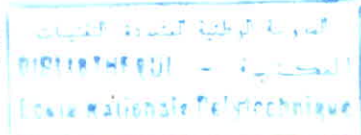


20x وزارة التعليم و البحث العلمي  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT HYDRAULIQUE



PROJET DE FIN D'ETUDES

S U J E T

ETUDE DES ECOLEMENTS EN  
MILIEU POREUX SATURE PAR LA  
METHODE DES ELEMENTS FINIS

Proposé par :  
M<sup>r</sup> ABDERRAHIM

Etudié par :  
M. MEDDI  
F. GACEMI

Dirigé par :  
M<sup>r</sup> ABDERRAHIM

PROMOTION : JUIN 87

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم و البحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT HYDRAULIQUE



**PROJET DE FIN D'ETUDES**

**S U J E T**

**ETUDE DES ECOLEMENTS EN  
MILIEU POREUX SATURE PAR LA  
METHODE DES ELEMENTS FINIS**

Proposé par :  
M<sup>r</sup> ABDERRAHIM

Etudié par :  
M. MEDDI  
F. GACEMI

Dirigé par :  
M<sup>r</sup> ABDERRAHIM

PROMOTION : JUIN 87

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

وَالصَّلَاةِ  
وَالسَّكِينِ  
وَالْحَمْدِ  
رَبِّ الْعَالَمِينَ

صِدْقُ اللَّهِ الْعَظِيمِ

# R E M E R C I E M E N T S

---



Il nous aurait été impossible de mener à bien ce travail sans l'assistance et les conseils précieux de Monsieur D. ABDERRAHIM et M.S. BARAKA, nous tenons à leur adresser notre gratitude.

Nos remerciements vont au président et membres du Jury pour avoir accepté de juger ce travail.

Il nous est particulièrement agréable de les remercier tous pour avoir été nos enseignants.

Enfin, que l'ensemble des personnes de l'E.N.P.A qui nous ont formé et aidé pendant l'élaboration de ce travail trouvent ici l'expression de notre reconnaissance.

## DE DICACES



Avec beaucoup de joie je dedie ce travail à :  
mon très cher père .  
ma très chère mère .  
mon très cher frère MOHAMED .  
mon frère KAMEL & ma sœur MALIKA .  
mon très cher MOHAND TAHAR .  
tous mes amis & amies que j'aime beaucoup .

Galemi Fatima

## Dédicaces

Je dédie ce modeste travail en signe de respect et de reconnaissance à :

- Ma grand-mère.
- Mon très cher père
- Ma très chère mère
- Mon Oncle.
- Mes frères et sœurs en particulier Nassreddine.
- A toute la famille Meddi en particulier mes cousins.
- Tous mes amis (es) que j'aime beaucoup (Salah; Aziz; A.E.K)

Meddi mohamed



# SOMMAIRE

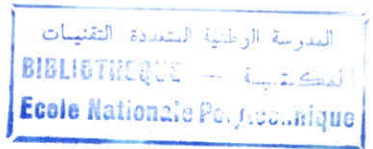
I.	INTRODUCTION . . . . .	1
II.	Résolution d'un problème scientifique et rôle de l'ordinateur . . . . .	3
II. 1.	Notion de modèle . . . . .	3
II. 1. 1.	modèle mathématique . . . . .	3
II. 1. 2.	modèle analogique . . . . .	3
II. 2.	Rôle de l'ordinateur . . . . .	4
III.	Présentation de la méthode des éléments finis	
III. 1.	Historique . . . . .	6
III. 2.	Principe . . . . .	6
III. 3.	Approximation par éléments finis . . . . .	7
III. 4.	Type d'élément . . . . .	8
III. 5.	Élément de référence . . . . .	10
III. 6.	Expression de la fonction approchée . . . . .	12
III. 7.	Codes généraux . . . . .	14
III. 8.	Programmation de la méthode des éléments finis . . . . .	15
III. 9.	Étapes caractéristiques d'un programme d'éléments finis . . . . .	15

IV.	Présentation du programme	
IV. 1.	Présentation du programme	17
IV. 2.	Fonction des différents programmes	18
IV. 3.	Organigrammes des différents programmes	19
V.	Principales équations aux dérivées partielles du mouvement de l'eau en milieu poreux	
V. 1.	Principes d'établissement des équations	21
V. 2.	Lois fondamentales de l'hydraulique des milieux poreux	21
V. 3.	Mise en équation d'un écoulement dans les milieux poreux à régime permanent	26
V. 4.	Mise en équation d'un écoulement dans les milieux poreux à régime non permanent	26
V. 5.	Réseau d'écoulement	27
VI.	Application de la méthode des éléments finis aux écoulements en milieu poreux	
VI. 1.	Généralités	29
VI. 2.	Résolution par la méthode des éléments finis	29
VI. 3.	Calcul des matrices élémentaires	32
VI. 4.	Assemblage des matrices élémentaires	35
VI. 5.	Introduction des conditions aux limites	38
VI. 6.	Résolution	41
VI. 7.	Impression des résultats	41



