

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE HYDRAULIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

Pour l'Obtention du diplôme d'Ingénieur d'Etat

S U J E T

ETUDE DE LA REPARTITION DE LA POUSSÉE
HYDROSTATIQUE ENTRE LES ARCS ET LES
MURS DANS UN BARRAGE VOUTE
+ 3 ANNEXES

Proposé Par :

M^r FARKAS G.

Etudié par :

M^r RAHLI G.

Dirigé par :

M^r FARKAS G.

M^{lle} ZERFA

PROMOTION : Juin 1988

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

وزارة التعليم العالي

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة
BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Departement: HYDRAULIQUE

Promoteur: Mr FARKAS G. et ZERFA FZ.

المصلحة: الري
موجه: فاركاش وررهي

Elève ingénieur: Mr RAHLI Gouini

تلميذ مهندس: رحلي غويني

الموضوع: دراسة توزيع القوي الضغط
الهيدروستاتيكية بين الأقواس
و الجدران لسد - عقد

الملخص: انشاء طريقة عددية لتعيين نصيب نقوة ضغط هيدروستاتيكية ليد عقد مدعم بأحد
النظامين قوس - جدار .

SUJET:

ETUDE DE LA REPARTITION DE LA POUSSEE
HYDROSTATIQUE ENTRE LES ARC ET LES
DANS UN BARRAGE-VOUTE

RESUME:

Etablissement d'une méthode numérique pour déterminer
la part de la poussée hydrostatique d'un barrage-voute
supportée par chacun des deux systèmes arc-mur.

SUBJECT:

STUDY OF HYDROSTATIC PRESSURE
DISTRIBUTION WITHIN AN ARCH DAM

ABSTRACT:

A numerical method for the determination of the
component of hydrostatic pressure within an arch dam
supported by the two systems arch and the walls.

1832

EDWARD

ASHTON



DEDICACES



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Je dédie ce modeste travail en signe de respect
et de reconnaissance

- * A ma mère (trois fois)
- * A mon père
- * A mes frères et soeurs en leur souhaitant
du bonheur
- * A tous les amis et surtout "Djamel"



REMERCIEMENTS



Je tiens à adresser un vif remerciement à tous ceux qui, soit par leurs directives, soit par leurs conseils, n'ont ménagé aucun effort pour me permettre l'élaboration de cette étude.

- A tous les professeurs et responsable ayant contribué à ma formation
- A mon promoteur Monsieur G. FARKAS et co-promotrice M^{lle} ZERFA pour ces conseils durant l'élaboration de ce projet.
- Toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'élaboration de cette thèse

☞ SOMMAIRE ☞

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Introduction .

CHAP. I . Généralité .

1. Définition d'un barrage-voûte
2. Désposition générale des barrages-voûtes
 - 2.1. Barrage-voûte de rayon constant
 - 2.2. Barrage-voûte d'angle d'ouverture constant .
3. Utilisation des barrages-voûtes
 - 3.1. Les possibilités d'utilisation des Barrages-voûtes
 - 3.2. Limites d'utilisations des barrages-voûtes .

CHAP. II Influence de la poussée hydrostatique dans Un barrage-voûte .

CHAP III Répartition de la poussée à l'aide de l'ajustement des déformations des murs et des arcs .

1. Ajustement des déformations radiales dans la seule section centrale .
 - 1.1. 1^{ère} méthode : par tâtonnements
 - 1.2. 2^{ème} méthode : on pose d'autant d'équations qu'il y a de points d'intersections .
2. Ajustement des déformations radiales en plusieurs sections verticales .

3. Ajustement de déformations radiales, tangentielle et angulaires en plusieurs sections verticales.

CHAP. IV - Méthode numérique pour l'ajustement des déformations en plusieurs sections (radiales tangentielle et celles de torsion)

- 1 Méthode simplifiée de répartition des charges ou méthode d'ajustement de clé
- 2 - méthode des répartitions des charges par décomposition en arcs et consoles.

IV.A. Détermination des déformations radiales de mur et de l'arc

A.1. détermination des déformations radiales de l'arc

A.1.1. Détermination des éléments de réduction de l'arc

A.1.2. Détermination du déplacement v de l'arc.

A.2. Détermination des déformations radiales de mur

A.2.1. Détermination des moments de flexion de mur

A.2.2. Détermination du déplacement v de mur

IV.B. Détermination des parts de la poussée hydrostatique entre les arcs et le mur

CHAP. V

Exemple numérique

CHAP. VI

Etablissement des diagrammes de la poussée répartie

Conclusion.

CHAP. I INTRODUCTION :

Le barrage-voûte est un barrage de vallée, c'est un ouvrage fixe de retenue qui, partant de la section du cours d'eau, ferme complètement toute la vallée, et réalise un bassin de retenue utilisé comme réservoir.

Dans le cas douteux un ouvrage de retenue doit-être considéré comme barrage quand il a pour but l'accumulation et adapter l'utilisation et la consommation de l'eau aux besoins.

Le problème principal posé par le calcul d'un barrage en voûte est celui de la répartition de la charge entre les flans et le fond de la vallée.

Cette thèse consiste à déterminer les parts de la poussée hydrostatique entre les arcs et le mur, et de tracer l'allure de la poussée répartie.

Plusieurs méthodes ont été proposées pour le calcul des parts de la poussée hydrostatique, elles sont toutes basées sur les notions de base de l'RDM.

CHAP. GENERALITE :

1. Définition d'un barrage-voûte :

Les barrages-voûtes sont des barrages en forme d'arc de cercle, ils s'appuient sur les rives sur lesquelles ils reportent tous les efforts de poussée horizontale de l'eau exactement comme le ferait un pont en arc renversé.

Ils sont construits en béton, en principe non armé, à l'exception de certaines parties de l'ouvrage où l'apparition de contraintes de tractions peut entraîner la mise en place d'armatures en acier dans le béton. pour mieux voir la forme du barrage-voûte réellement voir les photos 1 et 2.

2. Disposition général des barrages-voûtes :

On peut difficilement envisager le type poids expérimentalement pour les barrages élevés, étant donné sa faible utilisation de la résistance du béton, sa grande masse entraînant des frais élevés. il faut chercher la meilleur solution parmi les nombreuses autres sortes ou formes de construction selon les conditions géologiques, Topographiques etc... L'insensibilité aux irrégularités de forme et de charge croît avec l'effet de voûte-élastique.

Il faut distinguer en principe deux sortes de barrages-voûtes :

2.1. Barrage-rôte de rayon constant : (voir schéma 1)

Toutes les sections horizontales présentent des rayons de courbures égaux ne convient pas aux vallées en V ou en triangle, la vallée devenant de plus en plus étroite vers le fond lorsque le rayon reste constant, les angles d'ouvertures décroissent notablement et les parties inférieures du barrage sont de ce fait moins courbées. De sorte que l'on peut à peine parler en ces points d'un effet notable de rôte.

Comme d'autre part, la poussée de l'eau croît vers le sol, les épaisseurs de barrage y augmentent et présentent en ces points des parties extrêmement rigides et plus ou moins encastrées dans le sol de fondation, de sorte que lors de la déformation du barrage qu'on peut considérer dans sa partie supérieure comme une rôte et dans sa partie inférieure comme un disque massif, il se produit de fortes contraintes supplémentaires.

Celui des barrages cylindrique circulaires, doit donc être en général limité aux vallées en auge ou en U. Pour de telles formes de vallées de largeur convenable, et des sols de fondations sûrs particulièrement sur les flancs, le barrage cylindrique avec une épaisseur croissante vers le fond de la vallée en fonction de la pression de l'eau, c'est-à-dire avec une section trapézoïdale de rayon de

courbure extérieure constant, convient également du point de vue de construction, pour autant qu'une trop grande épaisseur au niveau du sol.

Il faut cependant remarquer que les moments de flexion dépendent également de la grandeur du rayon de courbures et de la hauteur de la retenue.

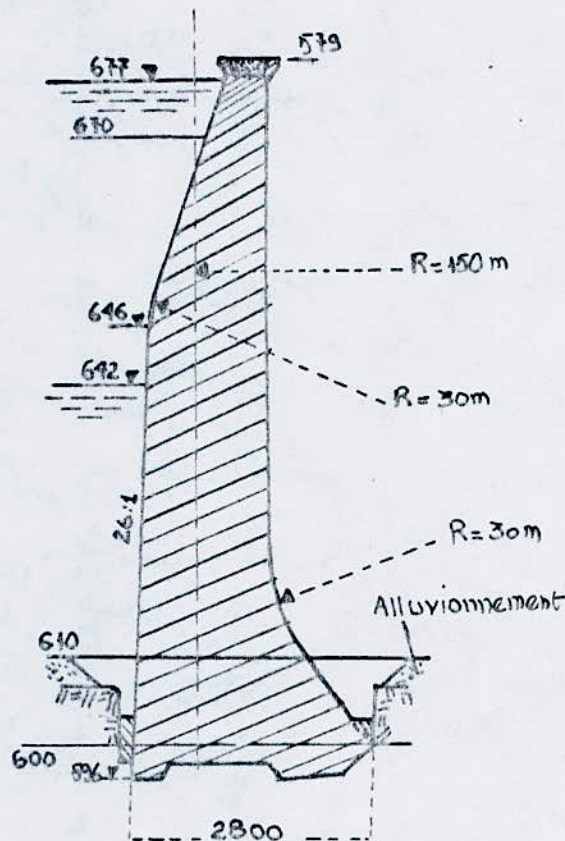


Schéma.1.

Plan et section du barrage
Rossens

2.2. Barrage-voûte d'angle d'ouverture constant : (voir schéma 2)

Barrage-voûte d'ouverture constant, présente vers le bas de faibles rayons et offre ainsi dans la partie inférieure un meilleur effet d'arc, du fait de la plus forte courbure. Il permet aussi d'économiser du poids par rapport au barrage à rayon constant : le barrage devient ainsi nettement plus élastique, de sorte qu'en même temps qu'une économie de matériaux, il présente une plus grande sécurité.

Dans les vallées triangulaire et en V ou les vallées paraboliques de très grande profondeur, il faut par conséquent préférer généralement le type de barrage-voûte d'angle d'ouverture constant, la double courbure de la surface supérieure rendant cependant plus difficile et plus onéreuse l'exécution des travaux.

Le choix de celui de ces deux types ou d'un type intermédiaire représentant la solution la plus économique et la meilleure du point de vue constructif, dépend essentiellement de la forme de la vallée. Il faut choisir la forme et les dimensions qui, dans chaque condition locale, donnent les barrages les plus économiques et les plus sûrs.

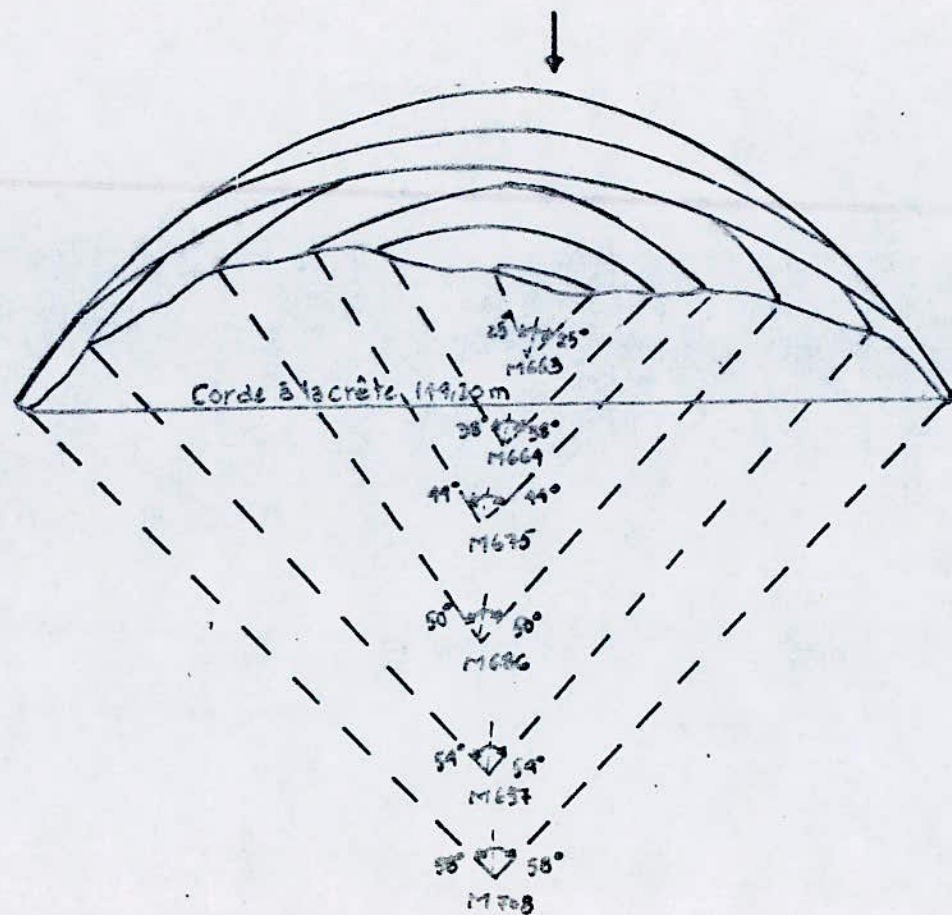


Schéma 2.

Barrage à angle constant de
Hierzmann

3. Utilisation des barrages - routes :

3.1. Les possibilités d'utilisation des barrages - routes :

Il ne faut toute fois construire des barrages - routes que lorsque le rocher est sûrement capable de supporter les efforts et moments qu'ils impliquent et lorsque la vallée et les culées à construire éventuellement permettent un angle d'ouverture suffisamment grand pour assurer un effet de route suffisant .

L'histoire antérieure du sol de fondation rocheux, sa stratification, ses contraintes et déformation et leurs influence, doivent être par conséquent étudiées soigneusement .

A côté des économies de matériaux pouvant atteindre jusqu'à 60% par rapport à un barrage poids, il faut signaler comme autre avantage du barrage - route , la diminution des contraintes de retrait et de la poussée des eaux souterraines liée à la diminution de l'épaisseur du barrage . En fin, la possibilité de réduire le temps de construction joue un rôle important .

3.2. Limites d'utilisation du barrage - route :

Etant donné la très grande économie de masse par rapport au barrage - poids et les avantages en résultant, telles que

la qualité du rocher de fondation, la convenance de la forme et de la largeur de la vallée, le choix du barrage-voûte dépend de l'existence de matériaux convenables et d'un coût d'extraction et de transport défendable économiquement, dans certaines circonstances, également des possibilités de dérivation des eaux pendant la construction.

Le choix dépend également de la nature des installations d'exploitation, telles que par exemple des ouvrages d'évacuation des crues.

CHAPITRE. INFLUENCE DE LA POUSSEE HYDROSTATIQUE DANS UN BARRAGE-VOÛTE

Les barrages-voûtes (en béton) sont fortement incurvés en plan, de sorte qu'ils transmettent une partie importante des efforts qu'ils subissent aux flancs de la vallée. Son épaisseur \bar{a} à la base (B) est de 15% (vallée étroites, voûtes minces), \bar{a} 20, éventuellement 25% (vallées larges), de sa hauteur H. Les conditions d'appui d'un barrage-voûte sont plus sévères que le barrage poids.

En général, ce barrage est soumis à la poussée de l'eau qui croît du haut vers le bas.

Cette poussée de l'eau est divisée en deux parties, l'une qui agit sur l'arc du barrage et l'autre sur le mur. Pour les barrages-voûtes, la poussée hydrostatique de l'eau verticale est négligeable, la poussée horizontale est importante.

En plus de cette force on doit tenir compte aussi des températures et leurs effets qui ne sont pas négligeables, car l'ouvrage est massif. Cet ouvrage n'est pas un objet isolé, mais il s'agit d'un ouvrage hautement hyperstatique, et le calcul exact est impossible.

Pour le calcul comme ce barrage, on aboutit à une simplification importante, et après la vérification, elle consiste à découper le barrage en éléments porteurs horizontaux et verticaux. (voir fig 1) si la largeur est faible, et égale au même ordre que la hauteur c'est-à-dire $L/H = 1$ ou 2, les efforts se transmettent essentiellement

par les éléments horizontaux, si de surcroît, ces éléments sont arqués, cet effet est encore accentué, car leur rigidité est fortement accrue, c'est le cas des barrages-voûtes.

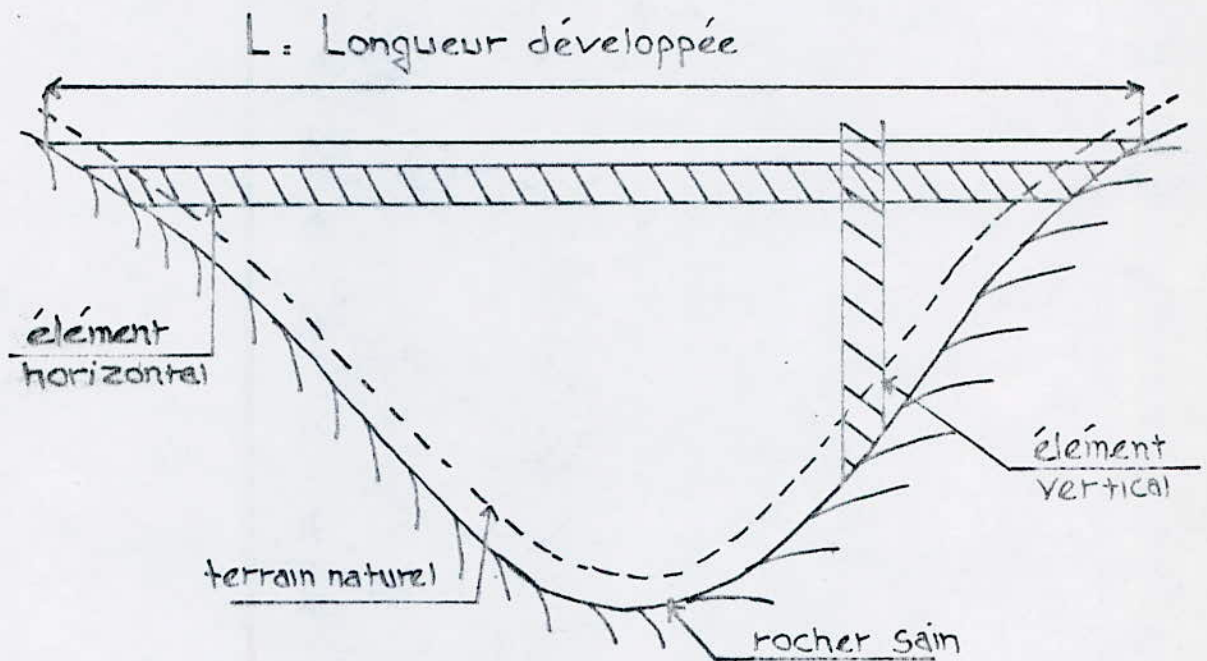


FIG. 1

DECOMPOSITION EN ELEMENTS PORTEURS
HORIZONTALS ET VERTICAUX

Si la largeur de la vallée est faible c'est-à-dire $L/H = 2 \text{ à } 4$; ici on constate que les éléments horizontaux interviennent plus activement mais si ces éléments sont cintrés (angle au centre: $90 \text{ à } 120^\circ$) ; leur rigidité augmente, ils prennent alors une part élevée de la charge de l'eau, d'autant plus que les éléments verticaux sont de moindre épaisseur, donc plus flexibles et moins chargés peut-être négligés. (voir "fig 2")

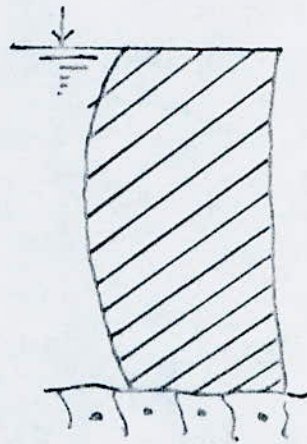
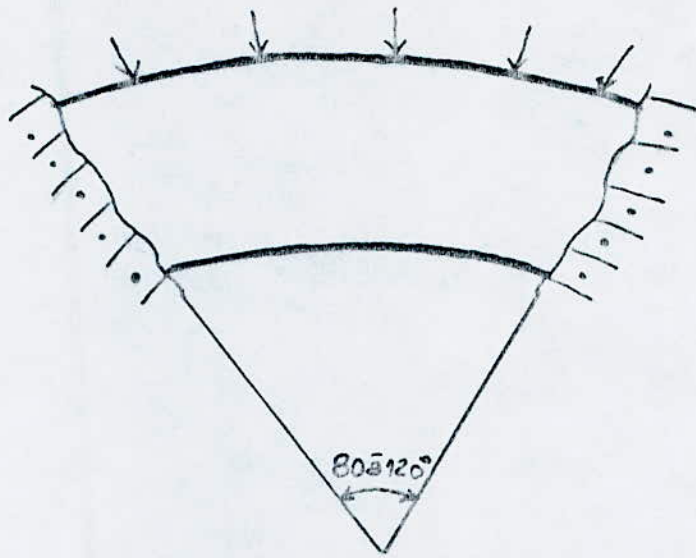


FIG. 2

EFFET DE VOÛTE

Les éléments porteurs horizontaux sont maintenant des arcs, (voir "fig 3") encastés plus ou moins élastiquement aux deux extrémités, et ces éléments ne s'appuyant que très peu sur les éléments verticaux qui sont mince et encastés seulement à leur base.

