psi_1 + \psi_2 + \frac{2k-1}{2k} \psi_3 + \frac{2k+1}{2k} \psi_4 + k(\Delta z)^3 (\text{rot } \vec{v})_0}{4} \quad (29)$$

Les vitesses deviennent alors :

$$V_z = \frac{\psi_3 - \psi_4}{2k(\Delta z)^2} \quad (30)$$

$$V_r = \frac{\psi_2 - \psi_1}{2k(\Delta z)^2} \quad (31)$$

### 3.6.2. Valeurs des fonctions de courants :

L'étude de l'écoulement méridien à travers le profil de la roue nécessite la connaissance de toutes les valeurs des fonctions de courants en chaque noeud du profil proprement dit ; pour ce faire on a jugé utile d'encadrer notre profil par un quadrillage à mailles carrés de 0,005 m de côté (voir figure 4 du précédent chapitre).

Ce quadrillage a permis de localiser  $37 \times 28$  noeuds ; soit 1036 noeuds . Cependant le calcul des valeurs de la fonction de courant ne s'opère pas de la même manière pour tous les noeuds . Toutefois la distinction de cinq (5) lieux pour lesquels en chacun - d'eux le calcul de  $\psi$  se fait d'une façon bien déterminée , simplifiera le déroulement des calculs . Ces lieux sont :

- Entrée du profil
- Flansques avant et arrière
- Intérieur du profil
- Extérieur du profil
- Sortie du profil

#### 3.6.2.1/ . Entrée du profil :

##### a). Fonction de courant à l'entrée :

Rappelons l'équation (23) :  $V_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r}$

### III. ETUDE DE L'ECOULEMENT MERIDIEN

La fonction de courant est donc :

$$\Psi = \int_0^r r V_z dr \quad \dots \quad (32)$$

On suppose qu'à l'entrée du profil, la répartition des vitesses est parabolique d'ordre  $n$  (voir figure 5).

La vitesse  $V_z$  admet donc pour équation :

$$V_z = V_0 \left(1 - \frac{r}{R_1}\right)^n$$

Il est d'usage de prendre pour une conduite conique :

$$n = 1/7$$

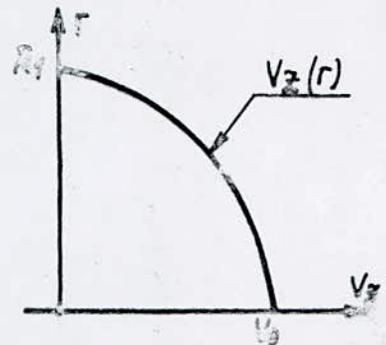


fig 5

La vitesse maximale  $V_0$  à l'entrée est prise égale à 2 m/s. Le rayon  $R_1$  à l'entrée est selon la figure 4 du précédent chapitre égal à :

$$R_1 = 10. \Delta r$$

( $r$  : étant le rayon intermédiaire en mètres).

Compte tenu de ces considérations, on peut en chaque point de l'entrée calculer la vitesse correspondante et ceci servira pour le calcul de la valeur de la fonction de courant pour un rayon d'entrée donné.

L'évaluation de l'intégrale (32) peut se faire soit à partir de la formule de "simpson" ; soit par une sommation. Considérons cette deuxième possibilité :

$$\Psi = \sum_{j=2}^{10} r_j V_z \left(1 - \frac{r_j}{R_1}\right)^n (r_j - r_{j-1}) \quad \dots \quad (33)$$

La formule approchée (33) permet donc de calculer les différentes valeurs de  $\Psi$  à l'entrée (c'est-à-dire pour  $i=0$ ). Pour augmenter

la précision de calcul on a jugé nécessaire d'augmenter le nombre de pas et cela en divisant  $\Delta r$  en 10 pas égaux, c'est-à-dire :

$$r_j - r_{j-1} = \frac{\Delta r}{10}$$

#### β). Rotationnel à l'entrée :

Sachant que le rotationnel s'écrit en coordonnées méridiennes  $r, z$  comme suit :

$$(\text{rot } \vec{v})_\theta = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}$$

Et qu'à l'entrée l'écoulement est supposé parfaitement parallèle à l'axe de la roue, il vient :  $v_r = 0$  ; d'où :

$$(\text{rot } \vec{v})_\theta = - \frac{\partial v_z}{\partial r} = - \frac{\partial}{\partial r} \left( v_0 \left( 1 - \frac{r}{R_1} \right)^n \right)$$

Par application du principe de la dérivée d'une fonction composée, on obtient ( $v_0$  est constante) :

$$\boxed{(\text{rot } \vec{v})_\theta = v_0 \cdot \frac{n}{R_1} \left( 1 - \frac{r}{R_1} \right)^{n-1}} \quad (34)$$

La connaissance de la répartition du rotationnel à l'entrée nous sera utile pour le calcul du rotationnel en n'importe quel point intérieur du profil (voir plus bas).

#### 3.6.2.21. Conditions aux limites :

Ces conditions se rapportent essentiellement sur la conservation de la valeur de la fonction de courant sur les limites du profil. Ainsi comme l'indique la figure 4 du 2<sup>ème</sup> chapitre, la valeur maximale  $\psi(1, 20)$  à l'entrée sera conservée tout le long de la paroi supérieure c'est-à-dire le long du flasque avant. Il en est de même pour la

valeur minimale de la fonction de courant ( $\psi_{\min} = 0$ ), celle-ci sera conservée sur la paroi inférieure c'est-à-dire le long du flasque arrière. (voir initialisation dans le programme informatique).

3.6.2.31. Fonctions de courants à l'intérieur du profil :

A part le fait de ne pas considérer les noeuds à la sortie du profil dont leur calcul se fera ultérieurement, toutes les fonctions de courant dans les noeuds intérieurs du profil se calculent à partir de la formule (26) ou (29), selon qu'il s'agit d'une étoile tronquée ou normale. Le rotationnel qui y figure doit répondre au principe de conservation du rotationnel qui énonce que dans un écoulement permanent de fluide incompressible non visqueux soumis uniquement à un champ de pesanteur, la circulation du vecteur vitesse le long d'une courbe fermée entraînée dans le mouvement, possède une valeur constante.

Par application de ce principe et du théorème de Stokes<sup>(\*)</sup>, il découle

$$\frac{(\text{rot } \vec{V}_1)_\theta}{\Gamma_1} = \frac{(\text{rot } \vec{V}_2)_\theta}{\Gamma_2} \dots \dots \dots (35)$$

Ainsi connaissant les rotationnels à l'entrée on peut en vertu de la formule (35), calculer les rotationnels le long d'une ligne de courant où le principe énoncé est valable.

Remarque :

La forme des flasques avant et arrière étant quelconque, il

<sup>(\*)</sup> Il s'écrit :  $\Gamma_c = \oint_c \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iint_{(L \times b)} (\text{rot } \vec{V}_x) dL \cdot db$

Y'a donc nécessité d'introduire dans le programme informatique les valeurs des bras  $S_1, S_2, S_3$  et  $S_4$  sous forme de DATA correspondant aux étoiles tronquées.

Le processus de calcul adopté pour la programmation permet; par le contrôle d'une variable  $L(I, J)$ ; d'écarter tous les noeuds extérieurs au profil (pour plus de précisions, consultez l'organigramme général plus bas).

### 3.6.2.41. Fonction de courant à la sortie du profil :

Contrairement à ce qui se fait à l'entrée du profil où l'écoulement est pratiquement axial, à la sortie, l'écoulement se fait radialement du fait que les flasques sont perpendiculaires à l'axe de la roue, ce qui a pour effet d'annuler la composante horizontale  $V_z$  de la vitesse :

$$V_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

Si on approxime  $\partial \psi / \partial r$  par:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\psi_3 - \psi_0}{\Delta r} \quad ; \quad \text{on obtient:}$$

$$\underline{\psi_3 = \psi_0}$$

Cette égalité approchée donne d'éventuelles modifications dans les formules (26) et (29) qui prennent respectivement les formes suivantes :

$$\psi_0 = \frac{2\psi_1}{S_1(S_1+S_2)} + \frac{2\psi_2}{S_1(S_1+S_2)} + \frac{(2k + \frac{S_2}{S_1})\psi_4}{kS_1(S_3+S_4)} + k(\text{rot } \vec{V})_0 \cdot S_4 \dots (36)$$

$$\frac{2}{S_1 \cdot S_2} + \frac{2}{S_3 \cdot S_4} + \frac{S_2 - S_4}{kS_3S_4^2} - \frac{(2k-1)}{kS_3(S_3+S_4)}$$

$$\psi_0 = \frac{\psi_1 + \psi_2 + (1 + \frac{1}{2k})\psi_4 + k(\Delta z)^2(\text{rot } \vec{V})_0}{3 + 1/2k} \dots (37)$$

Les formules (36) et (37) représentent respectivement les formules de relaxations à la sortie du profil pour des étoiles tronquée et normale.

A la lumière de tout ce qu'on a montré au cours des paragraphes précédents, on peut déterminer en n'importe quel point de la coupe méridienne (quelle que soit sa position ou sa nature), la valeur de la fonction de courant.

Ceci nous permettra le tracé des lignes d'égalité de fonctions de courant appelées " LIGNES DE COURANT " .

#### 3.6.31. Tracé des lignes de courant :

Comme on l'a évoqué plus haut, le jugement de la conformité de la coupe méridienne se base essentiellement sur l'analyse de l'écoulement qui la traverse. Cette analyse n'est possible que si l'on détermine les lieux géométriques ou les positions successives d'une particule d'eau dans le temps, définissant la trajectoire de cette dernière. Quand le mouvement est trouble, les trajectoires passant par un point fixe de la coupe méridienne ont des formes différentes; c'est dans ce contexte qu'on a dû imaginer la notion des lignes de courant afin de représenter l'écoulement en un point donné.

Ces lignes de courant représentent en outre les courbes prises dans un milieu continu en un moment donné de telle façon qu'elles soient tangentes en n'importe quel point au vecteur vitesse en ce point.