## VII. Ecoulement en charge

- VII. 1. Ecoulement autour d'une file de palplanche . . . . .42  
VII. 2. Infiltration dans les fondations . . . . .71



## VIII. Ecoulement à surface libre

- VIII. 1. Définition - Hypothèses . . . . .79  
VIII. 2. Equations fondamentales applicables aux . . . . .80  
écoulements à surface libre  
VIII. 3. Etude de filtration à travers les barrages . . .83  
en terre  
VIII. 4. But d'étude d'infiltration à travers les . . . . .84  
barrages en terre  
VIII. 5. Protection contre les infiltrations dans la digue  
VIII. 6. Détermination de la surface libre en régime . . .87  
permanent  
VIII. 7. Détermination de la surface libre en régime . . .95  
non permanent

## IX. Conclusion

L'importance du système sol-eau dans la nature et dans la vie de l'homme a été reconnue depuis l'aurore de la civilisation et depuis que l'homme a pris conscience de ses relations avec son milieu.

Depuis le début du siècle, et plus particulièrement depuis les années 30, la physique du sol s'est établie et est de plus en plus reconnue comme un domaine vital d'intérêt universel aussi bien comme discipline indépendante que comme terrain de rencontre des sciences naturelles.

Le complexe sol-eau ne présente pas de propriétés constantes ni de conditions d'équilibre stable du fait qu'il se sature et se désature, se gonfle et se contracte. L'eau elle-même, est sujette à de fréquents changements de phase et de propriétés affectées par la température, la pression et les solutés.

Dans de nombreux cas, les théories et équations utilisées en physique du sol ne décrivent pas le sol lui même, mais, un modèle idéal et bien défini qui simule le sol.

Les modèles s'expriment le mieux par les mathématiques dont le langage est net et concis, une équation peut décrire le comportement du modèle. La transformation de cette équation permet d'anticiper le comportement du modèle sous d'autres conditions, ainsi, le modèle non seulement résume nos connaissances, mais, peut servir à prédire ce que nous ne savons pas encore.

...../.....

...../.....

Du point de vue pratique, l'étude des écoulements dans les sols et les roches est primordiale dans de nombreux problèmes de génie-civil. A titre d'exemple dans l'étude d'un projet de digue en terre, il est nécessaire de vérifier la stabilité de l'ouvrage aux principaux stades de son histoire, et notamment, lorsque ses conditions de service sont les plus défavorables: vidange rapide-

Dans ce dernier cas, l'étude de la stabilité en rupture de talus est faite à partir des contraintes effectives, mais, ces dernières doivent impérativement tenir compte des pressions intersticielles définies par l'étude de l'écoulement à travers la digue.

Les réseaux d'écoulement peuvent être étudiés par différentes méthodes: analogiques, numérique principalement.

Les méthodes numériques ayant fait preuve d'une grande souplesse d'emploi, nous nous sommes attachés à mettre au point une solution des problèmes d'écoulement par la méthode des éléments finis.

Le présent mémoire, résultats de ce travail, est divisé en deux parties distinctes.

1- ETUDE DE L'ÉCOULEMENT EN CHARGE DANS LES MILIEUX POREUX

2- ETUDE DE L'ÉCOULEMENT A SURFACE LIBRE

Avant cela, sont signalés les développements théoriques jugés nécessaires et relatifs aux équations caractérisant les écoulements dans les milieux poreux.

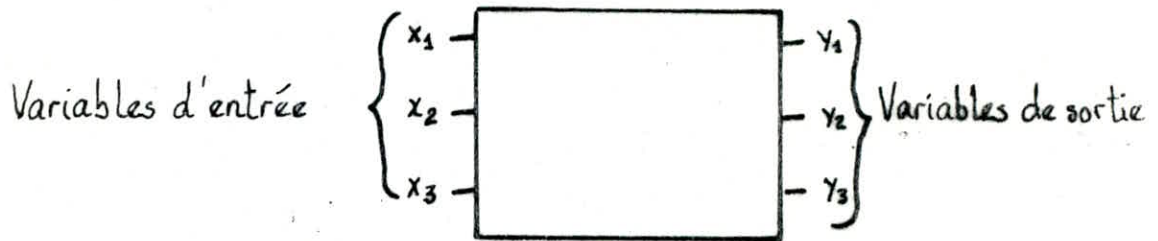
Il est certain que, les deux cas étudiés ne l'ont été qu'à la lumière d'exemples concrets vus dans le détail, aussi bien en régime permanent qu'en régime non permanent:

- Ecoulement à travers une file de palplanches.
- Infiltration dans la fondation d'un barrage en terre.
- Infiltration à travers la digue d'un barrage en terre.

## II RESOLUTION D'UN PROBLEME SCIENTIFIQUE ET RÔLE DE L'ORDINATEUR

### 1 NOTION DE MODELE

Un système physique, chimique, biologique, économique ... peut se concevoir comme étant une relation entre des causes (ou variables d'entrée) et des conséquences (variables de sortie), ce que l'on peut schématiser comme suit :



Scientifiquement, étudier un tel système c'est généralement chercher à prévoir son comportement.