Donc on affaire à une succession d'arcs, de portée diminuant vers le bas liés entre eux dans le sens vertical (murs)

Si on veut voir la répartition de la poussée de l'eau entre arcs et murs (voir "fig 4") nous donne un système "arcs-murs" qui est

hyperstatique, dans ce cas on calcul simultanément les efforts et les contraintes sur les éléments horizontaux et verticaux, en posant comme condition que les déformations des deux systèmes sont identiques. Les deux diagrammes de "fig 5" donnent l'allure de la répartition de la pression hydrostatique entre les deux système porteurs (part des arcs et part des murs), dans le cas d'une vallée large et dans celui d'une vallée étroite.

Du fait de l'encastrement à la base, les arcs inférieurs sont soulagés inversement, les arcs situés au voisinage du couronnement sont surchargés, en effet, ils ont une rigidité relativement élevée (par rapport aux murs) et les murs, ou consoles, s'appuient en quelque sorte sur eux.

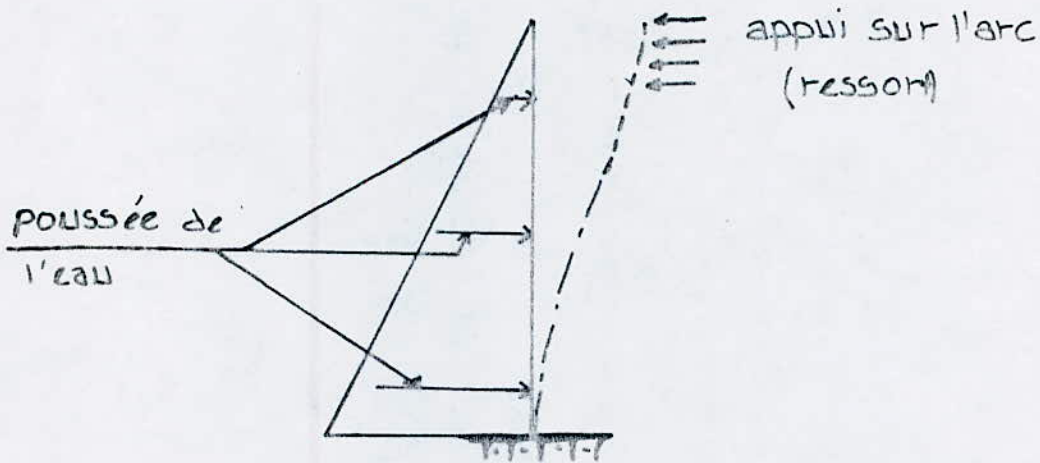
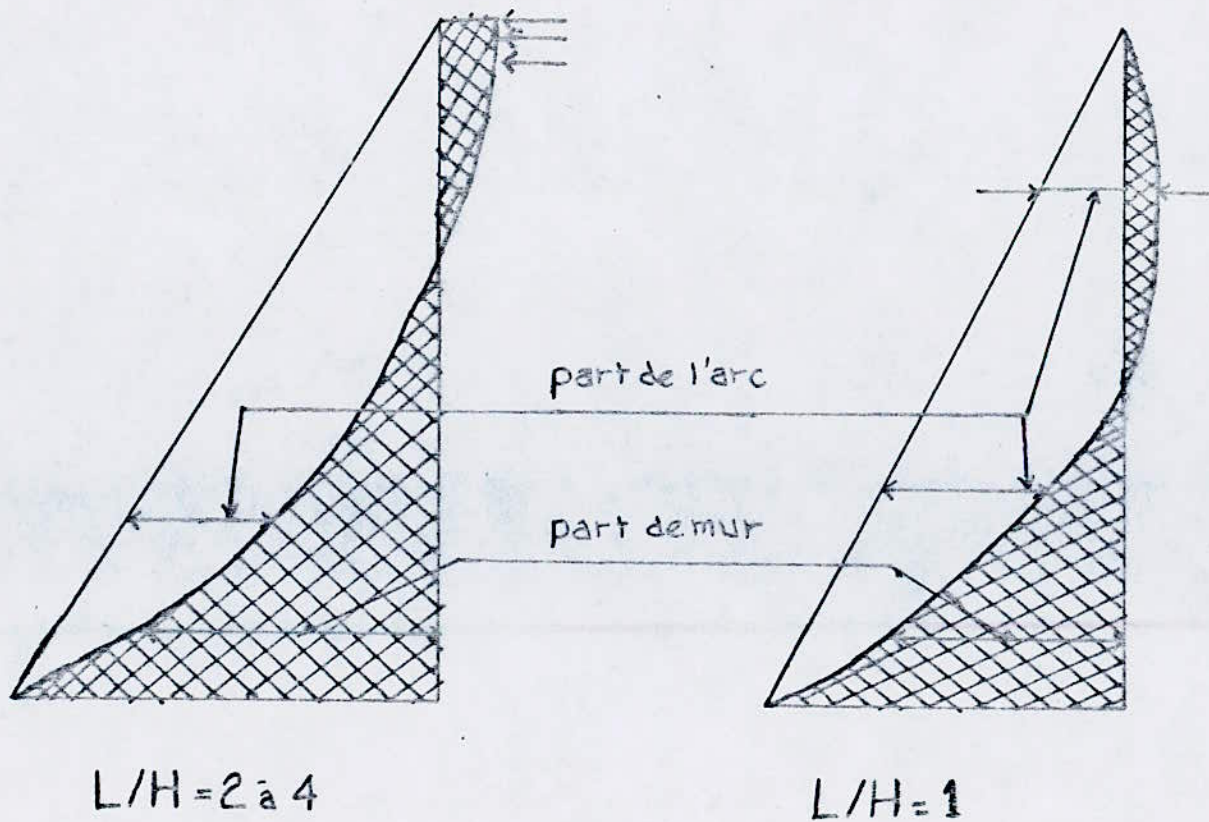


FIG. 3

LIGNES. DE FORMEES (sous la poussée de l'eau)
D'UN. BARRAGE - VOÛTE



$$L/H = 2 \text{ à } 4$$



$$L/H = 1$$

FIG. 4.

EFFET "ARCS - MURS"

(répartition de la poussée de l'eau)

CHAPITRE II. REPARTITION DE LA POUSSEE A L'AIDE DE L'AJUSTEMENT DES DEFORMATIONS DES MURS ET DES ARCS

Le but de l'ajustement des déformations est de déterminer la part de la poussée hydrostatique supportée par les deux systèmes murs-arcs.

Ces déformations n'ont pas toutes la même importance.

Si on trace l'allure des déformations d'un arc on constate, que δ_v (déformation verticale) est beaucoup plus petit et on le néglige dans un calcul d'ajustement. (voir "fig 5").

On a trois composantes de rotation (voir "fig 6"); qui sont égales entre les arcs et les murs. Donc au total on obtient six conditions de déformations à respecter à chaque point d'intersection des arcs et des murs, ce qui conduit à un très long calcul.

Dans la pratique on néglige trois de ces déformations (les moins importantes) et on garde δ_r (déformation radiale), δ_t (déformation tangentielle), w (déformation de torsion) à axe verticale. L'ajustement des δ_t et w est beaucoup moins important que celui de δ_r . C'est-à-dire ne représente que 5 à 10%.

Le calcul complet est très long; donc on cherche toujours à le simplifier, on se contente de l'ajustement des déformations radiales (δ_r) (en particulier lorsque la vallée est étroite)

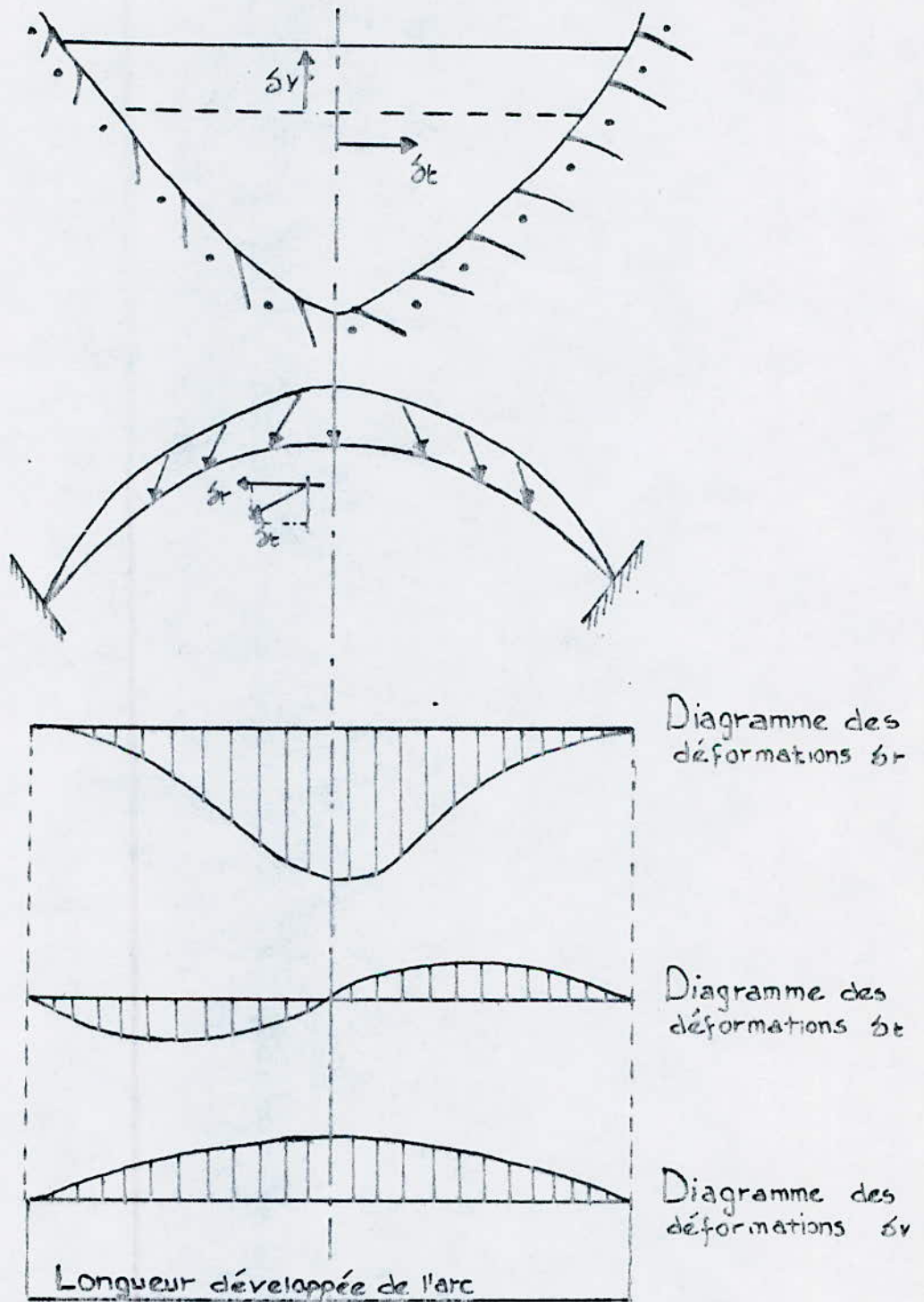


FIG. 5 ALLURE DES DEFORMATIONS
D'UN ARC

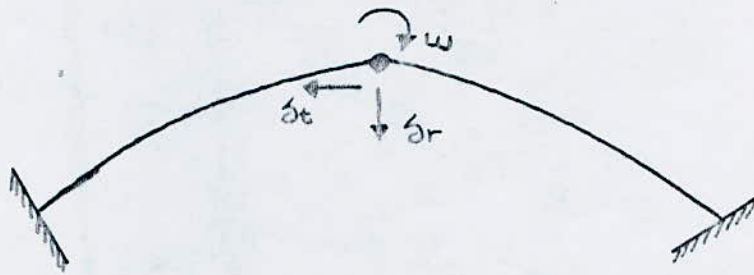


FIG. 6. " Principales déformations généralement "
 prises en compte pour un ajustement

On réalise l'ajustement des déformations radiales dans la seule section centrale et ajustement en plusieurs sections verticales =

1. Ajustement des déformations radiales dans la seule section centrale =

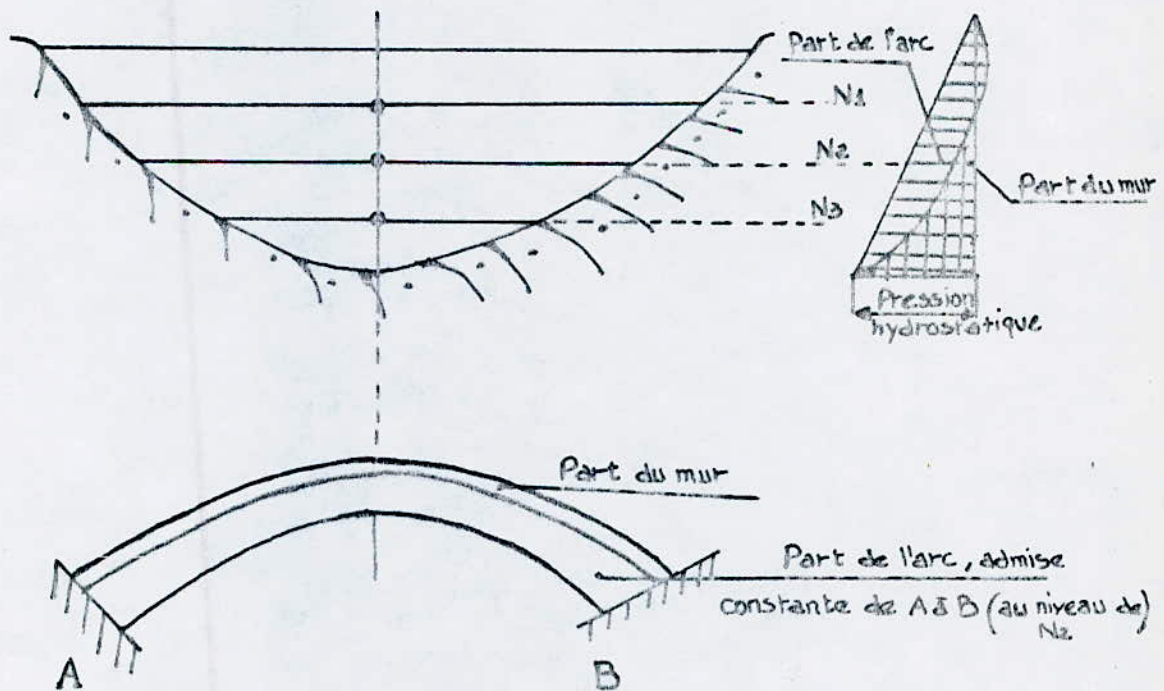


FIG. 7. REALISATION de l'ajustement des déformations radiales
 dans la seule section centrale

fig 7: Faisons l'ajustement, par exemple, à trois niveaux (N_1, N_2 et N_3), nous ne connaissons la véritable répartition arc-mur que dans la section centrale. Donc nous devons admettre que cette répartition est constante tout le long d'un même arc, c'est-à-dire de A à B. Pour la réalisation de l'ajustement, on dispose de deux méthodes :

11. Première méthode = par tâtonnements.

Partant d'un exemple connu, on admet a priori une certaine répartition. On calcule séparément la déformation de chacun des arcs (dans la fig 7 il y en a 3); à la clé, puis celle du mur central, par les théories de la résistance des matériaux.

On vérifie si les déformations obtenues sont à peu près les mêmes, si non on choisit une nouvelle hypothèse et on recommence. Lorsque l'ajustement est à peu près satisfaisant, on calcule les efforts et les contraintes d'après les méthodes données.

12. Deuxième méthode = On pose autant d'équations qu'il y a de points d'intersection :

Ici l'inconnue est la part de pression à chaque niveau supportée par l'arc $P_{arc} = P - P_{mur}$

le premier membre de chaque équation est l'expression de la déformation radiale de l'arc et le deuxième membre est l'expression de la déformation du mur.

Pour le calcul, on suppose que la poussée est déjà connue "P", on admet dans un avant projet que l'eau est totale c'est-à-dire

proportionnelle à la profondeur.

Pour déterminer la pression réelle, on découpe des tranches horizontales et une seule tranche verticale au milieu et on considère que chaque point de croisement des deux systèmes "arcs-mur" est constitué par un appui simple.