Le tracé d'une ou de plusieurs lignes de courant exige la détermination des coordonnées de ces lignes, pour ce faire, on

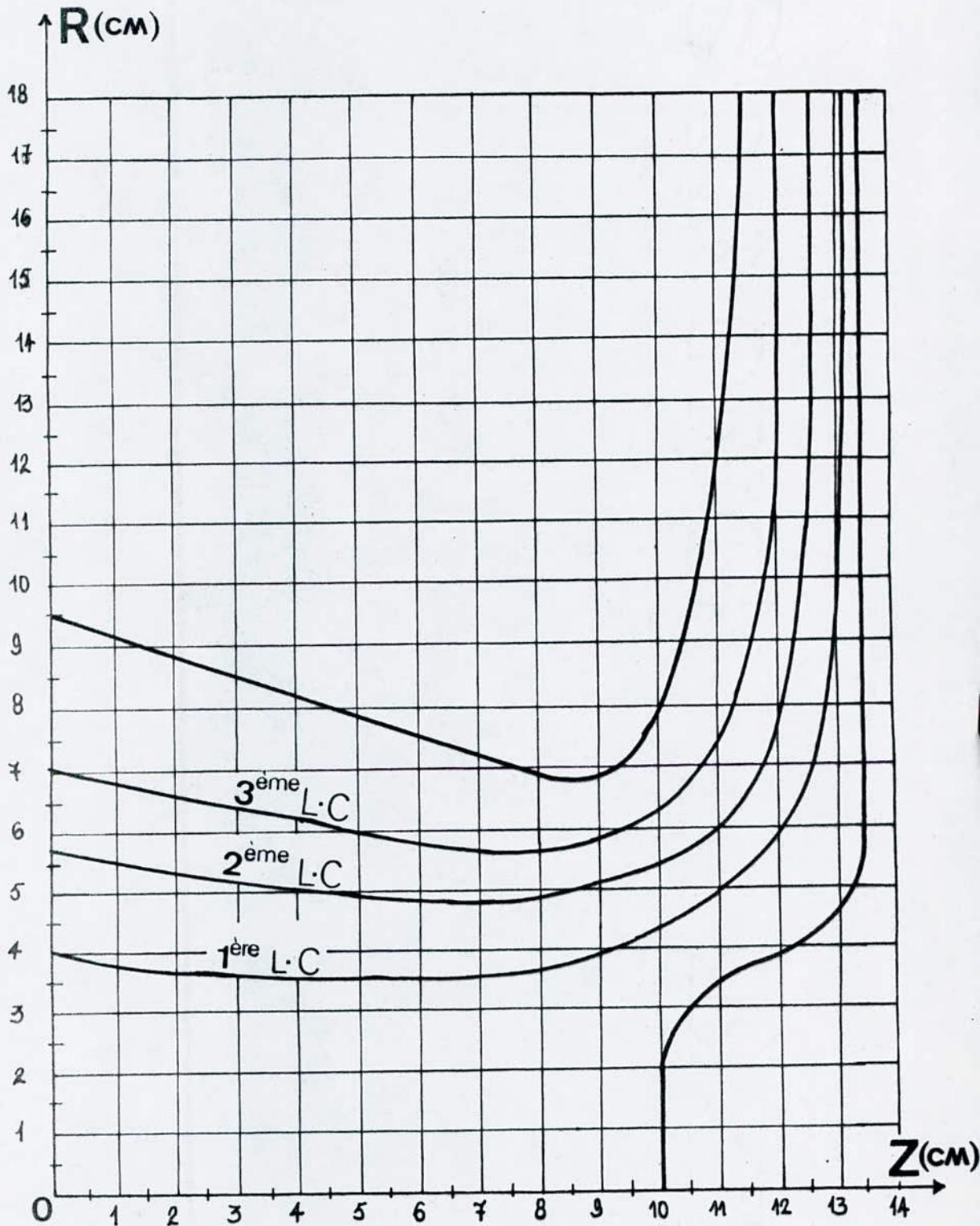
fixe à l'entrée une valeur de la fonction de courant et on détermine par la suite les coordonnées de tous les points de la coupe méridienne ayant cette même valeur.

Le processus informatique consiste à fixer „i” et varier „j” jusqu'à ce que l'on ait une valeur de  $\psi$  égale ou supérieure à la valeur mère de  $\psi$  (c'est-à-dire celle initialement fixée). Dans le premier cas où la valeur de  $\psi$  coïncide parfaitement avec la valeur mère, on retient le point correspondant. Dans le second cas, il faudra procéder par interpolation. Le point ainsi localisé sera caractérisé par son abscisse  $X(m)$ ; son ordonné  $R(m)$ , sa vitesse méridienne  $V(m/s)$  et la longueur cumulée  $L(m)$  du point initial jusqu'à ce point.

Ses valeurs données par le listing résultat permettent de représenter à l'échelle 1/1 l'allure des lignes de courants qui sont en nombre de trois (3) préalablement choisi (voir figure 6 suivante).

L'analyse des résultats montre que la répartition des vitesses méridiennes le long des 3 lignes de courant est conforme avec la théorie du fait que ces vitesses méridiennes  $C_m$  croissent jusqu'au coudé puis décroissent. Cependant ceci ne prouve en rien la conformité du profil. Cette dernière exige; en partant des vitesses méridiennes trouvées; la connaissance de la variation de l'énergie cinétique „ $E_c$ ” le long des aubes, après quoi on peut juger si oui ou non le profil sera accepté. En vertu de ces considérations, une étude sur l'aubage est imposée.

# TRACÉ DES 3 LIGNES DE COURANT (Echelle 1/1)



• fig 6 •

CHAPITRE IV: **CALCUL DE L'AUBAGE**

Plusieurs méthodes ont été élaborées pour déterminer la forme des aubes, parmi lesquelles on cite :

- Tracé par arcs de cercle ;
- tracé par transformation conforme ;
- tracé ponctuel .

La première méthode a été abandonnée en raison de sa faible précision, la deuxième sert le plus souvent au tracé du profil d'aubes gauches, quant-à la troisième ; jugée la plus valable ; elle sera prise en compte pour le tracé des aubes de notre pompe .

Appelés encore méthode de PFLEIDERER, la méthode du tracé ponctuel consiste à admettre la variation de l'angle  $\beta$  en fonction du rayon dans les limites de  $r_1$  et  $r_2$ , et dans la détermination de l'angle au centre  $\varphi$  pour les valeurs de " $r$ " et " $\beta$ ".

Les valeurs de  $r$  et  $\varphi$  sont les coordonnées polaires du point donné de l'aube. Le lieu géométrique de ces points forme la ligne moyenne de l'aube.

En allant de l'entrée à la sortie, les coordonnées  $r$  et  $\varphi$  changent. Ainsi le passage d'un point de l'aube à un point supérieur implique une augmentation de  $r$  et  $\varphi$  (voir Figure 1) tel que :

$$r_{i+1} = r_i + \Delta r \quad \dots \quad (1)$$

où,  $\Delta r$  est l'accroissement du rayon dû au passage du point  $i$  au point consécutif " $i+1$ ". Il est fonction du nombre de points

## II. I. CALCUL DE L'AUBAGE

servants au tracé de l'aube. Si  $N$  est ce nombre de points (dans notre cas on a pris  $N=20$ ), alors l'accroissement  $\Delta r$  sera:

$$\Delta r = \frac{r_2 - r_1}{N} \quad \dots \quad (2)$$

Si l'on considère que la distance qui sépare deux points consécutifs est très petite, alors on peut assimiler les arcs à des segments de droite; il en résulte que l'accroissement  $\Delta \psi_i$  s'exprime comme suit:

$$\Delta \psi_i = \frac{\Delta r}{r_i \tan \beta_i} \quad \dots \quad (3)$$

où l'angle  $\beta_i$ ; supposé variant graduellement avec le rayon; est selon l'équation (2, II, 2) égal à:

$$\beta(r_i) = \beta_i = \beta_2 - \frac{(\beta_2 - \beta_1)(r_2 - r_i)}{(r_2 - r_1)}$$

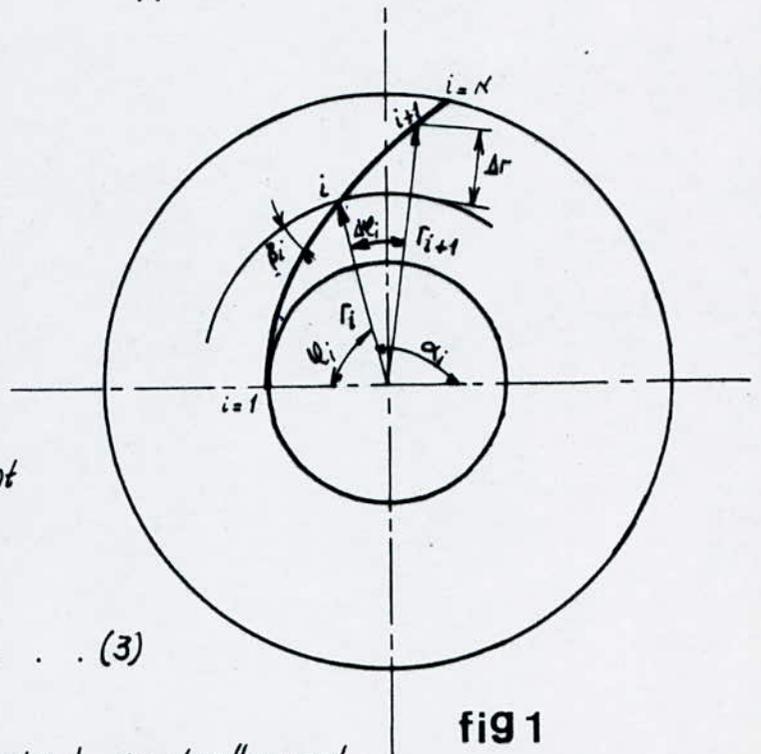
ici  $\beta_2$  est pris égal à l'angle d'aube infini du fait que ce dernier caractérise l'aubage.

Conformément aux équations (2) et (3), on peut calculer; à partir des coordonnées polaires  $r_i$  et  $\psi_i$  du point " $i$ "; les coordonnées du point consécutif " $i+1$ ", comme suit:

$$r_{i+1} = r_i + \Delta r \quad \dots \quad (4)$$

$$\psi_{i+1} = \psi_i + \Delta \psi_i \quad \dots \quad (5)$$

Ces coordonnées ainsi calculées permettront le tracé d'une seule



ligne de l'aube, et afin d'estimer la forme de cette dernière, il faudra mettre en évidence l'influence de l'épaisseur  $S$  d'aubes; qui par son action, les coordonnées polaires se subdivisent en deux : coordonnées inférieures  $r_i$  et  $\varphi_i$ , coordonnées supérieures  $r'_i$  et  $\varphi'_i$  (voir FIG 2).