Pour ce faire, il est intéressant de synthétiser un modèle dont le comportement soit analogue à celui du système étudié.

On utilise couramment deux types de modèle :

#### ■ modèle mathématique :

Le système est représenté par un ensemble de relations mathématiques :

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \xrightarrow{F} \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

#### ■ modèle analogique :

Le système est représenté par l'assemblage d'éléments physiques, les grandeurs physiques représentant les variables du système.

L'intérêt primordial d'un modèle est double, d'une part il peut représenter de façon très concise des relations de causes à effet parfois complexes, d'autre part il permet d'expérimenter le comportement du système sans perturber le système réel et parfois même avant qu'il existe.

## 2 RÔLE DE L'ORDINATEUR

Pour tous les problèmes, on doit faire une grande quantité de travail d'analyse avant de s'intéresser à l'ordinateur, car celui-ci n'est qu'une machine qui ne sait qu'exécuter des opérations arithmétiques et logiques élémentaires. On peut séparer la résolution d'un problème en plusieurs étages nettement distinctes.

1 Identification des lois fondamentales de la physique, de la machine, des sciences de l'ingénieur de l'organisateur, ..... impliquées dans la définition du problème



2 Modélisation. Celle-ci peut consister en l'utilisation des lois identifiées pour décrire le problème par un ensemble d'équations mathématiques



3 méthode numérique. La plupart des problèmes scientifiques sont exprimés en termes qu'un ordinateur ne peut accepter directement : intégrales, équations différentielles partielles .....

il faut donc trouver une méthode traduisant ces fonctions continues en fonctions arithmétiques : méthodes aux différences finies, éléments finis, ... et un algorithme de résolution du problème arithmétique.



4 Organigramme. On fait apparaître sur un schéma synoptique l'enchaînement des différentes phases de travail arithmétique à effectuer, correspondant à la méthode choisie.



5 Programmation. C'est la traduction de l'organigramme en une suite d'instructions détaillées, dans un langage acceptable par l'ordinateur.



6 Mise au point du programme. C'est l'étape d'édition et d'essai-erreur.



7 Execution et interprétation des résultats. Lorsque le programme est correct, on le fait exécuter avec les données de notre problème puis se pose la question suivante :

- le résultat fourni par l'ordinateur contient-il des erreurs significatives ? ( si oui, reprendre l'étape 3 ) ..

Traitement d'un problème à l'aide de l'ordinateur

**III PRESENTATION DE  
LA METHODE DES  
ELEMENTS FINIS**

# 1 HISTORIQUE

C'est au début du 20<sup>ème</sup> siècle qu'ont été acquis les résultats fondamentaux dans le domaine des méthodes d'approximation sous l'impulsion de RITZ en 1908 et de GALERKIN en 1915. Puis, en 1943, COURANT établit les bases de la M.E.F en montrant que la résolution de certains problèmes de milieux continus est possible en effectuant une discrétisation du domaine en utilisant les méthodes d'approximation variationnelles.

Cet historique serait incomplet si l'on omettait de mentionner le développement de programmes généraux d'analyse (encore appelés codes généraux) à partir des années 60. Ce phénomène a été particulièrement important parce qu'il a véritablement abouti à faire rentrer la M.E.F dans la pratique industrielle. Il est certain que, d'une part, la M.E.F se prête bien à la programmation sur ordinateur (les procédures numériques peuvent être rendues automatiques et modulaires) et que, d'autre part, la M.E.F se caractérise par son universalité et son adaptabilité au traitement des problèmes les plus divers. C'est ainsi que vers 1956, on assiste en Europe et aux U.S.A au développement intensif de tel programme sous l'impulsion d'universités, d'agences gouvernementales, et de groupes industriels.

# 2 PRINCIPE

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes adaptées à la résolution numérique des équations aux dérivées partielles, elle s'applique aux problèmes stationnaires ou dépendant du temps, linéaires ou non, à une, deux ou trois dimensions.

La méthode des éléments finis permet de résoudre les problèmes de la mécanique des milieux continus en discrétisant le milieu à étudier.



### 3 APPROXIMATION PAR ELEMENTS FINIS

La construction d'une fonction approchée  $u(N)$  est difficile lorsque nombre  $n$  des nœuds et le nombre de paramètres  $u_i$  devient important.

Le problème devient plus compliqué si le domaine du milieu étudié a une forme complexe.

La méthode d'approximation nodale par sous-domaine simplifie la construction de  $u(N)$  et s'adapte très bien au calcul sur ordinateur.

Elle consiste à :

- identifier un ensemble de sous-domaines  $V^e$  du domaine  $V$
- définir une fonction approchée  $u^e(V^e)$  différente sur chaque sous-domaine  $V^e$  par la méthode d'approximation nodale.

peut dépendre des variables nodales d'autres sous-domaines.