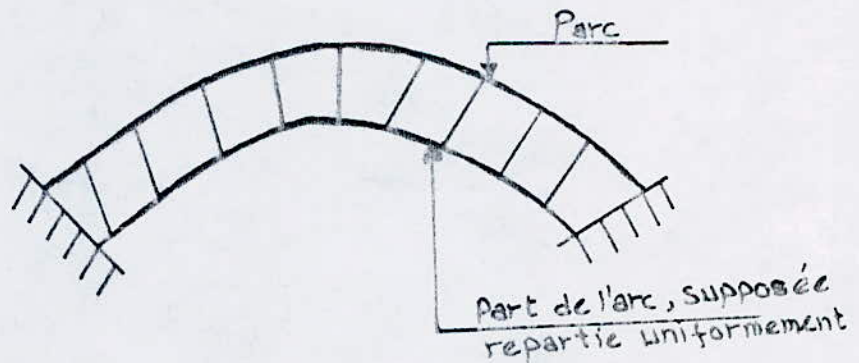
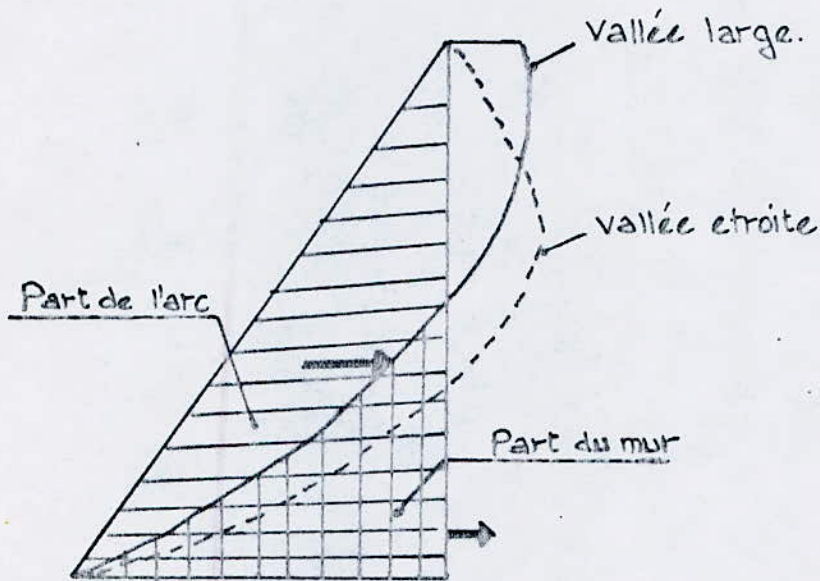


FIG. 8

POUSSEE de l'eau sur les arcs et le mur, résultant de l'ajustement des déformations radiales dans la section centrale

fig. 8: La poussée de l'eau se décompose en deux parties, l'une qui charge les arcs, l'autre qui charge le mur. En exprimant l'égalité des déformations radiales des deux systèmes ($\delta_{\text{arc}} = \delta_{\text{mur}}$), on peut déterminer la valeur de ces deux parts. En supposant qu'à chaque niveau la part supportée par l'arc est constante le long de cet arc, les arcs de la zone supérieure est entraînés par ceux de la zone inférieure par l'intermédiaire du mur qui s'appuie sur eux, alors les arcs supérieures sont chargés et les contraintes y sont plus élevées si on les compare par le calcul des arcs indépendants. Ce n'est pas grave puisqu'il suffira de leur donner l'épaisseur voulue, les charges sont au contraire diminuées sur les arcs inférieurs qui sont ainsi soulagés.

2. Ajustement des déformation radiales en plusieurs sections verticales:

Dans ce cas on ajuste en plusieurs sections verticales des déformation radiales seules. (voir fig. 9)

On applique la méthode qu'on a citée dans le cas précédent mais cette fois, c'est en plusieurs sections verticales, on prend 3-5 pour ne pas compliquer le calcul, on suppose que les déformation radiales sont égales entre les deux système, en chaque point de croisement.

Dans ce cas le diagramme de poussée sur un arc donné n'est plus constant, il varie le long de l'arc.

Le calcul est plus long, il conduit à une correction de contraintes de 10 à 20% (par rapport au au calcul avec l'ajustement radial dans

une seule section)

La correction est d'autant plus importante que la vallée est plus large (par rapport à la hauteur du barrage), pour une gorge étroite, l'amélioration est insignifiante et ne justifie pas un calcul si compliqué.

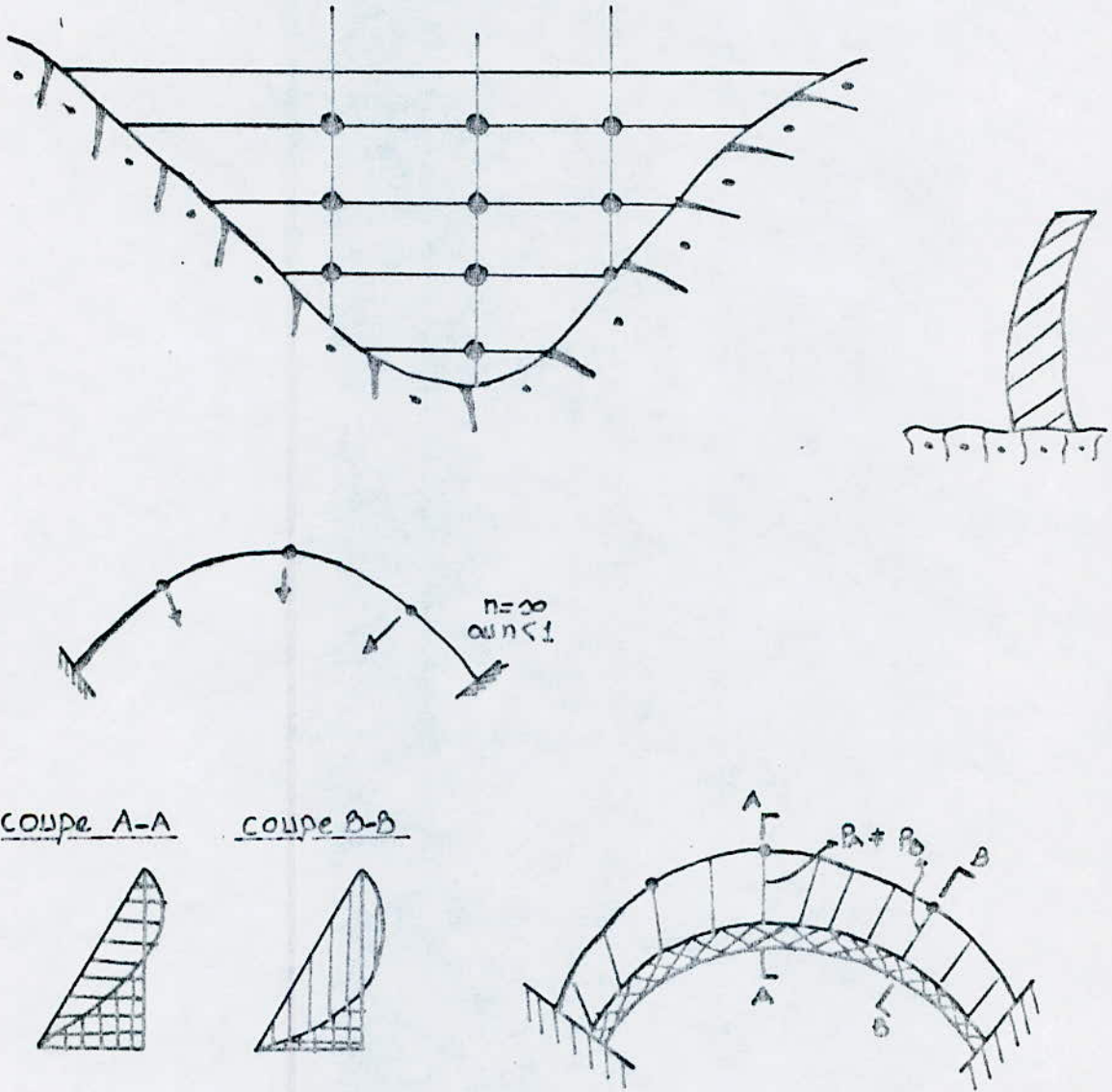


FIG. 9

Poussée de l'eau sur les arcs et les murs, résultant de l'ajustement des déformations radiales en plusieurs sections verticales.

3. Ajustement des déformations radiales, tangentiellees et angulaires en plusieurs sections verticales =

Dans ce cas, l'ajustement se fait aux points des croisements des arcs et des murs de toutes les déformations c'est-à-dire il existe en tout six, et non seulement les radiales. (voir fig 10)

Dans la pratique on se contente toujours les plus importantes qui sont au nombre de trois : soit radiales, tangentiellees dans le sens horizontal et angulaires à axe vertical. Dans la section centrale d'un barrage symétrique les deux dernières sont nulles.

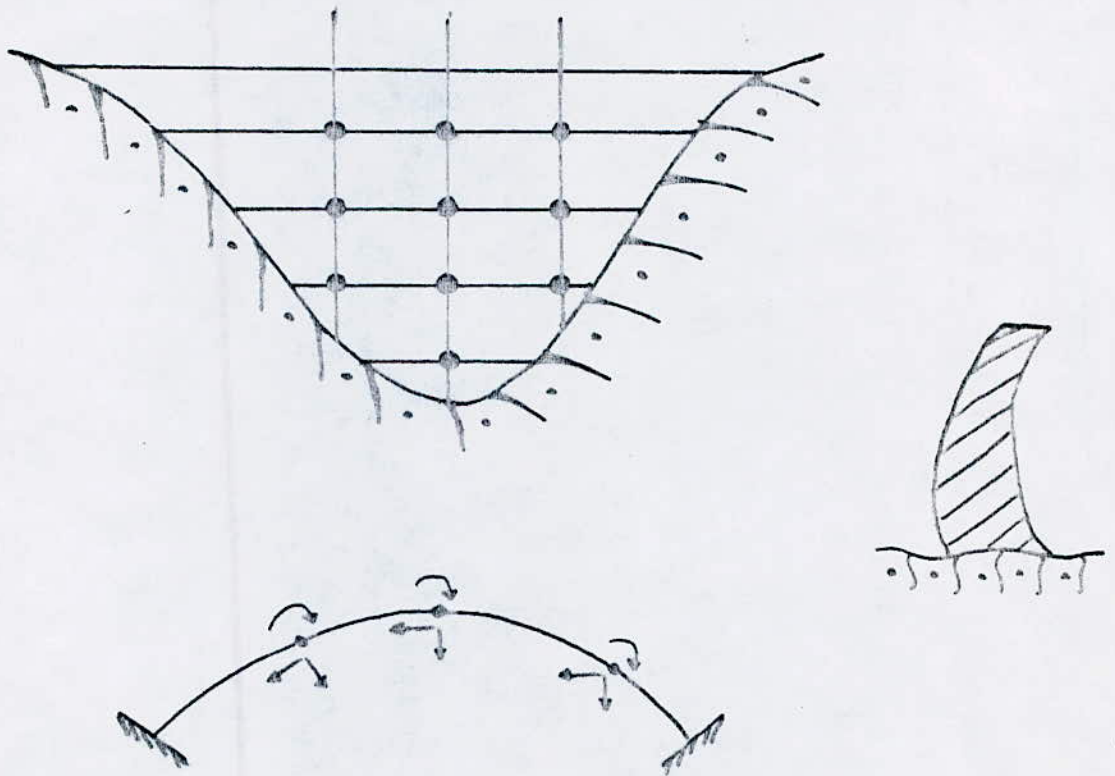


FIG. 10

Ajustement des déformations radiales, tangentiellees et angulaires en plusieurs sections verticales

CHAP. IV. METHODE NUMERIQUE POUR L'AJUSTEMENT DES DEFORMATION EN PLUSIEURS SECTIONS

(ajustement des déformations radiales, tangentiels et celles de torsion)

Il existe deux méthodes de calcul :

- 1 - la méthode simplifiée de répartition des charges ou méthode d'ajustement de cléf.
 - 2 - la méthode de répartition des charges par décompositions en arcs et consoles.
1. Méthode simplifiée de répartition des charges ou méthode d'ajustement de cléf :

Souvent lorsque la forme de la vallée présente une certaine régularité et une certaine symétrie et lorsqu'il n'y a par conséquent pas à compter sur l'apparition de moments de torsion importants, on exécute le calcul du barrage par la méthode simple de répartition des charges, il y a lieu en l'occurrence de tenir compte de l'élasticité du sol de fondation.

On suppose le barrage décomposé en un système d'arcs et une console médiane à la cléf, complétée obligatoirement par d'autres consoles selon la forme et la constitution de la vallée, lorsque la vallée est dissymétrique. On détermine les parts respectives de la poussée de l'eau qu'encaissent les consoles et les arcs d'après les flexions communes des deux éléments.

Après avoir déterminé les charges imputables aux divers éléments, on calcule les efforts transversaux et les moments fléchissants corre-

spondants.

Les consoles sont considérées comme encastrées entre les différents arcs élastiques ou reposant élastiquement selon le nombre de consoles.

Arcs et consoles sont considérés en l'occurrence comme encastrés élastiquement.

Lorsque l'on considère qu'une console médiane, la méthode prend le nom de "Méthode d'ajustement de clés" et est utilisable lorsque le barrage-voûte est symétrique.

Les arcs sont sollicités par la poussée de l'eau, celle des terres et celle des glaces ainsi que par les variations régulières et irrégulières de température, les trois dernières peuvent-être négligées dans un calcul par rapport à la poussée de l'eau.

La console est sollicitée par la composante verticale de l'eau qui dépend de la forme du barrage à l'amont, par le poids propre, les sous-pressions, la poussée des eaux souterraines et les irrégularités de la température, les sollicitations résultant des différences régulières de températures peuvent-être négligées pour les consoles.

Dans le cas de la méthode d'ajustement de clés, lorsqu'on suppose comme "Vogt" que les points d'encastrement de la console et des arcs sont plus profonds, les flèches radiales à la clé sont : S_{pn} sous l'effet de la charge unitaire $p = 1 \text{ t/m}^2$.

Si, par exemple le barrage est décomposé en 5 arcs, il faut déterminer $n=5$ flèches en clés. (voir fig 11)

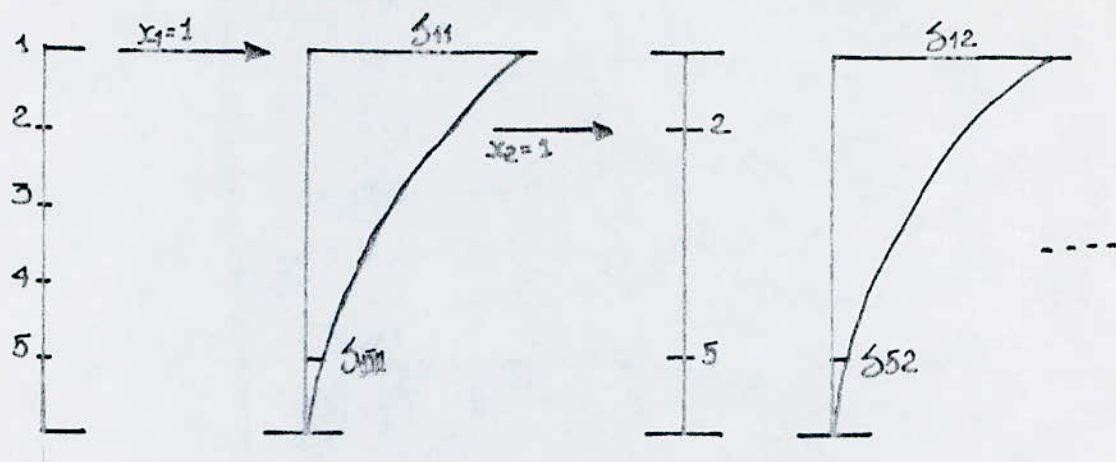


FIG.11.

Le point de la console correspond à la clé de l'arc doit prendre la même flèche que celle-ci. Après avoir déterminé les flèches unitaires de ces points de la console on pose les équations d'identité des flèches. La matrice donne :

$$1. \delta_{11} x_1 + \delta_{12} x_2 + \delta_{13} x_3 + \delta_{14} x_4 + \delta_{15} x_5 = \left(h_1 - \frac{x_1}{\Delta h} \right) \delta p_1$$

$$2. \delta_{21} x_1 + \delta_{22} x_2 + \delta_{23} x_3 + \delta_{24} x_4 + \delta_{25} x_5 = \left(h_2 - \frac{x_2}{\Delta h} \right) \delta p_2$$

$$3. \delta_{31} x_1 + \delta_{32} x_2 + \delta_{33} x_3 + \delta_{34} x_4 + \delta_{35} x_5 = \left(h_3 - \frac{x_3}{\Delta h} \right) \delta p_3$$

$$4. \delta_{41} x_1 + \delta_{42} x_2 + \delta_{43} x_3 + \delta_{44} x_4 + \delta_{45} x_5 = \left(h_4 - \frac{x_4}{\Delta h} \right) \delta p_4$$

$$5. \delta_{51} x_1 + \delta_{52} x_2 + \delta_{53} x_3 + \delta_{54} x_4 + \delta_{55} x_5 = \left(h_5 - \frac{x_5}{\Delta h} \right) \delta p_5$$

On déduit de cette matrice, selon la méthode habituelle, les parts de la charge "Xn" incombant aux arcs. On peut tenir compte de la température de la même manière.

Lorsqu'on considère qu'une console médiane, on calcule générale-

ment les arcs pour une charge uniformément répartie, alors que lorsque l'on considère plusieurs consoles, il en résulte une charge répartie non uniformément sur les arcs.

