

وزارة التعليم و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE HYDRAULIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

Pour l'Obtention du diplôme d'Ingénieur d'Etat

SUJET

Etude Hydraulique de la roue
mobile d'une pompe axiale

+ ANNEXE

Proposé Par :

D^r THUMA A.

Etudié par :

M^r HEMINNA Med

Dirigé par :

D^r THUMA A.

PROMOTION : Juin 1988

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
LE NATIONALE POLYTECHNIQUE

التعليم العالي
الوطنية المتعددة التقنيات

Département: GENIE HYDRAULIQUE
Auteur: DR THUMA ANTAL
Ingénieur: HEMINA MOHAMED

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة - BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

المدة: إليري
بنة د/توما أ
بنة محمد س حمينة محمد

الموضوع : دراسة هيدروليكية للمروحة في مضخة محورية .

الملخص : يهدف هذا المشروع الى دراسة الخصائص الهندسية, الحركية و اليناميكية للقطاع الجناحي في الريشة التي تؤدي الى انشاء مروحة ذات جودة عالية خاصة بعد دراسة عددية للسيلان المحوري على آلة فاكس 220 و تحديد توزيع السرعة فيه .

Subject: ..ETUDE HYDRAULIQUE DE LA ROUE MOBILE D'UNE POMPE AXIALE.....

Résumé: LE BUT DE CE TRAVAIL EST L'ETUDE DES CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES CINEMATIQUES ET DYNAMIQUES DES PROFILS D'AILES PORTANTES POUVANT CONDUIRE A UN MEILLEUR RENDEMENT DE LA ROUE MOBILE , A LA SUITE D'UNE ETUDE NUMERIQUE SUR VAX VT 220 DE LA DISTRIBUTION DES VITESSES DANS UN ECOULEMENT MERIDIEN

Subject: A HYDRAULIC STUDY OF IMPELLER BLADE OF AN AXIAL PUMP.....

Abstract: THE AIM OF THIS WORK IS TO STUDY THE GEOMETRICAL , CINEMATICAL AND DYNAMICAL CHARACTERISTICS OF THE AEROFOIL SECTION OF THE BLADE LEADING TO THE BEST EFFICIENCY OF MOBIL WHEEL AFTER NUMERICAL STUDY IN MICROCOMPUTER VAX VT 220 OF THE SPEED DISTRIBUTION IN A MERIDIAN FLOW.

REMERCIEMENTS



Je tiens à remercier vivement

- Le Dr A. THUMA, mon promoteur, pour son accueil chaleureux et ses conseils précieux au cours de l'élaboration de ce travail.

- Tous les enseignants qui ont contribué à notre formation

- Toutes les personnes qui m'ont aidé à l'élaboration de ce travail

- Messieurs les membres du jury qui me feront le plaisir d'apprécier ce modeste travail.

HEMINNA Mohamed

DEDICACES

Je dedie ce modeste travail

- A mon père et ma mère

- A mes frères et sœurs

- A tous mes amis

HEMINNA Mohamed

SOMMAIRE

Pages
1

INTRODUCTION

Chap I : THEORIE DES POMPES HELICES

- | | | |
|-----|--|----|
| I.1 | Description d'une pompe hélice | 2 |
| I.2 | Notions fondamentales | 3 |
| I.3 | Développement d'une hélice en grille d'aubes | 4 |
| I.4 | Relations Géométriques dans une grille d'aubes | 5 |
| I.5 | Relations Cinématiques dans une grille d'aubes | 5 |
| I.6 | Directrice à ailettes | 7 |
| I.7 | Hauteur d'élevation théorique d'une pompe hélice | 9 |
| I.8 | Théorie de l'aile portante | 12 |
| I.9 | Cavitation dans une pompe hélice | 22 |

Chap II : CALCUL HYDRAULIQUE DE LA ROUE MOBILE

- | | | |
|------|--|----|
| II.1 | Les Dimensions principales de la roue mobile | 24 |
| II.2 | Calcul de l'aubage | 32 |
| 2.1 | Définition de l'écoulement Méridien | 32 |
| 2.2 | Éléments d'hydrodynamique | 33 |
| - | Fonction de courant | 38 |
| 2.3 | Résolution numérique de l'équation de Poisson par la méthode de Relaxation | 40 |
| - | Conditions Aux limites | 54 |
| - | Relaxation dans un point intérieur | 56 |
| - | Relaxation à la Sortie | 59 |
| - | Organigramme de Calcul | 61 |
| - | Détermination des lignes de courant méridiennes | 61 |
| II.3 | FACTEURS EXPERIMENTAUX DE TRACÉ | 63 |
| II.4 | Choix Du Profil | 64 |

Chap III : Calcul Hydraulique De la directrice à ailettes placée après la roue

65

Chap IV Exemple numerique d'Application

- Resultats

70

- tracé des profils

70

82

CONCLUSION

88

INTRODUCTION



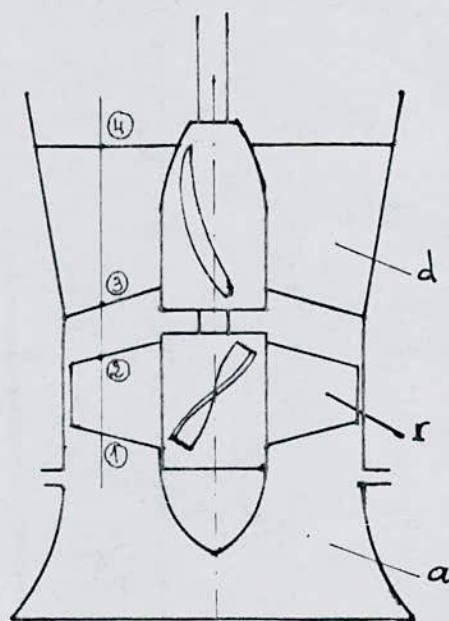
Les turbopompes sont des machines hydrauliques assurant la transmission de l'énergie mécanique reçue d'une source extérieure (le plus souvent des moteurs) au liquide pour l'élever à un niveau supérieur ou le refouler vers une région de plus haute pression. Cette transformation de l'énergie mécanique en énergie du fluide doit se faire le plus fidèlement possible c'est à dire en minimisant à l'extrême les pertes énergétiques de quelques natures que ce soit. Dans ce contexte, le souci majeur des projecteurs de pompes en général et axiales en particulier est la recherche des formes et des caractéristiques géométriques et hydrauliques optimales adaptées aux conditions de travail et aux performances espérées au départ.

Dans la gamme des turbopompes, les pompes hélices constituent la forme la plus simple pouvant fournir un débit Q avec une pression P ; de ce fait, et grâce à la régularité de sa section d'écoulement, une pompe hélice est caractérisée par un débit important avec une pression faible, ce qui la rend particulièrement adaptée à l'irrigation.

I.1 DESCRIPTION D'UNE POMPE HELICE

Une pompe helice se presente grosso modo, comme deux cylindres coaxiaux, delimitant, entre eux une region libre d'ecoulement. Le cylindre interieur de diametre D_h ferme à ses deux extremités, constitue le moyeu sur lequel viennent se fixer les pales de l'helice en forme d'ailes portant le cylindre exterieur de diametre D_o , légèrement evasé à ses deux extremités constitue le corps de la pompe. L'helice est immédiatement suivie d'une directrice à ailettes immobiles fixées sur le moyeu et le corps de la pompe.

Dans ce qui suit, pour distinguer les caractéristiques propres à chaque région de la pompe nous repérons ces dernières, en affectant chacune d'elles d'un numéro tel que sur la figure 1.



a: tubulure d'aspiration
 r: roue
 d: directrice

fig 1. Schema d'une pompe helice

I.2 NOTIONS FONDAMENTALES

- 3 -

Certaines notions de base relatives au domaine des turbopompes seront rencontrées tout au long de cet ouvrage, de ce fait elles méritent d'être définies au préalable :

I.2.1 Débit effectif (ou débit tout simplement) : Q

C'est la quantité de fluide disponible par unité de temps dans la section de sortie de la pompe.

I.2.2 Débit interne Q_{int}

C'est le débit disponible à l'intérieur de la pompe, c'est à dire le débit qu'assurerait une pompe parfaitement étanche intérieurement et extérieurement pour la hauteur théorique d'élevation. Si ΔQ est le débit de fuite alors $Q_{int} = Q + \Delta Q$ [m^3/s]

I.2.3 Hauteur d'élevation théorique H_{th}

La hauteur théorique est la pression, exprimée en colon d'eau communiquée au fluide si l'écoulement était parfait.

I.2.4 Puissance utile P

La puissance utile est celle absorbée sur l'arbre de la roue pour élever un débit Q à une hauteur H . $P = \rho g Q H$ [Watt]

I.2.5 Puissance totale P_t

C'est la puissance, absorbée sur l'arbre de la pompe pour élever le débit Q à la hauteur H et vaincre les frottements sur les parois

$$P_t = \frac{P}{\eta}, \text{ avec } \eta \text{ le rendement global de la pompe.}$$

I.2.6 Rendement Hydraulique η_h

C'est le rapport de la hauteur effective H à la hauteur théorique H_{th} .

I.2.7 Rendement volumétrique : $\eta_v = \frac{Q}{Q_{int}}$

I.3 DEVELOPPEMENT DE L'HELICE EN GRILLE D'ALIBES

Afin de discuter le fonctionnement des pales de la roue mobile dans une pompe helice, il est commode de représenter les pales sur les developpements de plusieurs sections cylindriques dont trois sont particulièrement intéressantes : celle du moyeu D_g , celle du diamètre extérieur D_o , et enfin celle du diamètre effectif moyen D_m (c'est le diamètre au niveau duquel l'écoulement se partage en deux parties égales). Sur ces developpements, les pales apparaissent également espacées à la distance $t = \frac{\pi \cdot D}{Z}$ appelée « pas de la grille », où Z est le nombre de pales, et D , le diamètre de la section cylindrique considérée. Le rapport de la longueur de la corde de la pale à l'espace entre pales $\frac{l}{t}$, caractérise le degré d'obstruction de la section d'écoulement. [figure 2].

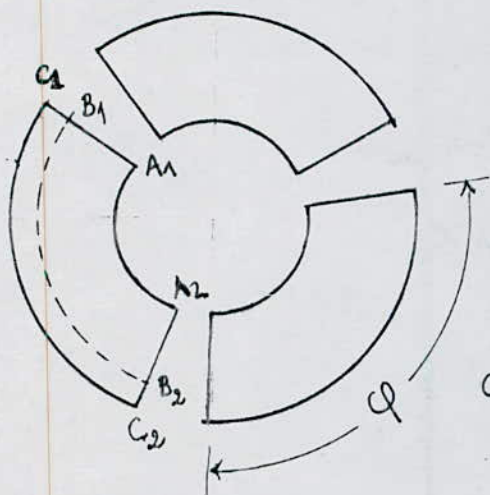


fig 2a: projection de la roue sur un plan perpendiculaire à l'axe

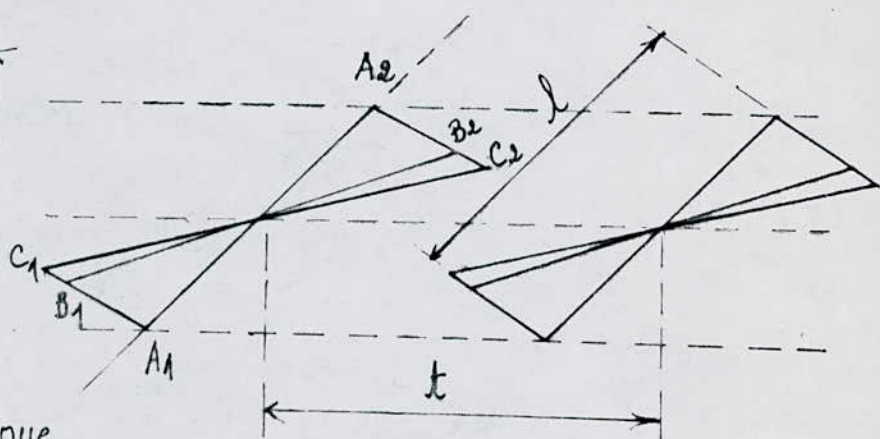


fig 2b: Developpement de la grille de pales.

I.4 RELATIONS GEOMETRIQUES DANS UNE GRILLE

Les grandeurs caractéristiques principales dans une grille cylindrique sont :

- L'angle d'inclinaison de la pale dans la grille: β_c compris entre la corde du profil de la pale et l'axe de la grille.
- Le pas t des pales, et la densité λ

La projection de la corde l , sur la direction de l'axe de la grille est égale au produit du rayon r et de l'angle de ceinture φ :

$$l \cos \beta_c = r \cdot \varphi \quad \text{d'où la longueur de la corde } l = \frac{r \cdot \varphi}{\cos \beta_c}$$

Et la densité de la grille: $\lambda = \frac{l \cdot Z}{2\pi \cdot r} = \frac{l \cdot Z}{t \cdot Z} = \frac{l}{t}$

Pour exercer efficacement une poussée sur le fluide l'angle d'inclinaison de la pale est augmenté progressivement de β_1 à β_2 leur différence mesure la courbure de la pale.

I.5 RELATIONS CINEMATIQUES DANS UNE GRILLE

Une particule fluide arrive dans la roue mobile, au niveau d'un certain rayon r , animée d'une vitesse relative \vec{W} , par rapport aux aubes, la rotation de la roue à une vitesse angulaire ω , lui communique une vitesse périphérique $u = r \cdot \omega$, qui, composée vectoriellement avec \vec{W} , donne à la particule une vitesse absolue \vec{C} . Cette dernière peut être décomposée à son tour selon deux directions particulièrement intéressantes: la direction

Axiale qui donne la composante axiale (méridienne) C_m , ou vitesse u d'écoulement, et la direction tangentielle à la roue, qui donne la composante tangentielle C_u .

Etant donnée que la particule fluide, entre dans la gille d'aube et la quitte au même rayon r , la vitesse périphérique u se trouve inchangée entre l'entrée et la sortie de la roue ($u_1 = u_2$).

La gille d'aubes, en modifiant la direction de l'écoulement seulement, permet, à la composante méridienne C_m d'être inchangée au niveau d'un même rayon ($C_{m1} = C_{m2} = C_m$), c'est à dire qu'elle n'engendre qu'un accroissement de la composante tangentielle : $\Delta C_u = C_{u2} - C_{u1}$. Ces deux considérations nous amènent à représenter les vitesses à l'entrée et à la sortie de la roue par le même diagramme (triangle des vitesses), à condition de considérer la vitesse relative de l'écoulement non perturbée par la présence des pales définie comme la moyenne des vitesses relatives à l'entrée et à la sortie :

$$\vec{W}_0 = \frac{\vec{W}_1 + \vec{W}_2}{2}$$

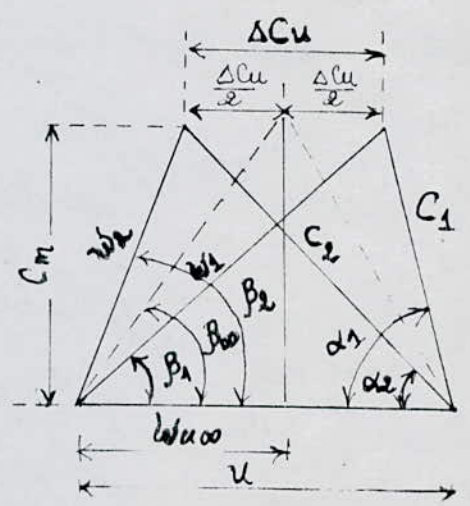
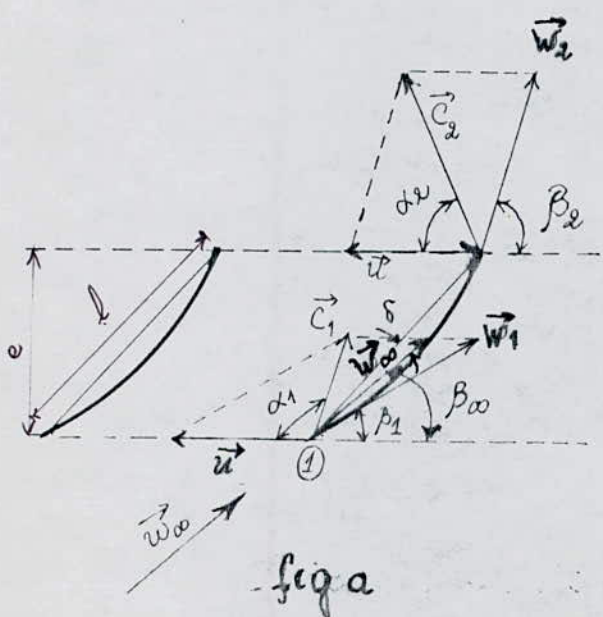


fig a: Developpement sur le plan, de la grille

e - epaisseur de la grille, l - longueur de la corde

w_{∞} - vitesse relative de la veine liquide non perturbée

β_c - angle de corde

δ - angle d'attaque

fig b. Triangle des vitesses à l'entrée et à la sortie de la roue

L'examen des triangles des vitesses nous fournit un certain nombre de relations

entre les vitesses, nécessaires pour le calcul de l'aubage.

$$w_{\infty}^2 = C_m^2 + \left(u - \frac{\Delta C_u}{2}\right)^2$$

ou quand le liquide arrive sans prérotation dans la roue:

$$w_{\infty}^2 = C_m^2 + \left(u - \frac{C_{u2}}{2}\right)^2$$

et l'angle de profil.

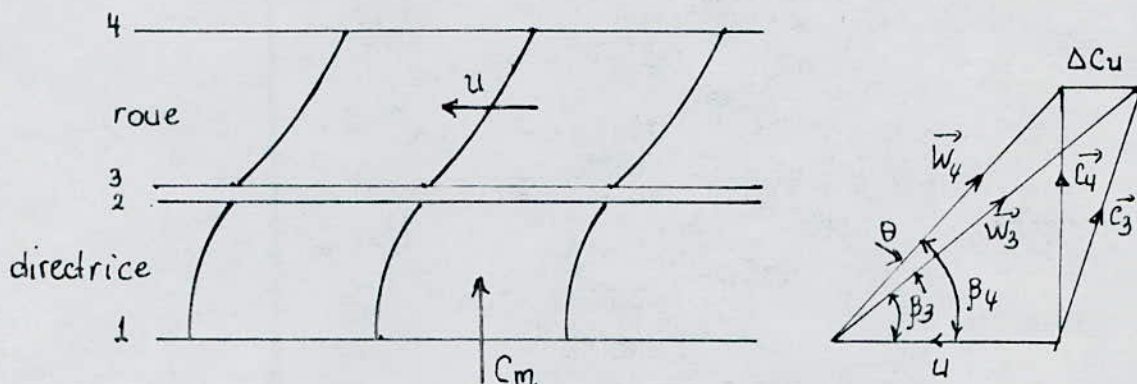
$$\operatorname{tg} \beta_{\infty} = \frac{C_m}{u - \frac{C_{u2}}{2}}$$

16 DIRECTRICE A AILETTES

L'helice est toujours associée à une deuxième grille constituée par des ailettes directrices. Cette dernière est placée soit avant soit après la roue.

a. Directrice placée Avant la roue

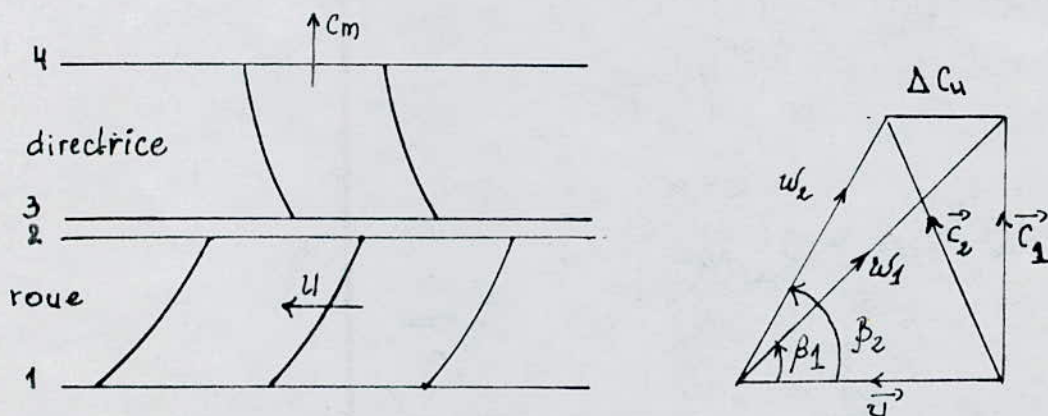
Dans ce cas le liquide arrive dans la directrice sous un angle α , et cette dernière lui donne une prerotation de vitesse ΔC_u , contraire à la rotation de la roue.



D'après le triangle de vitesse w_3 est plus grande que les autres composantes de vitesse, d'où les vitesses relatives à l'entrée de la roue sont excessives, ce qui signifie que les pressions peuvent être faibles au point de provoquer le phénomène de cavitation.

b. Directrice placée derrière la roue

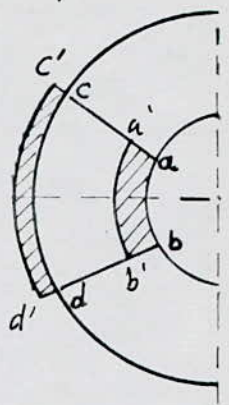
Dans ce cas le liquide arrive dans la roue sans prerotation, c'est à dire sous un angle $\alpha_1 = 90^\circ$, avec $C_{u1} = 0$, cette disposition est la plus adoptée



I.7 HAUTEUR D'ELEVATION THEORIQUE D'UNE ROUE AXIALE

Au mouvement absolu du liquide entre les aubes d'une roue tournant à une vitesse ω , appliquons le theoreme des moments des quantites de mouvement par rapport à l'axe de la roue.