La méthode d'approximation par éléments finis est une méthode particulière d'approximation par sous-domaine qui présente les particularités suivantes :

- l'approximation nodale sur chaque sous-domaine  $V^e$  ne fait intervenir que les variables nodales attachées à des noeuds situés sur  $V^e$  et sur sa frontière
- les fonctions approchées  $u^e(x)$  sur chaque sous-domaine  $V^e$  sont construites de manière à être continues sur  $V^e$  et elles satisfont les conditions de continuité entre les différents sous-domaines.

où :

- les sous-domaines  $V^e$  sont appelés des éléments.
- les points en lesquels la fonction approchée  $u^e(x)$  coïncide avec la fonction exacte  $u_{ex}(x)$  sont les noeuds d'interpolation ou points nodaux.
- les coordonnées  $x_i$  de ces noeuds sont les coordonnées nodales.
- les valeurs  $u_i = u^e(x_i) = u_{ex}(x_i)$  sont les variables nodales.

L'approximation par éléments finis présente deux aspects différents :

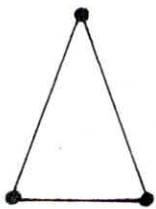
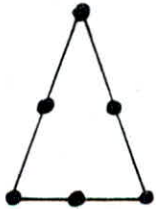
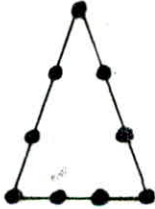


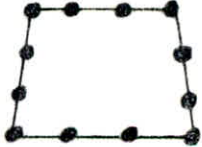
- il faut tout d'abord définir analytiquement la géométrie de tous de tous les éléments, ce qui est plus ou moins compliqué selon leurs formes.
- après la détermination de la forme, il faut construire les fonctions d'interpolation  $N_i(x)$  correspondant à chaque élément.

#### 4 TYPE D'ÉLÉMENT

Les différents types d'éléments utilisables pour les problèmes d'écoulement sont répertoriés en figure suivante. Lorsqu'on doit choisir un type d'élément pour la résolution d'un problème donné, on arrive généralement au dilemme suivant : ou bien choisir des éléments simples en très grand nombre ou bien choisir des éléments d'ordre élevé en nombre restreint des triangles ou des quadrilatères, après le test fait sur les deux derniers

éléments pour voir lequel converge rapidement, les conclusions suivantes peuvent être tirées :

- les éléments quadrilatères donnent de meilleurs résultats que les triangles.
- pour un même nombre de d.d.l, les éléments à champ quadratique ont une précision meilleure que les éléments à champ linéaire.
- dans de nombreux cas (gradients importants), éviter l'utilisation de triangles à 3 nœuds qui peuvent nécessiter des maillages très fins pour une précision satisfaisante.

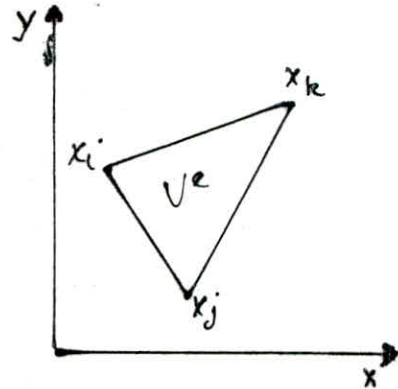
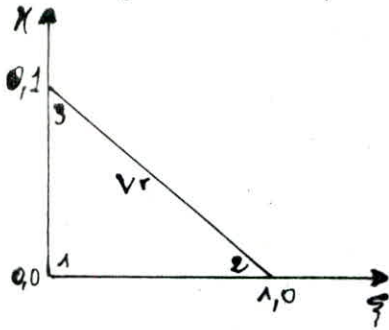
	TRIANGLES			QUADRILATERES		
Champ	Linéaire	Quadratique	Cubique	Linéaire	quadratique	Cubique
Élément de base	 3 d d l 1 d d l par nœud	 6 d d l 1 d d l par nœud	 9 d d l 1 d d l par nœud	 4 d d l 1 d d l par nœud	 8 d d l 1 d d l par nœud	 12 d d l 1 d d l par nœud

## CLASSIFICATION DES ELEMENTS

- nous avons utilisé un élément quadratique à 8 nœuds, qui donne une bonne approximation des valeurs à calculer.

## 5 ELEMENTS DE REFERENCE

L'utilisation de l'élément de référence devient nécessaire lorsqu'on a des éléments (réels) de forme très complexes. Un élément de référence  $V^r$  est un élément très simple, repéré dans un espace de référence, qui peut être transformé en chaque élément réel  $V^e$  par une transformation géométrique  $Z^e$ .



Les coordonnées de l'élément réel sont définies par la transformation  $Z^e$  des coordonnées de l'élément de référence :

$$Z^e : \xi \longrightarrow X^e = X^e(\xi)$$

Cette transformation dépend de la forme et de la position de l'élément réel alors on a une transformation indépendante pour chaque élément :

$$Z^e : \xi \longrightarrow X^e = X^e(\xi, x_i, x_j, x_k, \dots)$$

on choisit la transformation  $Z^e$  de telle façon :

- elle est bijective en tout point situé sur l'élément de référence ou sur sa frontière
- les nœuds géométriques de l'élément de référence correspondent aux nœuds géométriques de l'élément réel.