Les relations géométriques permettent d'écrire :

$$L = S \cdot \sin \beta_i$$

$$L = r_i \cdot \Delta \varphi$$

d'où :

$$\Delta \varphi_i = \frac{S \cdot \sin \beta_i}{r_i} \quad \dots \quad (6)$$

D'autre part :

$$\Delta r_i = S \cdot \cos \beta_i \quad \dots \quad (7)$$

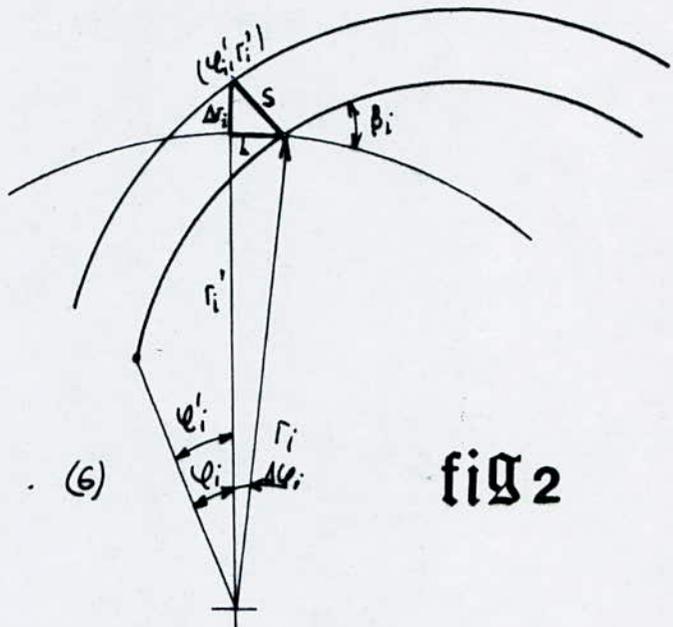


FIG 2

En vertu des relations (6) et (7), on peut calculer les coordonnées  $r'_i$  et  $\varphi'_i$  telles que :

$$\varphi'_i = \varphi_i - \Delta \varphi_i \quad \dots \quad (8)$$

$$r'_i = r_i + \Delta r_i \quad \dots \quad (9)$$

Par ailleurs, on peut déterminer, au lieu des coordonnées polaires  $r_i, \varphi_i, r'_i$  et  $\varphi'_i$ ; les coordonnées cartésiennes  $x_i, y_i, x'_i$  et  $y'_i$  comme suit :

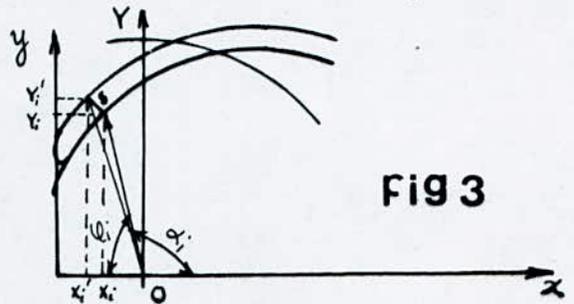
$$\begin{cases} x_i = r_i \cos \alpha_i - r_1 \cos \alpha_1 \\ y_i = r_i \sin \alpha_i \end{cases} \quad \dots \quad (10)$$

## IV. CALCUL DE L'AUBAGE

$$\begin{cases} X_i = r_i' \cos \alpha_i' - r_i \cos \alpha_i \\ Y_i = r_i' \sin \alpha_i' \end{cases} \quad (11)$$

avec :  $\alpha_i = \pi - \varphi_i$  ;  $\alpha_i' = \pi - \varphi_i'$  (voir figure 3)

Ainsi par le biais des systèmes (10) et (11), on peut déterminer les coordonnées cartésiennes de l'aubage et par ailleurs permettre

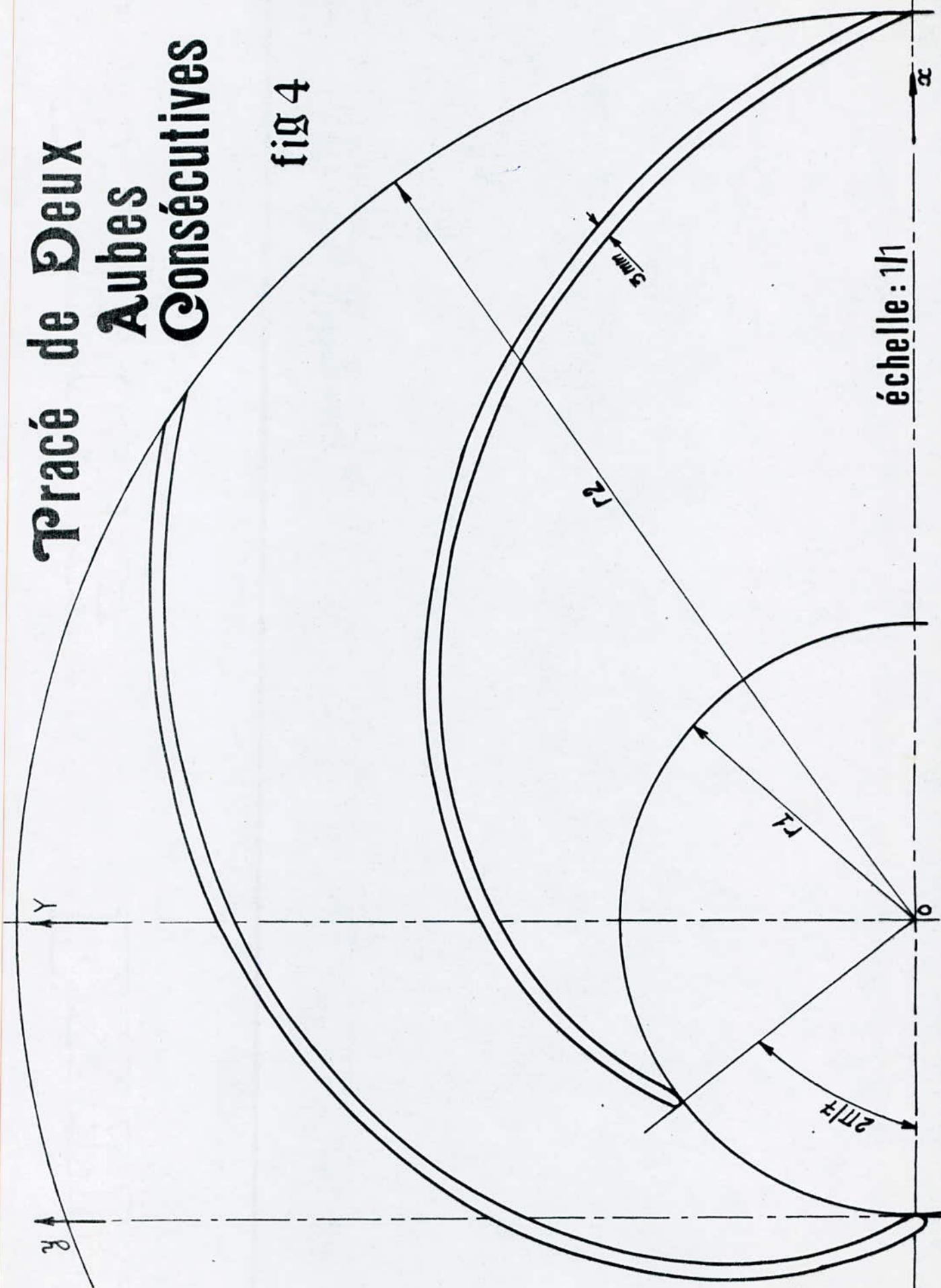


le tracé des aubes. En particulier le programme informatique a permis l'obtention de 40 couples  $(x, Y)$  qui ont contribué au tracé de l'aubage. La figure 4 ci-bas représente le tracé de deux aubes consécutives, ceci pour mettre en évidence l'emplacement d'une aube par rapport à l'aube consécutive.

N.b: voir commentaire des résultats dans le chapitre suivant.

# Tracé de Deux Aubes Consécutives

fig 4



Le calcul hydraulique de la roue mobile a consistait tout d'abord ; après calcul des dimensions principales ; à choisir d'une façon approximative le profil de la roue , pour lequel une étude détaillée de l'écoulement méridien a été élaborée et a permis la détermination de la forme de l'aubage . Ainsi pour pouvoir juger la conformité du profil , on se propose d'étudier la variation du moment cinétique  $M_c$  le long de l'aube . Cette variation est donnée par la figure 5 ( voir ultérieurement ) où les points donnés par le calcul ( voir listing resultat ) sont représentés par des croix (x) et ajustés par une ligne moyenne .

Par analyse de la figure 5 , on remarque que l'écart maximum entre les points est acceptable , c'est-à-dire que l'ensemble des points pouvant être représenté par une droite , signifie que la transformation de l'énergie cinétique le long de l'aube est presque uniforme ou encore que les pertes provoquées par les aubes sont minimales . Cela n'exclut pas le fait que la coupe méridienne demande à être corrigée . Une solution est proposée , elle n'est autre qu'une translation du flasque avant de droite vers la gauche et par ailleurs celle du flasque arrière , tout en conservant les équations de ces flasques . Ceci permettra d'éviter le décollement et la cavitation susceptibles d'apparaître surtout au niveau du coude où les vitesses méridienne sont importantes .