A l'instant t , la masse de liquide contenue entre deux aubes occupe un espace limité par la section $abcd$ et à l'instant $(t+dt)$ un espace limité par la section $a'b'c'd'$ [figure



Exprimons la variation des moments de quantité de mouvement entre ces deux périodes ; ce qui revient à considérer la différence des moments des zones hachurées extrêmes de la figure, représentant, chacune, une même masse dm écoulée pendant le temps dt , cette différence vaut (en tenant compte des triangles des vitesses (page précédente) :

$$dm (C_2 r_2 \cos \alpha_2 - C_1 r_1 \cos \alpha_1)$$

Le moment des forces extérieures par rapport à l'axe de la roue n'est autre que le couple moteur C . On peut alors écrire selon le theoreme ci-dessus, le couple étant exprimé en mN .

$$\frac{dm}{dt} (C_2 r_2 \cos \alpha_2 - C_1 r_1 \cos \alpha_1) = C$$

En considérant la totalité des aubages dans lesquels circule un debit Q (m^3/s), la masse volumique de l'eau étant ρ (kg/m^3)

$$dm = \rho \cdot Q \cdot dt$$

Par conséquent, la variation, des moments de quantité de mouve-
-ment peut s'écrire :

$$\rho Q (C_2 r_2 \cos \alpha_2 - C_1 r_1 \cos \alpha_1) = C$$

si P est la puissance absorbée en joules/s, en négligeant les pertes
de hauteur

$$P = C \cdot \omega = \rho Q g H_{th}$$

où g est l'accélération de la pesanteur, et H_{th} la hauteur
théorique de la roue.

d'où
$$C = \frac{\rho Q g H_{th}}{\omega}$$

d'autre part, on peut exprimer la relation des moments
comme suit :

$$\rho Q (C_2 \omega r_2 \cos \alpha_2 - C_1 \omega r_1 \cos \alpha_1) = \rho Q H_{th} \cdot g$$

or $\omega r_1 = u_1$

$$\omega r_2 = u_2$$

donc après simplification on trouve

$$H_{th} = \frac{C_2 u_2 \cos \alpha_2 - C_1 u_1 \cos \alpha_1}{g}$$

Dans une pompe axiale les particules fluides entrent dans
la roue et la quittent au même rayon : c'est à dire
que $r_1 = r_2$ d'où $u_1 = u_2$ ce qui simplifie l'équation
précédante qui s'écrit :

$$H_{th} = \frac{u (C_2 \cos \alpha_2 - C_1 \cos \alpha_1)}{g}$$

D'autre part d'après les triangles de vitesses on a :

$$C_1 \cos \alpha_1 = C_{u1}$$

$$C_2 \cos \alpha_2 = C_{u2}$$

et sachant $v = r \cdot \omega$

On aboutit à la forme finale de la hauteur d'élevation théorique d'une pompe axiale (ou hauteur d'Euler)

$$H_{th} = \frac{v}{g} (C_{u2} - C_{u1}) = \frac{\omega}{g} r \cdot \Delta C_u$$

et en particulier si le liquide arrive sans prérotation ($\alpha_1 = 90^\circ$, $C_{u1} = 0$)

$$\text{Alors } H_{th} = \frac{v \cdot C_{u2}}{g} \dots \dots (1)$$

L'analyse des triangles de vitesses montre que l'angle d'entrée β_1 et l'angle de sortie β_2 , ont sur le moyeu des valeurs différentes de celles correspondant au diamètre extérieur de la roue, en effet dans le triangle de vitesses à l'entrée, l'angle β_1 sur le moyeu est donné par :

$\beta_1 = \text{Arctg} \frac{C_m}{u_1}$ lorsque le liquide arrive sans prérotation.

Comme $u_1 = \frac{\pi D_h \cdot N}{60}$; N étant le nombre de tours par minute de la roue

alors u_{D_h} est inférieure à u_{D_o} , ce qui entraîne que l'angle β_1 sur le diamètre extérieur D_o est inférieur à son homologue sur le moyeu D_h .

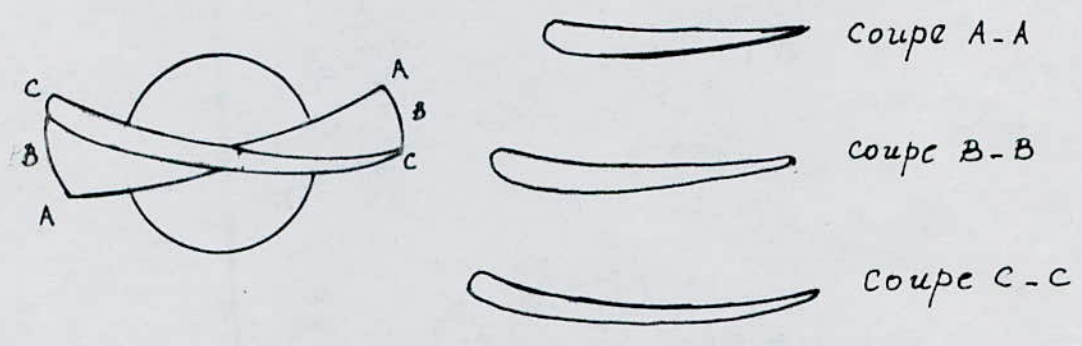
De même, pour l'angle de sortie de la gille, on remarque que la hauteur de pression reçue par le fluide

$\frac{u \cdot C_{u2}}{g}$ est constante pour un diamètre donné D , c'est à dire $u \cdot C_{u2} = \text{constante}$, ce qui

signifie que le liquide sort de la roue sous forme d'un vortex libre :

$u_{D_o} \cdot C_{u_{D_o}} = u_{D_h} \cdot C_{u_{D_h}}$ ou bien encore $\frac{D_o}{2} \cdot C_{u_{D_o}} = \frac{D_h}{2} \cdot C_{u_{D_h}}$, c'est à dire

que $C_{u_{D_0}}$ est inférieure à $C_{u_{D_h}}$, comme $\tan \beta_2 = \frac{C_m}{2 \frac{1}{2} D_0 C_{u_{D_0}}}$ sur le diamètre extérieur à la sortie, l'angle β_2 sur ce diamètre sera plus faible que son homologue sur le diamètre du moyeu. On peut donc conclure de tout cela que pour diriger l'écoulement afin que celui-ci se produise sans choc, la pale ne doit pas être plane mais tordue, telle que représentée sur la figure ci-dessous.



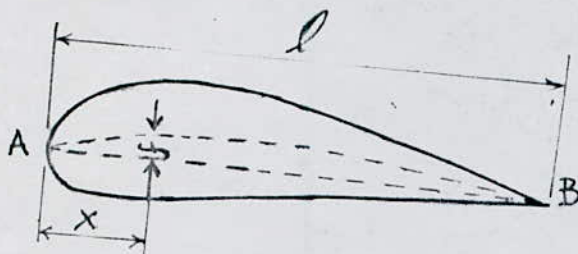
18 Theorie De L'aile portante

Bien qu'établie à l'origine pour les avions, l'aile portante a été utilisée avec grand succès dans le domaine des pompes hélices, les travaux menés par les chercheurs de différents pays ont permis l'élaboration d'une théorie assez riche autour des caractéristiques de l'aile portante que nous essayons de traiter dans ce sous-chapitre pour mieux nous familiariser avec le sujet.

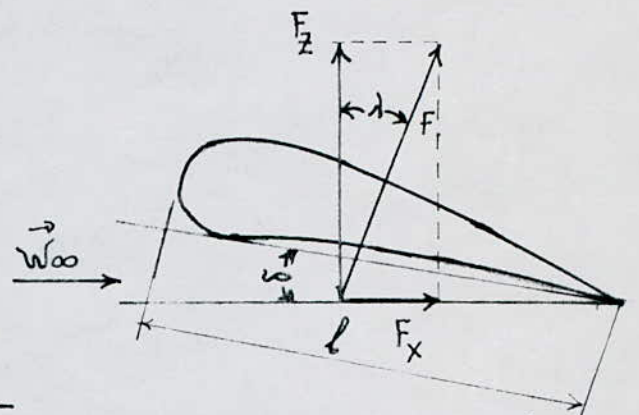
I.B.1 Terminologie

a. Aile portante : C'est un corps profilé constitué de telle façon qu'en position correspondant à la résistance aérodynamique minimale il assure une portance maximale.

b. Profil de l'aile portante : c'est le contour de la section de l'aile portante par un plan perpendiculaire à la direction de l'envergure



- Géométrie de l'aile portante -



- Dynamique de l'aile portante -

c. Extrados : C'est la surface convexe de l'aile

d. Intrados : C'est la partie concave de l'aile

e. Bord d'attaque A (arête) : ligne reliant les points d'attaque des profils consécutifs de l'aile

f. Bord de fuite B : la pointe arrière des profils consécutifs

g. Corde de référence du profil : droite reliant le bord d'attaque au bord de fuite

h. Squelette du profil : le milieu des segments perpendiculaires à la corde de référence

i. Fleche du profil f : distance maximale entre le squelette et la corde perpendiculairement à celle-ci.

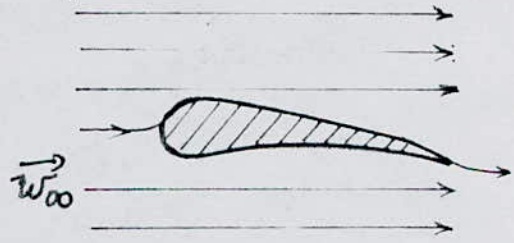
- j - épaisseur du profil e_{max} : distance maximale entre l'extrados et l'intrados
- k - épaisseur relative du profil e_{max}/l : rapport entre l'épaisseur du profil et la longueur de sa corde
- m - envergure de l'aile b : longueur de l'aile mesurée perpendiculairement à son plan de symétrie.
- n - Angle d'attaque δ : angle compris entre la corde du profil et le sens de l'écoulement non perturbé \vec{w}_∞

10.2 Dynamique de l'Aile Portante : Portance Et trainée

- Naissance De La Circulation Autour de l'aile

Considérons un profil placé dans un écoulement, si aucune circulation n'apparaît autour du profil ($\Gamma=0$), on dit que le profil est sous angle d'incidence nulle [figa], dans ce cas la distribution des vitesses

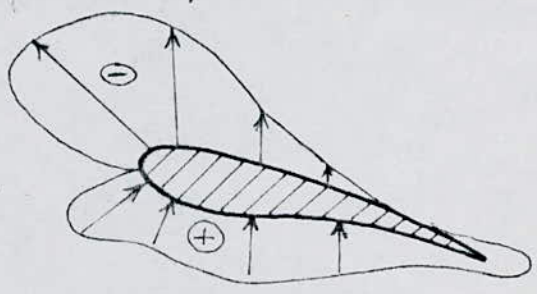
et par conséquent celle de la pression, est uniforme sur l'intrados et l'extrados.



- fig a -

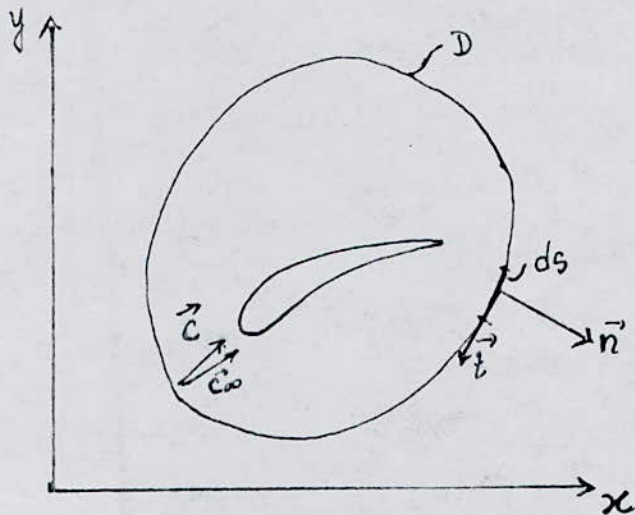
Si maintenant, nous changeons l'angle d'incidence, il en résulte une augmentation des vitesses sur l'extrados et une diminution sur l'intrados, correspondant à une distribution de la pression telle que représentée sur la figure

figb: Distribution de Pression autour du profil



Theoreme de Kutta - Joukowski

Considerons un profil isolé, à l'intérieur d'une courbe fermée et rapportée à un trièdre aérodyamique normalisé, nous considerons de plus la vitesse d'écoulement non perturbé \vec{C}_∞ .



- On écrit l'équation de continuité du système:

$$\frac{Dm}{Dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_F \rho \vec{C} \cdot \vec{n} ds = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \text{ (écoulement permanent) et } d\vec{s} = \vec{n} \cdot ds$$

$$\text{d'où } \int_D \vec{C} \cdot \vec{n} \cdot ds = 0$$

- Et le theoreme des quantites de mouvement:

$$\int_D \rho \vec{C} (\vec{C} \cdot \vec{n}) ds = -\vec{R} - \int_D p \cdot \vec{n} ds$$

p la pression et $-\vec{R}$ la resultante des actions de contact du profil sur

- le theoreme de Bernoulli en ecoulement irrotationnel :

$$p + \frac{\rho}{2} C^2 = \text{conste}$$

la vitesse \vec{C} est la somme de la vitesse non perturbée et de la vitesse induite par la presence du profil \vec{C}_i qu'on peut negliger si la perturbation est tres eloignee

$$\vec{C} = \vec{C}_\infty + \vec{C}_i \Rightarrow C^2 = C_\infty^2 + 2C_\infty C_i + C_i^2 \approx C_\infty^2 + 2C_\infty C_i$$

$$\text{d'où } \text{conste} = p + \frac{\rho}{2} (C_\infty^2 + 2C_\infty C_i) = p + \frac{\rho C_\infty^2}{2} + \rho C_\infty C_i$$

$$\text{ou bien } p = \text{conste} - \frac{\rho C_\infty^2}{2} - \rho C_\infty C_i$$

$$R = - \int_D p \cdot \vec{n} \, ds - \int_D \rho \vec{C} \cdot (\vec{C} \cdot \vec{n}) \, ds$$

$$R = - \left(\text{conste} - \frac{\rho C_\infty^2}{2} \right) \underbrace{\int_D \vec{n} \cdot ds}_0 + \rho \int_D (\vec{C}_\infty \cdot \vec{C}_i) \cdot \vec{n} \, ds - \rho \underbrace{\int_D \vec{C}_\infty \cdot \vec{C}_\infty \cdot \vec{n} \, ds}_0 - \rho \int_D \vec{C}_i \cdot (\vec{C}_i \cdot \vec{n}) \, ds$$

$$\vec{R} = \rho \int_D [(\vec{C}_\infty \cdot \vec{C}_i) \vec{n} - \underbrace{\vec{C}_i \cdot (\vec{C}_\infty \cdot \vec{n})}_{\text{negligeable}} - \vec{C}_i \cdot (\vec{C}_i \cdot \vec{n})] \, ds$$

en considerant la proprietes du double produit vectoriel et, en faisant certaines transformation on obtient:

$$R = \rho C_\infty \vec{j} \cdot \int_D (\vec{C}_\infty - \vec{C}_i) \cdot t \, ds = \rho C_\infty \wedge \vec{j} \cdot \underbrace{\int_D \vec{C}_i \cdot t \, ds}_{\text{circulation } \Gamma}$$

d'où finalement

$$\underline{R = - \rho C_\infty \Gamma \cdot \vec{k}} \dots \dots (2)$$

D'où l'énoncé du théorème de Kutta-Joukowski

"Lorsqu'un fluide parfait s'écoule avec une circulation autour d'une aile, les actions de contact du fluide sur l'obstacle se réduisent à une sustentation dont la grandeur par unité d'envergure est égale à $|\rho C_{\infty} T|$ et dont le sens s'obtient en faisant tourner le vecteur \vec{C}_{∞} de $\frac{\pi}{2}$ en sens inverse de la circulation positive."

$$\text{d'où } \begin{cases} R_{xc} = 0 \\ R_y = -\rho C_{\infty} T \end{cases}$$

Generalisation à une grille d'aubes

Considérons une succession de profils équidistants constituant une grille d'aubes telle que sur la figure c, avec un contour ABCD.

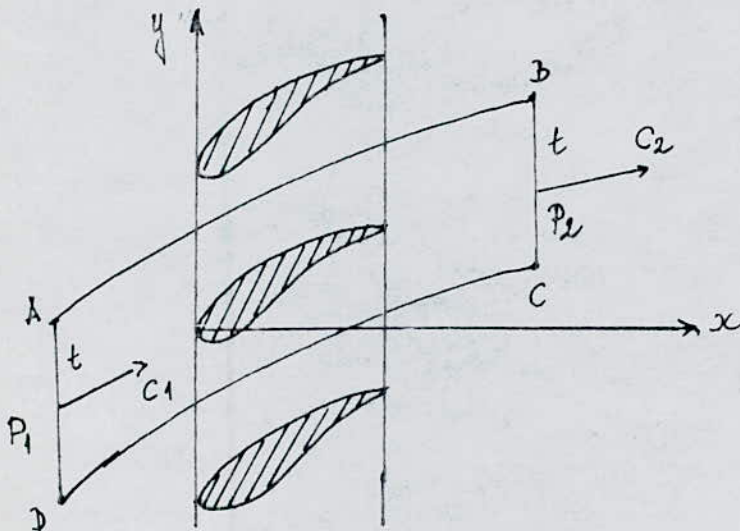
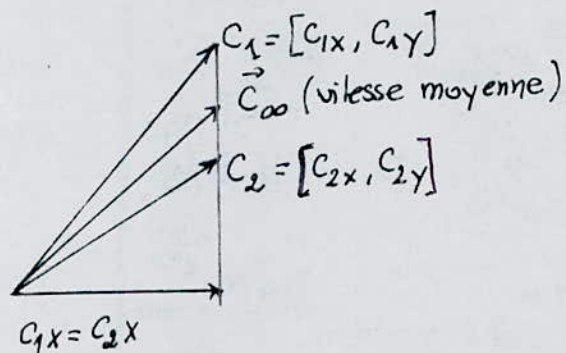


fig c

AB et CD sont des lignes de courant. cherchons les forces F_x et F_y qui agissent sur les aubes.

A l'entrée de la grille la vitesse du courant est $\vec{C}_1 = [C_{1x}, C_{1y}]$ et à la sortie elle est $\vec{C}_2 = [C_{2x}, C_{2y}]$, en deux points homologues de AB et CD les vitesses sont identiques.



Notons qu'il y a une conservation du débit entre deux aubes distantes de t .
d'où $C_{1x} = C_{2x}$. Pour trouver les composantes F_x et F_y de la force aérodynamique appliquons le théorème de quantité de mouvement sur le contour ABCD

$$\int_{\vec{ABCD}} \rho \vec{C} (\vec{C} \cdot \vec{n}) ds = F - \int_{\vec{ABCD}} p \cdot \vec{n} \cdot ds$$

en projetant sur les axes et en remarquant que l'intégrale sur deux lignes de courant de p est nulle, et en considérant que $C_{1x} = C_{2x}$ on a:

Sur l'axe ox , $F_x = [\rho_1 - \rho_2] \cdot t$

Sur l'axe oy , $F_y = \rho C_{1x} t [C_{1y} - C_{2y}]$

Si on remplace P_1 et P_2 dans F_x par les vitesses d'après l'équation de Bernoulli on aboutit finalement à:

$$F_x = -\rho \frac{C_{1y} + C_{2y}}{2} \cdot T'$$

$$F_y = -\rho C_{1x} T'$$

introduisent la vitesse moyenne $\vec{C}_\infty = \frac{\vec{C}_1 + \vec{C}_2}{2}$

d'où $F_x = -\rho C_{\infty y} T'$

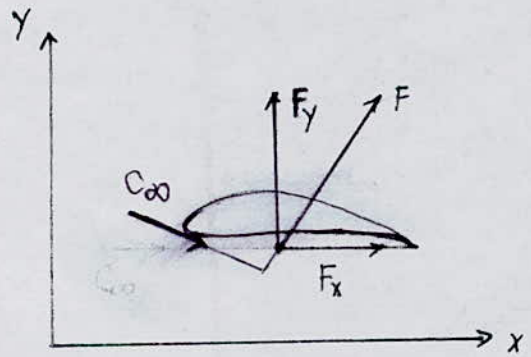
$$F_y = -\rho C_{\infty x} T'$$

alors la force résultante sera:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \rho T' \sqrt{C_{\infty x}^2 + C_{\infty y}^2} = \rho T' C_\infty$$

$$\boxed{F = \rho T' C_\infty} \dots \dots (3)$$

Donc le liquide subit de la part de la grille une force F perpendiculaire au vecteur vitesse moyen \vec{C}_∞ et ayant deux composantes F_x et F_y .



la composante F_x naît des frottements.