$$Z : \xi \longrightarrow X(\xi) = [\bar{N}(\xi)] \{x_n\}$$

il faut que les fonctions de transformation soient identiques pour les trois coordonnées

$$\begin{aligned} x(\xi) &= \langle \bar{N}(\xi) \rangle \{x_n\} \\ y(\xi) &= \langle \bar{N}(\xi) \rangle \{y_n\} \\ z(\xi) &= \langle \bar{N}(\xi) \rangle \{z_n\} \end{aligned}$$

On prend un exemple d'un triangle on a :

$$x(\xi, \psi) = \bar{N}_1(\xi, \psi)x_i + \bar{N}_2(\xi, \psi)x_j + \bar{N}_3(\xi, \psi)x_k = \langle \bar{N} \rangle \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \end{Bmatrix}$$

$$y(\xi, \psi) = \bar{N}_1(\xi, \psi)y_i + \bar{N}_2(\xi, \psi)y_j + \bar{N}_3(\xi, \psi)y_k = \langle \bar{N} \rangle \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \end{Bmatrix}$$

où  $\bar{N}_i$  sont des polynômes en  $\xi$  appelés fonctions de transformation géométrique

Les coordonnées des noeuds des éléments sont stockées dans la table des coordonnées globales CORG. pour un problème à deux dimensions à la forme

noeuds

	1	2	-----	n
x	$x_1$	$x_2$	-----	$x_n$
y	$y_1$	$y_2$	-----	$y_n$

table CORG.

les éléments sont numérotés dans le sens trigonométrique, puis sont stockés dans la table de CONNECTIVITE CONEC

noeuds

	1	2	3	4	-----	e	-----	n
1						$i_1$		
2						$i_2$		
3						$i_3$		
⋮						⋮		
$n^e$						$i_{n^e}$		

table CONEC

$n^e$  est le nombre maximum de noeuds géométriques par élément

$i_1, i_2, i_3, i_{n^e}$  sont les numéros des noeuds de l'élément e.

## 6 EXPRESSION DE LA FONCTION APPROCHÉE

On utilise une approximation nodale de la fonction exacte  $u_{ex}(x)$

$$u_{ex}(x) \approx u(x) = \langle N_1(x) N_2(x) \dots N_n(x) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \langle N(x) \rangle \{u_n\}$$

avec  $x$  appartient au  $\mathcal{E}$

$u_1, u_2, \dots, u_n$  sont les variables de  $u_{ex}$  aux  $n^e$  noeuds d'interpolation de l'élément.

$N(x)$  sont les fonctions d'interpolation sur l'élément réel.

Remplaçons l'approximation sur l'élément réel par l'approximation correspondante sur l'élément de référence

$$\text{avec } \begin{aligned} u_{ex}(\xi) &\approx u(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{u_n\} \\ I: \xi &\longrightarrow x(\xi) = [\bar{N}(\xi)] \{x_n\} \end{aligned}$$

où :  $\{u_n\}$  sont les variables nodales de l'élément.

$\langle N(\xi) \rangle$  sont les fonctions d'interpolation sur l'élément de référence.

Pour un élément quadratique à 8 noeuds, la fonction d'interpolation s'écrit :

- en fonction des coordonnées de l'élément de référence

$$N(\xi, \eta) = a + b\xi + c\eta + d\xi^2 + g\xi\eta + f\eta^2 + n\xi^2\eta + m\xi\eta^2$$

- en fonction des coordonnées réelles

$$N(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + gxy + fy^2 + nx^2y + mxy^2$$

dans notre cas :  $u(x, y) = \Phi(x, y)$  (la charge)

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^n \bar{\Phi}_i N_i(x, y)$$

avec

$$N_i(x, y) = N_i(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$$

les dérivées de la fonction d'interpolation qui sert à la formulation variationnelle

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

ou bien, sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\delta N_i}{\delta x} \\ \frac{\delta N_i}{\delta y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta \xi}{\delta x} & \frac{\delta \eta}{\delta x} \\ \frac{\delta \xi}{\delta y} & \frac{\delta \eta}{\delta y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\delta N_i}{\delta \xi} \\ \frac{\delta N_i}{\delta \eta} \end{Bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta \xi}{\delta x} & \frac{\delta \eta}{\delta x} \\ \frac{\delta \xi}{\delta y} & \frac{\delta \eta}{\delta y} \end{bmatrix} = J^{-1}$$

$J$  = la matrice jacobienne de la transformation =

$$\begin{bmatrix} \delta x & \delta y \\ \delta \xi & \delta \eta \\ \delta x & \delta y \\ \delta x & \delta y \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^2 x_j \frac{\delta N_i}{\delta \xi} & \sum_{j=1}^2 y_j \frac{\delta N_i}{\delta \xi} \\ \sum_{j=1}^2 x_j \frac{\delta N_i}{\delta \eta} & \sum_{j=1}^2 y_j \frac{\delta N_i}{\delta \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta N_1}{\delta \xi} & \frac{\delta N_2}{\delta \xi} \dots \frac{\delta N_n}{\delta \xi} \\ \frac{\delta N_1}{\delta \eta} & \frac{\delta N_2}{\delta \eta} \dots \frac{\delta N_n}{\delta \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix}$$

# 7 CODES GENERAUX

L'application de la M.E.F nécessite :

- des calculs matriciels élémentaires [1] (matrices de perméabilité) pouvant être automatisés pour une grande variété de types d'éléments .