$M_c (m^2/s)$

Variation du moment Cinétique en fonction de la Longueur d'arc d'aube

fig 5

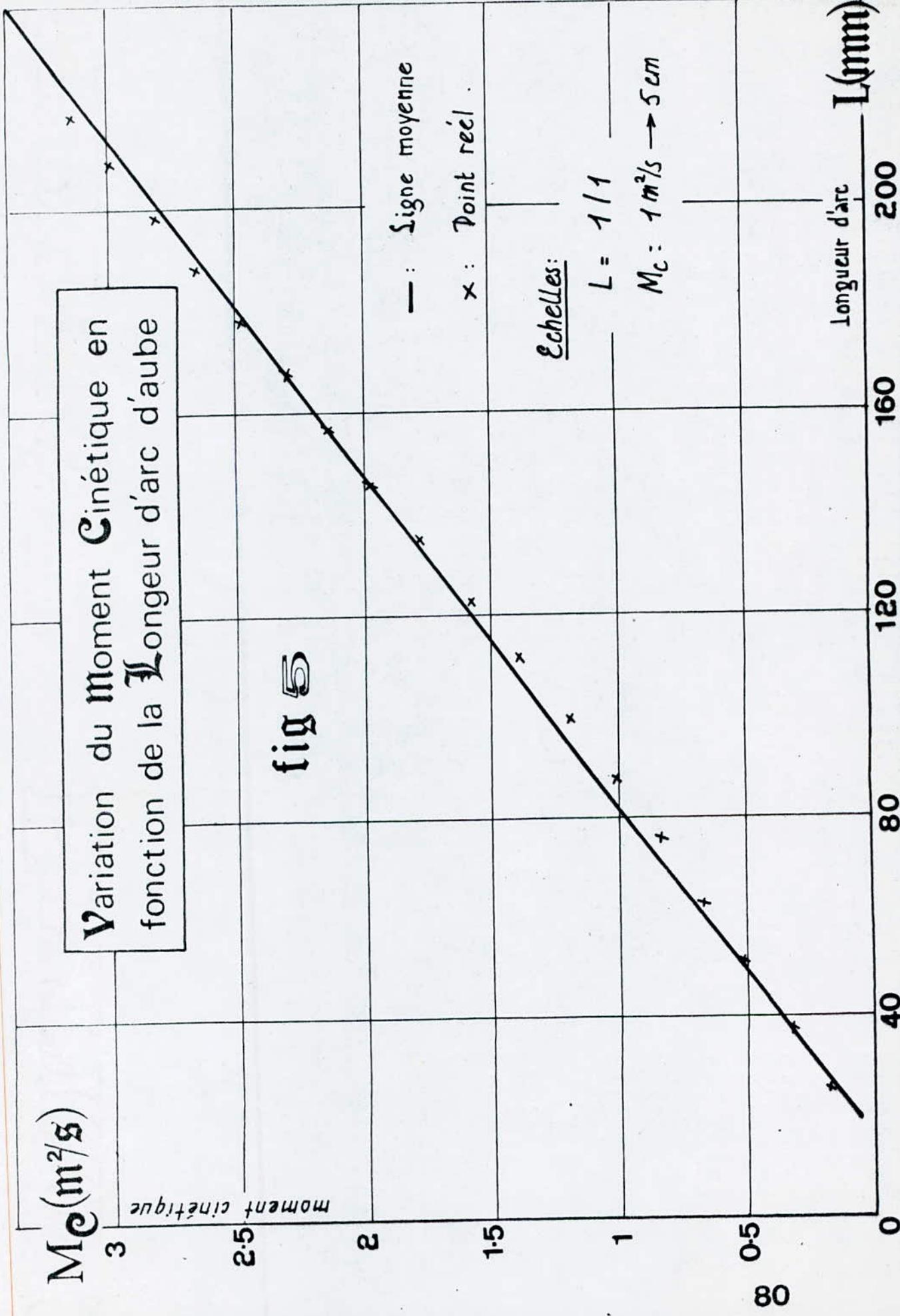
— : Signe moyenne  
x : Point réel

Echelles:

$L = 1/1$

$M_c : 1 m^2/s \rightarrow 5 cm$

Longueur d'arc  $L (mm)$



CHAPITRE I :**NOTIONS DE VOLUTE**

Sur la région d'aspiration du corps est fixé un couvercle avec une tubulure d'aspiration où l'étude de cette dernière sera l'objet d'un paragraphe plus bas.

L'eau sort de la roue avec une vitesse considérablement plus grande que la vitesse d'écoulement dans le tuyau de refoulement; la vitesse de sortie doit donc être réduite et son énergie cinétique transformée en énergie de pression au moyen de la volute à section progressivement croissante. Cette transformation d'énergie doit s'accomplir au prix des pertes réduites au minimum, ce dont dépend dans une grande mesure le rendement de la pompe.

Pour le cas de notre pompe, j'opte pour une volute spirale du moment que les pompes centrifuges équipées de ce type de volutes sont renommées par leur simplicité. Les volutes spirales ont tendance à s'entrouvrir sous l'effet des grandes pressions intérieures; c'est pourquoi l'acier utilisé pour la construction de la volute doit être très résistant; pour ce faire; l'acier sera de moulage et dont la désignation est : E23-45-M (qui est la nuance la plus couramment utilisée où 23 est la limite d'élasticité minimale en  $\text{daN/mm}^2$ , 45 est la résistance minimale à la traction en  $\text{daN/mm}^2$  et M désigne que le produit est moulé).

CHAPITRE II

ELEMENTS DE CONSTRUCTION

L'étude et le choix des éléments constitutifs d'une pompe centrifuge ; guidés par des impératifs mécaniques ou autres ; s'avèrent d'une importance capitale du point de vue conception ou construction d'une pompe centrifuge . Le choix proprement dit est basé sur les résultats trouvés ( voir listing résultats ) .

11. Elément d'ameneé du liquide à la roue - Tubulure d'aspiration :

La forme des éléments d'ameneé du liquide , exerce une grande influence sur la répartition des vitesses à l'entrée de la roue et sur l'uniformité de son alimentation . Ainsi le tracé de la tubulure d'aspiration peut influencer le rendement de la roue et les caractéristiques de cavitation de la pompe .

Pour le cas de notre pompe , on a deux solutions possibles :

- Tubulure d'aspiration convergente droite ;
- coude convergent de grand rayon de courbure .

Ces deux solutions sont équivalentes du point de vue hydraulique ; cependant pour des raisons purement économiques ( construction ) ; j'opterais pour la première solution qui est connue sous le nom de tubulure d'aspiration axiale ( voir figure 1 ) .

Une telle tubulure , dont la section diminue progressivement en allant vers l'oeillard , a un effet tranquilisateur certain sur l'écoulement et procure une alimentation uniforme en liquide . La paroi supérieure de

La tubulure doit être parallèle à l'axe de l'arbre et ceci pour éviter l'accumulation de l'air dans la pompe

(améliorer les caractéristiques de cavitation de la pompe).

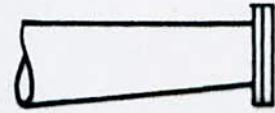


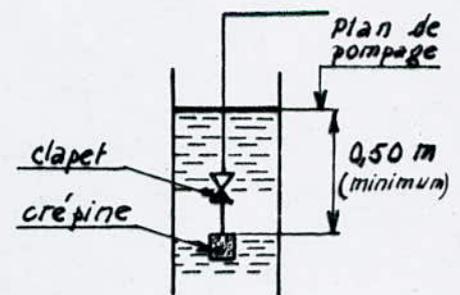
Fig 1: Tubulure d'aspiration axiale..

La tubulure d'aspiration sera en acier à joints soudés (cas le plus

préférable). Vu que les pressions exercées sur la tubulure d'aspiration ne sont pas très importantes ; l'acier est pris d'usage général, de densité  $7,85$  et de désignation E30 (c'est une nuance couramment utilisée où 30 désigne la limite d'élasticité minimale en  $\text{daN/mm}^2$ ). Pour des raisons d'économie la tôle d'acier sera de  $5\text{ mm}$  d'épaisseur.

Si notre pompe est utilisée pour des fins de pompage (puisage d'eau de rivière, de réservoir, de puits etc...) ; alors l'extrémité de la tubulure d'aspiration - côté puisage - sera terminée par une crépine comportant un clapet de pied (voir figure ci-dessous).

La crépine sera disposée au moins à  $0,50\text{ m}$  en dessous du plan de pompage et cela pour éviter la pénétration d'air.



Vu que notre pompe s'emploie pour des fins variées ; la longueur de la conduite d'aspiration sera variable en fonction du

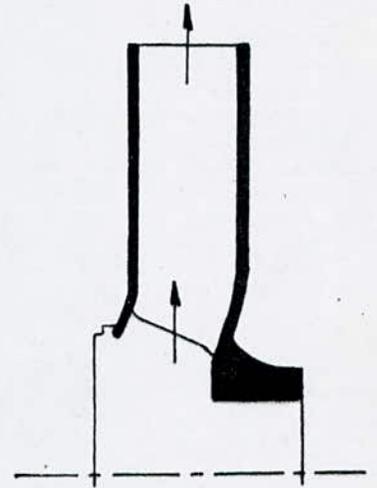
mode de puisage d'eau. Cependant il est préférable de considérer des conduites d'aspirations les plus courtes possibles.

### 21. Roue :

Dans le cas du présent projet, la vitesse de rotation est prise

égale à 1450 tr/min et comme vous le constaterez dans la partie "résultats", le nombre de tours spécifique est de l'ordre de 25, ce qui classe notre pompe parmi les pompes à faible nombre de tours spécifique ; par conséquent la roue sera à passage radial (Entrée et sortie radiales) comme l'indique la figure ci-dessous.

La roue sera munie de deux flasques : un avant et l'autre arrière, reliés par les aubes. Du fait que la vitesse périphérique à la sortie est de l'ordre de 27 m/s (voir listing résultats), la roue sera en fonte grise non alliée de densité 6,9. La fonte est désignée par Ft 20 (qui est choisi pour sa facilité d'usinage où 20 est la résistance minimale à la rupture par extension prise en hectobar).