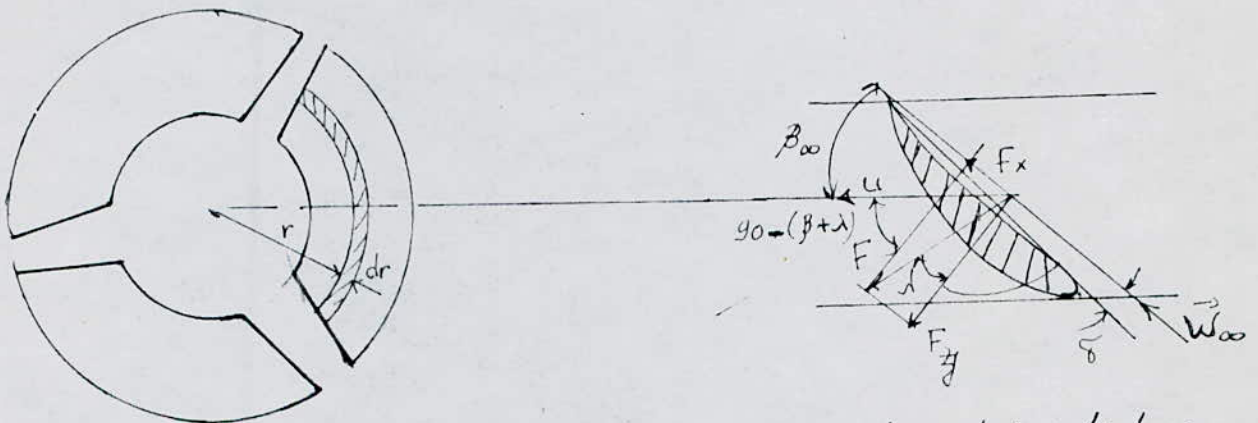
On a trouvé expérimentalement que $F_y = \frac{\rho C_\infty^2}{2} \cdot l \cdot b \cdot C_y$ où C_y est un coefficient de portance (expérimental)

et $F_x = C_x \frac{\rho}{2} C_\infty^2 l \cdot b$ avec b l'envergure et l l'aile

et C_x le coefficient de traînée (experimental).

les valeurs de C_x et C_y sont communiquées par les instituts d'aérodynamiques dans des bouquins spécialisés. la figure (6)^(*) donne les valeurs de C_y en fonction du coefficient de traînée C_x , la valeur optimale est telle que le rayon vecteur soit tangent à la courbe c'est à dire pour $C_y = 0,7$ pour le profil 490.

- considérons le système de forces agissant sur une pale. A cause de la distri-



- bution variable des vitesses méridiennes et des poussées élémentaires le long d'un rayon de la roue, on considère un anneau élémentaire de rayon r et de largeur dr .

la hauteur théorique pour une pompe axiale est donnée par:

$$H_{th} = \frac{u \cdot \Delta C_u}{g}$$

Sur un profil d'envergure dr on a une fore élémentaire :

$$dF_y = \frac{F_y}{b} \cdot dr \cdot N \quad \text{où } N \text{ est le nombre d'aubes}$$

$$dF_u = F \cdot \cos [90 - (\beta_{00} + \lambda)] \cdot \frac{N}{b} \cdot dr = F \cdot \sin (\beta_{00} + \lambda) \cdot \frac{N}{b} dr$$

La puissance elementaire dissipée dans l'anneau dr est:

$$dP = dF_u \cdot u = N \cdot \frac{F}{b} \sin (\beta_{00} + \lambda) \cdot u \cdot dr \quad (*)$$

le debit passant à travers l'anneau circulaire est:

$$dQ = 2\pi r \cdot dr \cdot c_m = t \cdot N \cdot dr \cdot c_m$$

et la puissance elementaire:

$$dP = dQ \cdot \rho g H_{th} = t \cdot N \cdot dr \cdot c_m \cdot \rho g H_{th} \quad (**)$$

enegalisant (*) avec (**) on a:

$$N \cdot \frac{F}{b} \sin (\beta_{00} + \lambda) \cdot u \cdot dr = t \cdot N \cdot dr \cdot c_m \cdot \rho g H_{th}$$

La force resultante est:

$$F = \frac{F_y}{\cos \lambda} = \frac{1}{\cos \lambda} c_y \frac{\rho}{2} \omega_{\infty}^2 \cdot b \cdot l$$

$$\text{d'où} \quad N \cdot \frac{1}{b} \frac{c_y}{\cos \lambda} \frac{\rho}{2} \omega_{\infty}^2 \cdot b \cdot l \sin (\beta_{00} + \lambda) \cdot u \cdot dr = t \cdot N \cdot dr \cdot c_m \cdot \rho g H_{th}$$

$$\text{soit} \quad c_y \frac{l}{t} = 2g H_{th} \frac{c_m}{u \omega_{\infty}^2 \sin (\beta_{00} + \lambda)} \cdot \cos \lambda \quad , \quad \text{avec} \cos \lambda \approx 1$$

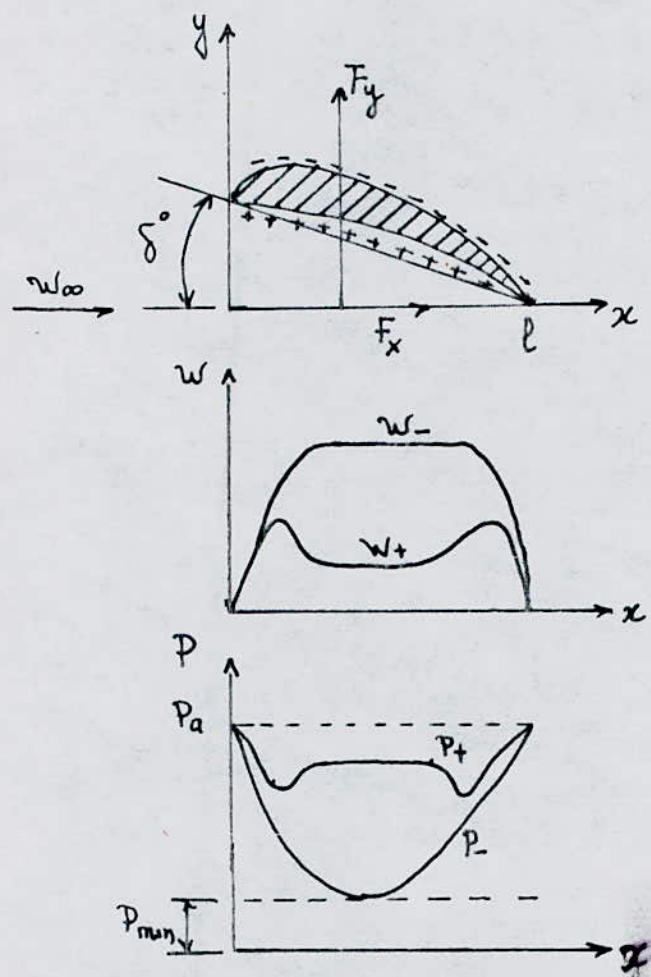
où finalement :

$$\boxed{c_y \frac{l}{t} = 2g H_{th} \frac{c_m}{u \omega_{\infty}^2 \sin (\beta_{00} + \lambda)} \dots \dots \dots (4)}$$

C'est la formule de base pour le calcul des grandeurs caracteristiques de la roue à partir des parametres hydrauliques et des triangle devitesse.

I.9 CAVITATION DANS UNE POMPE HELICE

Du fait de la faible hauteur dans une pompe helice ce phénomène est très fréquent. les figures ci-dessous representent la distribution des vitesses relatives et des pressions sur les deux faces du profil.



Cette différence de pression va exercer une force F_y sur le profil :

$$F_y = C_y \cdot \frac{\rho}{2} w_{\infty}^2 b \cdot l = (P_+ - P_{min})_{moyenne} \cdot l \cdot b$$

$(P_+ - P_{min})_{moyenne} = k \cdot (P_+ - P_{min})$, le coefficient k est equivalent au

coefficient de Cavitation de Thoma.

la chute de pression maximale est :

$$\Delta P_{\max} = P_a - P_{\min} = \frac{1}{k} C_y \frac{\rho}{2} w_{\infty}^2 \dots (5)$$

généralement on prend $k = 0,7$

Pour éviter la cavitation il faut que la pression P_{\min} soit supérieure à la tension de vapeur ($P_{\min} > P_s$). Ce-ci étant la pression minimale sur le profil est :

$$P_{\min} = P_a - \frac{1}{k} \cdot C_y \cdot \frac{\rho}{2} w_{\infty}^2$$

où P_a est la pression au bord d'attaque.

Pour augmenter la valeur de P_{\min} , on doit diminuer le coefficient de portance ce qui aura pour effet indésirable, la diminution des rendements, un compromis consiste à augmenter l'angle de profil.

Chapitre II: CALCUL HYDRAULIQUE DE LA ROUE MOBILE

Le calcul hydraulique de la roue mobile consiste en la détermination des rapports dimensionnels optimaux et des caractéristiques principales des profils permettant d'avoir un écoulement du liquide avec le minimum de résistance, et donc d'avoir les performances escomptées au départ.

II.1 : LES DIMENSIONS PRINCIPALES DE LA ROUE

A/ Si l'engin que nous projetons de calculer était idéal les équations théoriques du chapitre I, seraient suffisantes pour calculer, les dimensions principales (D_o et D_h) de la roue.

En réalité, l'écoulement à travers la roue, se fait avec des chocs sur les parois et les trajectoires du liquide sont perturbées, avec des changements brusques des directions offertes au passage du liquide, c'est pourquoi la théorie doit faire place aux mesures expérimentales caractérisées par l'examen de constantes de tracé établies en fonction de dépouillement de résultats d'essais effectués sur des engins du même type à travers le monde entier ayant donné le meilleur rendement.

L'une des méthodes les plus utilisées est La METHODE DE STEPPANOF basée sur la définition du coefficient de débit, de Pression et des autres constantes de tracé données ci-dessous:

- Le coefficient de débit : noté $\varphi = \frac{C_m}{u_2} \dots \dots \dots (6)$

c_m et u_2 sont respectivement la vitesse méridienne et périphérique mesurée à la sortie de la roue à partir d'essais au point de rendement maximum.

- Le coefficient de pression : caractérise la pression à débit nul, il est donné par :

$$\psi = \frac{2gH}{u_2^2} \dots \dots \dots (7)$$

- La constante de vitesse méridienne :

elle est donnée par :

$$K_{cm} = \frac{c_m}{\sqrt{2gH}} \dots \dots \dots (8)$$

- La constante de vitesse périphérique

$$K_{u_2} = \frac{u_2}{\sqrt{2gH}}$$

B/ Calcul des dimensions Principales

Comme pour tous les ouvrages hydrauliques le dimensionnement de la roue mobile, s'opère préliminairement en tenant compte des performances espérées de cette roue.

Ces performances sont caractérisées par :

- la quantité de fluide débitée par la pompe par unité de temps (Q)
- la pression exprimée en colonne d'eau (H), communiqué à ce fluide.

- Les conditions de travail de la roue, définies par le nombre de tours par minute, n .

Ces trois paramètres de départ sont reliés entre eux par le nombre de tours spécifique, paramètre introduit par les chercheurs pour classer les types de pompes suivant les formes et les dimensions compatibles avec les performances sus-citées. Le nombre de tours spécifique n_q est défini comme étant le nombre de tours à la minute que doit avoir une roue semblable à la roue considérée, pour élever à 1 m de hauteur un débit de 1 mètre cube par seconde.

Il est donné par l'expression :

$$n_q = n \cdot Q^{1/2} \cdot H^{-3/4} \dots \dots \dots (9)$$

$$\text{avec } [n] = \frac{\text{tours}}{\text{min}}$$

$$[H] = m$$

$$[Q] = m^3/s$$

Par suite la plus part des paramètres entrant dans la construction de la pompe sont fonction de ce nombre de tours spécifique.

et d'un autres parametre de classification des pompes appelé diametre specifique; Il est donné par :

$$\boxed{\sigma = 1,865 \cdot D_o H^{1/4} Q^{-1/2}} \dots \dots (10)$$

où D_o est le diametre exterior de la roue [m]
 $[H] = m$
 $[Q] = m^3/s$

Pour definir le diametre specifique, reprenons la definition du coefficient de debit :

$$\varphi = \frac{Q}{\frac{D_2^2 \pi}{4} \cdot u_2}$$

et celle du coefficient de pression :

$$\psi = \frac{2gH}{u_2^2}$$

d'où on peut tirer le diametre D_2 :

$$D_2 = \sqrt{\frac{4}{\pi} \frac{Q}{\varphi \cdot u_2}}$$

on exprime u_2 en fonction du coefficient de pression, il vient :

$$D_2 = \sqrt{\frac{4}{\pi} \frac{Q}{\varphi}} \sqrt[4]{\frac{\psi}{2gH}} = \frac{\sqrt[4]{\psi}}{\sqrt{\varphi}} \sqrt{\frac{4Q}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2gH}}$$

Le coefficient de diamètre est défini tel que :

$$\delta = \frac{\sqrt[4]{\psi}}{\sqrt{\varphi}}$$

Donc :

$$\delta = D_2 \frac{\sqrt[4]{2gH}}{\sqrt{\frac{4}{\pi} Q}} = \frac{\sqrt[4]{2g}}{\sqrt{\frac{4}{\pi}}} D_2 H^{1/4} Q^{-1/2}$$

en remplaçant les constantes g et π par leur valeurs numériques on aboutit à la relation [10] .

Avec cela, nous aboutissons à l'établissement des formules donnant les dimensions principales de la roue, à savoir le diamètre du moyeu D_h et le diamètre extérieur D_o . Pour raison pratique, nous considérons le rapport de moyeu :

$$\gamma = \frac{D_h}{D_o}$$

celui-ci caractérise le degré d'obstruction de la section d'écoulement, il est strictement lié au nombre de tours spécifique, sa valeur finale est adoptée selon les résultats expérimentaux de pompes semblables.

Sachant :

$$Q = C_{m_2} b_2 \pi D_{moy}$$

$$n \left(\frac{\text{tour}}{\text{min}} \right) = \frac{60 U_2}{\pi \cdot D_m}$$

$$H \text{ (m)} = \varphi \frac{U_2^2}{2g}$$

$$\varphi = \frac{C_{ms}}{U_2}$$

avec : $D_{\text{moy}} = \frac{D_o + D_h}{2}$ le diamètre moyen

$$b_2 = \frac{D_o - D_h}{2} \text{ la largeur de la roue}$$

et $D_m = \sqrt{\frac{D_o^2 + D_h^2}{2}}$ le diamètre effectif moyen défini

comme le diamètre au niveau duquel l'écoulement se partage en deux parties égales.

Et en regroupant les constantes en une seule dans l'expression du nombre de tours spécifique n_q , on aura :

$$n_q = n Q^{1/2} H^{-3/4} = 315,42 \left(\frac{b_2}{D_m} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{D_{\text{moy}}}{D_m} \right)^{1/2} \cdot \frac{\varphi^{1/2}}{\varphi^{3/4}}$$

En remplaçant D_m , D_{moy} , b_2 et ∇ par leur expressions on aboutit à formule de base pour le calcul des dimensions principales de la roue mobile :

$$\boxed{nq = 223,14 \left(\frac{1 - \nabla^2}{1 + \nabla^2} \right)^{1/2} \cdot \frac{\varphi^{1/2}}{\psi^{3/4}} \dots \dots \dots (11)}$$

De l'expression [11] on déduit l'expression donnant directement le rapport du moyeu :

$$\boxed{\nabla = \sqrt{\frac{1 - nq \psi^{3/2} / 49793 \varphi}{1 + nq \psi^{3/2} / 49793 \varphi}} \dots \dots \dots (12)}$$

Dans cette expression, nq est d'abord calculé en utilisant l'expression [9], ensuite φ et ψ sont calculés à l'aide des expressions [6] et [7] après avoir calculé au préalable les coefficients de vitesses méridienne, et périphérique en utilisant les formules empiriques suivantes :

$$K_{cm} = 0,0476 + 0,02 nq^{5/9} \dots \dots \dots (13)$$

$$K_{u_2} = \frac{nq}{160} + 0,8 \dots \dots \dots (14)$$

K_{u_2} peut aussi être déterminé par simple lecture du diagramme [1] de la page 68.

Ensuite, ayant la valeur de \bar{v} , on peut calculer le diamètre extérieur D_0 de la roue en considérant l'équation de continuité et l'expression [8] pour la vitesse méridienne à la sortie.

$$Q = C_{m_2} \frac{\pi}{4} D_0^2 (1 - \bar{v}^2) \dots \dots \dots (15)$$

d'où

$$D_0 (m) = \sqrt{\frac{4Q}{\pi C_{m_2} (1 - \bar{v}^2)}} \dots \dots \dots (16)$$

et enfin le diamètre du moyeu :

$$D_h = \bar{v} \cdot D_0 \dots \dots \dots (17)$$

II.2 CALCUL DE L'AUBAGE

Le calcul hydraulique de l'aubage, consiste en la détermination des caractéristiques, géométriques et hydrauliques des profils utilisés dans la grille. Ces caractéristiques sont totalement définies par la connaissance de la distribution du champ de vitesses en amont de la grille.

La détermination du champ de vitesses se fait par la résolution numérique des équations hydrodynamiques de l'écoulement méridien du liquide dont les résultats nous permettent d'adopter définitivement ou de corriger les dimensions principales établies précédemment.

2.1 Définition de l'écoulement Méridien

La rotation de la roue engendre un écoulement du liquide suivant des trajectoires spirales situées sur des surfaces cylindriques concentriques avec l'arbre de la roue. Cet écoulement de révolution est symétrique c'est à dire caractérisé par une distribution des vitesses méridiennes C_m indépendante de l'angle polaire du plan contenant la vitesse C_m . Donc afin de déterminer le tracé des lignes de courant sur le plan nous coupons les surfaces de courant par des plans méridiens passant par l'axe de la roue. Cela nous permet de remplacer l'écoulement réel dans la pompe par un écoulement méridien où seule y apparaît la composante méridienne de la vitesse.

2.2: Elements D'hydrodynamique

L'etude de l'ecoulement du liquide (reel ou parfait) dans les canaux est basée sur deux equations fondamentales

2.2.1 Equation de continuité

L'equation de continuité est l'expression mathematique de la loi de conservation de la masse en hydrodynamique. A l'aide des variables d'Euler, elle peut-étre écrite sous plusieurs formes:

$$a/ \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} C = 0$$

$$\text{ou } \frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \right) = 0$$

Avec $\rho(x, y, z, t)$ la densité du fluide et $C(x, y, z, t)$ sa vitesse.

et $\operatorname{div} C = \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z}$ la divergence du vecteur vitesse C .

$$b/ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho C) = 0 \dots \dots \dots (18)$$

$$c/ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} C + C \cdot \operatorname{grad} \rho = 0$$

avec $\operatorname{grad} \rho$ le gradient de densité

2.2.2 Equation du Mouvement du fluide visqueux (equation de Navier-Stokes)

sous forme vectorielle :

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} + \text{grad} \frac{C^2}{2} - \vec{C} \wedge \text{rot} \vec{C} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} P + \vec{g} + \nu \cdot \Delta \vec{C} \dots (19)$$

où $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ [m^2/s] est la viscosité cinématique du fluide, et μ [$\frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}$] sa viscosité dynamique

et $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, l'opérateur Laplacien

N.B

L'équation [19] est valable pour les liquides Newtonniens caractérisés par une variation linéaire des contraintes de frottement τ avec le gradient des vitesses ($\nu = \text{constante}$), et pour les fluides incompressibles ($\rho = \text{constant}$) elle n'est pas valable pour le calcul de la couche limite car les forces de viscosité ($\nu \Delta \vec{C}$), y sont du même ordre de grandeur que les forces d'inertie $\frac{d\vec{C}}{dt}$, elle n'est pas valable également pour les fluides non-Newtonniens,

En développant les équations (18) et (19) pour deux dimensions on obtient le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho C_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho C_y) = 0 \dots \dots \dots (20) \\ \frac{\partial C_x}{\partial t} + C_x \frac{\partial C_x}{\partial x} + C_y \frac{\partial C_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + g_x + \nu \left(\frac{\partial^2 C_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_x}{\partial y^2} \right) \dots \dots (21) \\ \frac{\partial C_y}{\partial t} + C_x \frac{\partial C_y}{\partial x} + C_y \frac{\partial C_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + g_y + \nu \left(\frac{\partial^2 C_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_y}{\partial y^2} \right) \dots \dots (22) \end{array} \right.$$

Le problème fondamental d'hydrodynamique à deux dimensions est la recherche des champs de vitesse, de pression et de densité dans le fluide en mouvement, sous l'action de forces extérieures données, c'est à dire la recherche de quatre fonctions des coordonnées et du temps : $C_x(x, y, t)$; $C_y(x, y, t)$, $P(x, y, t)$ et $\rho(x, y, t)$ les équations de continuité et de mouvement (20), (21), (22) suffisent pour résoudre ce problème. Cependant pour tenir compte des particularités spécifique d'un problème concret et obtenir une solution univoque du système d'équations différentielles d'hydrodynamique indiquée ci-dessus, il est nécessaire de tenir compte également des ^{conditions} initiales et des conditions aux limites du problème considéré. Les conditions aux limites déterminent l'état du mouvement du fluide à l'instant initial $t=0$, $C_{x0} = f_1(x, y, 0)$; $C_{y0} = f_2(x, y, 0)$; $P(x, y, 0)$ etc

Dans notre cas le mouvement est permanent et la donnée des conditions

initiales n'est pas nécessaire. Les conditions aux limites déterminent les conditions particulières du mouvement du fluide à la limite de séparation avec les corps solides telles que les parois de la pompe.

Remarque :

La viscosité du liquide n'intervient notablement que dans des régions peu étendues de l'espace, lorsqu'un fluide de faible viscosité tel que l'eau s'écoule au contact d'un solide, ces régions se situent au voisinage immédiat du corps solide (couche limite) et dans les tourbillons qui prennent naissance en certains endroits de l'écoulement tels que les extrémités d'une aile ainsi qu'au bord de fuite, mais partout ailleurs l'écoulement est irrotationnel et le fluide peut être considéré parfait pour l'application des méthodes de résolution de l'écoulement, alors que l'introduction de la viscosité est indispensable pour l'explication de l'origine de la circulation et l'existence de traînée de profil.