On prend comme exemple, le barrage de Limberg, qui donne la répartition de la charge sur les arcs et les consoles. (voir fig 12)

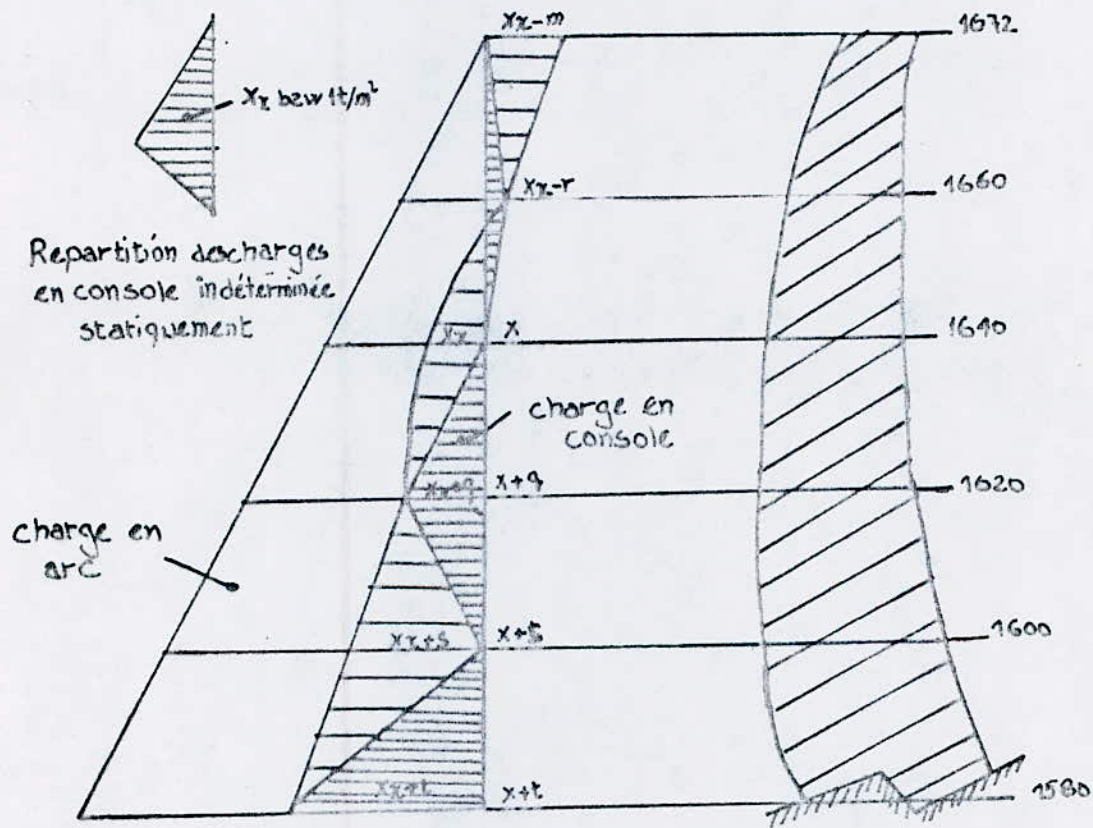


FIG. 12.

Barrage de Limberg des Tauern-Kraftwerke
Répartition des charges en arcs et en consoles.

Le calcul est basé sur le principe de la compensation radiale, mais ne tiens pas compte de la compensation des décalages tangentiels et des déformations de torsion.

La console peut-être également considérée en l'occurrence comme une poutre encastrée élastiquement dans une base souple. D'après la méthode de répartition des charges par décomposition en arcs et consoles selon Ritter, on détermine à l'aide d'essais, pour n'importe quelle courbure et épaisseur de barrage, la part de la poussée de l'eau que doivent encaisser dans chaque cas, les arcs et la console pour qu'il se produise les mêmes flèches aux points d'intersections.

Au lieu de déterminer par des essais les valeurs réparties des charges on peut également poser les équations de l'élasticité. Lorsque la forme de la vallée est dissymétrique, ou lorsqu'elle est symétrique mais que le sol, les flancs et le barrage présentent de fortes différences de modules d'élasticité, des études plus poussées sont nécessaires.

2. Méthode de répartition des charges par décompositions en arcs et consoles =

Lorsqu'on considère d'autres consoles, qui présentent par ailleurs des rigidités différentes à la flexion, la répartition de la poussée de l'eau sur les arcs et consoles est différente par suite des arcs reliant les consoles. On prend par exemple, le barrage de Stevenson-creek qui présente le fléchissement du barrage. (voir fig 13)



FIG. 13. Diagramme de déformation du barrage de Stevenson-creek.

Cette méthode donne une bonne approximation pour les barrages minces, du fait du grand nombre de consoles et d'arcs. Le barrage-voûte est décomposé en un nombre suffisant d'arcs horizontaux encastrés élastiquement dans les flancs de la vallée et présentant par conséquent trois indéterminations statiques et en un certain nombre de consoles encastrés élastiquement dans le sol. On détermine d'abord les flèches aux points d'intersections sous l'effet des grandeurs radiales statiquement indéterminées, ce qui réduit partiellement les contraintes. Pour les arcs, en ne tenant compte que des flexions radiales, on

considère des charges de 1 t/m uniformément répartie ainsi que des charges triangulaires décroissant de 1 t/m aux sommiers jusqu'à 0 aux $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$ symétriques et antisymétrique ; pour les consoles on considère les charges unitaires réparties triangulairement, Lorsque l'on tient compte des translations et rotations tangentielles, il faut procéder en introduisant les grands unitaires correspondants. On peut calculer ainsi les déformations des arcs et des consoles, causées par ces charges en direction radiale et finalement tangentielle ainsi que les rotations en tenant compte secondaire de l'élasticité du sol en portant les hypothèses approchées faite par Vogt. L'hypothèse de l'encastrement de Vogt est :

1. Rotation par suite du moment d'encastrement $M_0 = 1$

$$E_{11} = \frac{K_1}{E_F d_0^2}$$

2. Glissement normal par suite de la force normale $N_0 = 1$

$$E_{22} = \frac{K_2}{E_F}$$

3. Glissement normal par suite de la force transversale $Q_0 = 1$

$$E_{33} = \frac{K_3}{E_F}$$

4. Rotation par suite de la force transversale $Q_0 = 1$

égale au glissement radial par suite du moment d'encastrement $M_0 = 1$

$$E_{13} = \frac{K_5}{E_F d_0} = E_{31}$$

5. Rotation de torsion par suite du moment de torsion $M = 1$

$$E_{44} = \frac{K_7}{E_F d_0^2}$$

Avec d_0 = épaisseur de la console au point d'encastrement

Les valeurs de K_1, K_2, \dots, K_5 dépendent de l'angle de chaque base

arc-console avec la verticale et du rapport b/a ou $b/2a$ de la surface d'appui développée. On prend comme valeur moyenne : $K_1 = 5,075$, $K_2 = 1,553$, $K_3 = 1,785$, K_3 et K_5 ne sont généralement pas nécessaires.

L'hypothèse de l'encastrement de Vogt donne dans certaines circonstances des sollicitations trop favorables dans la partie inférieure.

Les flèches ainsi déterminées, par exemple (pour ne considérer que les déformations radiales) ne concordent cependant pas aux nœuds d'intersection des consoles et des arcs.

La flèche de la console est calculée par la formule de la ligne élastique, en tenant compte de la déformation du sous-sol. On a :

$$\delta_{mm} = \iint \frac{M}{E_b I} ds ds + \int \frac{Q x}{G F} ds$$

Avec : G : module de glissement

x : facteur de compensation entre la répartition de contraintes de cisaillement supposée linéaire et les contraintes réelles

La flèche de l'arc est déterminée d'après la formule exprimant l'élasticité des culées en direction radiale :

$$\delta = \int \frac{M \bar{M}}{E_b I} ds + \int \frac{N \bar{N}}{E_b F} + \int \frac{Q \bar{Q}}{G F} ds \dots$$

En y comptant les membres représentant l'élasticité du sol de fondation.

M, N, Q représentent en l'occurrence les forces externes.

$\overline{M}, \overline{N}, \overline{Q}$ les forces internes.

Les flèches radiales des arcs sont déterminées par les charges radiales ainsi que pour les variations de température régulières et irrégulières.

Dans notre cas, on considère qu'une console médiane et plusieurs arcs et on suppose que la charge appliquée sur les arcs est une charge uniformément répartie, et qu'il existe que les déformations radiales (translations), les déformations tangentielles et celles de torsions sont nulles.

A. DETERMINATION DES DEFORMATION RADIALES DE MUR ET DE L'ARC

On applique la première méthode qui est la méthode d'ajustement de clés pour déterminer les déformations radiales

A.1. Détermination des déformations radiales de l'arc =

Les déformations radiales de l'arc sont déterminées après avoir déterminé les éléments de réduction de cet arc.

A.1.1. Détermination des éléments de réduction de l'arc =

On suppose que l'arc est symétrique dont la moyenne circulaire est caractérisée par le rayon "R" et l'angle "α". La section droite supposée constante, est caractérisée par son moment d'inertie "I" et sa surface "S".

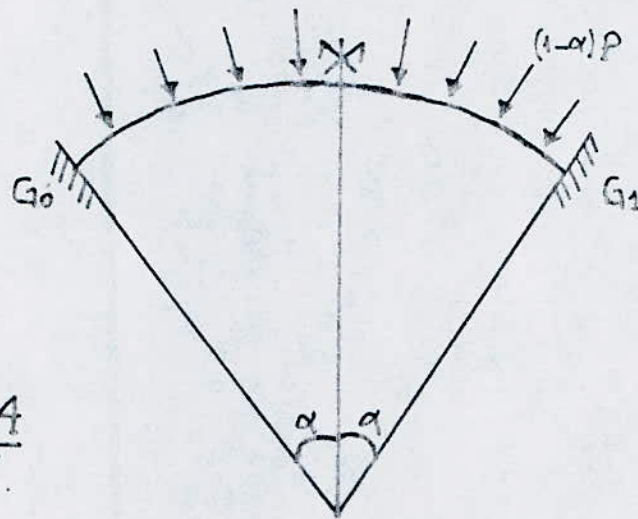


FIG. 14

Les deux appuis G_0 et G_1 sont simples, le plan de glissement étant radial.

Un tel arc funiculaire des forces directement appliquées, caractérisés par $(1-\alpha)p$, de sorte que les éléments de réduction ont pour valeur :

$$N = (1-\alpha)p$$

$$M = 0$$

$$T = 0$$

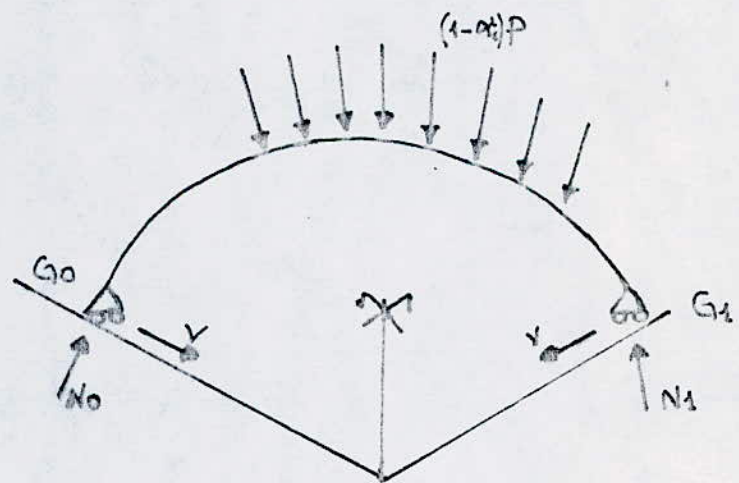


FIG. 15

Le déplacement des appuis G_0 et G_1 , soit v , qui correspond à la modification du rayon de la circonférence, résulte du raccourcissement de la ligne moyenne sous l'effort normal soit :

$$v = \frac{(1-\nu)PR^2}{ES}$$

Compte tenu de l'absence de moment, des sections droites G_0, G_1 ne tournent pas.

Le deuxième chargement envisagé se compose de deux forces radiales et de deux couples „C” appliqués en G_0 et G_1 . Les réactions des appuis soient, N_0 et N_1 , sont obtenues en écrivant la projection sur l'axe de symétrie. „voir fig 16”

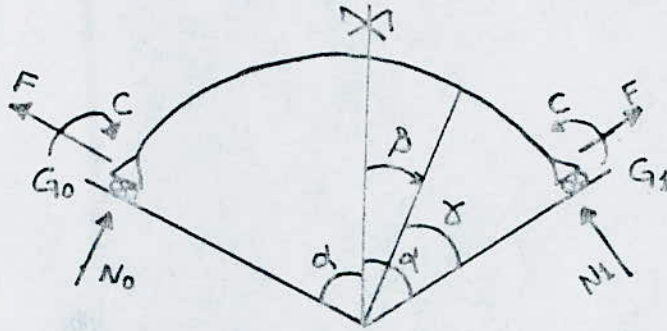


FIG. 16.

On trouve : $N_0 = N_1 = -F \cot \alpha$

Les couples sont choisis de sorte que les sections droites en G_0 et G_1 ne tournent pas. Etant donnée la symétrie, la section droite en G_2 ne tournent pas, ce qui indique que la force de composantes, F et N qui donne le couple „C” en G_0 est située au centre élastique O de l'arc G_0G_2 (voir fig 17)

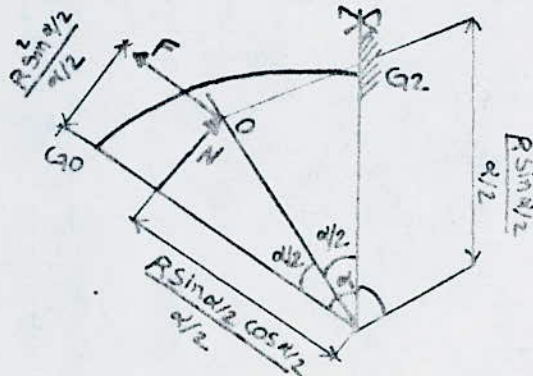


FIG. 17.

Comme l'inertie de l'arc est constante, le centre élastique est confondu avec le centre de gravité de l'arc $G_0 G_2$ qui est caractérisé par sa distance au centre du cercle égale \bar{a} .

$$\frac{R \sin \alpha/2}{\alpha/2}$$

On trouve ainsi :

$$C = -F \frac{R \sin^2 \alpha/2}{\alpha/2} - NR \left(1 - \frac{\sin \alpha/2}{\alpha/2} \cos \alpha/2\right) = \frac{FR}{\sin \alpha} \left[\cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right]$$

Les éléments de réductions ont pour valeur :

$$M = C + N_0 R (1 - \cos \beta) + FR \sin \beta = \frac{FR}{\sin \alpha} \left[\cos \beta - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right]$$

$$N = N_0 \cos \beta - F \sin \beta = -\frac{F}{\sin \alpha} \cos \beta$$

$$T = -N_0 \sin \beta - F \cos \beta = \frac{F}{\sin \alpha} \sin \beta$$

Le déplacement des appuis G_0 et G_1 soit v'' , supposé positif dans le sens d'action de F , peut être déterminé par l'équation de "BETRAND DE FONTVIOLANT". En envisageant un système auxiliaire identique au système réel. En effet, le travail des forces extérieures correspond au déplacement du système réel, se réduit au travail $\bar{F} v''$ car il n'y a pas de rotation sur les appuis compte tenu de la valeur de C'' .

On trouve alors :

$$2\bar{F} v'' = 2 \int_0^\alpha \left(\frac{MM}{EI} + \frac{NN}{ES} + \frac{TT}{GS} \right) R d\alpha$$

Nous conservons l'hypothèse faite pour les arcs, qui consiste à admettre que $\frac{1}{45}$, reste voisin de $\frac{1}{E5}$ de sorte que l'expression devient =

$$v = \frac{R}{EF} \int_0^\alpha \left(\frac{MM}{I} + \frac{NN+T\bar{T}}{S} \right) d\beta$$

On trouve =

$$\begin{aligned} \frac{R}{EF} \int_0^\alpha \frac{MM}{I} d\beta &= \frac{R}{EF} \int_0^\alpha \frac{FR^2}{I \sin^2 \alpha} \left[\cos \beta - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right]^2 d\beta \\ &= \frac{FR^3}{E I \sin^2 \alpha} \left[\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} - \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{R}{EF} \int_0^\alpha \frac{NN+T\bar{T}}{S} d\beta &= \frac{R}{EF} \int_0^\alpha \frac{FF}{S \sin^2 \alpha} (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) d\beta \\ &= \frac{FR\alpha}{E S \sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

Donc =

$$v = \frac{FR}{E S \sin^2 \alpha} \left[\frac{FR^2}{I} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} - \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} \right) + \alpha \right]$$

les éléments de réductions dans l'arc comportent deux encastrement en G_0 et en G_1 sont obtenus par superposition des deux cas précédents en écrivant que F'' est tel que le déplacement total v est nul, ce qui donne =

$$F = \frac{(1-\alpha)PR \sin^2 \alpha}{\alpha + \frac{FR^2}{I} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} - \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} \right)} \quad \dots (1)$$

On en déduit =

$$N = (1-\alpha)PR - F \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} \quad \text{avec } \alpha = \text{la part de la poussée}$$

$$T = -F \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad \alpha = \text{angle}$$

$$M = \frac{FR}{\sin \alpha} \left(\cos \beta - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)$$

Les diagrammes de ces éléments de réduction sont =

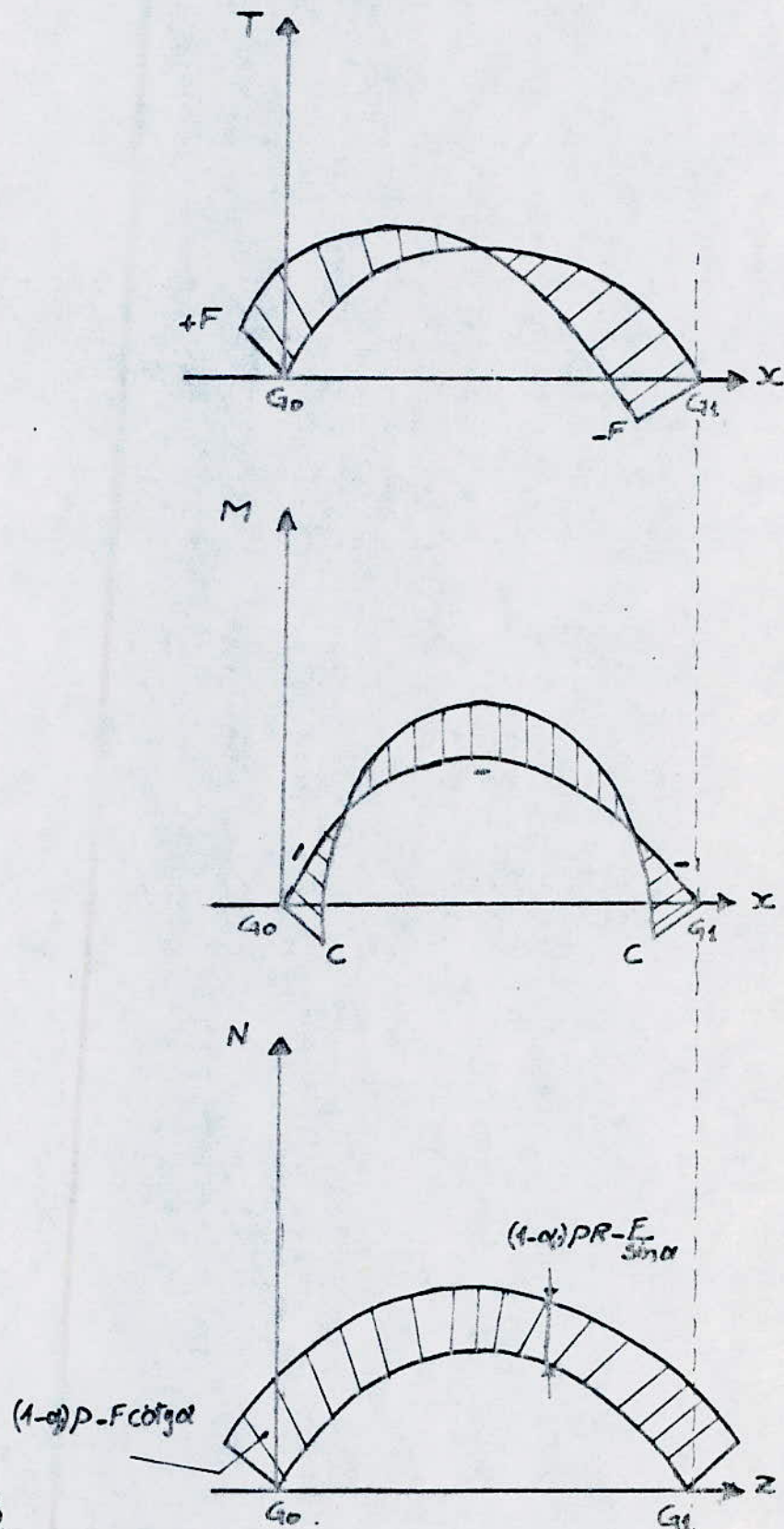


FIG.18

La poussée Q de l'arc en G_0 et G_1 est donnée par la relation =

$$Q = N_0 \cos \alpha - F \sin \alpha = (1-\alpha) PR \cos \alpha - \frac{F}{\sin \alpha}$$

La composante verticale de la réaction d'appui a pour valeur =

$$V_0 = V_1 = N_0 \sin \alpha + F \cos \alpha = (1-\alpha) PR \sin \alpha .$$



FIG.19.