- des calculs au niveau global [2] et [3]

[2] Assemblage des caractéristiques élémentaires

[3] Résolution numérique du problème global sous des formes suivantes :

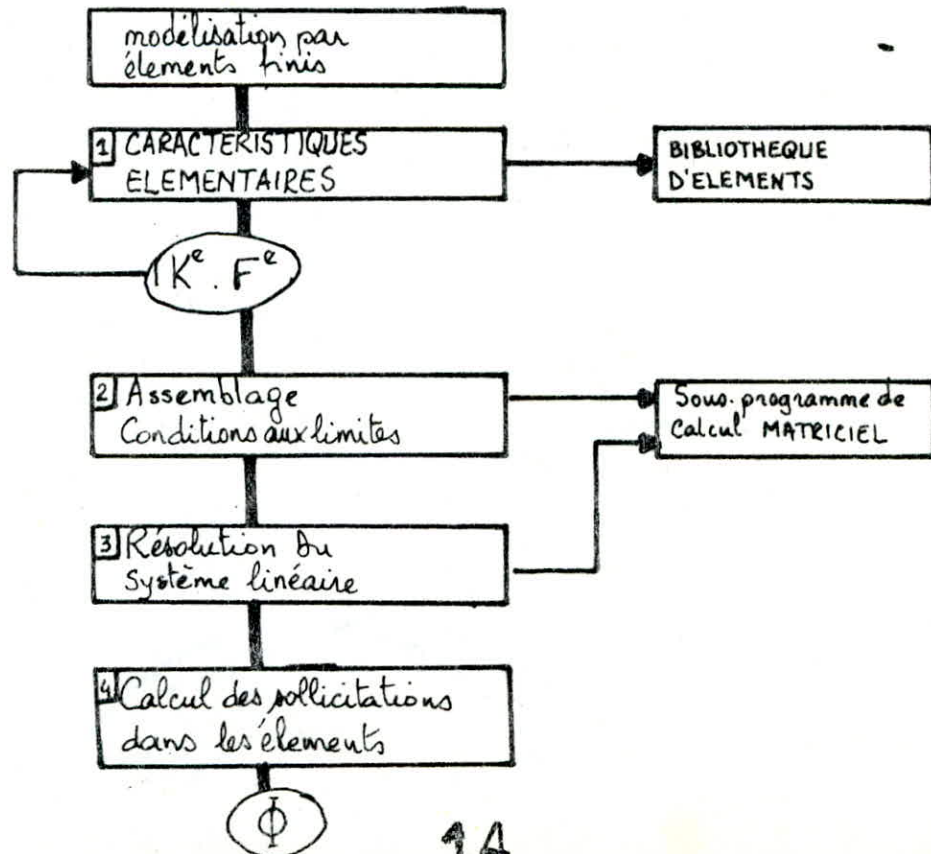
- système linéaire ou non-linéaire
- système différentiel du second ordre

- des calculs de restitution au niveau élémentaire [4]

Calcul des charges dans les éléments .

Ainsi, quatre phases sont illustrées en figure suivante dans un organigramme simplifié . Ceci montre que les traitements numériques résultant de la M.E.F. peuvent être fractionnés en phases et programmés de façon modulaire pour une grande variété de problèmes .

Organigramme simplifié des 4 phases





## 8 PROGRAMMATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Les programmes utilisant le concept d'éléments finis peuvent avoir une grande variété d'utilisation différentes.

Un utilisateur éventuel confronté à un problème d'éléments finis particulier se trouvera en butte à des difficultés insurmontables s'il doit reprendre toute la programmation à partir de zéro pour chaque nouvelle catégorie de problèmes. Il est donc indispensable de pouvoir utiliser le travail de programmation de ses prédécesseurs.

Un programme d'éléments finis type est composé d'une série de modules communs qui, selon les contraintes, peuvent se prêter à différentes utilisations. Des modules classiques sont : entrée des données, assemblage des matrices, méthodes de résolution des équations calculs des charges et sorties des résultats.