Ceci étant on peut introduire des hypothèses simplificatrices qui faciliteront la résolution du problème. Pour cela nous considérons que l'écoulement est permanent c'est à dire $\frac{\partial C}{\partial t} = 0$, et négliger l'influence de la viscosité, et des forces de masse, d'autre part le liquide est supposé incompressible ($\rho = \text{constante}$) ce qui simplifie les équations (20), (21) et (22) qui deviennent :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} &= 0 \dots \dots \dots (23) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} C_x \frac{\partial C_x}{\partial x} + C_y \frac{\partial C_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \dots \dots \dots (24) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} C_x \frac{\partial C_y}{\partial x} + C_y \frac{\partial C_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \dots \dots \dots (25) \end{aligned} \right.$$

Si $\text{rot } \vec{C} = 0$, alors la vitesse C , peut-être dérivée d'un potentiel de vitesse :

$$C_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \dots \dots \dots (26)$$

$$C_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \dots \dots \dots (27)$$

en effet pour l'écoulement potentiel $\vec{C} = \text{grad } \varphi$.

$$\text{et } \text{rot } C / z = \frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0$$

où $\varphi(x, y)$ est le potentiel de vitesse.

En remplaçant C_x et C_y en (23) on a :

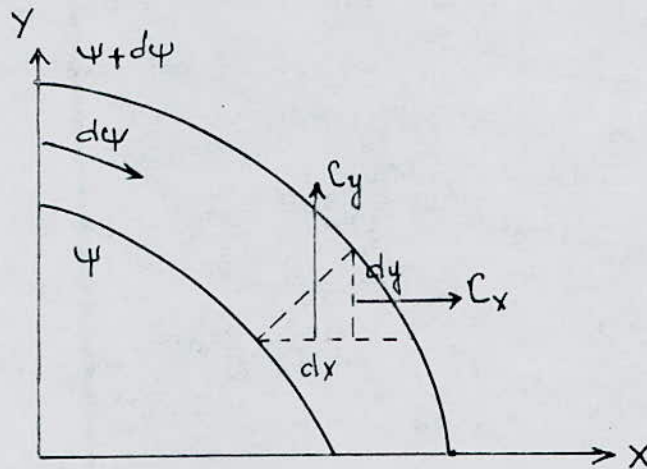
$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0} \dots \dots \dots (28)$$

Qui est l'équation de Laplace.

Remarque : Ne pas confondre la composante C_x de la vitesse absolue avec le coefficient de traînée C_x de la force hydrodynamique de traînée sur un profil

Fonction De Courant:

Soit, dans un écoulement méridien, deux lignes de courant voisines ψ et $\psi + d\psi$ dans un repère xoy .



D'après la figure on peut écrire:

$$d\psi = C_x dy - C_y dx \left[\frac{m^2}{s} \right] \dots \dots \dots (29)$$

$d\psi$ est une différentielle totale:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \dots \dots \dots (30)$$

En identifiant les différents termes de (29) et (30) on a:

$$C_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \dots \dots \dots (31)$$

$$C_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \dots \dots \dots (32)$$

Et en remplaçant (31) et (32) dans $\text{rot } \vec{C} / 2 = 0$, il vient:

$$\text{rot } \vec{C} / 2 = \frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0} \dots \dots \dots (33)$$

En remplaçant (31) et (32) dans l'équation de continuité (23) on aura

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$$

ce ci montre que l'équation de continuité est automatiquement satisfaite.

En reprenant l'idée de démonstration de l'équation (33) mais pour un écoulement rotationnel ($\text{rot } \vec{C} \neq 0$), il vient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = - \text{rot } \vec{C} \Big|_z} \dots \dots \dots (34)$$

qui est l'équation de poisson pour l'écoulement rotationnel

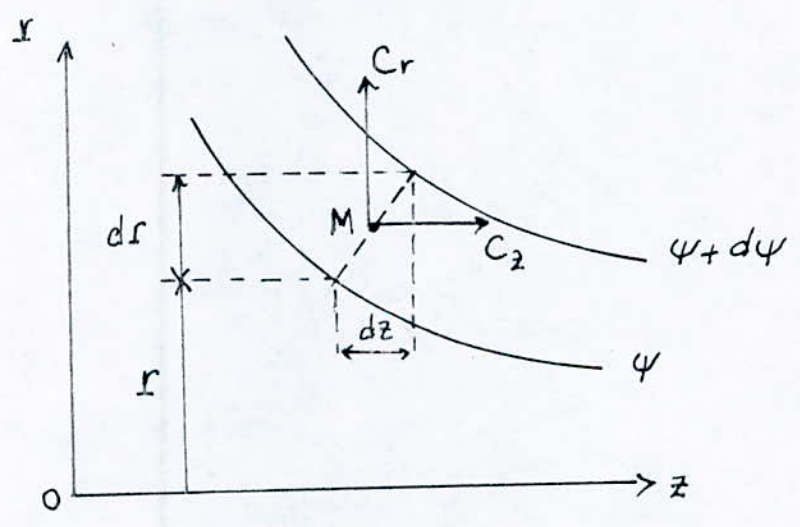
Etant donné que la fonction de potentiel ψ n'existe que dans le cas particulier où l'écoulement est irrotationnel, il est préférable de travailler avec la fonction de courant ψ qui existe dans tous les types d'écoulement qu'ils soient rotationnels ou irrotationnels.

Après la résolution de l'équation (33) ou (34), le champ de vitesses de l'écoulement peut être déterminé par intégration des équations (31) et (32). En suite, connaissant les vitesses en tout point de l'écoulement, la répartition des pressions P y est calculée à l'aide des équations (26) et (27).

2.2.3 RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION DE POISSON RELATIVE A L'ECOULEMENT MERIDIEN

Considerons, dans l'écoulement méridien à travers la section libre de la pompe deux lignes de courant infiniment rapprochées ψ et $\psi + d\psi$, où $d\psi$ est la variation infinitésimale de la fonction de courant.

La vitesse \vec{C} d'une particule de liquide, entraînée entre ces deux lignes de courant, peut être décomposée en deux vecteurs C_z et C_r relativement à un repère Ozr lié à la pompe (figure ci-dessous)



La rotation des lignes de courant, autour de l'axe Oz , engendre deux surfaces de courant, le débit infinitésimal passant entre ces deux surfaces de courant se présente sous la forme :

$$dQ = -C_r \cdot 2r \pi \, dz + C_z \cdot 2r \pi \, dr \dots \dots \dots (35)$$

D'autre part, la différentielle totale du débit Q , transité par l'ensemble des lignes de courant est:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial z} \cdot dz + \frac{\partial Q}{\partial r} \cdot dr \quad \dots \dots \dots (36)$$

Pour ne pas avoir à traîner la constante 2π dans les calculs qui vont suivre, il nous semble utile de définir la variation de la fonction de courant comme :

$$d\psi = \frac{dQ}{2\pi} \quad \dots \dots \dots (37)$$

Ce qui permet d'écrire la différentielle totale de la fonction de courant, après quelques substitutions :

$$d\psi = -C_r \cdot r \cdot dz + C_z \cdot r \cdot dr \quad \dots \dots \dots (38)$$

qui est de la forme:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot dz + \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot dr \quad \dots \dots \dots (39)$$

En comparant l'expression (38) avec (39) on déduit les relations qui donnent les composantes de la vitesse pour l'écoulement méridien :

$$\underline{C_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}} \quad \dots \dots \dots (40)$$

$$\underline{C_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}} \quad \dots \dots \dots (41)$$

N.B : Cette dernière expression sera utilisée ultérieurement pour le calcul

des vitesses méridiennes C_z , à l'entrée de la roue mobile à partir de la distribution de la fonction de courant à différentes rayons.

Finalement en remplaçant C_r et C_z par leurs expressions (40) et (41) dans l'expression de la composante perpendiculaire au plan r, z du rotationnel de vitesse C , ($\text{rot}_\theta C = \frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r}$) ; on aboutit à l'équation de Poisson relative à l'écoulement méridien.

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -r \cdot \text{rot}_\theta \vec{C}} \quad \dots \dots \dots (42)$$

C'est une équation aux dérivées partielles, du second ordre, avec deuxième membre. Elle est de la forme :

$$A \psi''_{rr} + B \cdot \psi''_{zz} + C \cdot \psi''_{zz} + D \psi'_r + E \psi'_z + F \cdot \psi = G$$

où A, B, C, D, E, F et G sont des fonctions des deux variables indépendantes z et r .

Dans l'expression (42) ; $B, E,$ et F sont nuls, et nous avons la relation

$$B^2 - 4 \cdot A \cdot C < 0$$

Ce qui signifie que notre équation est elliptique. Ce type d'équations est avantageux quant à la convergence de la méthode de résolution qui sera utilisée (méthode de Relaxation de Gauss-Seidel).

A - Equation Aux Differences finies

L'équation (42) contient les dérivées première; et secondes, de la fonction de courant qu'il faudra intégrer. Considérons la définition classique de la dérivée d'une fonction à une seule variable $y = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

la valeur numérique, de cette limite ne peut être donnée par aucun calculateur aussi puissant soit-il, cependant ce problème disparaît en donnant à Δx une valeur aussi faible que possible mais non, nulle.

Ce-ci revient donc à remplacer l'équation aux dérivées partielles originale (42) par une équation aux différences finies, dont la solution sera aussi celle de l'équation (42) à quelques erreurs près, ces erreurs sont principalement dues au remplacement des dérivées partielles par les différences finies.

Le même principe peut être généralisé à une fonction de deux variables z et ξ .

Considérons d'abord la différence dans la direction des z :

Le développement limité au deuxième ordre en série de Taylor, autour du point (z_0, ξ_0) de la fonction $\psi(z, \xi)$ s'écrit:

$$\psi(z, \xi) = \psi(z_0, \xi_0) + (z-z_0) \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{(z_0, \xi_0)} + \frac{(z-z_0)^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \Big|_{(z_0, \xi_0)}$$

où ξ relie entre z_0 et z

Si nous posons $z = z_0 + \Delta z$, nous obtenons apres quelques arrangements

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} / (z_0, r_0) = \frac{\psi(z_0 + \Delta z, r_0) - \psi(z_0, r_0)}{\Delta z} = \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} / (\xi, r_0)$$

En negligant la quantité $-\frac{\Delta z}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} / (\xi, r_0)$ on obtient une approximation

de $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ par

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} / (z_0, r_0) = \frac{\psi(z_0 + \Delta z, r) - \psi(z_0, r_0)}{\Delta z} \dots \dots \dots (43)$$

L'equation (43) obtenue apres la substitution de $z = z_0 + \Delta z$ est appelée difference finie à droite, une equation analogue appelée difference finie à gauche peut-etre obtenue en ecrivant $z = z_0 - \Delta z$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} / (z_0, r_0) = \frac{\psi(z_0, r_0) - \psi(z_0 - \Delta z, r_0)}{\Delta z} \dots \dots \dots (44)$$

Ces deux types de differences finies seront utilisees pour l'approximation de $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$. Celle-ci sera :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} / (z_0, r_0) = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial z} / (z_0 + \Delta z, r_0) - \frac{\partial \psi}{\partial z} / (z_0, r_0)}{\Delta z} \dots \dots \dots (45)$$

Si dans cette expression nous remplaçons $\frac{\partial \psi}{\partial z} / (z_0 + \Delta z, r_0)$ par :

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} / (z_0 + \Delta z, r_0) = \frac{\psi(z_0 + \Delta z, r_0) - \psi(z_0, r_0)}{\Delta z} \dots \dots \dots (46)$$

En remplaçant (43) et (44) dans (45) on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} / (z_0, r_0) = \frac{\psi(z_0 + \Delta z, r_0) - 2\psi(z_0, r_0) + \psi(z_0 - \Delta z, r_0)}{(\Delta z)^2} \dots \dots \dots (47)}$$

un raisonnement analogue peut être appliqué dans la direction des r avec un pas Δr donne la différence finie pour $\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}$:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} / (z_0, r_0) = \frac{\psi(z_0, r_0 + \Delta r) - 2\psi(z_0, r_0) + \psi(z_0, r_0 - \Delta r)}{(\Delta r)^2} \dots \dots \dots (48)}$$

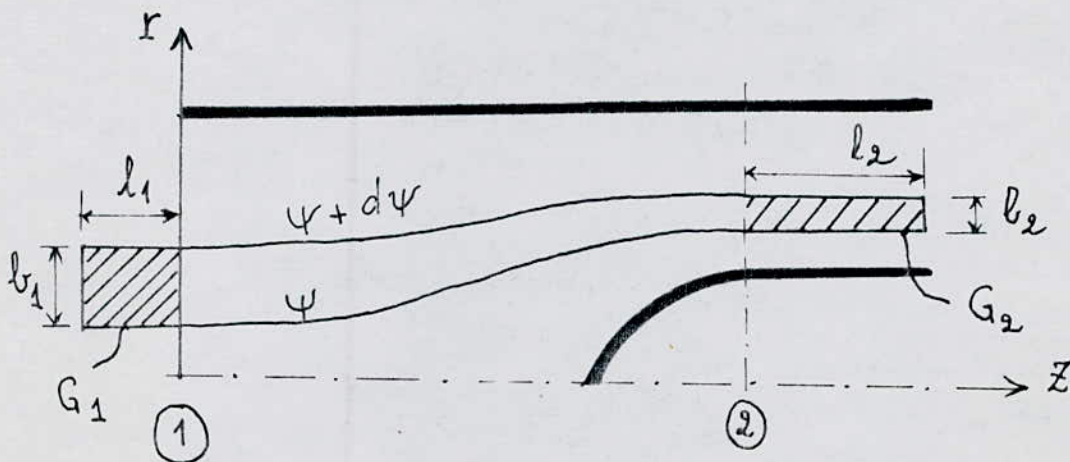
Ainsi avec ces expressions, l'équation aux dérivées, partielles, peut être complètement écrite en termes de différences finies suivante :

$$\boxed{\frac{\psi(z_0 + \Delta z, r_0) - 2\psi(z_0, r_0) + \psi(z_0 - \Delta z, r_0)}{(\Delta z)^2} - \frac{1}{r_0} \frac{\psi(z_0, r_0 + \Delta r) - \psi(z_0, r_0)}{\Delta r} + \frac{\psi(z_0, r_0 + \Delta r) - 2\psi(z_0, r_0) + \psi(z_0, r_0 - \Delta r)}{(\Delta r)^2} = -r_0 \cdot (\text{rot}_\theta \vec{C})(z_0, r_0) \dots \dots \dots (49)}$$

L'équation aux différences finies ainsi établie peut donc être approchée par une méthode numérique qui sera présentée plus loin dans ce chapitre mais avant cela nous ne devons pas perdre de vue le second membre de l'équation $(-r_0 \cdot \text{rot}_\theta \vec{C})$ dont la valeur numérique en chaque point est calculée en vertu de certaines propriétés du rotationnel relatives à l'écoulement méridien, et dont le développement théorique fait l'objet du paragraphe suivant :

Principe De Conservation Du Rotationnel de Vitesse - Theoreme De KELVIN

Dans l'écoulement méridien, rotationnel, permanent du fluide incompressible, non visqueux soumis uniquement à l'action du champ de pesanteur, dans la tubulure d'aspiration d'une pompe hélice [fig 3], considérons une courbe fermée G . De plus supposons que les lignes de courant dans la section d'entrée 1 et de sortie 2 sont parallèles à l'axe Z .



A l'instant t la circulation du vecteur vitesse \vec{c} le long de la courbe fermée G est par définition :

$$\Gamma = \oint_G \vec{c} \cdot d\vec{s} \dots \dots \dots (50)$$

Au cours du mouvement, les particules constituant cette courbe sont entraînées, la dérivée par rapport au temps de la circulation est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\oint \vec{c} \cdot d\vec{s} \right) = \oint \frac{d\vec{c}}{dt} \cdot d\vec{s} + \oint \vec{c} \cdot \frac{d}{dt} (d\vec{s}) = \\ &= \oint \vec{g} \cdot d\vec{s} + \oint \vec{c} \cdot d\vec{c} \end{aligned}$$

Le terme $\oint \vec{c} \cdot d\vec{c} = \oint d\left(\frac{c^2}{2}\right)$ est nul, puisque la circulation se fait le long d'une courbe fermée ; et en remplaçant \vec{g} par son expression en fonction du gradient du champ de Potentiel P_g :

$$\vec{g} = \frac{1}{\rho} \text{grad } P_g$$

il vient :

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint \left(-\frac{1}{\rho} \text{grad } P_g \right) \cdot d\vec{s} + \oint d\left(\frac{c^2}{2}\right) = 0 \dots \dots (51)$$

Puisque la circulation du gradient le long d'une courbe fermée est nulle. d'où l'énoncé du théorème de KELVIN :

" Dans l'écoulement rotationnel permanent d'un fluide incompressible non visqueux, soumis uniquement à un champ de pesanteur, la circulation

du vecteur vitesse le long d'une courbe fermée entraînée dans le mouvement conserve une valeur constante.

Donc en vertu de ce theoreme : $\Gamma_{G_1} = \Gamma_{G_2} \dots \dots \dots (52)$

D'autre part, en suivant l'evolution du volume de fluide renfermé par la courbe G_1 , cette dernière, va toujours renfermer les mêmes particules fluides puisque le liquide est incompressible ($\rho = \text{constante}$), l'equation de continuité écrite entre les sections 1 et 2 devient :

$$2 r_1 \pi l_1 v_1 = 2 r_2 \pi l_2 v_2 \dots \dots \dots (53)$$

où r_1 et r_2 designent, la position de la courbe G respectivement à l'entrée et à la sortie.

Or d'après le theoreme de Stokes :

$$\Gamma_G = \oint \vec{C} \cdot d\vec{s} = \iint_{l \times b} \text{rot}_\theta \vec{C} \cdot dl \cdot db = \text{rot}_\theta \vec{C} \cdot l \times b \dots \dots (54)$$

où bien en utilisant l'egalité (52) on obtient :

$$\Gamma_{G_1} = \Gamma_{G_2} \implies \text{rot}_\theta \vec{C}/_1 \cdot l_1 \cdot b_1 = \text{rot}_\theta \vec{C}/_2 \cdot l_2 \cdot b_2$$

Laquelle après division par les membres de l'egalité (53) donne la relation de conservation du rotationnel de vitesse :

$$\frac{\text{Rot}_\theta \vec{C}/_1}{r_1} = \frac{\text{Rot}_\theta \vec{C}/_2}{r_2} \dots \dots \dots (55)$$

Finalement, sachant que le rotationnel de vitesse dans la section 1 est relié à la fonction de courant ψ dans cette même section par :

$$\text{rot}_{\theta} \vec{C} /_1 = - \frac{\partial C_z /_1}{\partial r} = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \dots \dots (56)$$

ou bien en divisant les deux membres de l'égalité par le rayon r_1 :

$$\frac{1}{r_1} \cdot \text{rot}_{\theta} \vec{C} /_1 = - \frac{1}{r_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \dots \dots \dots (57)$$

le principe de conservation du rotationnel s'énonce comme suit :

"La valeur du rotationnel de vitesse de l'écoulement méridien sur une certaine ligne de courant ψ_i rapporté à la distance r de cette dernière à l'axe de la pompe Oz , ne varie pas tout au long de cette ligne de courant."

Autrement dit il existe une certaine relation fonctionnelle entre $\frac{\text{rot}_{\theta} \vec{C}}{r}$ et la fonction de courant $\psi = \psi_i$, qui peut être formulée par :

$$\frac{\text{rot}_{\theta} \vec{C}}{r} = f(\psi) \dots \dots \dots (58)$$

cette dernière relation constitue le principe de conservation du rotationnel pour l'écoulement méridien.

N.B : La relation (58) est fondamentale pour la résolution numérique de l'équation de Poisson (42), en effet après avoir formulé la condition aux limites dans la section 1 à partir d'une certaine distribution des vitesses méridiennes C_z , la valeur du rotationnel γ est

calculée d'après l'expression (58) relativement à une certaine ligne de courant ψ_0 , à la distance r_1 de l'axe Oz dans la section 1, puis pour calculer la valeur du rotationnel en un autre point M de l'écoulement situé sur la même ligne de courant ψ_0 , à la distance r_M de l'axe Oz , il suffit d'utiliser l'expression (59)

cette valeur sera :

$$\boxed{\text{rot}_{\theta} \vec{C} / M = \frac{r_M}{r_1} \cdot \text{rot}_{\theta} \vec{C} / 1} \dots \dots \dots (59)$$

b. LA METHODE DE RELAXATION

Cette méthode, consiste à trouver la fonction ψ solution de l'équation (49) dans le domaine intérieur de la tubulure d'aspiration et de $\psi = \text{constante}$ dans les limites de ce domaine.

La valeur de $\psi = \text{constante}$ n'ayant pas un sens physique, il est d'usage de considérer cette valeur nulle ($\psi = 0$) dans la limite inférieure du domaine considéré, dans les autres limites (à l'entrée, à la sortie et sur la limite supérieure), la valeur de ψ dépend des coordonnées du point considéré : $\psi = f_{\psi}(z, r)$, le problème des conditions aux limites sera en détail dans un prochain paragraphe.

Le principe de la méthode consiste à considérer un rectangle de largeur L et de hauteur H . En premier lieu, nous partageons la largeur L en n intervalles égaux de largeur $\Delta z = L/n$, de même nous divisons

la hauteur H en m intervalles égaux de hauteur $\Delta r = H/m$. Le quadrillage obtenu contient donc $(n-1)(m-1)$ points d'intersection ou nœuds [fig 3] au niveau desquels l'équation (49) est résolue simultanément.

Ces nœuds sont d'abord numérotés dans le sens horizontal de 1 à n , et dans le sens vertical de 1 à m à partir du bas, le numéro m correspondant à la limite supérieure du réseau.