A12. Détermination du déplacement v de l'arc =

Pour calculer le déplacement v de l'arc en ne tenant compte que des déformations dues à l'effort normal et au moment flexion

Le déplacement est donné par =

$$v_i = v_{iN} + v_{iM} = \int_{-\alpha}^0 \frac{N(\beta)}{ES} \sin \beta d\beta + \int_{-\alpha}^0 \frac{M(\beta)}{EI} R \sin \beta d\beta \quad \dots (1)$$

$$v_{iN} = \int_{-\alpha}^0 \left((1-\alpha) PR - F \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} \right) \sin \beta d\beta \quad \dots (2)$$

En remplaçant (1) ds (2), on obtient :

$$\begin{aligned} v_{iN} &= \frac{1}{ES} \int_{-\alpha}^0 \left((1-\alpha) PR - \frac{(1-\alpha) PR \sin^2 \alpha}{\alpha + \frac{3R^2}{4} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} - \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} \right)} \right) \cos \beta \sin \beta d\beta \\ &= \frac{(1-\alpha) PR}{ES} \int_{-\alpha}^0 \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha + \frac{3R^2}{4} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} - \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} \right)} \right) \cos \beta \sin \beta d\beta . \end{aligned}$$

$$v_{in} = X \int_{-\alpha}^0 (1 - y \cos \beta \sin \beta) d\beta$$

$$\text{avec : } X = \frac{(1-\alpha)PR}{EI} \quad ; \quad y = \frac{\sin \alpha}{\frac{\alpha}{2} + \frac{3R^2}{I} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin \alpha}{4} - \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha} \right)}$$

$$\text{et } \int \cos \beta \sin \beta d\beta = -\frac{1}{4} \cos 2\beta + C$$

d'où v_{in} devient ,

$$\begin{aligned} v_{in} &= X \left[\beta + \frac{1}{4} y \cos 2\beta \right]_{-\alpha}^0 \\ &= X \left[\alpha + \frac{1}{4} y - \frac{1}{4} y \cos 2\alpha \right] \end{aligned}$$

donc :

$$v_{in} = X \left(\alpha + \frac{1}{4} y - \frac{1}{4} y \cos 2\alpha \right) \dots \dots (3)$$

On a :

$$\begin{aligned} v_{im} &= \frac{R}{EI} \int_{-\alpha}^0 \frac{FR}{\sin \alpha} \left(\cos \beta - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) \sin \beta d\beta \\ &= \frac{R^2}{EI \sin \alpha} \int_{-\alpha}^0 F \left(\cos \beta - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) \sin \beta d\beta \end{aligned}$$

en remplaçant F dans v_{im} On aura :

$$\begin{aligned} v_{im} &= \frac{R^2}{EI \sin \alpha} \int_{-\alpha}^0 \frac{(1-\alpha)PR \sin \alpha}{\alpha + \frac{3R^2}{I} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin \alpha}{4} - \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha} \right)} \left(\cos \beta - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) \sin \beta d\beta \\ &= \frac{(1-\alpha)PR^3}{EI} \frac{\sin \alpha}{\alpha + \frac{3R^2}{I} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin \alpha}{4} - \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha} \right)} \int_{-\alpha}^0 \left(\cos \beta - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) \sin \beta d\beta \end{aligned}$$

en remplaçant y dans v_{im} et on pose $Z = \frac{(1-\alpha)PR^3}{EI}$ on obtient :

$$v_{im} = Z Y \int_{-\alpha}^0 \left(\cos \beta \sin \beta - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \sin \beta \right) d\beta$$

en intégrant v_{im} on aura :

$$v_{im} = Z Y \left[-\frac{1}{4} \cos 2\beta + \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos \beta \right]$$

$$v_{im} = zy \left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 2\alpha + \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\alpha} \right]$$

$$\Rightarrow v_{im} = zy \left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 2\alpha + \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right] \dots \dots (4)$$

en remplaçant (3) et (4) dans (1) nous obtiendrons :

$$v_i = v_{ix} + v_{im} = x \left(\alpha + \frac{1}{4} y - \frac{1}{4} y \cos 2\alpha \right) + zy \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 2\alpha + \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right)$$

Finalement la déformation de l'arc v_i est donné par la relation :

$$v_{i \text{ arc}} = (1 - \alpha_i) P_i \left[\frac{R_i}{E s_i} \left(\alpha + \frac{1}{4} y - \frac{1}{4} y \cos 2\alpha \right) + \frac{R_i^3}{E I_i} y \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 2\alpha + \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right) \right]$$

avec :

$v_{i \text{ arc}}$ = le déplacement de l'arc

α_i = la part des poussées hydrostatiques

P_i = poussée hydrostatique de l'eau

R_i = rayon du barrage

E = module d'élasticité du béton de barrage

s_i = la section du barrage par 1 mètre de largeur

I_i = moment d'inertie par 1 mètre de largeur

y = donnée par la formule précédente

α = angle du barrage par rapport à l'axe central.

A.2. Détermination des déformations radiales de mur.

Le mur du barrage est supposé comme une console encastré à la base et le haut libre. La poussée de l'eau est considérée comme une charge uniformément répartie et triangulaire sur le mur.

D'abord, on détermine les éléments de réduction du mur, qui consiste à déterminer les moments de flexion pour déterminer le déplacement δ de mur car les déformations sont déterminées en ne tenant compte que des moments de flexion.

A.2.1. Détermination des moments de flexion de mur.

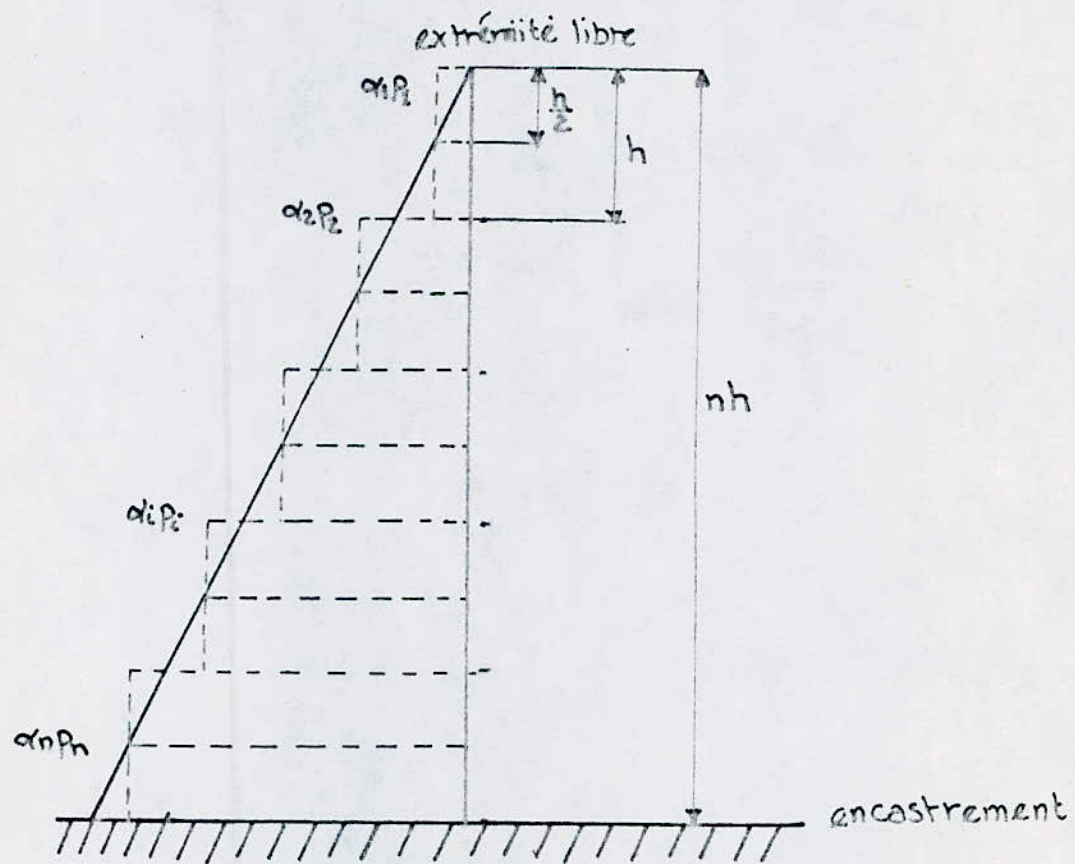


FIG. 20

Le mur est divisé en $n^{\text{ème}}$ tranches (voir fig 20), et au milieu de chaque tranche la charge appliquée sur le mur est supposée rectangulaire et a pour valeur $\alpha_1 P_1, \alpha_2 P_2, \dots, \alpha_i P_i, \dots, \alpha_n P_n$. En fonction de ces charges, on détermine les moments au milieu de chaque tranche de mur. Le diagramme des moments est donné par la figure 21 :

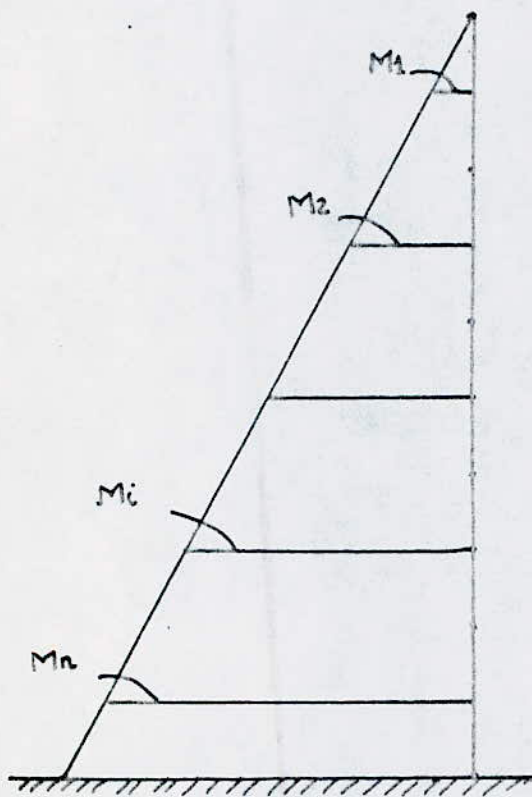


FIG. 21

Les moments fléchissants M_1, M_2, \dots, M_n de cette figure sont donnés par les équations suivantes :

$$M_1 = \alpha_1 P_1 \frac{h}{4} \cdot \frac{h}{2} = \alpha_1 P_1 \frac{h^2}{8}$$

$$M_2 = \alpha_1 P_1 h \cdot h + \alpha_2 P_2 \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \alpha_1 P_1 h^2 + \alpha_2 P_2 \frac{h^2}{8}$$

$$M_3 = \alpha_1 P_1 h \cdot 3 \cdot h + \alpha_2 P_2 h \cdot h + \alpha_3 P_3 \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4}$$

$$M_3 = \alpha_1 P_1 (2h^2) + \alpha_2 P_2 h^2 + \alpha_3 P_3 \frac{h^2}{8}$$

$$M_{n-1} = \alpha_{n-1} P_{n-1} \frac{h^2}{8} + \alpha_{n-2} P_{n-2} h^2 + \dots + \alpha_2 P_2 (n-3) h^2 + \alpha_1 P_1 (n-2) h^2$$

$$M_n = \alpha_n P_n \frac{h^2}{8} + \alpha_{n-1} P_{n-1} h^2 + \dots + \alpha_2 P_2 (n-2) h^2 + \alpha_1 P_1 (n-1) h^2$$

Avec :

M_1, M_2, \dots, M_n = moments de flexion

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ = part des poussées

P_1, P_2, \dots, P_n = poussée de l'eau qui est proportionnelle à la hauteur

h = hauteur .

A2.2. Détermination du déplacement v de mur :

On considère maintenant, que le mur est une poutre auxiliaire c'est-à-dire que le mur du barrage est inversé, en supposant que les sections et les moments d'inertie des tranches sont variables .

Dans ce cas, la charge appliquée sur le mur dévient une charge fictive sur la poutre auxiliaire, et elle est donnée par la relation suivante .

$$q_v(x) = \frac{M(x)}{EI(x)}$$

avec : $M(x)$: moment de flexion

E : module d'élasticité

$I(x)$: moment d'inertie

Dans le cas d'une poutre auxiliaire le diagramme des moments

ne reste pas le même qui est représenté par la figure 21 mais se change car les charges fictives entre en jeu et le diagramme devient : (voir fig 22)

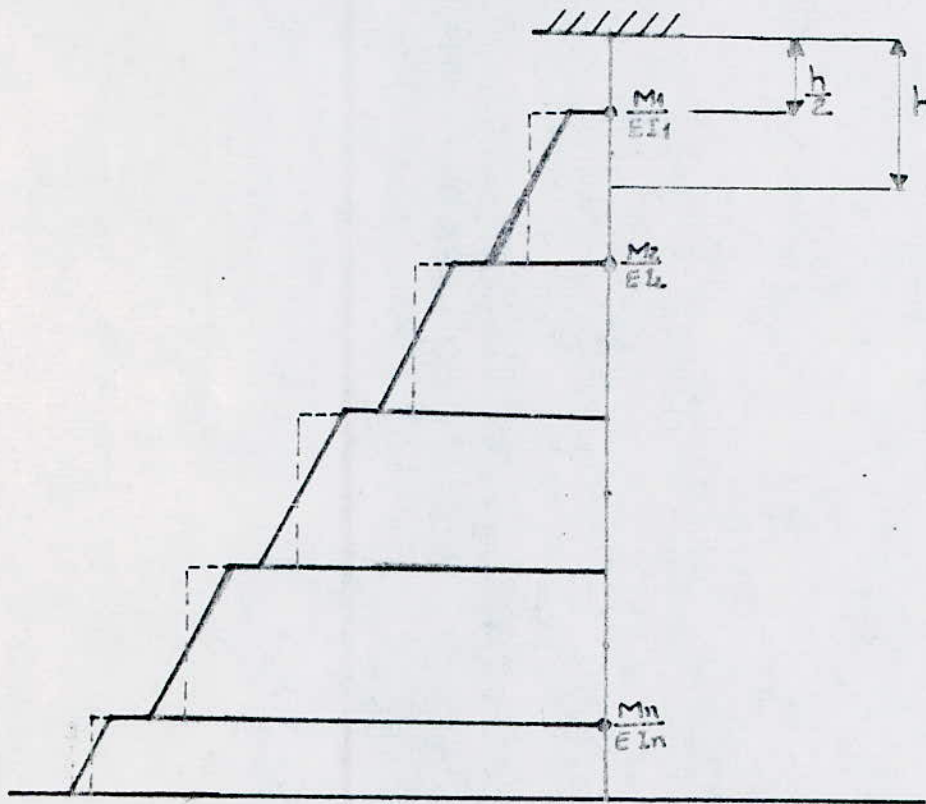


FIG.22

En réalité l'air de chaque tranche est trapézoïdale, pour simplifier les calculs on prend directement un rectangle c'est-à-dire on prend la moyenne de triangle du trapez et nous obtiendrons un rectangle. (voir fig 22)

La déformation est donnée par la formule suivante :

$$v_i = \frac{\text{l'aire du rectangle} \times x_i}{EI_i} \quad \text{avec : } x_i = \text{bras de levier}$$

Les déformations du mur sont données par les équations

suivantes :

$$V_n = \frac{M_n}{EI_n} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{M_n}{EI_n} \frac{h^2}{8}$$

$$V_{n-1} = \frac{M_n}{EI_n} h \cdot h + \frac{M_{n-1}}{EI_{n-1}} \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{M_n}{EI_n} h^2 + \frac{M_{n-1}}{EI_{n-1}} \frac{h^2}{8}$$

$$V_{n-2} = \frac{M_{n-2}}{EI_{n-2}} \frac{h^2}{8} + \frac{M_{n-1}}{EI_{n-1}} h^2 + \frac{M_n}{EI_n} (2h^2)$$

⋮

$$V_2 = \frac{M_n(n-2)}{EI_n} h^2 + \frac{M_{n-1}(n-3)}{EI_{n-1}} h^2 + \dots + \frac{M_4}{EI_4} (2h^2) + \frac{M_2}{EI_2} h^2 + \frac{M_2}{EI_2} \frac{h^2}{8}$$

$$V_1 = \frac{M_n(n-1)}{EI_n} h^2 + \frac{M_{n-1}(n-2)}{EI_{n-1}} h^2 + \dots + \frac{M_3}{EI_3} (2h^2) + \frac{M_2}{EI_2} h^2 + \frac{M_1}{EI_1} \frac{h^2}{8}$$

En remplaçant les moments par ces valeurs, on obtient

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{M_n}{EI_n} \frac{h^2}{8} = \left(\alpha_n R_n \frac{h^2}{8} + \alpha_{n-1} R_{n-1} h^2 + \dots + \alpha_2 R_2 (n-2) h^2 + \alpha_1 R_1 (n-1) h^2 \right) \frac{h^2}{8EI_n} \\ &= \frac{h^4}{8EI_n} \left[\frac{\alpha_n R_n}{8} + \alpha_{n-1} R_{n-1} + \dots + \alpha_2 R_2 (n-2) + \alpha_1 R_1 (n-1) \right] \end{aligned}$$

$$V_{n-1} = \frac{M_n}{EI_n} h^2 + \frac{M_{n-1}}{EI_{n-1}} \frac{h^2}{8}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{h^4}{EI_n} \left[\alpha_n R_n \frac{1}{8} + \alpha_{n-1} R_{n-1} + \dots + \alpha_2 R_2 (n-2) + \alpha_1 R_1 (n-1) \right] + \frac{h^4}{8EI_{n-1}} \left[\alpha_{n-1} R_{n-1} \frac{1}{8} + \right. \\ &\quad \left. + \alpha_{n-2} R_{n-2} + \dots + \alpha_2 R_2 (n-3) + \alpha_1 R_1 (n-2) \right] \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned}
 V_2 &= \frac{M_n(n-2)h^2}{EI_n} + \frac{M_{n-1}(n-3)h^2}{EI_{n-1}} + \dots + \frac{M_3 h^2}{EI_3} + \frac{M_2 h^2}{EI_2} \\
 &= \frac{(n-2)h^4}{EI_n} \left[\frac{\alpha_n P_n}{8} + \alpha_{n-1} P_{n-1} + \dots + \alpha_1 P_1 (n-1) \right] + \frac{(n-3)h^4}{EI_{n-1}} \left[\frac{\alpha_{n-1} P_{n-1}}{8} + \alpha_{n-2} P_{n-2} + \dots + \alpha_1 P_1 (n-2) \right] + \\
 &\quad + \dots + \frac{h^4}{EI_3} \left[\frac{\alpha_3 P_3}{8} + \alpha_2 P_2 + 2\alpha_1 P_1 \right] + \frac{h^4}{8EI_2} \left[\frac{\alpha_2 P_2}{8} + \alpha_1 P_1 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \frac{M_n(n-1)h^2}{EI_n} + \frac{M_{n-1}(n-2)h^2}{EI_{n-1}} + \dots + \frac{M_2 h^2}{EI_2} + \frac{M_1 h^2}{EI_1} \\
 &= \frac{(n-1)h^4}{EI_n} \left[\frac{\alpha_n P_n}{8} + \alpha_{n-1} P_{n-1} + \dots + \alpha_1 P_1 (n-1) \right] + \frac{(n-2)h^4}{EI_{n-1}} \left[\frac{\alpha_{n-1} P_{n-1}}{8} + \dots + \alpha_1 P_1 (n-2) \right] + \\
 &\quad + \dots + \frac{h^4}{EI_2} \left[\frac{\alpha_2 P_2}{8} + \alpha_1 P_1 \right] + \frac{h^4}{8EI_1} \left[\frac{\alpha_1 P_1}{8} \right]
 \end{aligned}$$

A l'aide des déformations de l'arc et de mur qui sont données par les équations précédentes on peut déterminer les parts de la poussée hydrostatique entre l'arc et le mur.