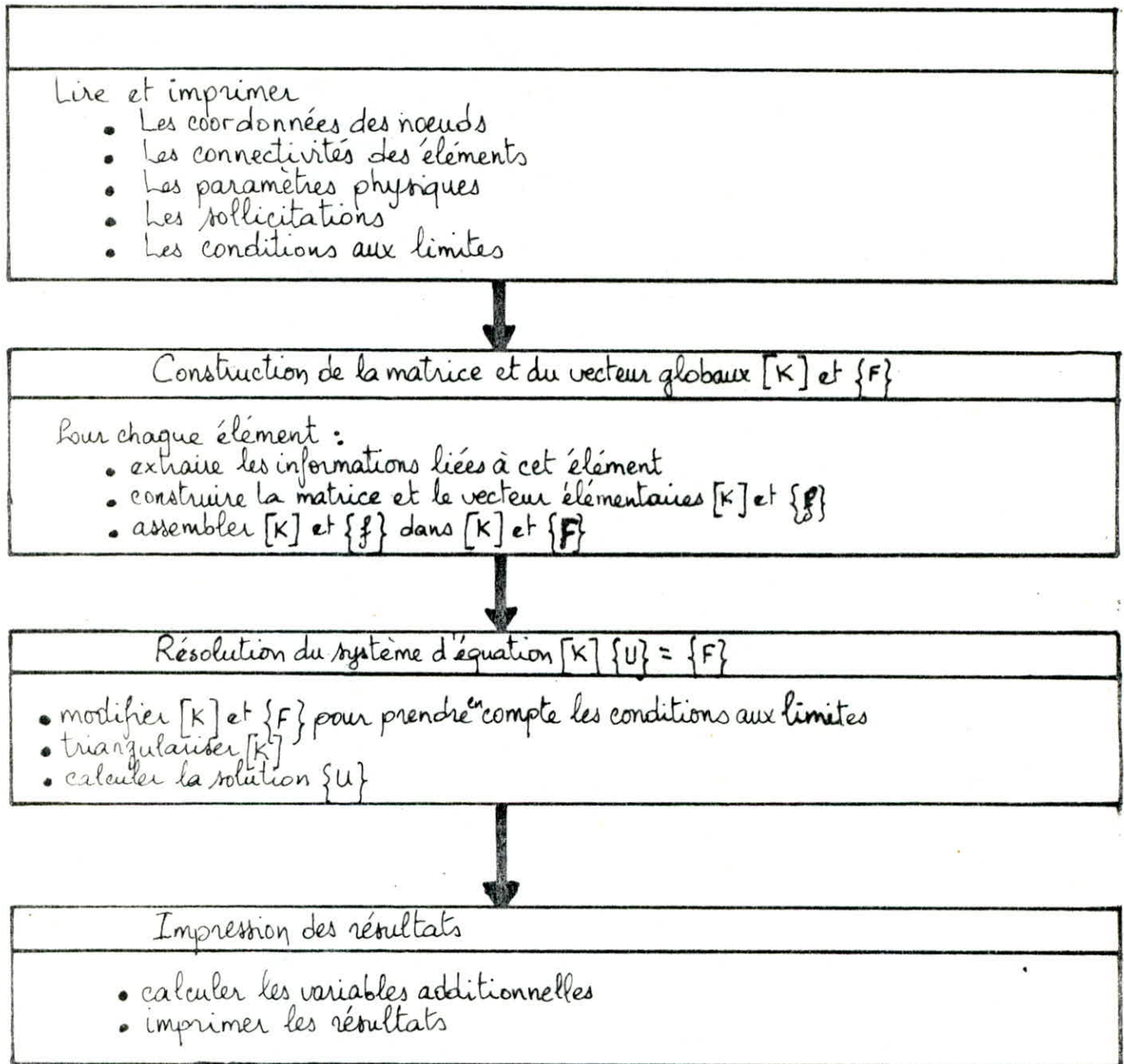
Au niveau de la programmation, ces modules interviennent en tant que sous-programmes. Dans de tels systèmes, le programme principal est un programme très simple dont la seule fonction est d'appeler les divers sous-programmes dans un ordre convenable.

## 9 ETAPES CARACTERISTIQUES D'UN PROGRAMME D'ELEMENTS FINIS

Un programme des éléments finis comporte des blocs fonctionnels caractéristiques :

1. Lecture, vérification et organisation des données décrivant le maillage (nœuds et éléments), les paramètres physiques (conductivités, modules d'élasticité, etc...), les sollicitations et conditions aux limites ;
2. Il existe des blocs spécialement pour la construction des matrices et vecteurs élémentaires, puis des autres sous-programmes font l'assemblage de ces derniers, pour former la matrice et le vecteur global ;
3. Un autre bloc destiné pour la résolution du système d'équations après prise en compte des conditions aux limites ;

4. Après le calcul des variables additionnelles (gradient, contraintes, réaction, pression, charge, ect...), l'impression des résultats, l'enchaînement de ces différents blocs est montré dans la figure suivante :



## BLOCS FONCTIONNELS CARACTERISTIQUES D'UN PROGRAMME D'ELEMENTS FINIS

**IV PRESENTATION DU  
PROGRAMME**

# 1. PRESENTATION DU PROGRAMME

Le programme M.E.F. est le programme établi dans le DHAT, TOUZOT. Il est de complexité moyenne et écrit de telle façon qu'il soit utilisable par les différents ordinateurs.

Il utilise des éléments quadrilatéraux quadratiques (8 noeuds), il peut être utilisé dans différents domaines d'application de la méthode des éléments finis (élasticité - problèmes quasi-harmoniques), il traite des problèmes à 1, 2 et 3 dimensions.