Dans un nœud (i, j) la fonction de courant est notée $\psi_{i,j} = \psi(i \cdot \Delta z, j \cdot \Delta r)$ et dans un point au limite, elle est notée $f_{i,j} = f(i \cdot \Delta z, j \cdot \Delta r)$; de plus un point de nœud quelconque (i, j) est repéré par son rayon $r_{i,j}$ tel que $r_{i,j} = (j-1) \cdot \Delta r$.

Ainsi les conditions aux limites peuvent s'écrire :

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \psi_{i,1} = f_{i,1} \text{ pour } i = \overline{1, n} \quad (\text{limite inférieure}) \\ \psi_{i,m} = f_{i,m} \text{ pour } i = \overline{1, n} \quad (\text{limite supérieure}) \\ \psi_{1,j} = f_{1,j} \text{ pour } j = \overline{1, m} \quad (\text{limite à l'entrée}) \\ \psi_{n,j} = f_{n,j} \text{ pour } j = \overline{1, m} \quad (\text{limite à la sortie}) \end{array} \right.$$

En remplaçant dans l'équation (49) le point (z_0, r_0) par la nouvelle notation (i, j) et en posant $\lambda = \Delta r / \Delta z$, cette dernière prendra la forme suivante :

$$\lambda^2 \psi_{i+1,j} - 2 \left(\lambda^2 + 1 + \frac{1}{2(j-1)} \right) \psi_{i,j} + \lambda^2 \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j-1} + \left(1 - \frac{1}{j-1} \right) \psi_{i,j+1} = -\frac{j-1}{\Delta z} \text{rot}_\theta \vec{C}(i,j)$$

cette dernière équation nous permet d'écrire la valeur de la fonction ψ au nœud (i, j) en fonction, sa valeur dans les nœuds qui l'entourent :

$$\psi_{i,j} = \frac{1}{2\left(\lambda^2 + 1 + \frac{1}{2(j-1)}\right)} \left[\lambda^2 (\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j}) + \psi_{i,j-1} + \left(1 - \frac{1}{j-1}\right) \psi_{i,j+1} + \right. \\ \left. + \frac{j-1}{h^2} \text{rot}_p \vec{C}(i,j) \right] \quad (**)$$

La méthode de relaxation est appliquée à l'équation aux différences finies écrite sous la forme ci-dessus et dans laquelle chaque nœud jouera le rôle du point (i, j) , dans lequel on fait la relaxation. à 1

On obtient en fin de compte un système d'équation algébriques linéaires avec $(m+1)(n+1)$ inconnues $\psi_{i,j}$, les conditions $(*)$ peuvent être utilisées pour éliminer $2(m+n)$ inconnues, nous avons alors un système de $(m-1)(n-1)$ équations avec $(m-1)(n-1)$ inconnues, que nous devons résoudre.

Chaque nœud i, j peut être représenté par une étoile reliée par l'équation $(**)$. Pour chacun d'eux on fait figurer le coefficient correspondant.

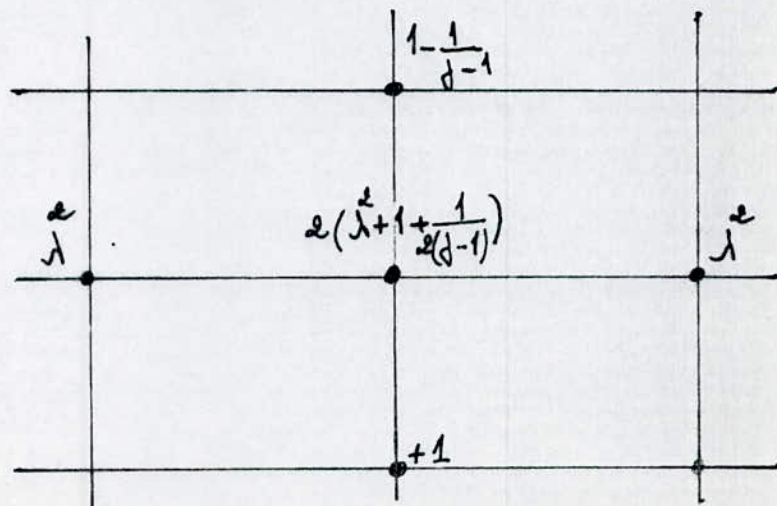


fig. 3

Convergence De La Methode.

Sans en donner une demonstration de la convergence de la methode (Car ce-ci sort du cadre de notre travail) on peut affirmer que le processus est convergent pour notre equation qui est elliptique.

PROCESSUS DU CALCUL

Après s'être donné une certaine precision p , le processus de calcul se fait selon les pas suivants :

1^{er} pas :

- On se donne à priori une valeur arbitraire de la fonction de courant ψ dans chaque point du reseau, generalement elles sont toute nulles ($\psi_{i,j}^{(0)} = 0$) sauf dans les points aux limites, où elles sont introduites d'après le systeme (*) vu precedemment.

- avec un i fixé nous parcourons tous les noeuds (i,j) correspondants en faisant varier j de 1 à m , puis on incremente la valeur de i à $i+1$ et on refait le même calcul que precedemment, en utilisant la formule de relaxation (**). La valeur de $\psi^{(k+1)}$ calculée remplace la valeur precedante, $\psi^{(k)}$, apres avoir calculé la difference $|\psi_{i,j}^{(k+1)} - \psi_{i,j}^{(k)}|$ pour chaque noeud.

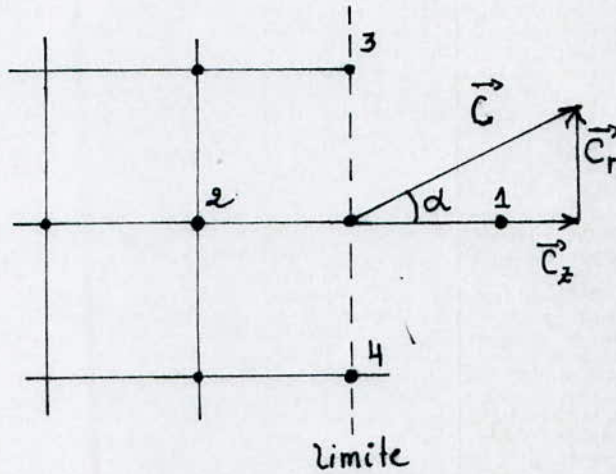
2^{eme} pas :

En arrivant à $i=n$ et $j=m$ on considere la difference maximale $|\psi_{i,j}^{(k+1)} - \psi_{i,j}^{(k)}|$

b - les conditions aux limites à deuxième ordre

Tout au long de ces limites, est donnée la dérivée normale de la fonction de courant ($\frac{\partial \psi}{\partial n}$), par exemple la condition physique est que le fluide traverse cette limite sous un angle α connu. Dans le cas traité ce type se présente à la sortie de la tubulure d'aspiration.

Pour le calcul de la valeur de la fonction de courant sur cette limite, nous imaginons encore un point 1 en dehors de la limite [fig] et nous considérons des pas égaux ($\lambda=1$) sans en diminuer la généralité.



Puisque $C_r = - \frac{\partial \psi}{\partial z}$

on a en valeur finie :

$$\psi_1 - \psi_0 \approx - C_r \cdot \Delta z \dots \dots \dots (59)$$

D'autre part : $C_z = \frac{\partial \psi}{\partial r} \approx \frac{\psi_3 - \psi_4}{2 \cdot \Delta r} = \frac{\psi_3 - \psi_4}{2 \cdot \Delta z}$

d'où :

$$\Delta z = \frac{\psi_3 - \psi_4}{2 C_z}$$

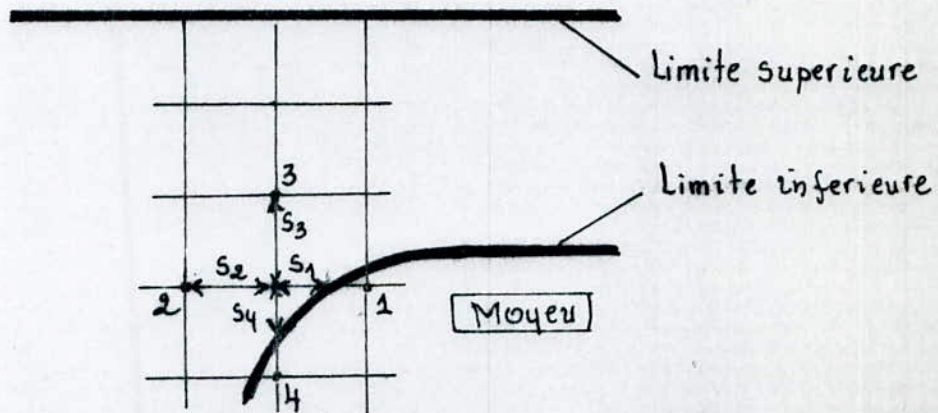
En remplaçant cette dernière relation dans (59) on aura :

$$\psi_1 = \psi_0 - \frac{\text{tg} \alpha}{2} (\psi_3 - \psi_4) \dots \dots \dots (60) \quad \text{avec } \text{tg} \alpha = \frac{C_r}{C_z}$$

Dans ce cas bien que la limite soit fictive, la valeur de ψ_0 doit y être calculée.

REMARQUE

La forme du contour limitant le domaine de calcul étant le plus souvent irrégulière, il arrive que la limite à première ordre ne passe pas par les nœuds de la grille, dans ce cas, l'étoile est dite tronquée. Dans le problème traité ce type d'étoiles se rencontre au niveau du moyeu [fig 4]



- fig 4 : Etoile tronquée

RELAXATION DANS UN POINT INTERIEUR

Dans ce cas le développement limité au deuxième ordre autour du point 0 de la fonction de courant s'écrit:

$$\psi_1 - \psi_0 = S_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_0 + \frac{S_1^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)_0 \dots \dots \dots (61)$$

$$\psi_2 - \psi_0 = -S_2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_0 + \frac{S_2^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)_0$$

$$\psi_3 - \psi_0 = S_3 \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_0 + \frac{S_3^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right)_0$$

$$\psi_4 - \psi_0 = -S_4 \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_0 + \frac{S_4^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right)_0$$

En effectuant les substitutions adéquates dans ces expressions on peut exprimer les dérivées par :

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_0 = \frac{S_2^2 \psi_1 - S_1^2 \psi_2 + (S_1^2 - S_2^2) \psi_0}{S_1 S_2 (S_1 + S_2)} \dots \dots (62)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_0 = \frac{S_4^2 \psi_3 - S_3^2 \psi_4 + (S_3^2 - S_4^2) \psi_0}{S_3 S_4 (S_3 + S_4)} \dots \dots (63)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)_0 = \frac{S_1 \psi_2 + S_2 \psi_1 - (S_1 + S_2) \psi_0}{\frac{1}{2} S_1 S_2 (S_1 + S_2)} \dots \dots (64)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right)_0 = \frac{S_3 \psi_4 + S_4 \psi_3 - (S_3 + S_4) \psi_0}{\frac{1}{2} S_3 S_4 (S_3 + S_4)} \dots \dots (65)$$

Considérons d'abord le cas d'une étoile tronquée, ce-ci se traduit par l'inégalité géométrique (en considérant la figure précédente) :

$S_1 < \Delta Z$ et/ou $S_4 < \Delta r$; S_1 et S_4 étant les distances du nœud central de l'étoile à la paroi du moyeu (limite).

Dans ce cas repérons le nœud central "0" par sa position par rapport à l'axe OZ comme étant à fois le bras S_4 [fig 5]

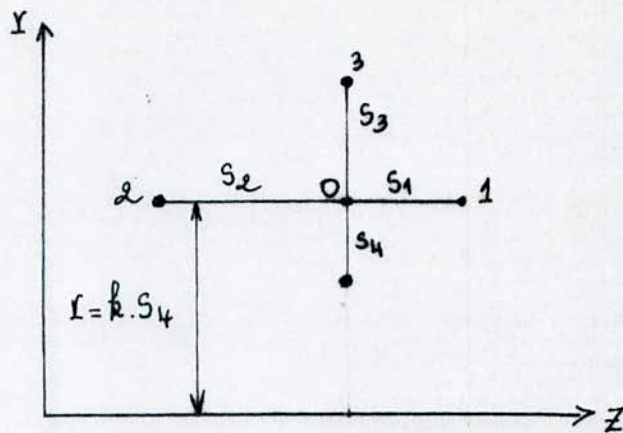


fig 5

En définissant $l = k \cdot s_4$ (avec k nombre réel) et en remplaçant les dérivées (62 et suivantes) dans l'expression (42) on aboutit à la formule de relaxation

$$\psi_0 = \frac{\frac{2\psi_1}{s_1(s_1+s_2)} + \frac{2\psi_2}{s_2(s_1+s_2)} + \frac{(2k-1)\psi_3}{k s_3(s_3+s_4)} - \frac{(2k + \frac{s_3}{s_4})\psi_4}{k s_4(s_3+s_4)} + k s_4 \operatorname{rot} \vec{C}_\theta}{\frac{2}{s_1 s_2} - \frac{2}{s_3 s_4} - \frac{s_3 - s_4}{k s_3 s_4^2}} \dots (66)$$

C'est la formule générale pour la relaxation dans les nœuds intérieurs où elle doit être répétée plusieurs fois de suite.

Ceci étant les vitesses locales en chaque nœud peuvent être calculées par les expressions suivantes :

$$\text{Composante tangentielle : } C_r = - \frac{\frac{2}{s_2} \psi_1 - \frac{2}{s_1} \psi_2 + (s_1^2 - s_2^2) \psi_0}{k s_1 s_2 (s_1 + s_2) s_4} \dots (67)$$

$$\text{Composante méridienne : } C_z = \frac{\frac{2}{s_4} \psi_3 - \frac{2}{s_3} \psi_4 + (s_3^2 - s_4^2) \psi_0}{k s_3 s_4^2 (s_3 + s_4)} \dots (68)$$

CAS PARTICULIER : ETOILE NORMALE

Dans un nœud d'une étoile normale à pas égaux $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \Delta Z = \Delta r$
l'expression précédente (66) se simplifie et prend la forme :

$$\psi_0 = \frac{\psi_1 + \psi_2 + \frac{2k-1}{2k} \psi_3 + \frac{2k+1}{2k} \psi_4}{4} + \frac{k \cdot (\Delta Z)^3 \operatorname{rot}_{\theta} \vec{C}}{4} \dots \dots (69)$$

Et les composantes de vitesses :

$$C_r = - \frac{\psi_1 - \psi_2}{2k (\Delta Z)^2} \dots \dots (70)$$

$$C_z = \frac{\psi_3 - \psi_4}{2k (\Delta Z)^2} \dots \dots (71)$$

RELAXATION DANS UN POINT AU LIMITE A LA SORTIE

Dans un point au limite à la sortie, on utilise obligatoirement les conditions relatives à une limite de deuxième ordre, avec l'hypothèse que : $\operatorname{tg} \alpha = 0$, puisqu'on suppose que les lignes de courant y sont parallèles à l'axe OZ . Avec cela, et en mettant la relation (60) dans la formule de relaxation (66) on aboutit à l'expression suivante :

$$\psi_0 = \frac{\frac{2\psi_2}{S_2(S_1+S_2)} - \frac{(2k-1)\psi_3}{kS_3(S_3+S_4)} + \frac{(2k+\frac{S_3}{S_4})\psi_4}{kS_4(S_3+S_4)} + kS_4 \cot \theta \vec{C}}{\frac{2}{S_1S_4} + \frac{2}{S_3S_4} + \frac{S_3-S_4}{kS_3S_4^2} + \frac{2}{S_1(S_1+S_2)}} \dots \dots (72)$$

cette relation est répétée plusieurs fois, pour calculer la valeur de ψ sur la limite et en utilisant les conditions de l'étoile normale.

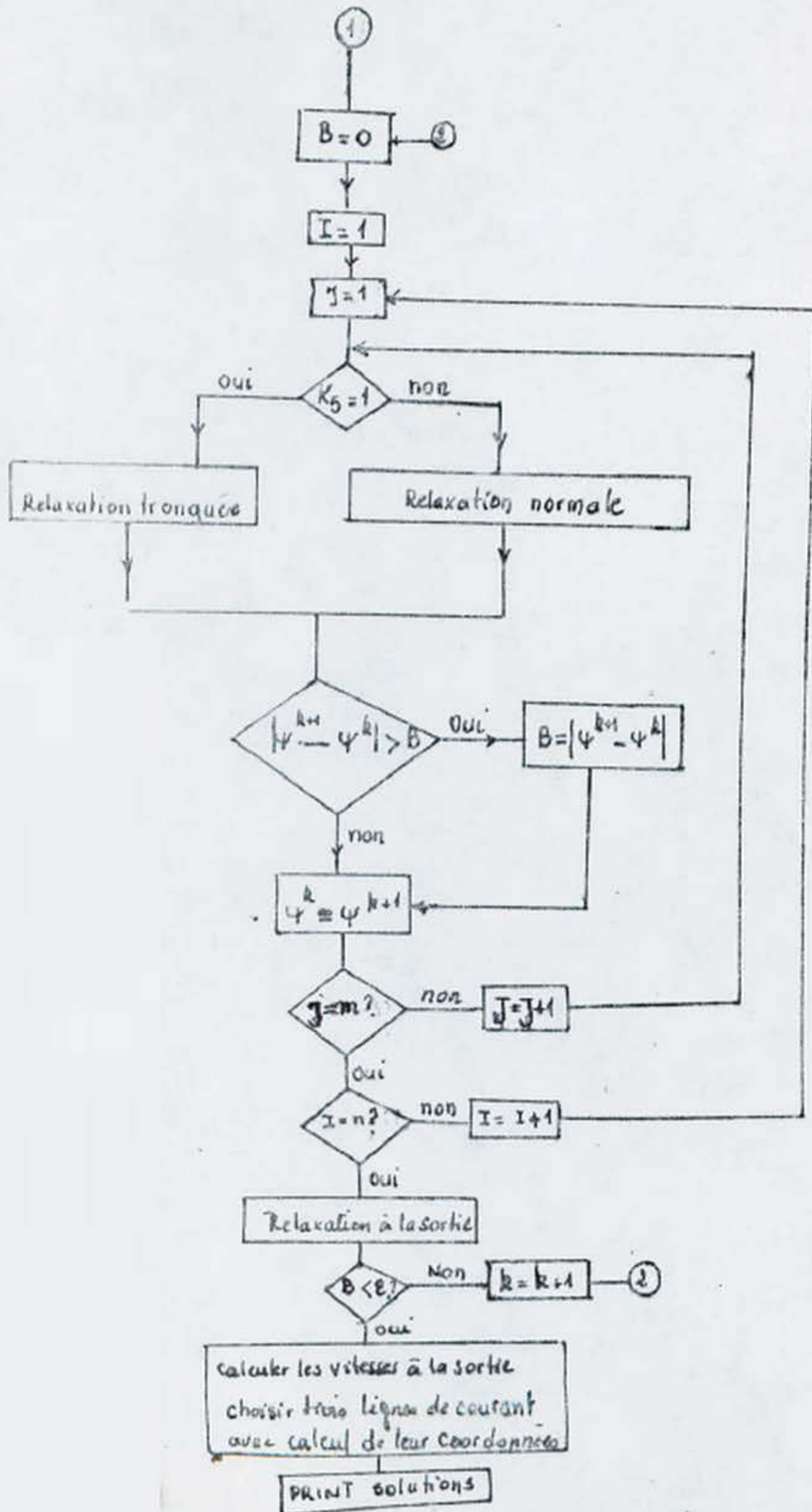
CALCUL DES VITESSES MERIDIENNES A LA SORTIE

Après avoir calculé les valeurs de la fonction de courant dans tous les points de la grille et en particulier dans la section de sortie de la tubulure d'aspiration qui est aussi l'entrée de la roue mobile, en utilisant, selon le cas l'une des expressions de relaxation établies précédemment, le champ des vitesses méridiennes C_z relatives à différentes lignes de courant, se calcule aisément en utilisant l'une des deux formules suivantes:

$$C_z = \frac{\frac{2}{S_4}\psi_3 - \frac{2}{S_3}\psi_4 + (S_3 - S_4)\psi_0}{kS_3S_4(S_3+S_4)} \quad \text{pour l'étoile tronquée}$$

ou bien

$$C_z = \frac{\psi_3 - \psi_4}{2k(\Delta r)^2} \quad \text{pour l'étoile normale}$$

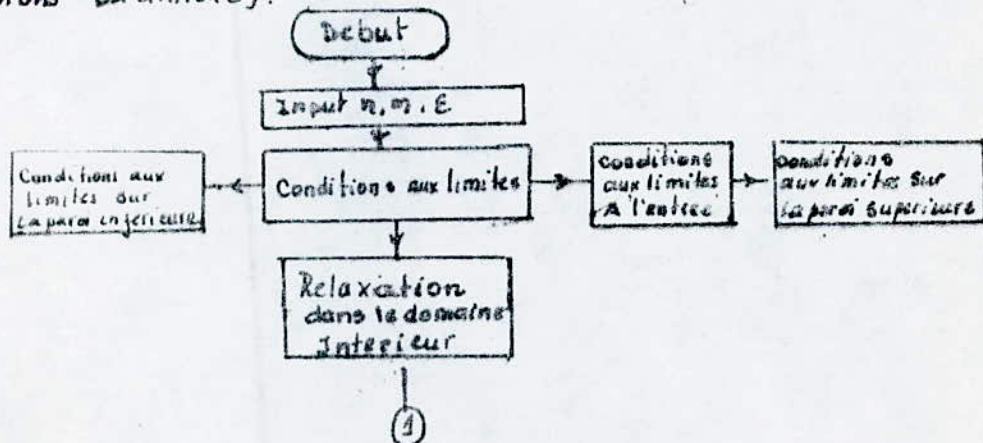


DETERMINATION DES LIGNES DE COURANT MERIDIENNES

Le calcul des valeurs de la fonction de courant, nous permet en outre de les classer suivant des lignes de même valeur ($\psi = \text{constante}$) appelées lignes de courant méridiennes, et qui sont les projections circulaires sur le plan méridien des lignes d'intersection de ce dernier avec les surfaces de courant cylindriques, ce qui permettra de visualiser l'écoulement

ORGANIGRAMME DE CALCUL

A la lumière de tout ce qui a été dit, nous avons établi un organigramme simplifié de calcul qui va constituer le squelette du programme informatique (voir en annexe sur listing) figurent les principales étapes de calcul. Les séquences relatives à la relaxation au niveau des étoiles tronquées ne figurent pas sur l'organigramme, elles sont introduites directement dans le programme suivant des techniques géométriques, tel est le cas par exemple pour la recherche d'étoiles tronquées sur le moyeu (pour plus de détails se référer au localisant d'instructions en annexe).