B. Détermination des parts de la poussée hydrostatique entre les arcs et le mur :

Les parts de la poussée hydrostatique sont déterminées après avoir équilibrées les deux déformations de l'arc et de mur et on obtient n équations et n inconnues. Les inconnues sont les parts de la poussée.

Donc on a :

$$V_{1 \text{ arc}} = V_{1 \text{ mur}}$$

$$V_{2 \text{ arc}} = V_{2 \text{ mur}}$$

$$V_{n \text{ arc}} = V_{n \text{ mur}}$$

Les déformations de l'arc sont :

$$V_{1 \text{ arc}} = (1 - \alpha_1) P_1 K_1 = P_1 K_1 - \alpha_1 P_1 K_1$$

$$V_{2 \text{ arc}} = (1 - \alpha_2) P_2 K_2 = P_2 K_2 - \alpha_2 P_2 K_2$$

$$V_{n \text{ arc}} = (1 - \alpha_n) P_n K_n = P_n K_n - \alpha_n P_n K_n.$$

avec :

$$K_n = \left[\frac{P_n}{E S_n} \left(\alpha + \frac{1}{4} y - \frac{1}{4} y \cos 2\alpha \right) + \frac{P_n^3}{E I_n} y \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 2\alpha + \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right) \right]$$

Les déformations de mur sont données par les formules précédentes.

Alors, en égalisant les deux déformations, on obtient =

$$P_1 K_1 - \alpha_1 P_1 K_1 = \frac{(n-1)h^4}{EI_n} \left[\frac{\alpha_1 P_1}{8} + \alpha_{n-1} P_{n-1} + \dots + \alpha_1 P(n-1) \right] + \frac{(n-2)h^4}{EI_{n-1}} \left[\frac{\alpha_{n-1} P_{n-1}}{8} + \dots + \alpha_1 P(n-2) \right] + \dots + \frac{h^4}{EI_2} \left[\frac{\alpha_2 P_2}{8} + \alpha_1 P_1 \right] + \frac{h^4}{EI_1} \left[\frac{\alpha_1 P_1}{64EI} \right]$$

$$P_1 K_1 = \alpha_1 \left[\frac{(n-1)^2 h^4 P_1}{EI_n} + \frac{(n-2)^2 h^4 P_1}{EI_{n-1}} + \dots + \frac{h^4 P_1}{EI_2} + \frac{h^4 P_1}{64EI_1} \right] + \alpha_1 P_1 K_1 + \alpha_2 \left[\frac{(n-1)(n-2) h^4 P_2}{EI_n} + \frac{(n-2)(n-3) h^4 P_2}{EI_{n-1}} + \dots + \frac{h^4 P_2}{8EI_2} \right] + \dots + \alpha_{n-1} \left[\frac{(n-1)h^4 P_{n-1}}{EI_n} + \frac{(n-2)h^4 P_{n-1}}{8EI_{n-1}} \right] + \alpha_n \left[\frac{(n-1)h^4 P_n}{8EI_n} \right]$$

$$P_1 K_1 = \alpha_1 \left[\frac{(n-1)^2 h^4 P_1}{EI_n} + \frac{(n-2)^2 h^4 P_1}{EI_{n-1}} + \dots + \frac{h^4 P_1}{EI_2} + \frac{h^4 P_1}{64EI_1} + P_1 K_1 \right] + \dots + \alpha_n \left[\frac{(n-1)h^4 P_n}{8EI_n} \right]$$

$$P_2 K_2 - \alpha_2 P_2 K_2 = \frac{(n-2)h^4}{EI_n} \left[\frac{\alpha_1 P_1}{8} + \alpha_{n-1} P_{n-1} + \dots + \alpha_1 P(n-1) \right] + \frac{(n-3)h^4}{EI_{n-1}} \left[\frac{\alpha_{n-1} P_{n-1}}{8} + \alpha_{n-2} P_{n-2} + \dots + \alpha_1 P(n-2) \right] + \dots + \frac{h^4}{EI_3} \left[\frac{\alpha_2 P_2}{8} + \alpha_2 P_2 + 2\alpha_1 P_1 \right] + \frac{h^4}{8EI_2} \left[\frac{\alpha_2 P_2}{8} + \alpha_1 P_1 \right]$$

$$= \alpha_1 \left[\frac{(n-2)(n-1) h^4 P_1}{EI_n} + \frac{(n-3)(n-2) h^4 P_1}{EI_{n-1}} + \dots + \frac{2h^4 P_1}{EI_3} + \frac{h^4 P_1}{8EI_2} \right] + \alpha_2 \left[\frac{(n-2)^2 h^4 P_2}{EI_n} + \frac{(n-3)^2 h^4 P_2}{EI_{n-1}} + \dots + \frac{h^4 P_2}{EI_3} + \frac{h^4 P_2}{64EI_2} \right] + \dots + \alpha_{n-1} \left[\frac{(n-2) P_{n-1} h^4}{EI_n} + \frac{(n-3)h^4}{8EI_{n-1}} \right] + \alpha_n \left[\frac{(n-2)h^4 P_n}{8EI_n} \right]$$

$$P_2 K_2 = \alpha_1 \left[\frac{(n-2)(n-1) h^4 P_1}{EI_n} + \frac{(n-3)(n-2) h^4 P_1}{EI_{n-1}} + \dots + \frac{2h^4 P_1}{EI_3} + \frac{h^4 P_1}{8EI_2} \right] + \alpha_2 \left[\frac{(n-2)^2 h^4 P_2}{EI_n} + \frac{(n-3)^2 h^4 P_2}{EI_{n-1}} + \dots + \frac{h^4 P_2}{EI_3} + \frac{h^4 P_2}{64EI_2} + K_2 P_2 \right] + \dots + \alpha_n \left[\frac{(n-2) h^4 P_n}{8EI_n} \right]$$

⋮

$$P_{n-1} K_{n-1} - \alpha_{n-1} P_{n-1} K_{n-1} = \left(\alpha_n P_n \frac{h^2}{8} + \alpha_{n-1} P_{n-1} h^2 + \dots + \alpha_2 P_2 (n-2) h^2 + \alpha_1 P_1 (n-1) h^2 \right) \frac{h^2}{EI_n} +$$

$$+ \left(\alpha_{n-1} P_{n-1} \frac{h^2}{8} + \alpha_{n-2} P_{n-2} h^2 + \dots + \alpha_2 P_2 (n-3) h^2 + \alpha_1 P_1 (n-2) h^2 \right) \frac{h^2}{8EI_{n-1}}$$

$$P_{n-1} K_{n-1} = \alpha_1 \left[\frac{(n-1)h^4}{EI_n} P_1 + \frac{(n-2)h^4}{8EI_{n-1}} \right] + \alpha_2 \left[\frac{(n-2)h^4}{EI_n} P_2 + \frac{(n-3)h^4}{8EI_{n-2}} \right] + \dots +$$

$$+ \alpha_{n-1} \left[\frac{h^4}{EI_n} P_{n-1} + \frac{h^4}{64EI_{n-1}} P_{n-1} + K_{n-1} P_{n-1} \right] + \alpha_n \left[\frac{h^4}{8EI_n} P_n \right]$$

$$P_n K_n - \alpha_n K_n P_n = \frac{M_n h^2}{EI_n 8}$$

$$P_n K_n - \alpha_n P_n K_n = \alpha_1 \left[\frac{(n-1)h^4}{8EI_n} P_1 \right] + \alpha_2 \left[\frac{(n-2)h^4}{8EI_n} P_2 \right] + \dots + \alpha_{n-1} \left[\frac{h^4}{8EI_n} P_{n-1} \right] +$$

$$+ \alpha_n \left[\frac{h^4}{64EI_n} P_n \right]$$

$$P_n K_n = \alpha_1 \left[\frac{(n-1)h^4}{8EI_n} P_1 \right] + \alpha_2 \left[\frac{(n-2)h^4}{8EI_n} P_2 \right] + \dots + \alpha_{n-1} \left[\frac{h^4}{8EI_n} P_{n-1} \right] + \alpha_n \left[\frac{h^4}{64EI_n} P_n + P_n K_n \right]$$

Donc, nous avons obtenus n équations qui sont :

$$P_1 K_1 = \alpha_1 \left[\frac{(n-1)^2 h^4}{EI_n} P_1 + \dots + \frac{h^4 P_1 + h^4}{EI_2} P_1 + K_1 P_1 \right] + \dots + \alpha_n \left[\frac{(n-1)h^4}{8EI_n} P_n \right] \dots (1)$$

$$P_2 K_2 = \alpha_1 \left[\frac{(n-2)(n-1) h^4}{EI_n} P_1 + \dots + \frac{2h^4}{EI_3} + \frac{h^4 P_2}{8EI_2} \right] + \alpha_2 \left[\frac{(n-2)^2 h^4}{EI_n} + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{h^4}{EI_3} P_2 + \frac{h^4}{64EI_2} P_2 \right] + \dots + \alpha_n \left[\frac{(n-2)h^4}{8EI_n} P_n \right] \dots (2)$$

$$P_{n-1} K_{n-1} = \alpha_1 \left[\frac{(n-1)h^4 P_1}{EI_n} + \frac{(n-1)h^4}{64EI_{n-1}} \right] + \dots + \alpha_{n-1} \left[\frac{h^4}{EI_n} P_{n-1} + \frac{P_{n-1} h^4}{64EI_{n-1}} + K_{n-1} P_{n-1} \right] + \alpha_n \left[\frac{h^4}{64EI_n} P_n \right] \dots (n-1)$$

$$P_n K_n = \alpha_1 \left[\frac{(n-1)h^4 P_1}{64EI_n} \right] + \alpha_2 \left[\frac{(n-2)h^4 P_2}{64EI_n} \right] + \dots + \alpha_n \left[\frac{h^4}{64EI_n} P_n + K_n P_n \right] \dots (n)$$

Ce système d'équations linéaires peut-être résolvable (en construisant une matrice) à l'aide des méthodes habituelles, la méthode la plus précise est la méthode de GAUSS.

Les résultats de résolution donnent les parts de la poussée hydrostatique de mur et de l'arc

La matrice est =

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 K_1 \\ P_2 K_2 \\ \vdots \\ P_n K_n \end{pmatrix}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$: sont des inconnues de la matrice et qui représentent les parts de la poussée

a_{11}, \dots, a_{mn} : coefficients de la matrice

$P_1 K_1, \dots, P_n K_n$: vecteurs constantes de la matrice

Les coefficients et les vecteurs constants de la matrice sont donnés par les équations suivantes =

$$Q_{11} = \frac{(n-1)h^4}{EI_n} P_1 + \frac{(n-2)h^4}{EI_{n-1}} + \dots + \frac{h^4 P_1}{64EI_n} + PK_1 ; \dots \dots ; Q_{1n} = \frac{(n-1)h^4}{8EI_n} P_n$$

$$Q_{21} = \frac{(n-2)(n-1)h^4}{EI_n} P_1 + \frac{(n-3)(n-2)h^4}{EI_{n-1}} P_1 + \dots + \frac{h^4 P_1}{8EI_n} ; \dots \dots ; Q_{2n} = \frac{(n-2)h^4}{8EI_n} P_n$$

⋮

$$Q_{n1} = \frac{(n-1)h^4}{8EI_n} P_1 ; \dots \dots ; Q_{nn} = \frac{h^4}{64EI_n} P_n + K_n P_n .$$

les vecteurs constantes sont =

$$PK_1, PK_2, \dots, PK_n .$$

Pour résoudre cette matrice on applique la méthode de GAUSS

Theorie de GAUSS =

Etant donnée une matrice carrée A quelconque, il existe des matrices inversibles S telles que SA = A', où A' est une matrice triangulaire supérieure

Principe de GAUSS .

La méthode de GAUSS consiste à transformer le système Ax = b à matrice A quelconque en un système équivalent A'x = b où A' est une matrice triangulaire supérieure, la résolution de ce dernier système étant immédiate avec l'algorithme.

Description de la méthode de GAUSS :

Soit le système de matrice (le même système de notre cas) suivant :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Sachant que les mêmes transformations seront opérées sur A et sur b afin de ne pas modifier le système, on simplifie l'algorithme en formant la matrice augmentée $[A, b]$ où le vecteur b devient $(n+1)$ ième de la matrice A. le système s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1, n+1} \\ a_{2, n+1} \\ \vdots \\ a_{n, n+1} \end{bmatrix}$$

La méthode comporte n étapes :

Première étape :

On transforme $[A, b]$ en une matrice dont les termes sous diagonaux de la première colonne sont nuls :

$$a_{21}^{(1)} = a_{31}^{(1)} = \dots = a_{n1}^{(1)} = 0 \quad (\text{indice } (1) \text{ indique notant l'étape } (1))$$

Prémultiplications $[A, b]$ par $E_{21}(-a_{21}/a_{11})$. seule la seconde ligne est modifiée et ses termes deviennent :

$$\left[\begin{array}{l} a_{21}^{(1)} = a_{21} - (a_{21}/a_{11}) \cdot a_{11} = 0 \\ a_{22}^{(1)} = a_{22} - (a_{21}/a_{11}) a_{12} \\ \dots \dots \dots \\ a_{2,n+1}^{(1)} = a_{2,n+1} - (a_{21}/a_{11}) \cdot a_{1,n+1} \end{array} \right.$$

Ou sous forme général

$$a_{2j}^{(1)} = a_{2j} - (a_{21}/a_{11}) a_{1j} \quad (j=1, 2, \dots, n+1)$$

en prémultiplions $[A, b]$ de même par $E_{31}(-a_{31}/a_{11})$ et nous modifions la troisième ligne, jusqu'on arrive à la i ème ligne.

Donc la première étape s'écrit sous forme générale :

Deuxième étape =

Au cours de cette phase, nous devons annuler les termes sous-diagonaux de la seconde colonne :

$$a_{32}^{(2)} = a_{42}^{(2)} = \dots = a_{n2}^{(2)} = 0$$

Prémultiplions $[A, b]^{(1)}$ par $E_{32}(-a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)})$. la troisième ligne devient alors :

$$\left[\begin{array}{l} a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} - (a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}) \cdot a_{22}^{(1)} = 0 \\ a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - (a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}) \cdot a_{23}^{(1)} \\ \dots \dots \dots \\ a_{3,n+1}^{(2)} = a_{3,n+1}^{(1)} - (a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}) a_{2,n+1}^{(1)} \end{array} \right.$$

Soit : $a_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(1)} - (a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}) a_{2j}^{(1)} \quad (j=2, \dots, n+1)$

De même, prémultiplications $[A, b]^{(1)}$ par $E_{i2}(-a_{i2}/a_{22}^{(1)})$, pour modifier la i -ème ligne.