### 31. Étanchéité de la roue :

Les joints ou les bagues d'étanchéité sont appliqués pour séparer les régions soumises à des pressions différentes qui sont les causes des pertes. Les pertes par fuite sont de l'ordre de 3,16 l/s ; soit environ 5,3 % du débit. Soit à dimensionner la bague d'étanchéité situant à l'amont de la roue où presque les 3% du débit sont perdus par fuite :

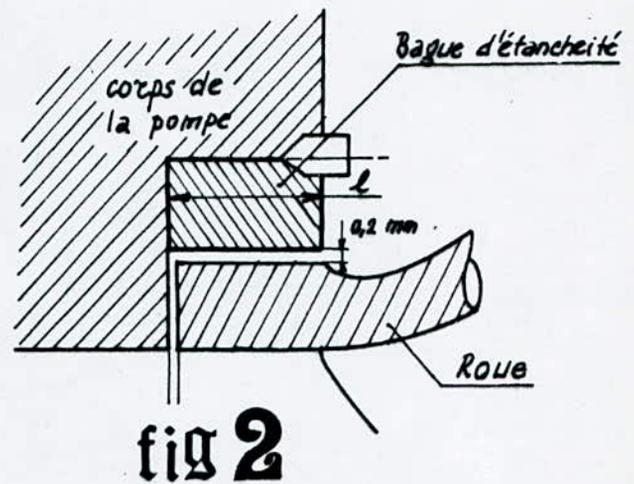
Le diamètre  $D_1$  à l'entrée de la roue est environ 120 mm ; en tout état de cause  $D_1$  est inférieur à 150 mm ; on déduit alors que :

- La largeur de l'interstice est 0,2 mm (voir figure 2).
- La longueur du joint désigné par „ $l$ ” est en moyenne égale à

0,14 fois le diamètre  $D_1$ , soit environ 17 mm.

— quant à l'épaisseur de la bague ou du joint, celle-ci est fonction du jeu existant entre le corps de la pompe et la roue. l'épaisseur est choisie aussi faible que possible et on réduit ainsi :

- Les efforts exercés par la pression sur le joint.
- Le prix du joint.



### 41. Presse - Etoupe :

Le presse-étoupe est un dispositif empêchant un fluide sous pression de s'échapper par les interstices d'un joint. Il sert à assurer l'étanchéité de l'arbre à son passage par la paroi du corps (voir FIG 1 de la 1<sup>re</sup> partie, 10<sup>ème</sup> élément). Il doit prévenir toute fuite excessive d'eau le long de l'arbre et interdire l'entrée d'air dans la pompe dans le cas où la pression à l'intérieur du corps est inférieure à la pression atmosphérique.

Parmi toute la gamme des presse-étoupes, mon choix porte sur ceux à bourrage mou qui présentent de meilleurs rendements (très bonne étanchéité). Le frottement du bourrage contre l'arbre provoque l'échauffement de ce dernier. l'eau fuyant goutte à goutte du presse-étoupe, lubrifie et refroidit l'arbre. Les pertes d'énergie dues au frottement de l'arbre dans les presse-étoupes

sont fonction des facteurs suivants :

- Genre et Qualité du bourrage ;
- longueur du presse-étoupe ;
- l'état et la qualité de la surface de l'arbre ;
- diamètre et vitesse de rotation de l'arbre ;
- l'intensité de la pression exercée sur le presse-étoupe ;
- débit de fuite par le presse-étoupe .

En vertu de toutes ces considérations et plus précisément sachant que le diamètre de l'arbre est 45 mm , il importe de prendre un presse-étoupe de dimensions : 12,7 x 12,7 .

### 51. Arbre :

L'arbre est soumis à l'action des forces extérieures suivantes :

- forces de torsion engendrés par la transmission du couple ;
- forces de flexion engendrés par la masse propre de l'arbre et des éléments fixes sur celui-ci ;
- forces engendrés par la poussée radiale .

La contrainte admissible à la torsion est donnée par la formule suivante :

$$\sigma_t = \frac{8 P_t}{d^3 \cdot \pi^2 \cdot m}$$

Sachant que la puissance totale est de l'ordre de 28 Kw , il vient après conversion aux unités correspondantes :

$$\sigma_t = 173 \text{ kgf/cm}^2$$

(l'arbre normalisé étant de 45 mm de diamètre).

Le poids de l'accouplement au droit du palier provoque un moment

fléchissant et une contrainte de flexion qui peuvent lors de leurs concentration en un point particulier de l'arbre dit point dangereux, provoqués la rupture de l'arbre. Afin de fournir un long usage, l'arbre doit être usiné dans un métal à haute limite d'endurance. La partie centrale de l'arbre doit également être dépourvue de filets, pour cela l'arbre doit être en acier fortement allié (j'ai opté pour ce choix afin que l'arbre adhère pratiquement toutes les qualités à savoir : résistance à la chaleur, à la compression, à la traction etc...). Cet acier étant inoxydable et de désignation : ZBC17 (0,8% de carbone et 17% de chrome).

### 61. Clavette :

Une clavette est une pièce de forme variée, destinée à rendre solidaire un organe de la pompe et l'arbre. Afin d'éviter la rupture de l'arbre, la rainure de la clavette doit être fraisée avec un congé convenable.

La clavette utilisée pour fixer l'arbre au moteur est une clavette inclinée (voir FIG 3)  $a \times b \times l$ .

Sachant que le diamètre de l'arbre est 45 mm, la clavette sera désignée par :

$14 \times 9 \times 50$ , NFE 27-657

Quant à la clavette qui sert à fixer la roue à l'arbre (voir figure ci-contre); elle sera désignée par :

$12 \times 8 \times 40$ , NFE 27-657

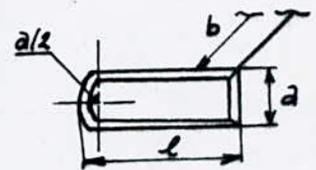
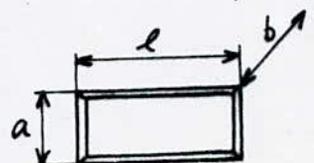


FIG 3



### 71. Roulement :

Un roulement est l'ensemble de pièces inséré entre deux organes mobiles l'un par rapport à l'autre et destiné à remplacer un glissement. La méthode de graissage influe sur les pertes dans les roulements.

Un roulement est caractérisé par son type et ses dimensions : j'opte pour des roulements à une rangée de billes ; à contact radial, sans encroche de remplissage (voir Figure ci-dessous) ; qui supportent des charges radiales et axiales relativement importantes mais qui exigent une bonne coaxialité des portées de l'arbre d'une part et des alésages des logements d'autre part.

Vue que le diamètre de l'arbre est 45 mm, le roulement aura pour dimensions selon la norme ISO (International Organisation for Standardization) :

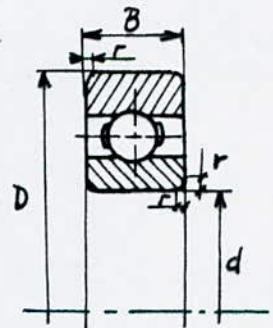
$$D = 75 \text{ mm} , B = 16 \text{ mm} \text{ et } r = 1,5 \text{ mm} .$$

Le roulement sera désigné par 75 BC 10 XE (où 75 est le diamètre de l'alésage en mm, BC : signifie que le roulement est à bille, 10 : la série de dimension, x : signifie que n'importe quel type de cage est acceptable et E : veut dire que la protection se fait d'un seul côté par joint ; le côté est celui où la charge s'applique).

La masse du roulement étant 245 g et les capacités de bases sont :

- Dynamique  $C$ 

}	410 kgf (pour 75 million de tours)
	1740 kgf (pour 1 M de tours)
- Statique :  $C_0 = 1305 \text{ kgf}$



### 81. Palier :

Le palier ou le support de l'arbre est l'organe mécanique servant à supporter et à guider l'arbre de transmission.

Le palier choisi est celui à roulements (les roulements choisis précédemment permettent d'éviter la transmission des forces radiales). Le palier qui convient le mieux pour notre pompe sera construit en fonte.

### 91. Moteur :

Le moteur qui convient pour l'entraînement, à vitesse constante, de notre pompe centrifuge est le moteur ASYNCHRONE, où l'alimentation est en courant alternatif triphasé et sous une tension de 220 volts. sachant que la vitesse de rotation est de 1450 tr/mn ; le moteur doit être à 4 pôles. Le seul inconvénient de ce moteur est lors du démarrage où l'appel de courant peut atteindre six fois le courant normal, c'est pourquoi, il faut prendre des précautions (par exemple court-circuit lors du démarrage).

La puissance de notre moteur s'obtient par une majoration de la puissance absorbée par la pompe, soit en général 5-10% pour des puissances absorbées supérieures à 20 kW. Sachant que la puissance absorbée par notre pompe est de l'ordre de 28 kW ; la puissance du moteur pour une majoration de 7% sera de l'ordre de 30 kW ; et par conséquent notre moteur aura pour désignation :

C51-110, 30 kW (où C51-110 est la norme).

Quatrième partie :CONCLUSION

La présente thèse ainsi élaborée a été l'oeuvre de la compilation de plusieurs ouvrages dont leurs principales sources sont les fruits des années de recherches faites par des grands savants tels que STEPANOFF, PFLEIDERER et CZIBERE.

Souvent les méthodes basées sur l'expérience et la théorie ne suffisent pas pour établir une synthèse complète sur un phénomène donné. Dans de tels cas on est contraint de considérer la méthode du tracé qui est parfois douteuse et conduit à des résultats approchés. A titre d'exemple, je cite la méthode de "PFLEIDERER et STEPANOFF" pour la détermination de la coupe méridienne originale se basant sur le tracé des cercles (partie 2, chapitre II). Cette méthode consistait en la détermination du flasque avant par estimation d'une forme ; jugée commode ; du flasque arrière.

Ceci conduisait à avoir, après toute étude faite, une transformation de l'énergie cinétique plus ou moins uniforme le long des aubes. En vue d'une correction de la coupe méridienne, il a été proposé une méthode consistant à supposer une certaine translation des flasques avant et arrière ; à refaire toute l'étude de l'écoulement méridien et de l'aubage ; à

vérifier si la coupe méridienne modifiée minimise les pertes, dans le cas contraire, il faudra supposer une ou plusieurs autres translations et faire le calcul correspondant. C'est sans aucun doute un énorme travail, cela n'exclut pas le fait que les méthodes de tracé sont souvent utilisées.

Toutes ces remarques n'ont d'ailleurs pour but que de montrer l'inachèvement des recherches théoriques et expérimentales sur les pompes centrifuges.

Enfin, je suis persuadé que ce mémoire trouvera, surtout avec son informatisation, une large audience, aussi bien auprès des étudiants, pour qui il sera une référence et un guide précieux, qu'auprès des ingénieurs de bureaux d'études qui pourront y puiser une information rigoureuse, leur permettant de mener à bien leurs projets en matière de pompes centrifuges monocellulaires.