II3 FACTEURS EXPERIMENTAUX DU TRACE

Un certain nombre d'éléments du tracé, ayant une influence directe sur les caractéristiques de fonctionnement de la roue, et donc sur le rendement global de la pompe, n'ont aucune justification théorique, ils ^{sont} le fruit d'expériences réalisées par certains chercheurs à travers le monde entier. Ces facteurs expérimentaux sont :

1° - Le rapport du moyeu σ :

Cet élément est le facteur de tracé le plus important ayant une influence directe sur la vitesse spécifique de la roue puisqu'il caractérise le degré d'obstruction de la section d'écoulement. Les pompes de plus grandes vitesses spécifiques ont un rapport de moyeu plus faible. D'après les travaux de Buffalo Forge, le rendement maximum de ces dernières est obtenu pour un rapport de moyeu autour de 0,45, tous les autres paramètres étant identiques par ailleurs, mais un rapport variant dans la fourchette $[0,3 - 0,7]$ est acceptable.

2° - Le recouvrement l/t

Pour les pompes de vitesses spécifiques supérieures à 200 le rapport corde - espacement l/t (recouvrement) est inférieur à l'unité. En général on utilise des pales qui ne se recouvrent pas, et dont le rapport l/t augmente du diamètre extérieur au moyeu. Cette augmentation au moyeu est souhaitable pour des raisons mécaniques, en effet la pale travaillant

Comme une poutre encastree, elle supporte une charge maximale au moyeu.

La valeur de l/t au moyeu est de 1,25 à 1,30 fois celle qui correspond au diametre exterieur selon le rapport de moyeu.

3° - Le nombre de pales

Un nombre de pales grand, diminue la section d'ecoulement et le debit nominal, ainsi que le debit. Les hauteurs d'elevation atteintes par les roues helices sont donnees dans le tableau suivant (ce sont les valeurs maximales constatees experimentalement).

Z	2	3	4	5	6
$H_{max} [m]$	3	6	10	15	22

4° - Epaisseur des pales

une epaisseur de pales excessive provoque des decollements et du bruit dans les roues a grande vitesse et forte pression. l'epaisseur maximale admise du point de vue Resistance mecanique constatee experimentalement sans diminuer notablement le rendement est situee autour de 15 mm (au moyeu), Et l'epaisseur minimale (au diametre exterieur) autour de 5 mm.

II.4 CHOIX DU PROFIL

Les profils de pale appliques dans notre roue, sont choisis parmi ceux dont les proprietes ont ete experimentalement constatees: conformement aux normes d'instituts aerodynamiques les plus qualifies

Parmi lesquels on peut citer : NACA - WIGM - MUNK - GÖTTINGEN
 Ces profils sont données sur la figure (6) et leurs coordonnées dans
 le tableau 1.

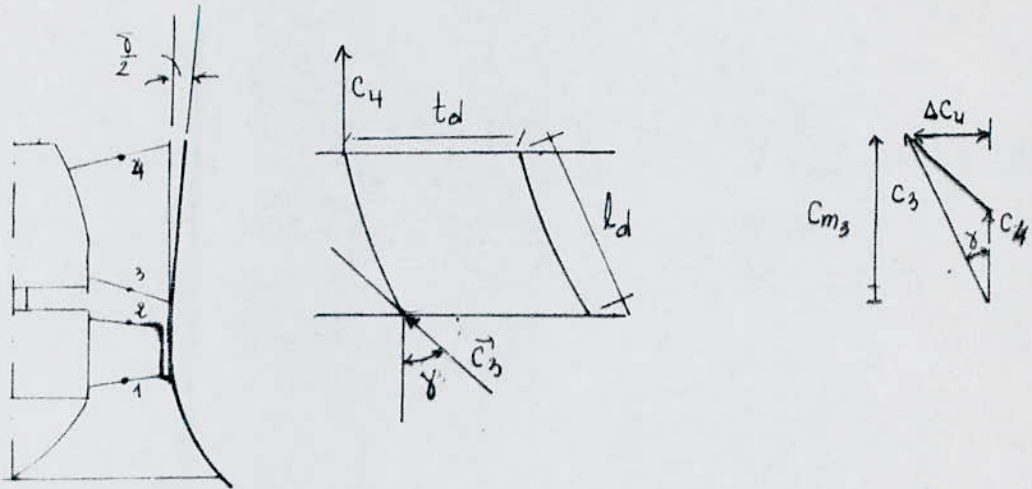
N.B Pour éviter le décollement au pied des pales, on doit tenir compte de la limite
 -tation pour le serrage $C_y l/t$ dont la valeur maximale expérimentalement
 constatée est située au niveau du moyeu : $C_y l/t (\text{moyeu}) \approx 0,63$.

III CALCUL HYDRAULIQUE DE LA DIRECTRICE A AILETTES PLACÉE APRES LA ROUE

Le liquide sort de la roue (2), selon un mouvement en spirale avec une vitesse absolue
 C_2 ayant une composante $C_2 = C_1$ et une composante $C_{u2} > C_{u1}$. Si l'écoulement
 n'est pas redressé, l'énergie cinétique $\frac{\Delta C_u^2}{2g}$ se transformera en perte de charge et de ce fait
 diminue les performances de la roue. Pour palier à ce problème, on dispose à la sortie
 de la roue, une deuxième grille d'aubes dirigée contre le sens de rotation de la roue,
 et sert à transformer cette énergie cinétique en pression.

Comme pour la roue mobile, le calcul de la directrice à ailettes est basée sur
 les triangles des vitesses à l'entrée, il s'établit donc à partir de la connaissance
 de la distribution des vitesses méridiennes mise en évidence pour la roue mobile
 pour les mêmes anneaux circulaires.

Pour diminuer la vitesse méridienne C_{m2} à la sortie de la roue à la valeur C_d dans
 le tuyau de refoulement, la directrice prend la forme d'un diffuseur conique
 dont l'angle de convergence $\frac{\theta}{2}$ est compris entre 4° et 5° .



l'angle d'inclinaison du vecteur vitesse à l'entrée de la directrice, si l'on néglige la contraction de la veine liquide, et le rétrécissement de la section d'écoulement est donné par :

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{c_{u2}}{c_{m2}}$$

1. Recouvrement des ailettes

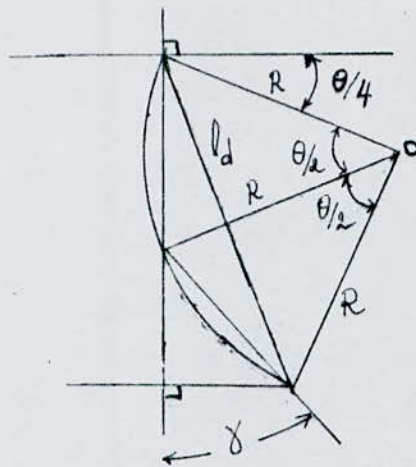
Il a été expérimentalement constaté que pour mieux diriger l'écoulement, le pas relatif l_d/t_d doit être supérieur à 1. Généralement on considère $l_d/t_d = 1,5$

2. Nombre de pâles

Quand la roue en rotation passe devant l'aube de la directrice, il y a une répétition périodique de chocs pouvant donner naissance à des vibrations indésirables, ce problème est évité en adoptant un nombre N_d premier avec celui des pâles N de la roue, le minimum possible étant $N_d = 2 \cdot N$.

3. TRACÉ DES AILETTES

Le tracé des ailettes se fait à l'arc de cercle, à partir de la connaissance des angles de la vitesse à l'entrée. A la sortie on ne considère pas l'inflexion supplémentaire et l'angle est celui de la vitesse méridienne c'est à dire $\alpha_H = 90^\circ$



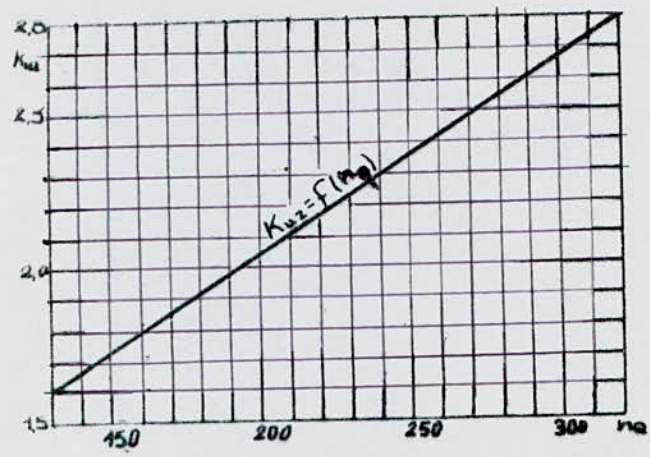
$$\underline{R = \frac{l_d}{2} \cdot \sin \theta/2}$$

le rapport $\frac{\gamma}{\theta}$ s'appelle déviation relative, sa valeur est donnée selon les travaux de Weirig (1935) en fonction du pas relatif l_d/t_d par l'expression :

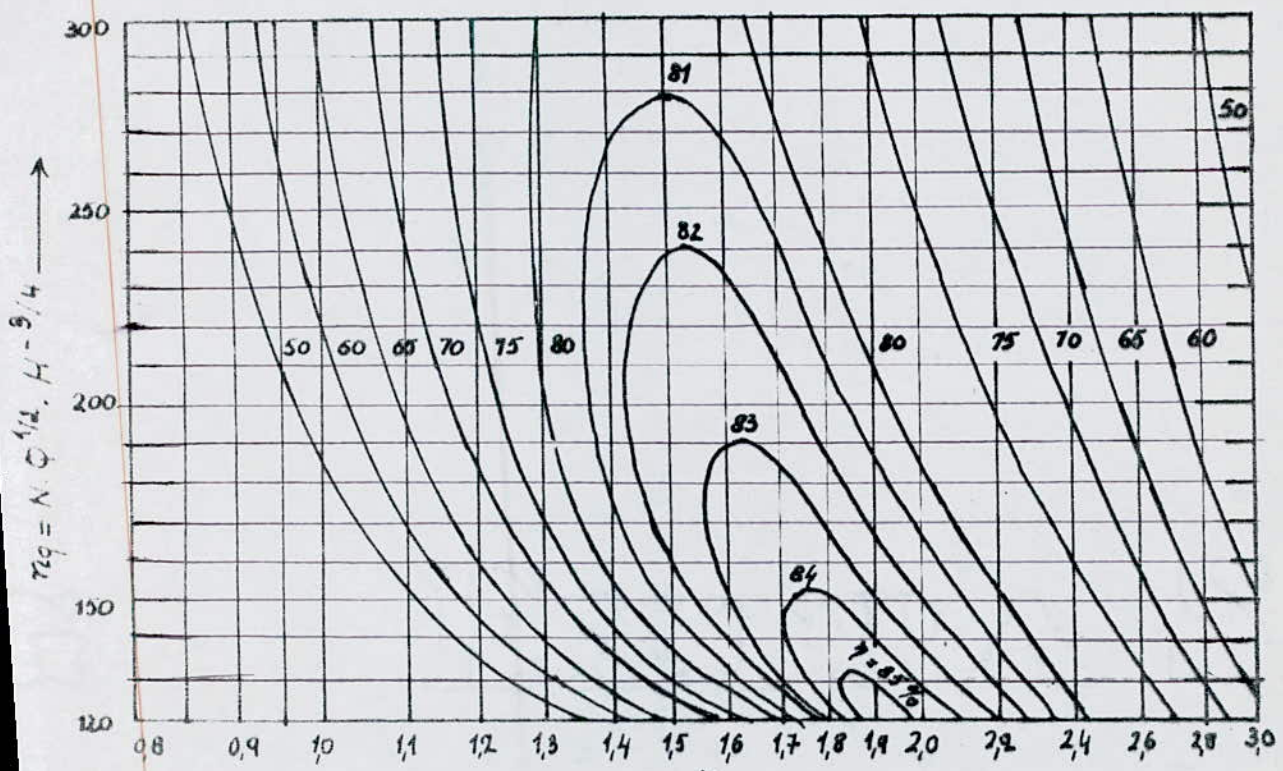
$$\frac{\gamma}{\theta} = -0,137 \left(\frac{l_d}{t_d} \right)^2 + 0,645 \frac{l_d}{t_d} + 0,072$$

ou bien en utilisant la condition $l_d/t_d = 1,5$; $\frac{\gamma}{\theta} = 0,731$

le pas est donné par $t_d = \frac{\pi \cdot d}{N_d}$, N_d étant le nombre d'ailettes.



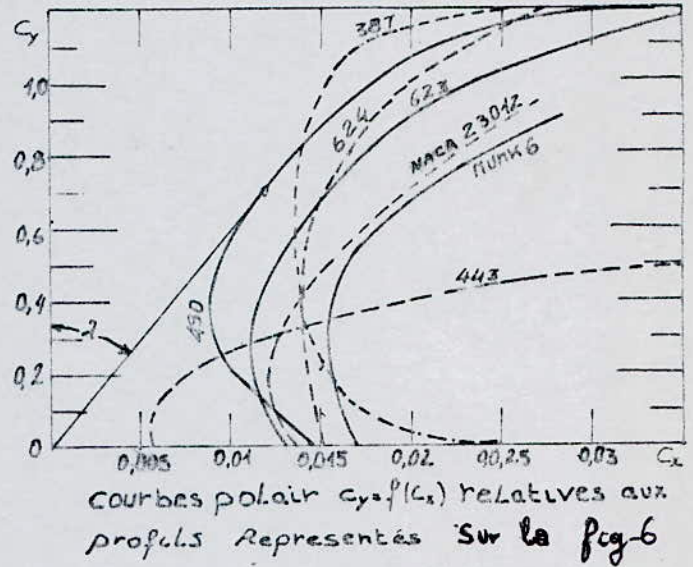
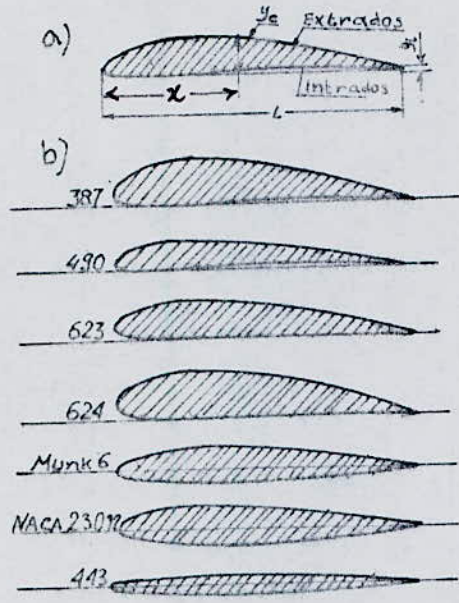
- Diagramme de la relation $K_{uz} = f(n_q)$ -



$$\delta = 1,86 \frac{D_2 H^{1/4}}{Q^{1/2}} \longrightarrow$$

abaque de HAJDU - SZALAY $\eta = f(n_q, \delta)$

fig 6:



Profils des ailes portantes

a) Dimension caractéristiques du profil,

b) profils d'ailes portantes employés dans les pompes hélices

Tableau 1. Dimensions des profils aérodynamiques

N° du profil	x%	D	x%																
			1,25	2,5	5,0	7,5	10	15	20	30	40	50	60	70	80	90	95	100	
387	y_e	3,2	6,25	7,65	9,4	10,85	11,95	13,40	14,40	15,05	14,6	13,35	11,35	8,90	6,15	3,25	1,75	0,15	
	y_i	3,2	1,50	1,05	0,55	0,25	0,10	0,00	0,00	0,20	0,40	0,45	0,50	0,45	0,30	0,15	0,05	0,15	
490	y_e	2,0	3,60	4,60	5,95	7,00	7,70	8,65	9,20	9,60	9,05	8,55	7,45	6,05	4,40	2,50	1,45	0,15	
	y_i	2,0	0,95	0,50	0,15	0,00	0,00	0,20	0,40	0,35	0,20	0,20	0,60	0,40	0,15	0,00	0,05	0,15	
623	y_e	3,25	5,95	6,45	7,90	9,05	9,90	10,95	11,55	12,00	11,70	10,65	9,15	7,35	5,15	2,80	1,60	0,30	
	y_i	3,25	1,95	1,50	0,90	0,35	0,20	0,10	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
624	y_e	4,00	7,15	8,50	10,40	11,75	12,85	14,35	15,30	16,00	15,40	14,05	12,00	9,50	6,60	3,55	2,00	0,50	
	y_i	4,00	2,25	1,65	0,95	0,60	0,40	0,15	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
Munk 6	y_e	0,0	1,98	2,81	4,03	4,94	5,71	6,82	7,55	8,22	8,05	7,26	6,03	4,58	3,06	1,55	0,88	0,00	
	y_i	0,00	-1,76	-2,20	-2,73	-3,03	-3,24	-3,47	-3,62	-3,70	-3,90	-3,94	-3,82	-3,48	-2,83	-1,77	-1,08	0,00	
NACA 23012	y_e	0,00	2,67	3,61	4,91	5,80	6,43	7,19	7,50	7,55	7,14	6,41	5,47	4,36	3,08	1,68	0,92	0,00	
	y_i	0,00	-1,23	-1,71	-2,26	-2,61	-2,92	-3,50	-3,97	-4,46	-4,48	-4,17	-3,67	-3,00	-2,16	-1,23	-0,70	0,00	
443	$\frac{y_e}{y_i}$	0,00	0,60	0,85	1,15	1,45	1,60	1,90	2,15	2,50	2,50	2,35	2,05	1,60	1,15	0,65	0,30	0,00	

Chapitre IV : EXEMPLE NUMERIQUE D'APPLICATION

Soient à calculer les dimensions et les caractéristiques géométriques de la roue et de la directrice placée après la roue d'une pompe hélice assurant un débit $Q = 260 \text{ l/s}$ et une hauteur d'élevation $H = 4,5 \text{ m}$, directement commandée par un moteur électrique triphasé tournant à la vitesse de $n = 1450 \text{ tr/mn}$.

1° CALCUL DES DIMENSIONS PRINCIPALES DE LA ROUE

les performances hydrauliques de la pompe étant fixées le calcul préliminaire des dimensions principales de roue mobile se fait comme suit :

- Le nombre de tours spécifique :

$$n_q = n \cdot Q^{1/2} \cdot H^{-3/4} = 1450 \cdot 0,26^{1/2} \cdot (4,5)^{-3/4} = 239,3$$

- La constante de vitesse méridienne :

$$K_{cm} = 0,0476 + 0,02 \cdot n_q^{5/3} = 0,0476 + 0,02 \cdot 239,3^{5/3} = 0,467$$

- La constante de vitesse périphérique :

$$K_u = \frac{n_q}{160} + 0,8 = \frac{239,3}{160} + 0,8 = 2,296$$

- Le coefficient de débit :

$$C_p = \frac{K_{cm}}{K_u} = \frac{0,467}{2,296} = 0,203$$

- Le coefficient de pression :

$$\psi = \frac{1}{K_u} = \frac{1}{2,296} = 0,189$$

d'où le rapport de moyeu :

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{1 - n_q \psi^{3/2} / 49793 \text{ CP}}{1 + n_q \psi^{3/2} / 49793 \text{ CP}}} = \sqrt{\frac{1 - 239,3 \cdot 0,189^{3/2} / 49793 \cdot 0,203}{1 + 239 \cdot 0,189^{3/2} / 49793 \cdot 0,203}} = 0,6$$

$$\bar{v} = 0,6$$

C'est une valeur excessive mais acceptable puisqu'elle tombe dans l'intervalle $[0,3 - 0,7]$

- La vitesse meridienne moyenne à la sortie de la roue

$$C_{m2} = K_{cm} \sqrt{2gH} = 0,467 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 4,5} = 4,39 \text{ m/s}$$

Ce calcul preparatif nous permet de calculer les dimensions principales :

- Le diametre exterieure de la roue :

$$D_o = \sqrt{\frac{4Q}{\pi C_{m2} (1 - \bar{v}^2)}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,26}{\pi \cdot 4,39 \cdot (1 - 0,6^2)}} = 0,343 \text{ m}$$

- et le diametre du moyeu

$$D_h = \bar{v} \cdot D_o = 0,6 \cdot 0,343 = 0,206 \text{ m}$$

Ces valeurs calculées des dimensions principales n'étant pas définitives

On ne modifie pas tellement la valeur de la section d'écoulement S_f en ramenant à $D_o = 0,350$ m la valeur du diamètre extérieur si nous gardant le même rapport de moyeu ($\nu = 0,6$), d'où la valeur du diamètre du moyeu sera : $D_f = 0,6 \cdot 0,350 = 0,210$ m

$$\begin{cases} D_o = 0,350 \text{ m} \\ D_f = 0,210 \text{ m} \end{cases}$$

Ce choix est pris pour faciliter l'introduction des conditions aux limites dans le programme informatique (Listing) par des relations géométriques.