La deuxième étape s'écrit donc :

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \left(a_{i2}^{(1)} / a_{22}^{(1)} \right) a_{2j}^{(1)} \quad \begin{array}{l} i = 3, \dots, n \\ j = 2, \dots, n+1 \end{array}$$

A la fin de cette 2^{ème} étape, le système $[A, b]^{(2)}$ s'écrit :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1, n+1} \\ a_{2, n+1}^{(1)} \\ a_{3, n+1}^{(2)} \\ \dots \\ a_{n, n+1}^{(2)} \end{bmatrix}$$

K-ème étape :

Au cours de cette étape, on veut annuler les termes :

$$a_{k+1, k}^{(k)} = a_{k+2, k}^{(k)} = \dots = a_{n, k}^{(k)} = 0$$

Prémultiplications $[A, b]^{(k-1)}$ par la matrice de transformation :

$$E_{k+1, k}(-a_{k+1, k}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)})$$

La $(k+1)$ ème ligne de $[A, b]$ devient :

$$\left[\begin{array}{l} a_{k+1,k}^{(k)} = a_{k+1,k}^{(k-1)} - \left(a_{k+1,k}^{(k-1)} / a_{k,k}^{(k-1)} \right) a_{k,k}^{(k-1)} = 0 \\ a_{k+1,k+1}^{(k)} = a_{k+1,k+1}^{(k-1)} - \left(a_{k+1,k}^{(k-1)} / a_{k,k}^{(k-1)} \right) a_{k,k+1}^{(k-1)} \\ \dots \\ a_{k+1,k+1}^{(k)} = a_{k+1,k+1}^{(k-1)} - \left(a_{k+1,k}^{(k-1)} / a_{k,k}^{(k-1)} \right) a_{k,k+1}^{(k-1)} \end{array} \right.$$

Soit : $a_{k+1,j}^{(k)} = a_{k+1,j}^{(k-1)} - \left(a_{k+1,k}^{(k-1)} / a_{k,k}^{(k-1)} \right) a_{k,j}^{(k-1)}$

$$j = k, \dots, n+1$$

puis nous prémultiplions $[A, b]$ par :

$$E_{k+2,k} \left(-a_{k+2,k}^{(k-1)} / a_{k,k}^{(k-1)} \right); E_{k+3,k} \left(-a_{k+3,k}^{(k-1)} / a_{k,k}^{(k-1)} \right) \text{ etc...}$$

Nous pouvons donc condenser ces transformations à la k -ième étape par :

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \left(a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \right) \cdot a_{kj}^{(k-1)}$$

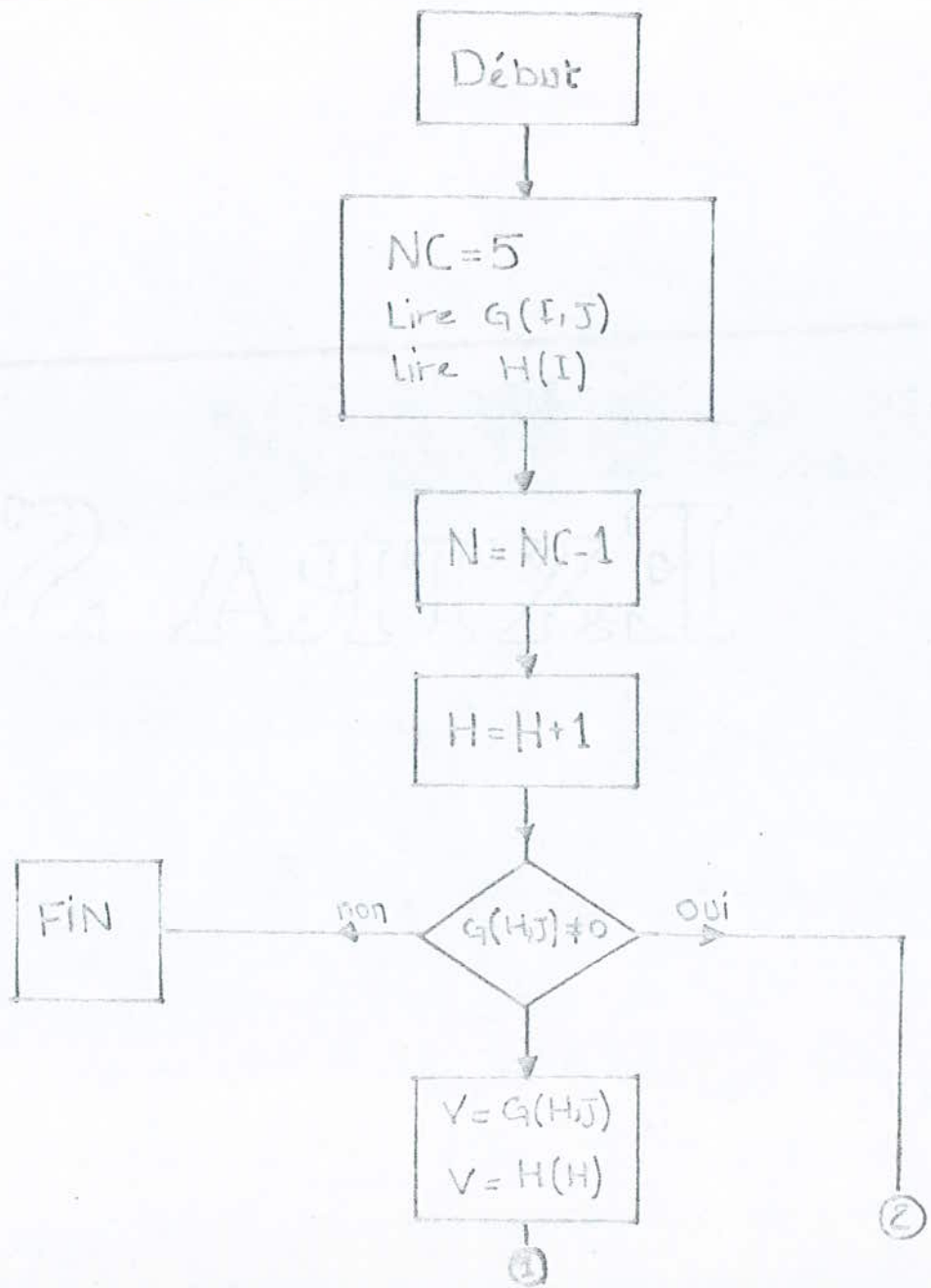
$$\text{avec } \begin{cases} i = k+1, \dots, n \\ j = k, \dots, n+1 \end{cases}$$

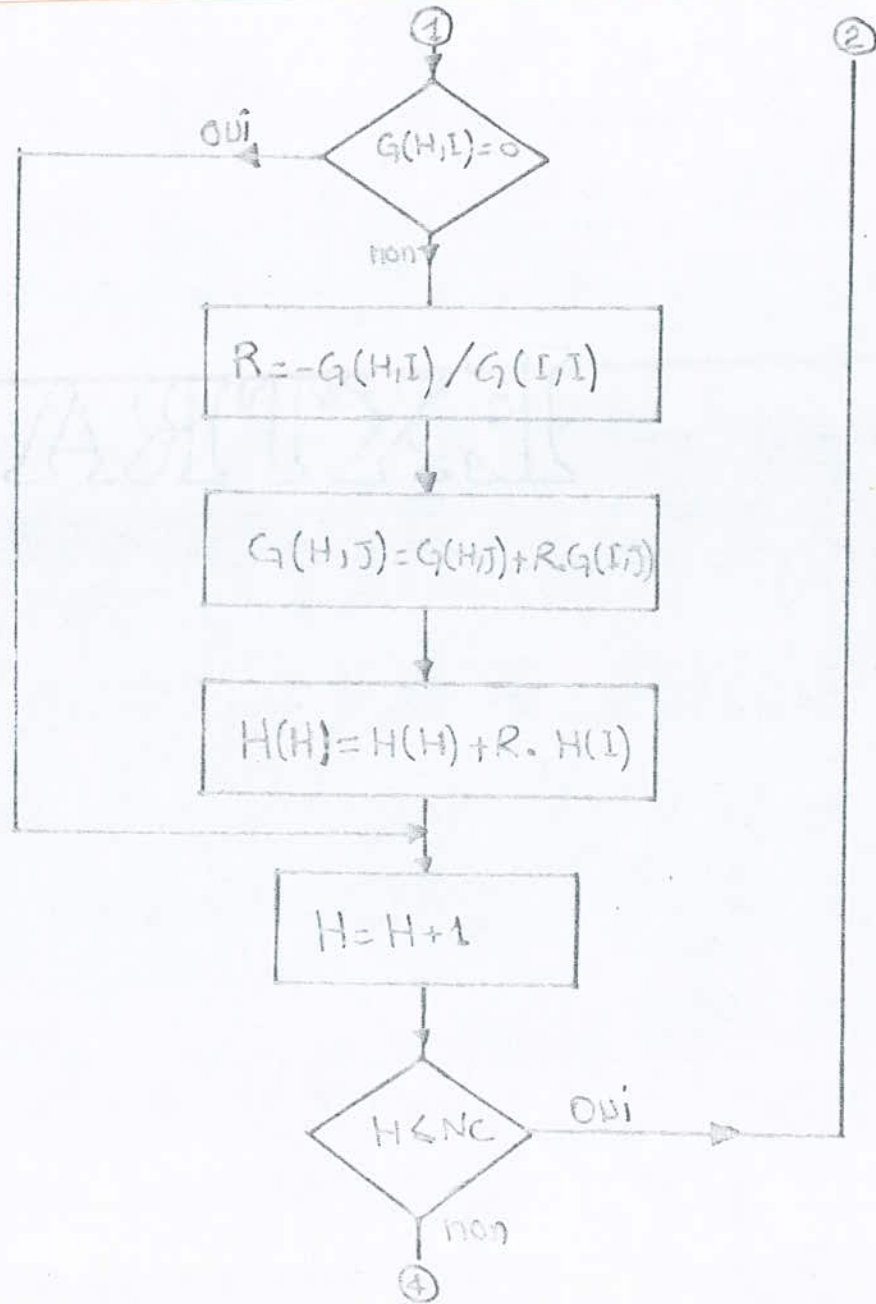
D'où l'algorithme de GAUSS est :

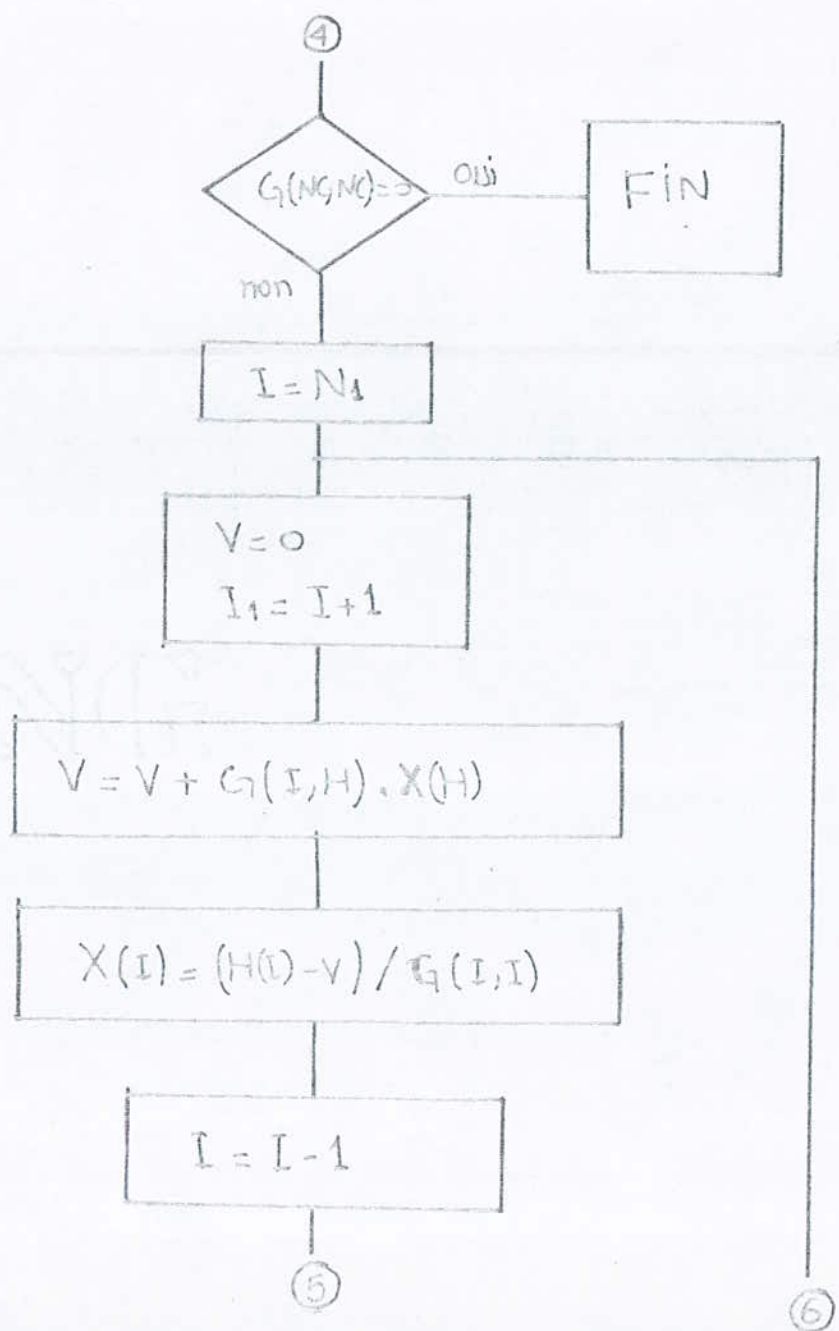
l'algorithme général nous permet d'ajouter une autre phase de vérification de la non nullité du pivot a_{kk} .

Le programme de cette méthode de GAUSS est donné en Annexe 1.

L'organigramme de GAUSS est = On prend $NC = 5$
 NC = représenté nombre d'équation







④

$G(Ng, Ng) = 0$

oui

FIN

non

$I = Nd$

$V = 0$
 $I_1 = I + 1$

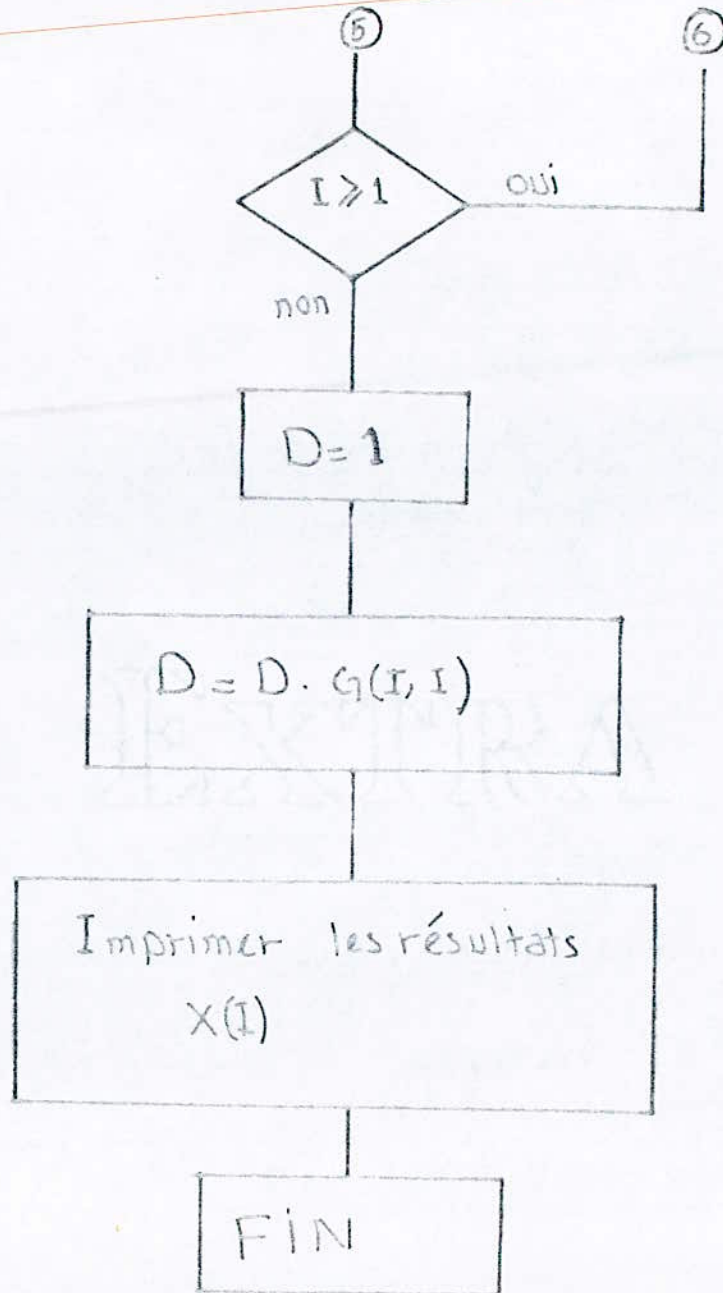
$V = V + G(I, H) \cdot X(H)$

$X(I) = (H(I) - V) / G(I, I)$

$I = I - 1$

⑤

⑥



CHAP.V - Exemple numérique :

On prend comme exemple, cinq tranches et on calcule les parts de la poussée de l'eau. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

Les moments de flexion de mur sont :

$$M_5 = \alpha_5 P_5 \frac{h^2}{8} + \alpha_4 P_4 h^2 + \alpha_3 P_3 2h^2 + \alpha_2 P_2 3h^2 + \alpha_1 P_1 4h^2$$

$$M_4 = \alpha_4 P_4 \frac{h^2}{8} + \alpha_3 P_3 h^2 + \alpha_2 P_2 2h^2 + \alpha_1 P_1 3h^2$$

$$M_3 = \alpha_3 P_3 \frac{h^2}{8} + \alpha_2 P_2 h^2 + \alpha_1 P_1 2h^2$$

$$M_2 = \alpha_2 P_2 \frac{h^2}{8} + \alpha_1 P_1 h^2$$

$$M_1 = \alpha_1 P_1 \frac{h^2}{8}$$

Les déformations du mur sont :

$$V_5 = \frac{M_5 h^2}{EI_5 8}$$

$$V_4 = \frac{M_5 h^2}{EI_5} + \frac{M_4 h^2}{EI_4 8}$$

$$V_3 = \frac{M_5 2h^2}{EI_5} + \frac{M_4 h^2}{EI_4} + \frac{M_3 h^2}{EI_3 8}$$

$$V_2 = \frac{M_5 3h^2}{EI_5} + \frac{M_4 2h^2}{EI_4} + \frac{M_3 h^2}{EI_3} + \frac{M_2 h^2}{EI_2 8}$$

$$V_1 = \frac{M_5 4h^2}{EI_5} + \frac{M_4 3h^2}{EI_4} + \frac{M_3 2h^2}{EI_3} + \frac{M_2 h^2}{EI_2} + \frac{M_1 h^2}{EI_1 8}$$

En remplaçant M_1, M_2, \dots, M_3 par ces valeurs dans les équations des déformations on obtient :

$$V_5 = \alpha_1 \left[\frac{4P_1 h^4}{8EI_5} \right] + \alpha_2 \left[\frac{3P_2 h^4}{8EI_5} \right] + \alpha_3 \left[\frac{2P_3 h^4}{8EI_5} \right] + \alpha_4 \left[\frac{P_4 h^4}{8EI_5} \right] + \alpha_5 \left[\frac{P_5 h^4}{64EI_5} \right]$$

$$V_4 = \alpha_1 \left[\frac{4P_1 h^4}{EI_5} + \frac{3P_2 h^4}{8EI_4} \right] + \alpha_2 \left[\frac{3P_2 h^4}{EI_5} + \frac{2P_3 h^4}{8EI_4} \right] + \alpha_3 \left[\frac{2P_3 h^4}{EI_5} + \frac{P_4 h^4}{8EI_4} \right] + \alpha_4 \left[\frac{P_4 h^4}{EI_5} + \frac{P_5 h^4}{64EI_4} \right] + \alpha_5 \left[\frac{P_5 h^4}{8EI_5} \right]$$

$$V_3 = \alpha_1 \left[\frac{8P_1 h^4}{EI_5} + \frac{3P_2 h^4}{EI_4} + \frac{2P_3 h^4}{8EI_3} \right] + \alpha_2 \left[\frac{6P_2 h^4}{EI_5} + \frac{2P_3 h^4}{EI_4} + \frac{P_4 h^4}{8EI_3} \right] + \alpha_3 \left[\frac{4P_3 h^4}{EI_5} + \frac{P_4 h^4}{EI_4} + \frac{P_5 h^4}{64EI_3} \right] + \alpha_4 \left[\frac{2P_4 h^4}{EI_5} + \frac{P_5 h^4}{8EI_4} \right] + \alpha_5 \left[\frac{2P_5 h^4}{8EI_5} \right]$$

$$V_2 = \alpha_1 \left[\frac{12P_1 h^4}{EI_5} + \frac{6P_2 h^4}{EI_4} + \frac{2P_3 h^4}{EI_3} + \frac{P_4 h^4}{8EI_2} \right] + \alpha_2 \left[\frac{9P_2 h^4}{EI_5} + \frac{4P_3 h^4}{EI_4} + \frac{P_4 h^4}{EI_3} + \frac{P_5 h^4}{64EI_2} \right] + \alpha_3 \left[\frac{6P_3 h^4}{EI_5} + \frac{2P_4 h^4}{EI_4} + \frac{P_5 h^4}{8EI_3} \right] + \alpha_4 \left[\frac{3P_4 h^4}{EI_5} + \frac{2P_5 h^4}{8EI_4} \right] + \alpha_5 \left[\frac{3P_5 h^4}{8EI_5} \right]$$

$$V_1 = \alpha_1 \left[\frac{16P_1 h^4}{EI_5} + \frac{9P_2 h^4}{EI_4} + \frac{4P_3 h^4}{EI_3} + \frac{P_4 h^4}{EI_2} + \frac{P_5 h^4}{64EI_1} \right] + \alpha_2 \left[\frac{12P_2 h^4}{EI_5} + \frac{6P_3 h^4}{EI_4} + \frac{2P_4 h^4}{EI_3} + \frac{P_5 h^4}{8EI_2} \right] + \alpha_3 \left[\frac{8P_3 h^4}{EI_5} + \frac{3P_4 h^4}{EI_4} + \frac{2P_5 h^4}{8EI_3} \right] + \alpha_4 \left[\frac{4P_4 h^4}{EI_5} + \frac{3P_5 h^4}{8EI_4} \right] + \alpha_5 \left[\frac{4P_5 h^4}{8EI_5} \right]$$