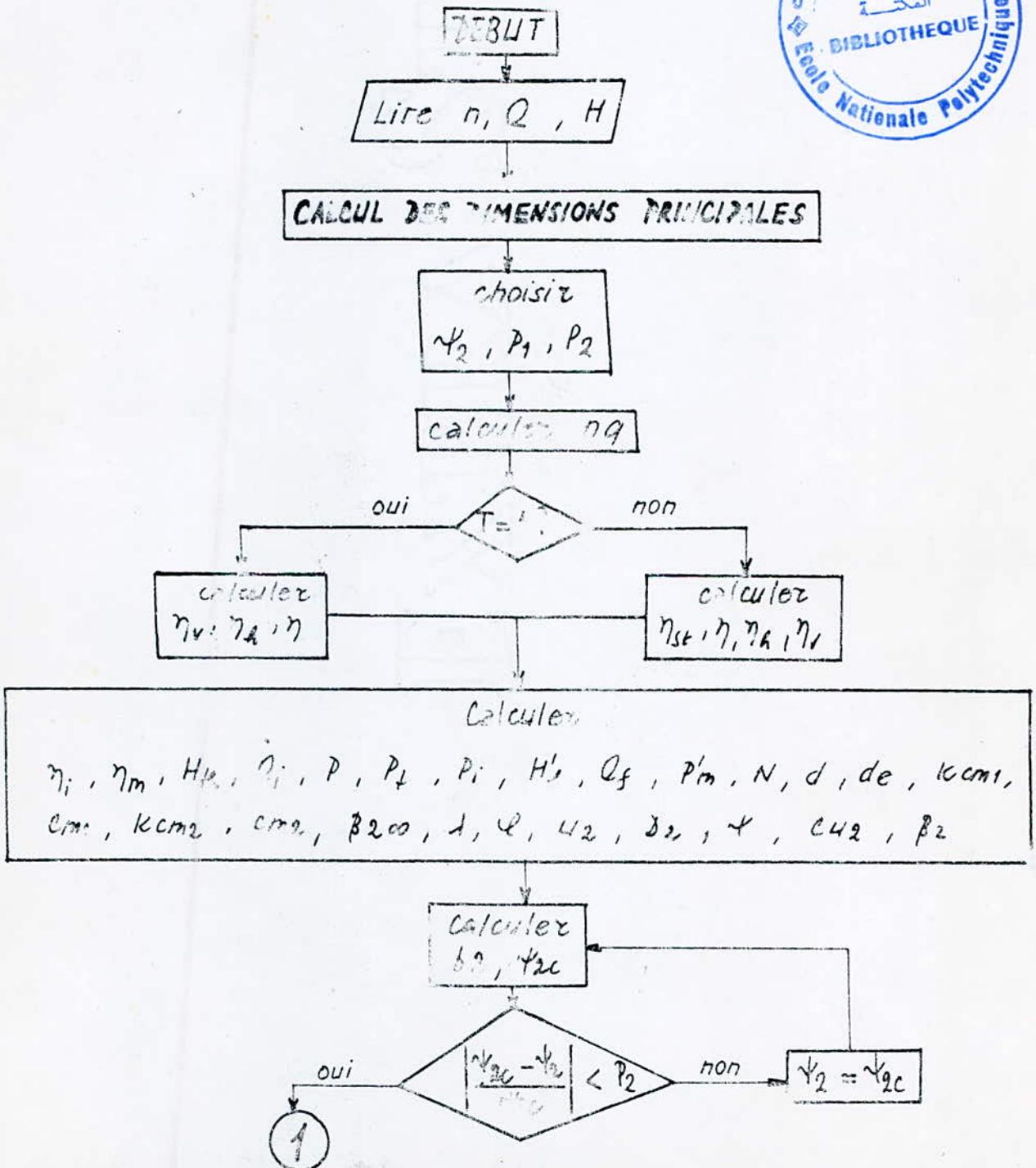
## BIBLIOGRAPHIE

- 1/. TROSKOLANSKI : Les turbopompes  
théorie - tracé - construction
- 2/. A.J. STEPANOFF : Pompes centrifuges et à  
hélices (DUNOD 1961)
- 3/. D. Mc CRACKEN and W.S. DORN : Numérical Methods  
and fortran programming
- 4/. KOVATS : Pompes , Ventilateurs , compresseurs (2<sup>ème</sup> ed)
- 5/. M. SEDILLE : Turbo-machine hydraulique  
et thermique (tome II)
- 6/. A. CHEVALIER : Guide du dessinateur industriel
- 7/. A. DUPONT : Hydraulique urbaine (tome II)  
(Eyrolles 1979)



ETUDE HYDRAULIQUE D'UNE  
POMPE CENTRIFUGE

# Organigramme Général



# ORGANIGRAMME GENERAL

①

Faire  $\psi_2 = \psi_{ac}$

calculer  
 $t_2, \sigma_2, s, \epsilon, c_0$   
 $d_0, d_{10}, d_{1i}, \alpha, \psi_1$

calculer  
 $u_1, p_1, \psi_{ac}$

calculer  
 $b_1, \delta_{1i}, \delta_1$

$\frac{\psi_{ac} - \psi_1}{\psi_{ac}} < p_1$

non

Faire  $\psi_1 = \psi_{ac}$

oui

Faire  
 $\psi_1 = \psi_{ac}$

calculer  $u_1$

Imprimer

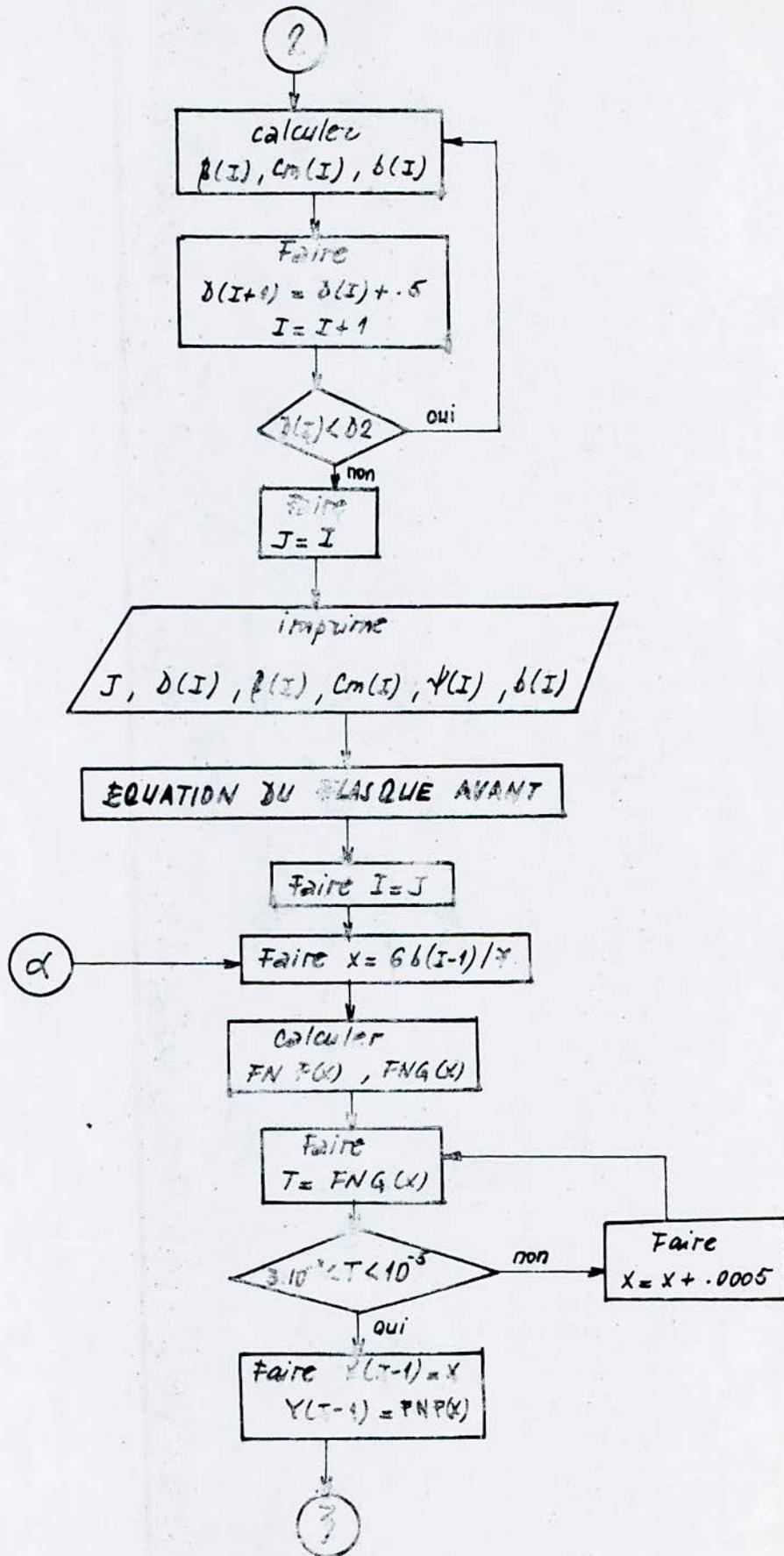
$\alpha, Q, H, nq, N, Q_i, H_{1k}, H'_k, \psi_{ra}, Q_f, p_1, p_2, \beta_{200}, \delta_{1e}, \lambda,$   
 $k_{cm2}, k_{cm1}, \eta, \eta_k, \eta_c, \eta_i, \eta_m, \psi, \psi_1, u_1, u_2, c_{m2}, c_{m1}, c_{u1},$   
 $c_{u2}, p_e, \tau, p_i, d, d_0, \epsilon, c_0, d_e, d_{1e}, d_{1i}, \alpha, \psi_1, \psi_2, \sigma_2,$   
 $t_2, s, b_1, \delta_2, \delta_1$