2°/ CALCUL DE L'AUBAGE

Le calcul des grandeurs caractéristiques des profils se fait à partir de la détermination des vitesses méridiennes à l'entrée de la roue sur cinq lignes de courant délimitant quatre (04) canaux de champs égaux.

Pour l'application de la Méthode de Relaxation nous avons partagé le domaine d'écoulement en 20×41 mailles contenant des nœuds numérotés horizontalement de 1 à 41 et verticalement de 1 à 21, en prenant des pas de calculs différents [fig 7]

$$\Delta Z = X1 = 0,007 \text{ m}$$

$$\Delta r = Y1 = 0,00875 \text{ m}$$

Condition aux limites A l'entrée :

La condition aux limites à l'entrée est introduite à partir d'une distribution réelle des vitesses :

$$C_z = C_{\max} \left(1 - \frac{r}{R_1}\right)^n \quad \text{avec } n = \frac{1}{7}$$

C_{\max} est la valeur de la vitesse au centre de la tubulure d'aspiration elle est calculée à partir de la relation :

$$C_{\max} = Q / 2\pi \int_0^{R_1} r \left(1 - \frac{r}{R_1}\right)^n dr \cong Q / 2\pi \sum_{j=2}^k r_j \left(1 - \frac{r_j}{R_1}\right)^n (r_j - r_{j-1})$$

d'où la condition aux limites à l'entrée

$$\begin{aligned} C_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} &\Rightarrow \psi = \int_0^r r C_z dr = \int_0^r r C_{\max} \left(1 - \frac{r}{R_1}\right)^n dr \cong \\ &= \sum_{j=2}^k r_j C_{\max} \left(1 - \frac{r_j}{R_1}\right)^n (r_j - r_{j-1}) \end{aligned}$$

avec R_1 le rayon extérieur de la roue.

Le rotationnel à l'entrée se calcule à partir de la relation :

$$\text{rot}_{\theta} C = \frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r} \quad ; \quad \text{les lignes de courant sont supposées}$$

parallèles à l'axe Oz c'est à dire $C_r = 0$

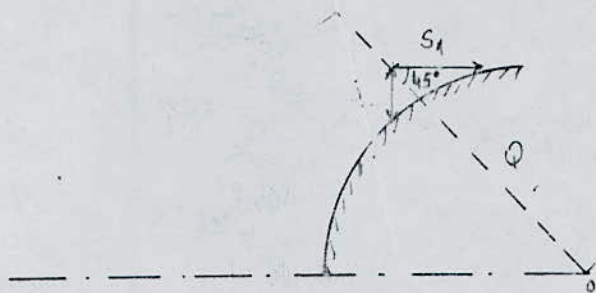
$$\text{d'où} \quad \text{rot}_{\theta} C = - \frac{\partial C_z}{\partial r} = \frac{C_{\max} n}{R_1} \left(1 - \frac{r}{R_1}\right)^{n-1}$$

Relaxation sur les étoiles tronquées

les étoiles tronquées se rencontrent au niveau du moyeu,

La détermination de étoiles se fait en comparant la distance du point considéré au centre du moyeu, avec le rayon de ce dernier, l'angle polaire limite pour qu'une étoile soit normale est égal à 45° , le rayon correspondant est

$$Q = \left[(r-1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \Delta r$$



Dans ce cas l'étoile tronquée est notée $K_5 = 1$ dans le programme et la relaxation se fait selon la formule (66), le rotationnel en chaque point du domaine intérieur est calculé, en utilisant le principe de conservation du rotationnel selon la formule (59), alors qu'une étoile normale est notée $K_5 = 0$, et le rotationnel est calculé selon le même principe. Pour augmenter la précision du calcul le pas de calcul de la fonction de courant à l'entrée est pris égal à $\frac{1}{10} \Delta r$. Et enfin la relaxation à la sortie de la tubulure d'aspiration se fait selon la formule (68).

Le déroulement du programme nous a donné les valeurs de la vitesse méridienne C_2 à la sortie de la tubulure d'aspiration, ces résultats sont donnés en annexe sur Listing. D'autre part les trois lignes choisies dans l'écoulement en fonction des coordonnées de nœuds permet de mieux visualiser l'écoulement, ces lignes (fig 8) de courant sont notés L_c dans le programme.

Ceci étant nous avons partagé la section d'écoulement en quatre anneaux de champs égaux, limités par des lignes de courant sur lesquels on connaît

la distribution des vitesses méridiennes C_z .

A partir des triangles des vitesses et de la hauteur théorique H_{th} et de la formule de serrage (4) on procède au calcul tabellaire des caractéristiques de profils (tableau 2)

la hauteur théorique H_{th} est calculée à partir de la hauteur réelle par $H_{th} = H / \eta_h$, avec η_h rendement hydraulique donné par la formule empirique Wislicenus.

$$\eta_h = \sqrt{h} - (0,01 - 0,02)$$

où le rendement global η est tiré de l'abaque de HAJDU-SZALAY (1), en fonction du nombre de tours spécifique nq et du diamètre spécifique δ .

Pour l'exemple considéré :

$$\begin{cases} nq = 239,3 \\ \delta = 1,865 \cdot D_0 \cdot H^{1/4} \cdot Q^{-1/2} = 1,865 \cdot 0,350 \cdot 4,5^{1/4} \cdot 0,26^{-1/2} = 1,86 \end{cases}$$

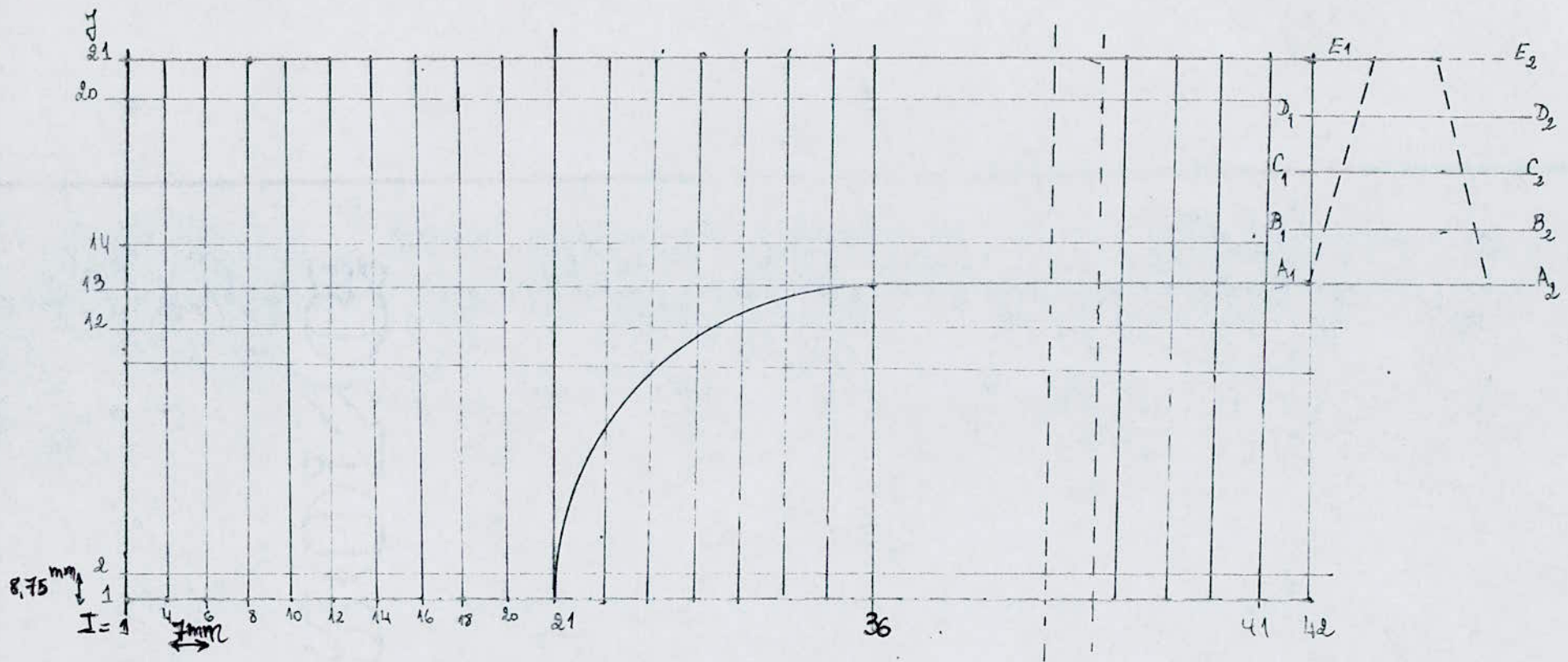
d'où par lecture sur l'abaque de HAJDU on trouve $\eta \approx 0,78$

en appliquant la formule de Wislicenus on trouve $\eta_h = 0,86$

Avant d'entamer le calcul pour l'ensemble des cinq lignes de courant, nous avons procédé à la vérification de la valeur du serrage $C_y l/t$ au niveau du moyeu c'est à dire sur la ligne de courant $A_1 A_2$; en prévoyant un changement des dimensions principal selon la formule donnant la nouvelle

valeur du diamètre du moyeu si la condition : $C_y l/t \leq 0,63$ n'est pas vérifiée sur le moyeu; soit :

$$D_h' = \sqrt{\frac{C_y l/t}{0,63}}$$



- fig 7: schéma du réseau de Relaxation Echelle 1/2

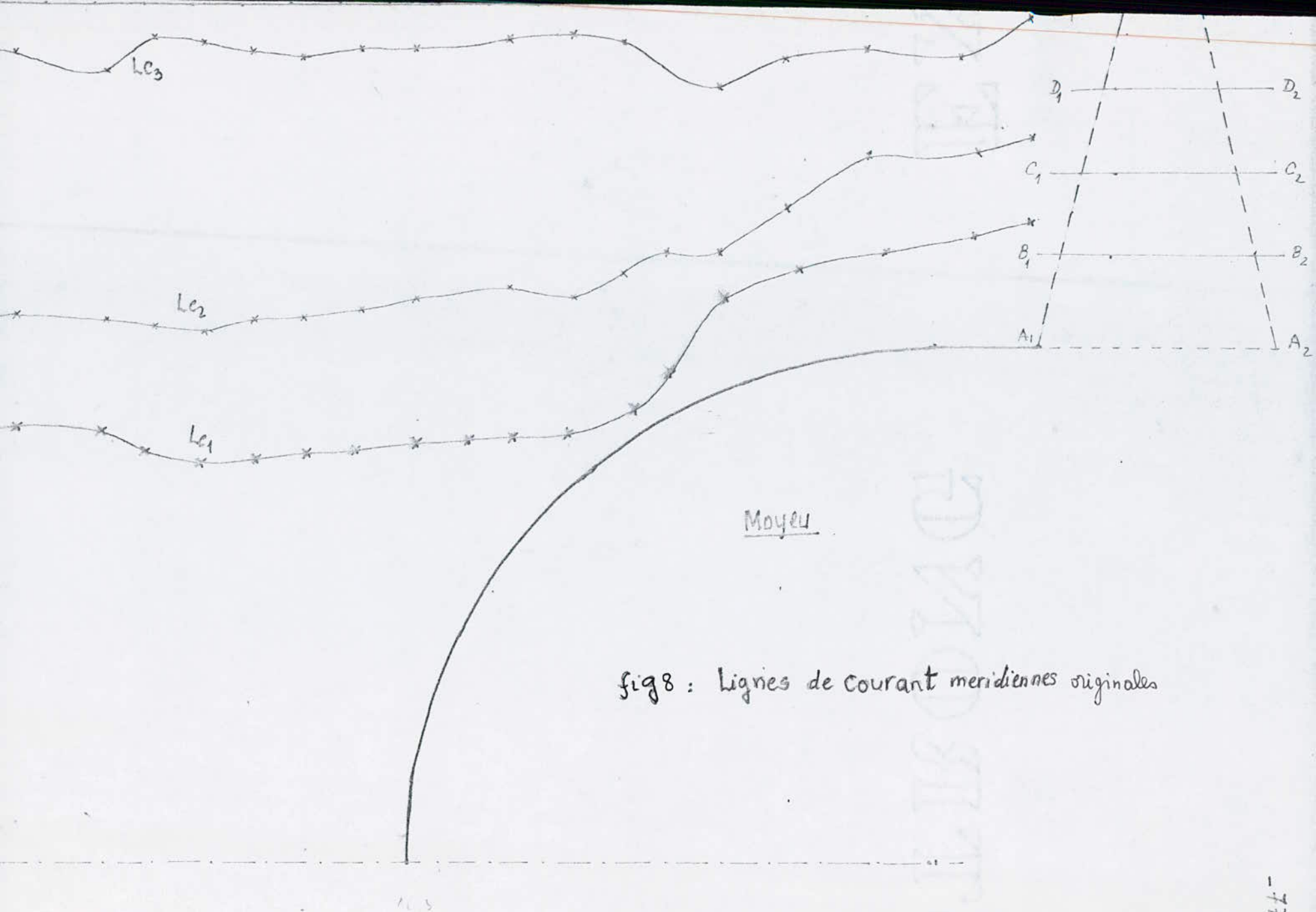


fig 8 : Lignes de courant meridiennes originales

- Representation graphique des lignes de courant Echelle 1/1 - (forme originale)

Pour cela nous avons procédé à un calcul tabellaire pour la ligne de courant $A_1 A_2$

N°	Grandeur caractéristique	D_h	D'_h
1	$u_1 = \frac{\pi n \cdot d}{60} = 75,92 \cdot d$	15,94	12,91
2	$Cu_2 = \frac{g H u_1}{u_1} = \frac{51,33}{u_1}$	3,22	3,97
3	$w_{\infty}^2 = C_m^2 + (u_1 - \frac{Cu_2}{2})^2$	221,43	191,61
4	$\frac{1}{2} \beta_{\infty} = \frac{C_m}{u_1 - \frac{Cu_2}{2}}$	0,280	0,3206
5	β_{∞}	15° 38'	18° 45'
6	λ admis	1°	1°
7	$C_y \frac{1}{l} = \frac{2 g H u_1 C_m}{w_{\infty}^2 u_1 \sin(\beta_{\infty} + \lambda)}$	0,1407	0,65
8	$D'_h = \sqrt{\frac{C_y \frac{1}{l}}{0,63}} \cdot d$	0,169	/

on peut s'arrêter à cette valeur du diamètre du moyeu qui donne une valeur du serrage assez proche de 0,63, au moyeu: $D_h = 0,169 \text{ mm} \approx 0,170 \text{ mm}$ d'où en tenant compte que la section d'écoulement S_f doit avoir la même valeur, on détermine la nouvelle valeur du diamètre extérieur D_o ,

$$Q = \frac{\pi}{4} C_m (D_o^2 - D_h^2) \Rightarrow D_o = \sqrt{\frac{4Q}{\pi C_m} + D_h^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,260}{\pi \cdot 4,34} + 0,169^2} = 0,334 \text{ mm}$$

Avec les nouvelles dimensions $\begin{cases} D_h \approx 0,170 \\ D_o \approx 0,330 \end{cases}$ le rapport du moyeu est

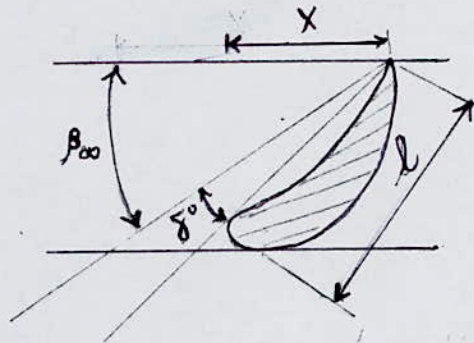
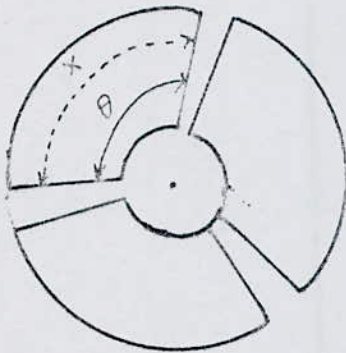
$$\nabla = \frac{0,170}{0,330} \approx 0,51 \text{ qui tombe dans l'intervalle } [0,3 - 0,7] \text{ donc, il est accepté}$$

On procède ensuite à une nouvelle analyse de l'écoulement méridien avec le nouveau réseau de calcul : $\Delta r = \Delta z = \Delta x = 0,005 \text{ m}$

les calculs sont regroupés dans le tableau N°2

Calcul Du Pas Relatif sur Le diamètre extérieur

sachant que $t = \frac{\pi d}{N}$ est invariable pour un diamètre donné, pour régler le pas relatif on fait varier l (choisi) en effet considérons la projection de la roue sur le plan.



on choisit $\theta = 100^\circ$, d'après la figure : $X = l \cdot \cos(\beta_{00} + \delta)$ (1)

$$\text{et } X = \frac{\pi}{180} \cdot \theta \cdot \frac{d}{2} \text{ sur la roue (2)}$$

Sur la ligne de courant au diamètre extérieur E_1, E_2 , nous avons :

$$X_{E_1, E_2} = \frac{\pi}{180} \cdot 100 \cdot \frac{0,330}{2} = 0,28798 \text{ m d'où } l = \frac{X}{\cos(\beta_{00} + \delta)} = \frac{0,28798}{\cos(71^\circ)} = 0,291 \text{ m}$$

d'autre part sur la ligne de courant $E_1 E_2$: $t_{E_1 E_2} = \frac{\pi d}{N} = \frac{0,330 \pi}{3} = 0,3456 \rightarrow \frac{l}{t} = 0,841$

les valeurs intermédiaires de l/t sont données par interpolation linéaire.

N°	Grandeurs Caracteristiques	unite	Ligne de courant				
			A ₁ A ₂	B ₁ B ₁	C ₁ C ₂	D ₁ D ₂	E ₁ E ₂
1	diametre d	m	0,170	0,210	0,250	0,290	0,330
2	Vitesse meridienne C _m	m/s	3,50	3,45	3,43	3,33	3,20
3	Vitesse Peripherique U	m/s	12,91	15,91	18,98	22,07	25,03
4	Composante tangentielle $C_{u2} = \frac{gHh}{U} = \frac{51,33}{U}$	m/s	3,97	3,22	2,70	2,33	2,05
5	$w_{\infty}^2 = C_m^2 + (U - \frac{C_{u2}}{2})^2$	m ² /s ²	131,61	217,25	322,50	1448,08	587,17
6	$\tan \beta_{\infty} = \frac{C_m}{U - \frac{C_{u2}}{2}}$	/	0,32036	0,2408	0,1946	0,1593	0,1332
7	β_{∞}	degres	18° 45'	13' 32'	11°	9° 3'	7° 35'
8	λ	degres	1°	1°	1°	1°	1°
9	$C_y \frac{\rho}{E} = \frac{2gHh C_m}{w_{\infty}^2 U \sin(\beta_{\infty} + \alpha)}$	/	0,65	0,407	0,276	0,198	0,149
10	pas relatif l/t	/	0,9083	0,8915	0,8747	0,8578	0,8410
11	C _y	/	0,7 (admis)	0,4565	0,3155	0,2308	0,1772
12	profil admis	/	387	387	490	490	490
13	Y _{max}	mm	15	12,5	10	7,5	5
14	$t = \frac{\pi d}{3}$	mm	178	220	262	304	346
15	l = t · l/t	mm	162	196	229	261	291
16	Y _{max} /l	/	0,0926	0,0638	0,0437	0,0287	0,0172
17	$\delta^{\circ} = \frac{1}{0,092} (C_y - 1,4 \frac{Y_{max}}{l})$	degres	3° 11'	1° 55'	1° 20'	1° 8'	1° 6'
18	$\tan \lambda = 0,042 + 0,06 \frac{Y_{max}}{l}$	/	0,0176	0,0158	0,0146	0,0137	0,0130

- Tableau N°2 caracteristique des profils de la roue -

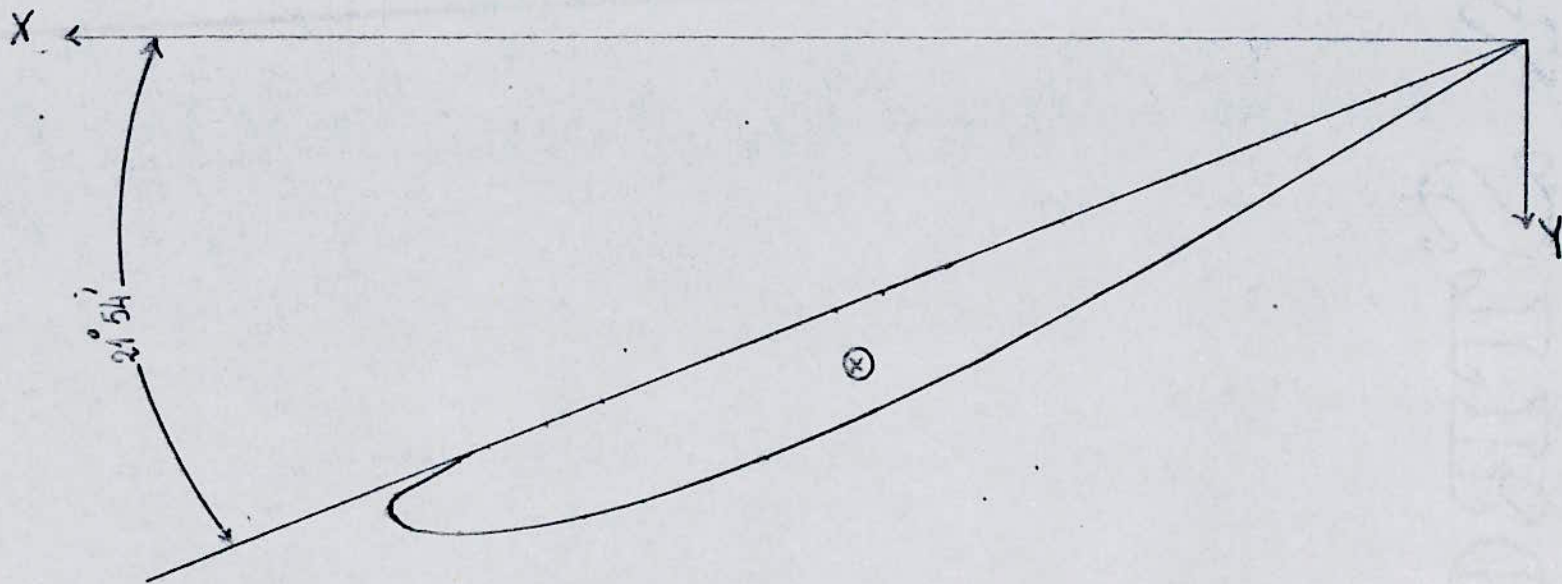
N°	Grandeurs caractéristique	unité	A ₁ A ₂	B ₁ B ₂	C ₁ C ₂	D ₁ D ₂	E ₁ E ₂
19	λ calculé	degré	1,0057	0,9068	0,8377	0,78616	0,7466
20	β _∞ + δ	degré	21° 59'	15° 26'	12° 20'	10° 11'	8° 41'
21	X = l cos(β _∞ + δ)	mm	150,3	188,9	228,9	256,9	287,7
22	$\Delta P = \frac{1}{\rho} C_f \frac{\rho}{2} W_\infty^2$ (k=0,7)	Pa	65805	70839	72677	73869	74357