Les déformations de l'arc sont :

$$V_{1arc} = P_1 K_1 - \alpha_1 A K_1$$

$$V_{2arc} = P_2 K_2 - \alpha_2 P_2 K_2$$

$$V_{3arc} = P_3 K_3 - \alpha_3 P_3 K_3$$

$$V_4^{\text{arc}} = P_4 K_4 - \alpha_4 P_4 K_4$$

$$V_5^{\text{arc}} = P_5 K_5 - \alpha_5 P_5 K_5.$$

En égalisant les deux déformations nous obtiendrons =

$$K_5 P_5 = \alpha_1 a_{51} + \alpha_2 a_{52} + \alpha_3 a_{53} + \alpha_4 a_{54} + \alpha_5 a_{55}$$

$$K_4 P_4 = \alpha_1 a_{41} + \alpha_2 a_{42} + \alpha_3 a_{43} + \alpha_4 a_{44} + \alpha_5 a_{45}$$

$$K_3 P_3 = \alpha_1 a_{31} + \alpha_2 a_{32} + \alpha_3 a_{33} + \alpha_4 a_{34} + \alpha_5 a_{35}$$

$$K_2 P_2 = \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \alpha_3 a_{23} + \alpha_4 a_{24} + \alpha_5 a_{25}$$

$$K_1 P_1 = \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \alpha_3 a_{13} + \alpha_4 a_{14} + \alpha_5 a_{15}$$

On a donc ; 5 équations et 5 inconnues ; ce système est résolu par la méthode de GAUSS en posant que =

les coefficients de la matrice $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{55} = G(I, J)$

les vecteurs constants $P_1, \dots, P_5 = H(I)$

nombre d'équation : $NC = 5$

les inconnues : $X(I)$

Les coefficients de la matrice et les vecteurs constantes

sont donnés dans les tableaux (2) et (3) respectivement.

Les données initiales (Rayon, R , e , α , etc) sont.

données dans le tableau (1).

Tableau (1) :

	R_{moy} (m)	h (m)	e (m)	2α °	α ° α rad	$\sin \alpha$	$\sin 2\alpha$
1	147,5	20	7	94	47 0,8203	0,7313	0,9975
2	136,1	"	10,5	97	48,5 0,8464	0,7489	0,9925
3	118,4	"	13	95	47,5 0,8290	0,7372	0,9961
4	99,5	"	15	92	46 0,8028	0,7193	0,9993
5	79,2	"	17,5	91	45,5 0,7941	0,7132	0,9998

avec :

R_{moy} : le rayon moyen du barrage

h (m) : hauteur des tranches du barrage.

e (m) : épaisseur de l'arc.

α : angle de l'arc par rapport à l'axe central.

Suite du tableau (1)

	$\cos 2\alpha$	P_i (m)	I_i (m ⁴)	S_i (m ²)	Y_i	K_i	$P_i K_i$
1	-0,0691	10	28,583	7	$9,42 \cdot 10^{-3}$	0,0186	0,106
2	-0,1218	30	96,468	10,5	0,0306	$3,58 \cdot 10^{-3}$	0,107
3	-0,0871	50	183,083	13	0,0741	$2,26 \cdot 10^{-3}$	0,113
4	-0,0398	70	281,25	15	0,1460	$1,53 \cdot 10^{-3}$	0,107
5	-0,017	90	446,61	17,5	0,2665	$1,00 \cdot 10^{-3}$	0,09

Avec : P_i : poussée de l'eau proportionnelle à la profondeur elle est donnée par les expressions suivantes :

$$P_1 = \frac{h}{2}, P_2 = h + \frac{h}{2}, P_3 = 2h + \frac{h}{2}, P_4 = 3h + \frac{h}{2}, P_5 = 4h + \frac{h}{2}$$

I_i : moment d'inertie pour 1(m) de largeur.

$$I_i = \frac{e_i^3 \cdot 1}{12} = \frac{e_i^3}{12}$$

S_i : surface pour 1(m) de largeur

$$S_i = e_i \cdot 1 = e_i$$

Tableau (2) :

I	1	2	3	4	5
H(I)	0,186	0,107	0,113	0,107	0,09

avec : $H(I) = p \cdot K_i$ (vecteurs constantes)

Tableau (3) :

J \ I	1	2	3	4	5
1	21,286	37,1	30,62	27,81	2,1
2	12,35	24,597	22,44	14,43	2,1
3	6,06	13,33	13,053	7,17	1,05
4	2,13	4,47	5,11	3,457	0,52
5	0,23	0,52	0,58	0,52	0,15

avec $G(I,J)$ = coefficients de la matrice .

Les résultats sont donnés sur le listing (voir Annexe 1) avec le programme qui donnent directement les parts de la poussée hydrostatique ($\alpha_i = X(I)$)

CHAP. VI. ETABLISSEMENT DES DIAGRAMMES DE LA POUSSEE REPARTIE

Les parts de la poussée sont déjà déterminées qui sont,

$$\alpha_1 = -0,760$$

$$\alpha_2 = -0,437$$

$$\alpha_3 = -0,255$$

$$\alpha_4 = 0,261$$

$$\alpha_5 = 0,331$$

En fonction de ces parts on peut tracer le diagramme de la poussée répartie. (voir fig 23)

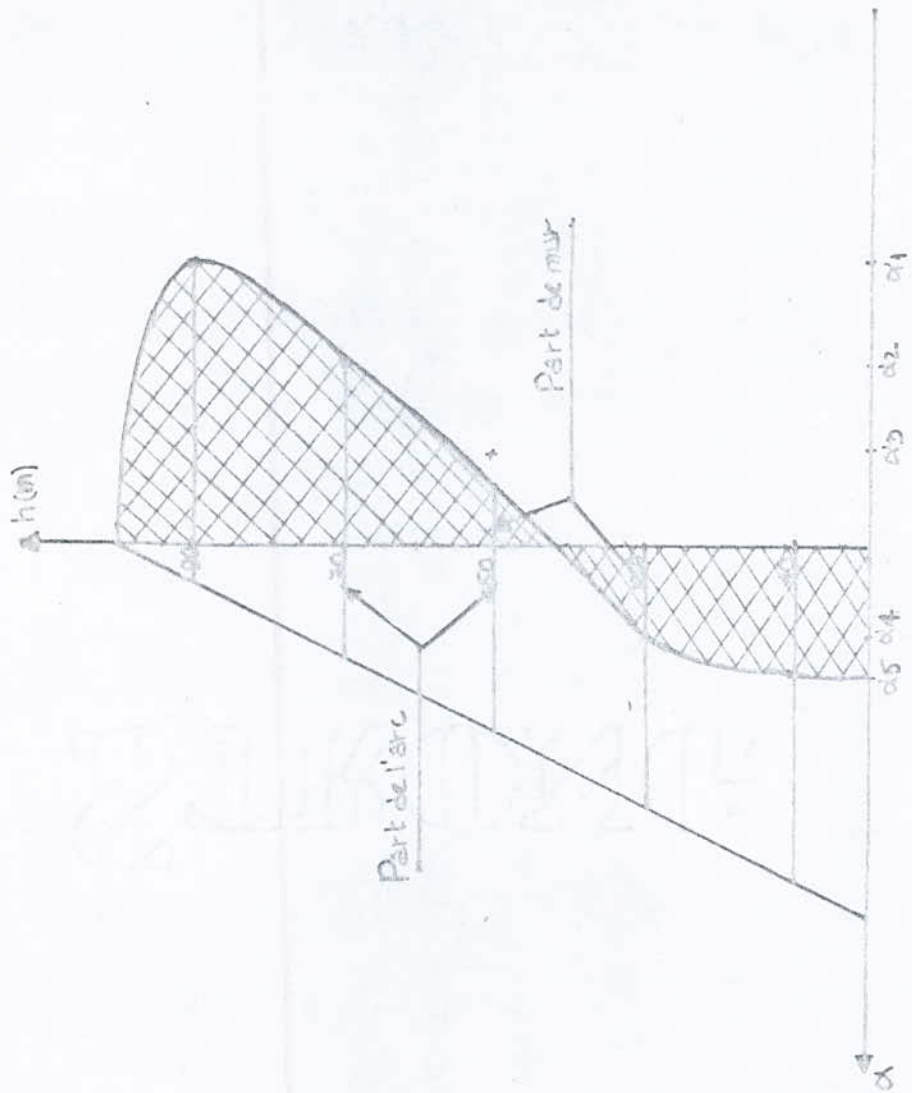


Diagramme de la poussée répartie

CHAP. VII. CONCLUSION

Dans la présente étude, j'ai abordé les principales étapes nécessaires pour déterminer les parts de la poussée hydrostatique entre les arcs et le mur.

Toutefois je signale que les formules et les hypothèses précédentes sont valable pour n'importe quel barrage-voûte.

On constate que les parts de la poussée hydrostatique de l'eau donnent une bonne allure de la poussée répartie.

Enfin j'estime que, ma thèse étudiée convient à n'importe quel barrage-voûte, et quelle soit un guide pour les futurs ingénieurs.

✻ BIBLIOGRAPHIE ✻

1. M. ALBIGES

Resistance des matériaux Appliquée (Eyrolles)

2. H. PRESS

Les barrages de vallée (Dunod)

3. J. Lombardi

Les barrages en voûte mince (Dunod)

4. M. Arnould

Hydraulique et usines hydraulique (1964)

5. STUKY

Calcul des barrages en béton. (Lausanne) 1986

Polycopié de E.P.F.L.

25

MULTIPLE

CHOICE

EDUCATION

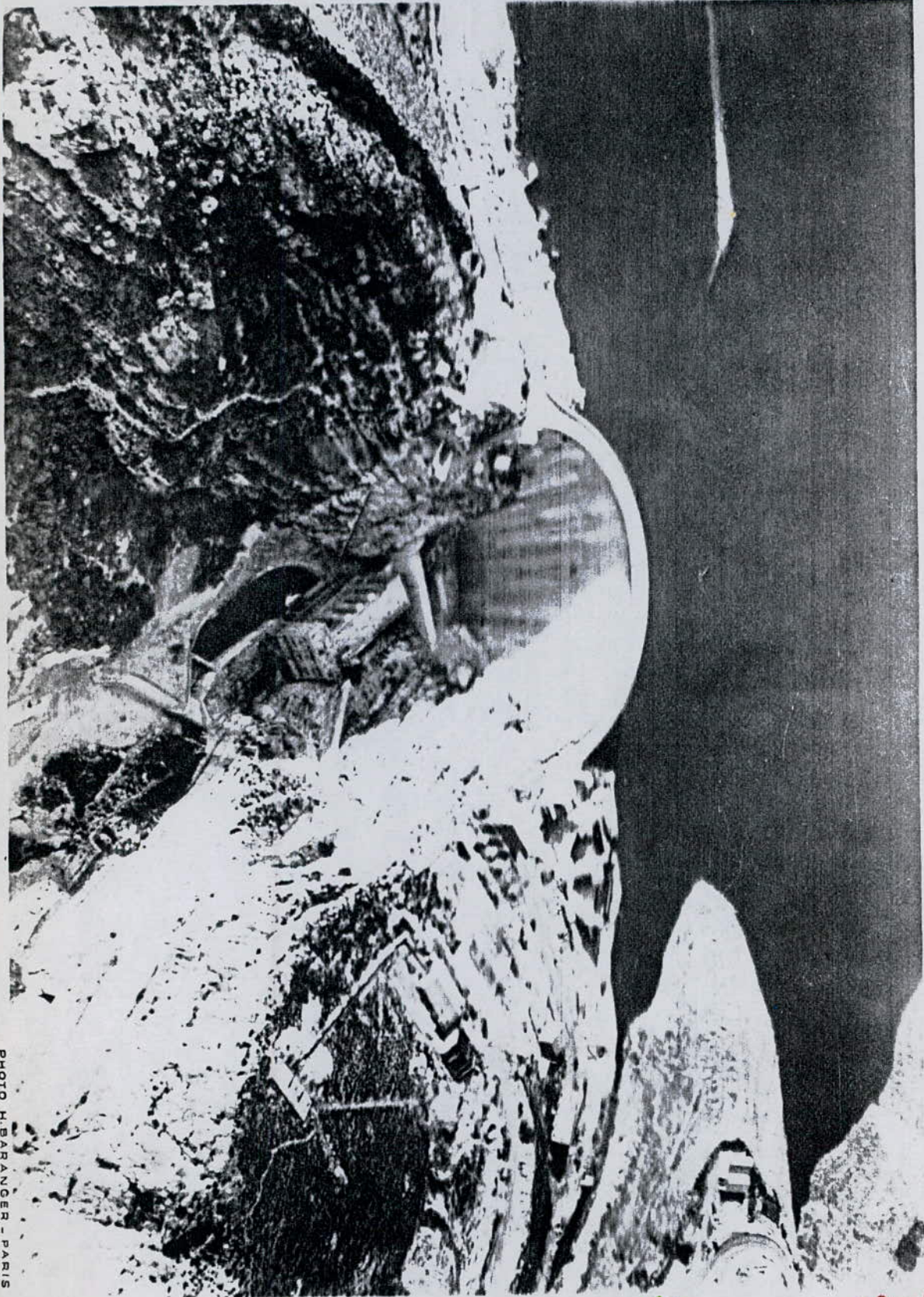
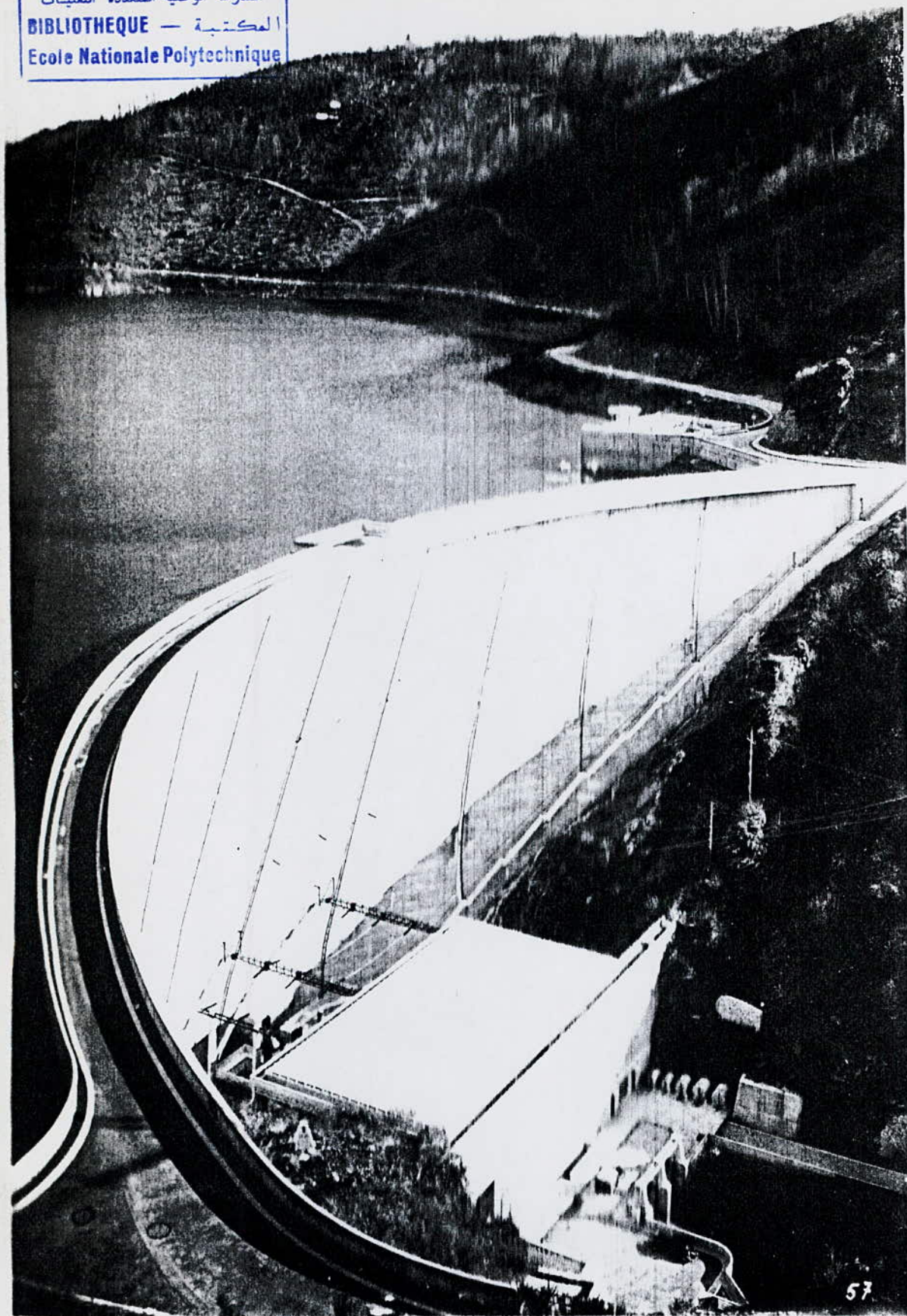


PHOTO H. BARANGER - PARIS

CASTILLON . Barrage - voûte
HAUTEUR 100 m . longueur en crête 200 m
Barrage - voûte de vallée étroite

photo.2.



57

PHOTO H. BARANGER - PARIS

ENCHANET - Barrage voûte
Hauteur 68,5 m - Longueur en crête 230 m

photo.1.

Barrage-voûte de vallée large