PARAMETRES DE LA COURBE  
 D'ENVELOPPE

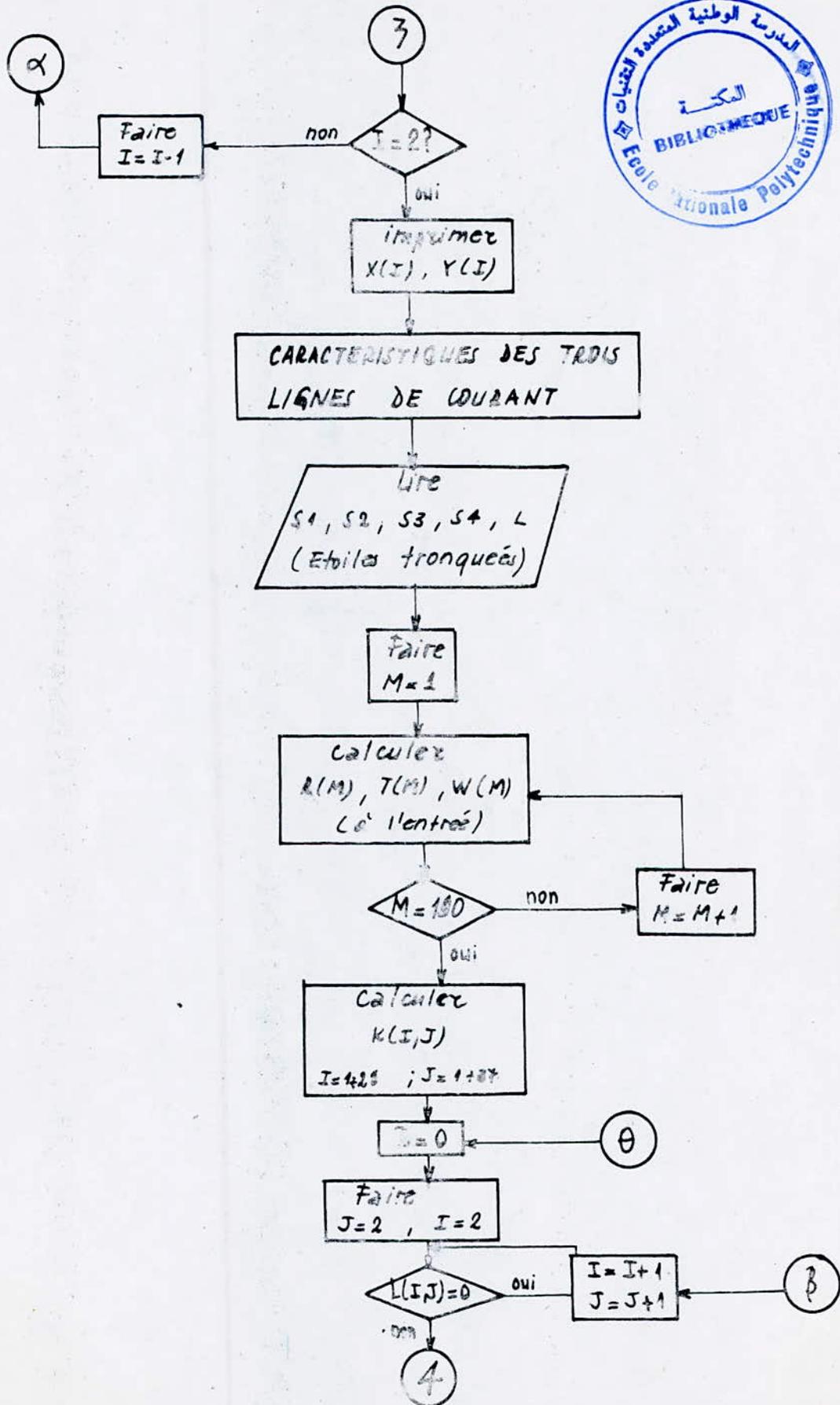
Faire  $I = 1$   
 $\delta(I) = \delta_1$