La chute de pression est pratiquement uniforme sur tous les profils: le calcul est réussi

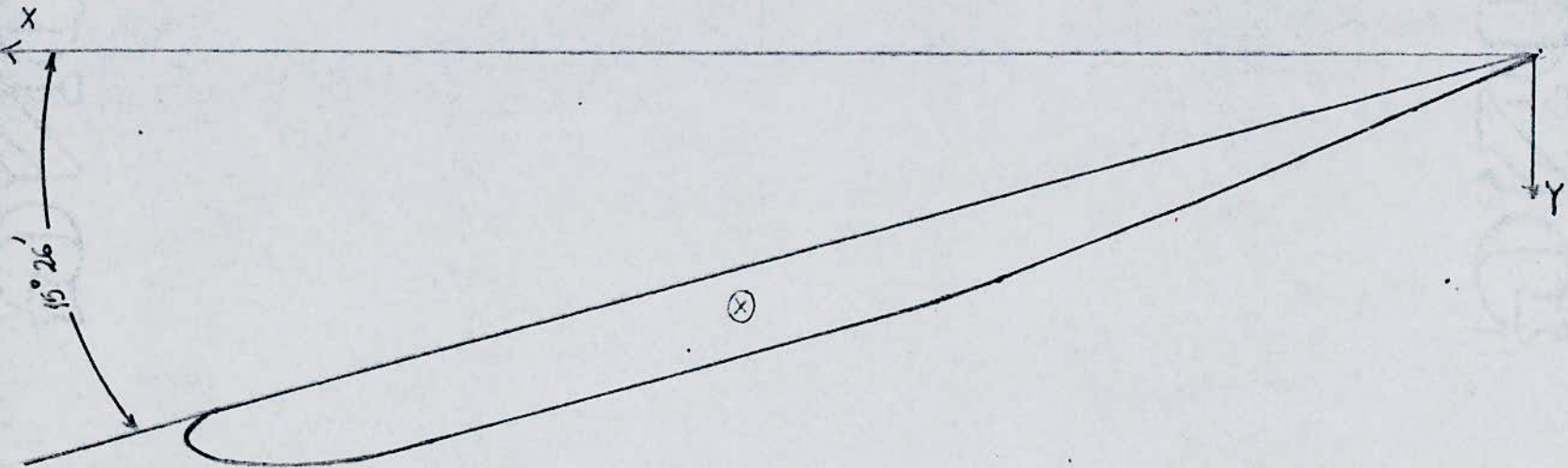
Tableau N°3 - calcul de la directrice à ailettes -

n°	Grandeurs caractéristiques	unité	Lignes de courant				
			A ₁ A ₂	B ₁ B ₂	C ₁ C ₂	D ₁ D ₂	E ₁ E ₂
1	diamètre d	m	0,170	0,210	0,250	0,290	0,330
2	C _{m2}	m/s	3,50	3,43	3,43	3,33	3,20
3	ΔC _u = C _{u2}	m/s	3,97	3,22	2,70	2,33	2,05
4	$\tan \gamma = \frac{\Delta C_u}{C_{m2}}$	/	1,13429	0,9333	0,78717	0,6997	0,6406
5	γ	degré	48,60	43,03	38,21	34,98	32,64
6	$t_d = \frac{Dd}{Nd}$ (Nd=7)	m	0,0763	0,0942	0,1122	0,1302	0,1481
7	l = 1,5 t _d	m	0,115	0,141	0,168	0,195	0,222
8	$\theta = \frac{\gamma}{0,731}$	degré	66,48	58,86	52,27	47,85	44,66
9	$\sin \frac{\theta}{2}$	/	0,548	0,491	0,440	0,4060	0,3799
10	R = l/e . sin θ/2	m	0,104	0,143	0,191	0,241	0,292
11	α ₄	degré	90°	90°	90°	90°	90°

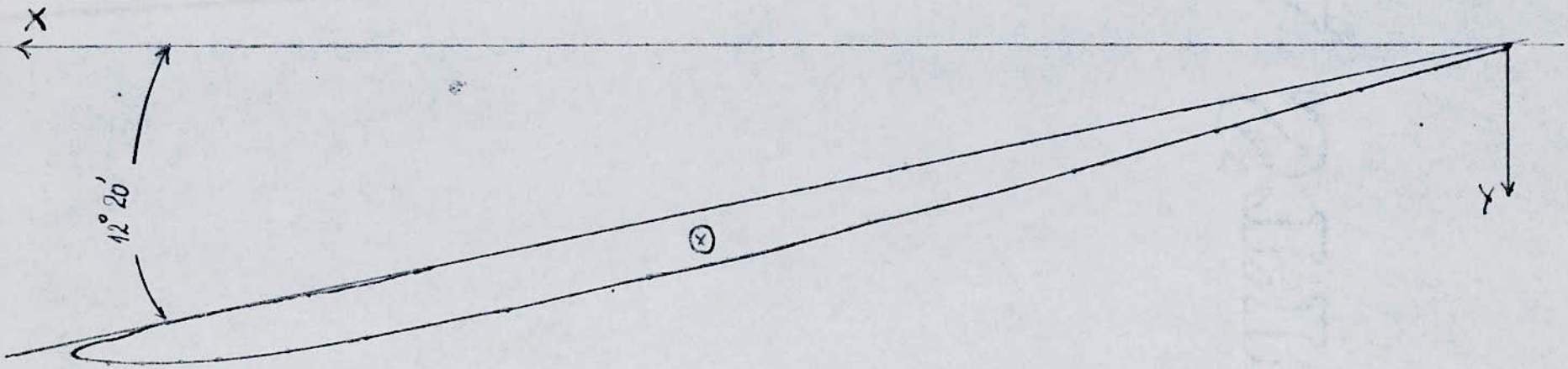
PROFIL N° 387	x (mm)	0	2,03	4,05	8,1	12,15	16,2	24,3	32,4	40,6	64,8	81	97,2	113,4	129,6	145,8	153,9	162	A_{A_2} $l = 162$ $x = 160$
	y_e (mm)	3,2	6,25	7,65	9,4	10,85	11,95	13,40	14,40	15,05	14,6	13,35	11,35	8,90	6,15	3,25	1,75	0,15	
	z (mm)	3,2	1,50	1,05	0,55	0,25	0,10	0,00	0,00	0,20	0,40	0,45	0,50	0,45	0,30	0,15	0,05	0,15	
	C D G	$X_G = 8,8 \text{ cm}$ $Y_G = 4,9 \text{ cm}$ Echelle 1/1																	



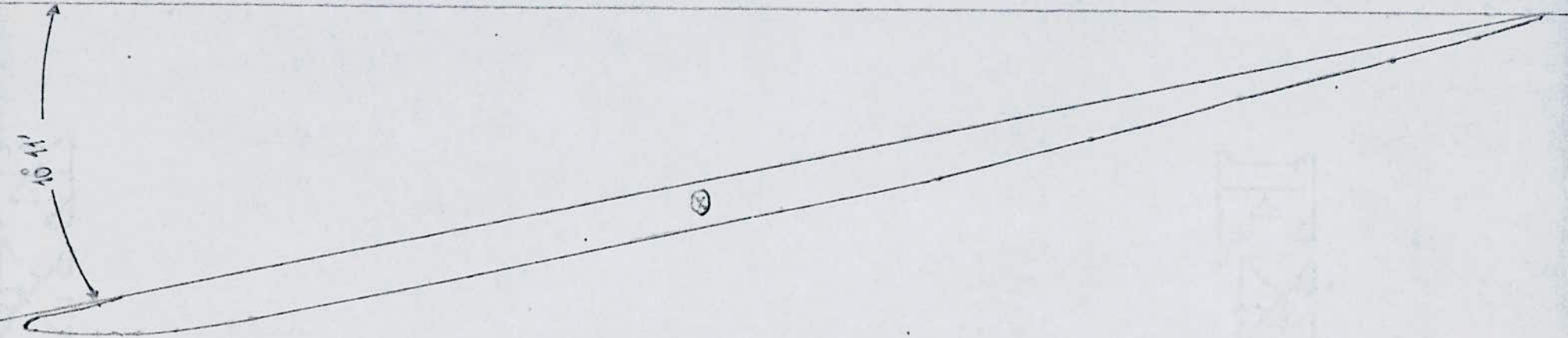
PROFIL N° 387	x (mm)	0	2,45	4,9	9,8	14,7	19,6	29,4	39,2	58,8	78,4	98	117,6	137,2	156,8	176,4	185,2	196		
	y_1 (mm)	3,2	6,25	7,65	9,4	10,85	11,95	12,5	12,5	12,5	12,5	12,5	11,35	8,50	6,15	3,25	1,75	0,15	B_1, B_2	
	y_2 (mm)	3,2	1,50	1,05	0,55	0,25	0,10	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,40	0,50	0,45	0,30	0,15	0,05	0,15	
	C D G																$X_G = 14$ cm $Y_G = 3,8$ cm	Echelle 1/1	$l = 196$ $X = 189$	



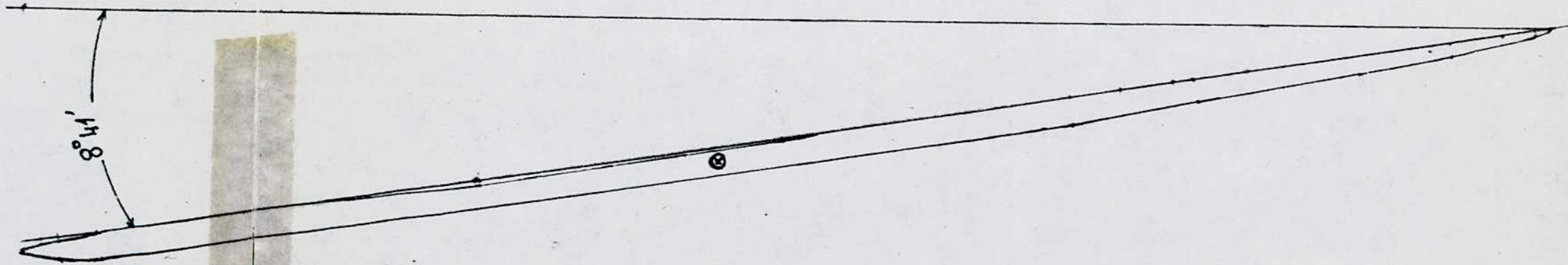
Profil n° 490	x (mm)	0	2,86	5,7	11,45	17,18	22,9	34,4	45,9	60,7	91,6	114,5	137,4	160,3	183,2	206,1	217,6	229	C ₁ -C ₂
	y_e (mm)	2,00	3,60	4,60	5,95	7,00	7,70	8,65	9,20	9,60	9,05	8,55	7,45	6,05	4,40	2,50	1,45	0,15	
	y_i (mm)	2,00	0,85	0,50	0,15	0,00	0,00	0,20	0,40	0,95	0,80	0,80	0,60	0,40	0,15	0,00	0,05	0,15	
	C D G	$X_G = 13,8\text{cm}$ $Y_G = 3,1\text{cm}$ Echelle 1/1																	



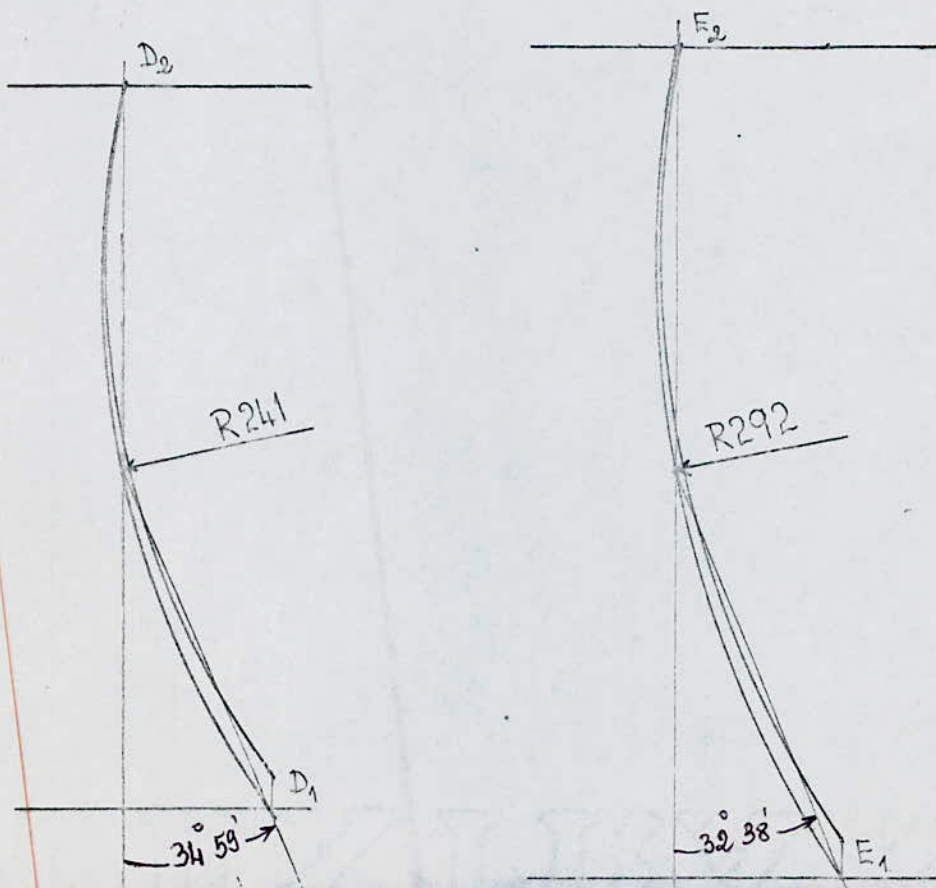
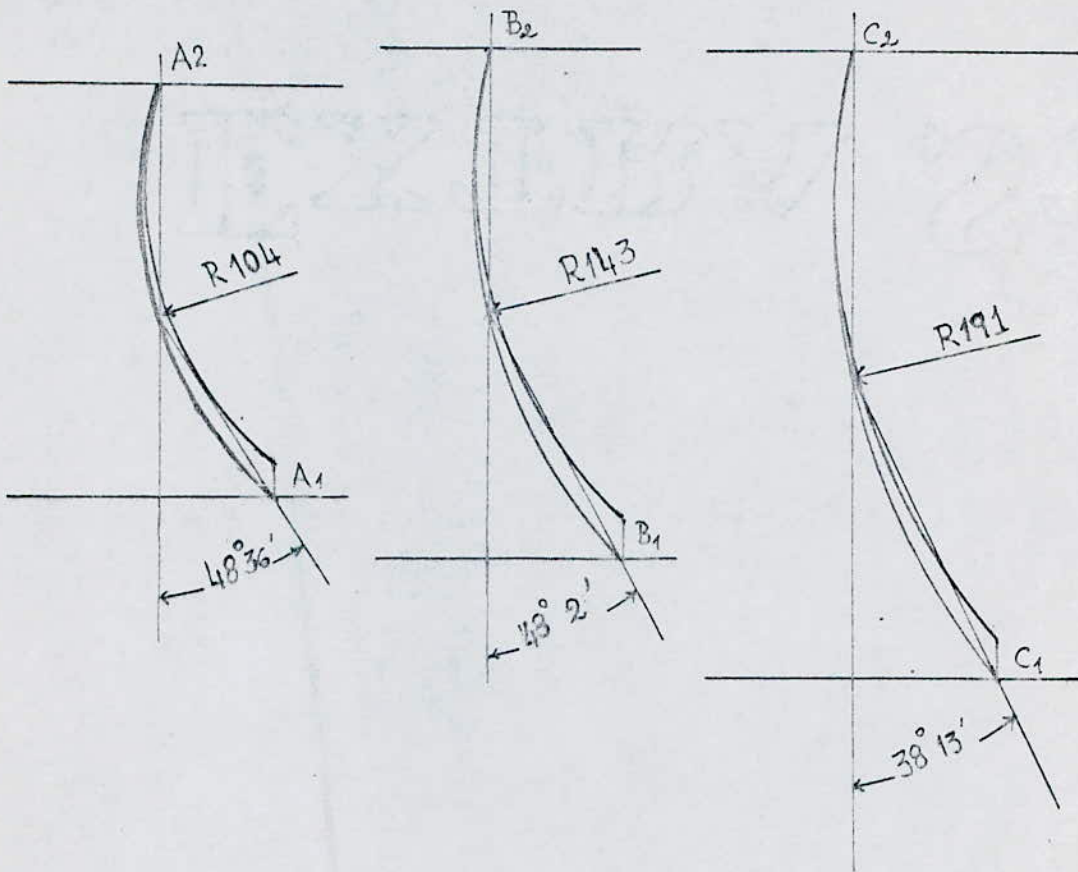
PROFIL N° 490	z (mm)	0	3,26	6,5	13,1	19,6	26,1	32,7	52,2	78,3	104,4	130,5	156,6	182,7	208,8	234,9	246	251	$D_1 - D_2$
	y_e (mm)	2,00	3,60	4,60	5,95	7,00	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	7,45	6,05	4,40	2,50	1,45	0,15	
	d_i (mm)	2,00	0,85	0,50	0,15	0,00	0,00	0,20	0,40	0,95	0,80	0,80	0,60	0,40	0,15	0,00	0,05	0,15	
	C D G	$X_G = 44,2 \text{ cm}$ $Y_G = 3 \text{ cm}$ Echelle 1/1																	



Prof. Nr. 490	x (mm)	0	3,64	7,28	10,92	14,56	18,2	21,84	25,48	29,12	32,76	36,4	40,04	43,68	47,32	50,96	54,6	58,24	$E_1 - E_2$		
	y_e (mm)	2,00	3,60	4,60	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	4,40	2,50		1,45	0,15
	y_i (mm)	2,00	0,85	0,50	0,15	0,00	0,00	0,00	0,20	0,40	0,95	0,80	0,80	0,60	0,15	0,00	0,05	0,15			
	C	$X_G = 15,5 \text{ cm}$																			
D	$Y_G = 2,7 \text{ cm}$																				
G	Echelle 1/1																				
																			$l = 291$		
																			$X = 288$		



DESSIN DES PROFILS DE LA DIRECTRICE Ech: 1/2



Conclusion

Dans le souci de la recherche des caractéristiques géométriques et cinématiques susceptibles de donner à la roue, le meilleur rendement possible, on se retrouve le plus souvent confronté à des problèmes dangereux pouvant même endommager la pompe, tel que le phénomène de cavitation; ce qui nous amène à rechercher un compromis, sur la base de résultats expérimentaux réalisés dans le monde entier pour des pompes semblables ayant donné satisfaction.

Ainsi pour la détermination des dimensions principales de la roue, et faute de pouvoir appliquer les équations théoriques à un engin qui est loin d'être idéal, nous avons adopté la méthode des constantes de traçé de STEPANOFF par l'extrapolation de résultats obtenus pour des pompes homologues. Dans ce contexte et à la suite d'une étude sur ordinateur de l'écoulement méridien, le tracé point par point des profils de l'hélice conformément aux normes de l'institut aérodynamique GÖTTINGEN me fait penser sans prétention de ma part que ce modeste travail pourra constituer un avant-projet pour un projet réel de pompes pouvant contribuer à la promotion de l'agriculture irriguée dans notre pays. En attendant, j'espère que cette première et modeste tentative qui traite directement et séparément les pompes axiales, puisse servir de document de travail pour les étudiants intéressés par ce domaine très vaste et contribuer à l'enrichissement de notre bibliothèque en la matière.

BIBLIOGRAPHIE

1. A.J. STEPANOFF

Pompes Centrifuges Et pompes helices (DUNOD 1961)

2. Adam. T. TROSKOLAŃSKI (EYROLLES 1977)

LES TURBOPOMPES (EYROLLES 1977)

3. R. OUZIAUX et J. PERRIER

Mecanique des fluides Appliquée TII (DUNOD 1966)

4. Daniel Mc CRACKEN et William S DORN

Numerical Methods And FORTRAN Programming
Wiley International Edition 1964

5. A. DUPONT

Hydraulique Urbaine T2 (EYROLLES 1981)