②

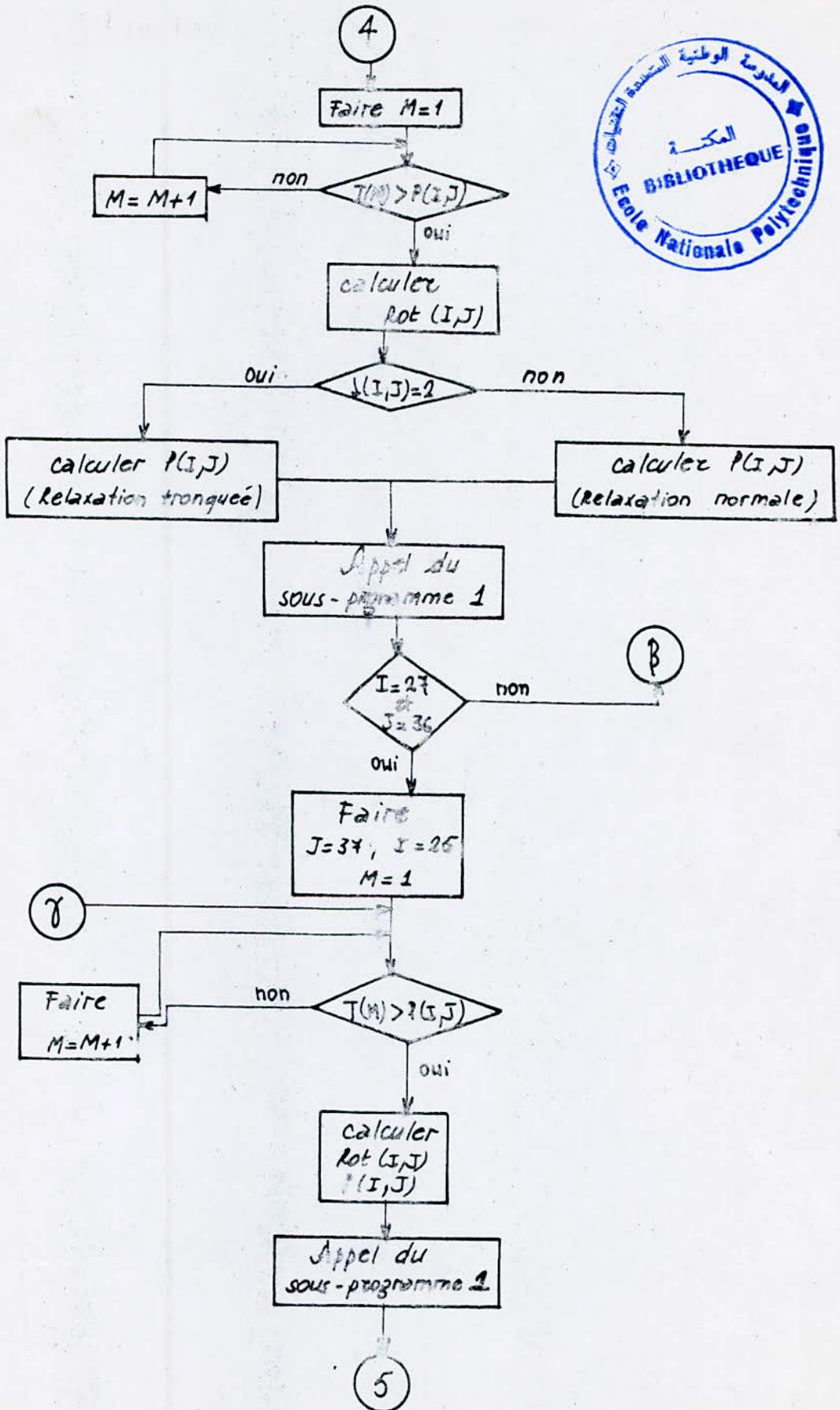
# ORGANIGRAMME GENERAL



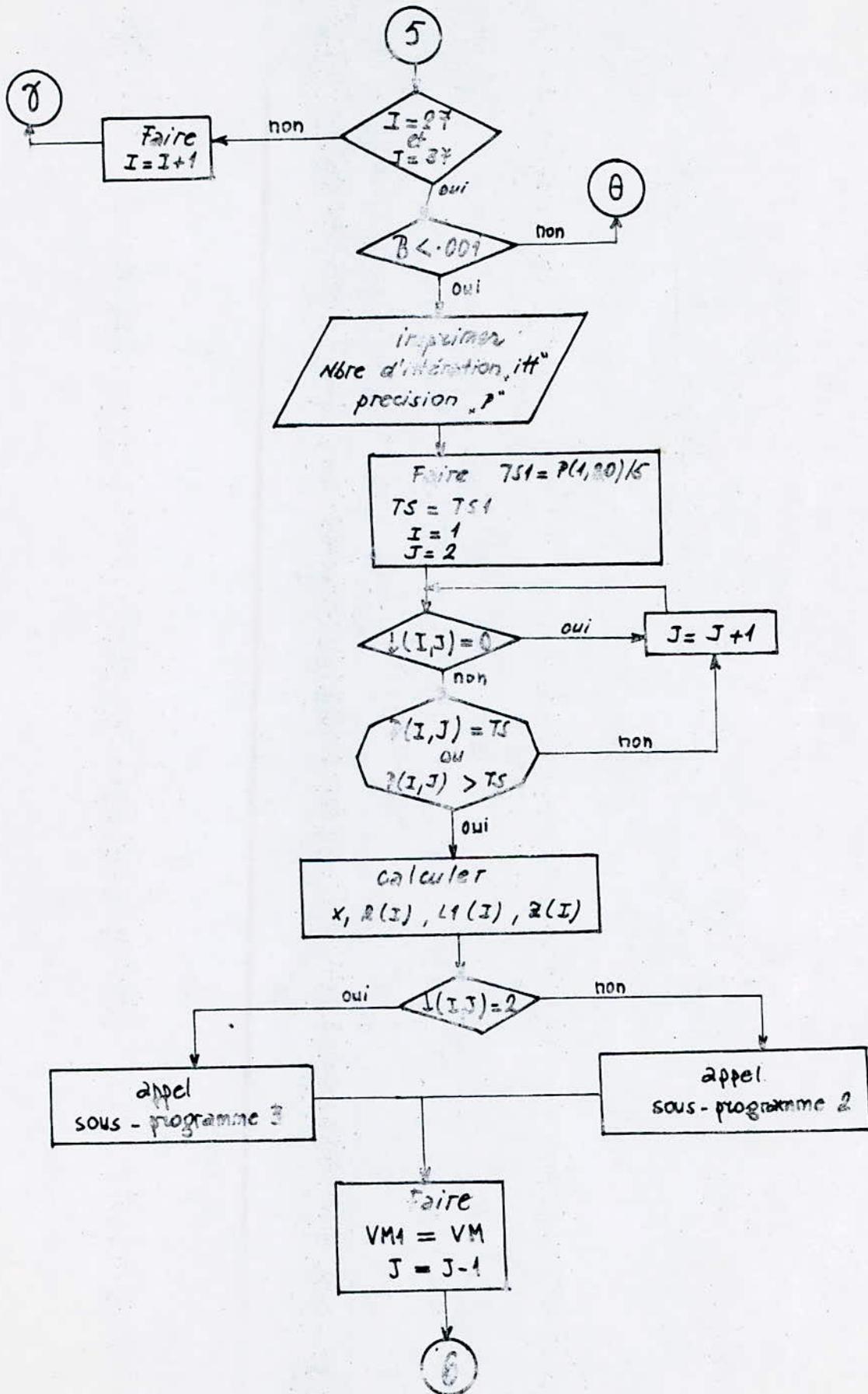
# ORGANIGRAMME GENERAL



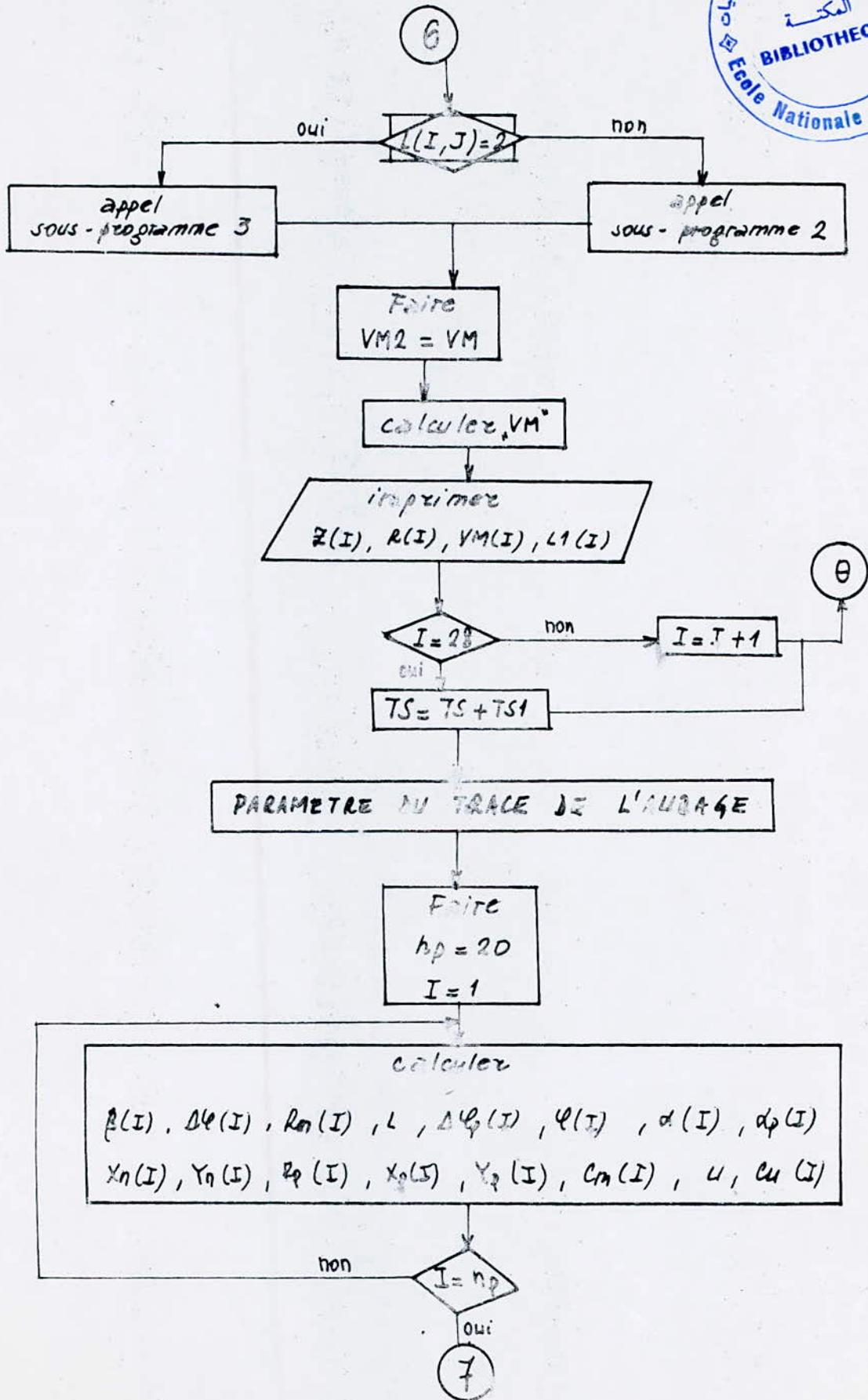
# ORGANIGRAMME GENERAL



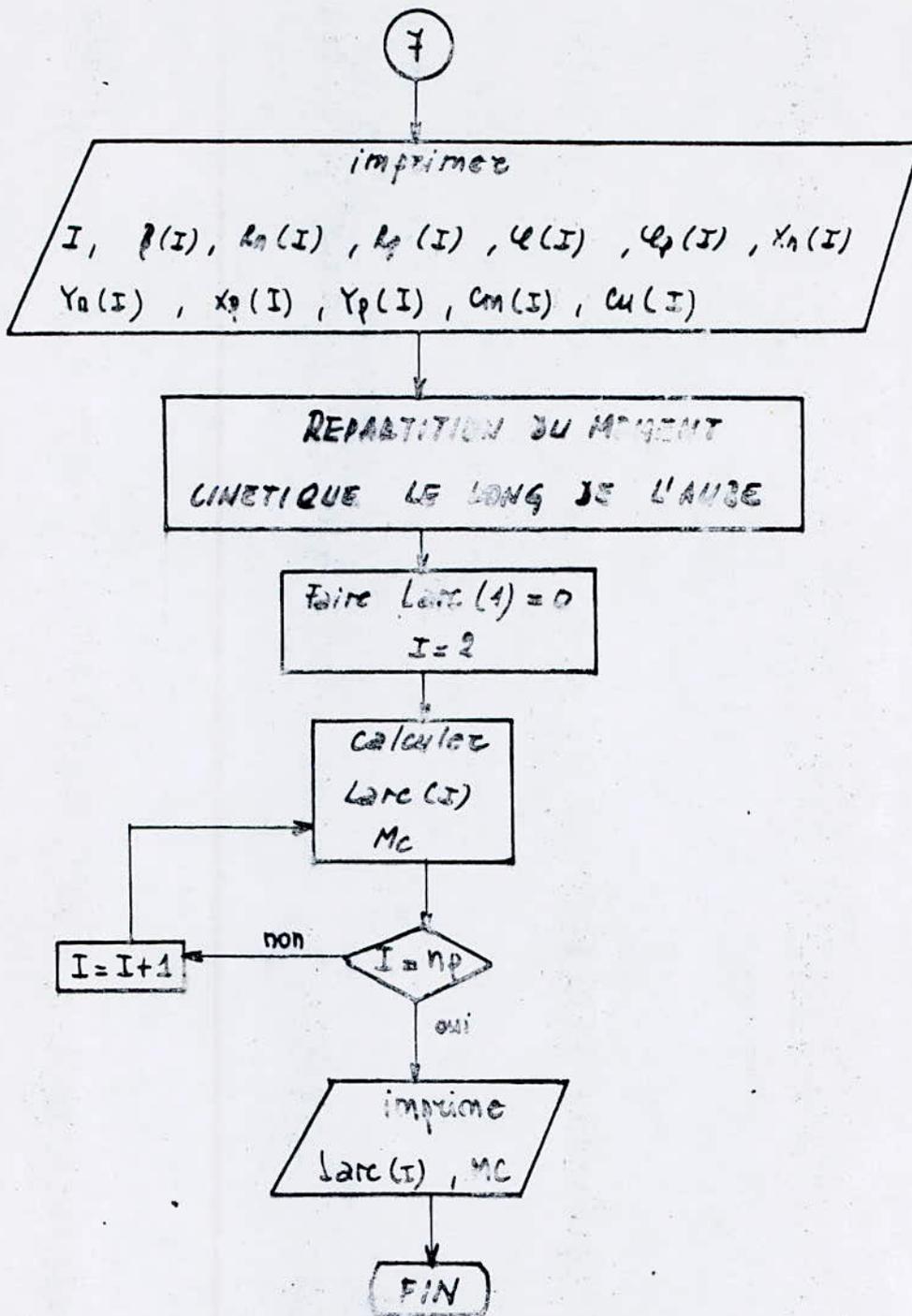
# ORGANIGRAMME GENERAL



# ORGANIGRAMME GENERAL

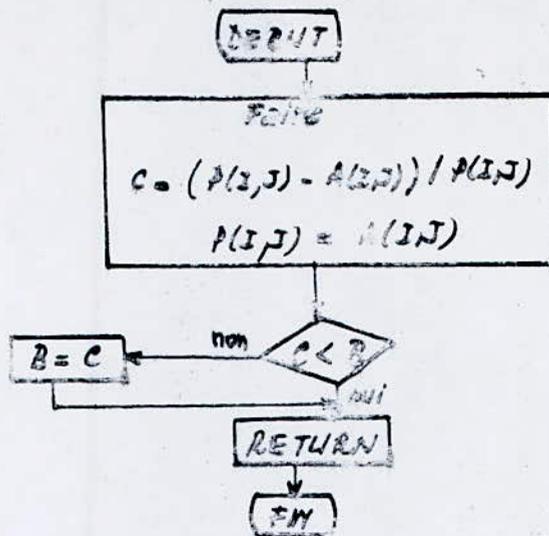


# ORGANIGRAMME GENERAL

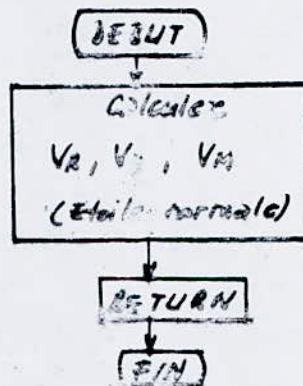


# ORGANIGRAMME GENERALE

## SOUS-PROGRAMME 1



## SOUS-PROGRAMME 2



## SOUS-PROGRAMME 3