La structure du programme est :

1. Organisation des données
  - Création des tables de connectivité, localisation élémentaire propriété de l'élément et de ses noeuds, des coordonnées des noeuds, ....
2. Lecture des forces concentrées aux noeuds sollicités
3. Assemblage des éléments
4. Résolution du système
5. Impression des résultats

Le programme est composé d'un programme principal et de 6 sous-programmes

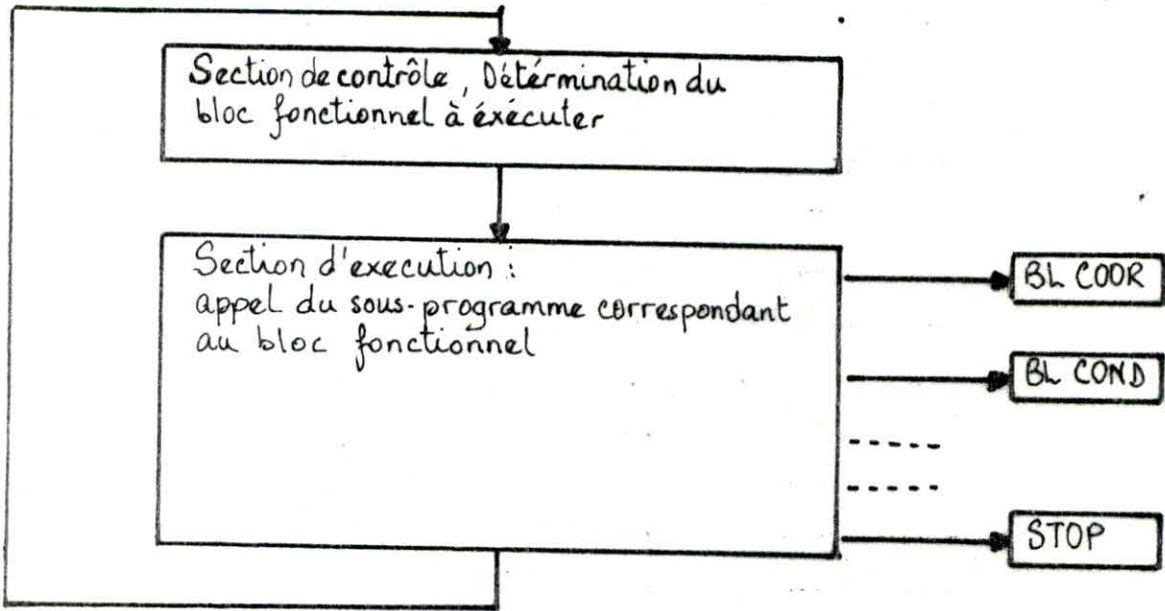
- M.E.F - 3 - (programme principal)
- COOR
- COND
- PREL
- ELEM
- SOLC
- LINM

## 2 FONCTION DES DIFFERENTS PROGRAMMES

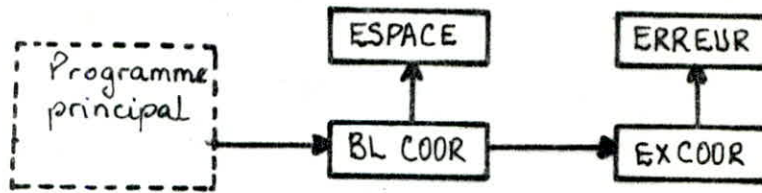
Nom du programme	Fonction
M.E.F - 3 -	Le programme principal est composé de deux parties : a. la section de contrôle de l'enchaînement des blocs b. la section d'exécution consiste en les appels des divers sous-programmes BL COOR, BL COND, ..., suivis du retour au début de la section de contrôle.
COOR	Ce bloc lit les coordonnées et nombres de degrés de liberté des noeuds, génère des noeuds par interpolation et crée les tables VCOOR et KDLNC
COND	Ce bloc lit et interprète les cartes de conditions aux limites puis crée les tables VDIMP et
PREL	Ce bloc lit et imprime les cartes de propriétés élémentaires et crée la table VPREG qui contient tous les groupes de propriétés élémentaires
ELEM	Ce bloc lit les cartes de connectivité des éléments et crée le fichier des éléments.
SOLC	Ce bloc lit et accumule dans la table NFG les sollicitations concentrées
LINM	Ce bloc assemble la matrice globale, résout le système d'équations linéaires, puis imprime les résultats, dans le cas d'un problème linéaire dont la matrice globale réside en mémoire centrale.

### 3 ORGANIGRAMMES DES DIFFERENTS PROGRAMMES

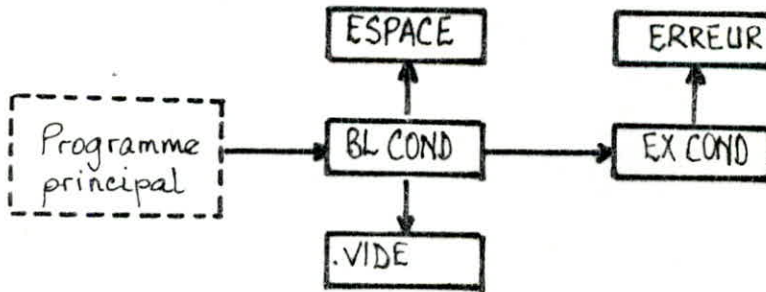
#### Programme principal



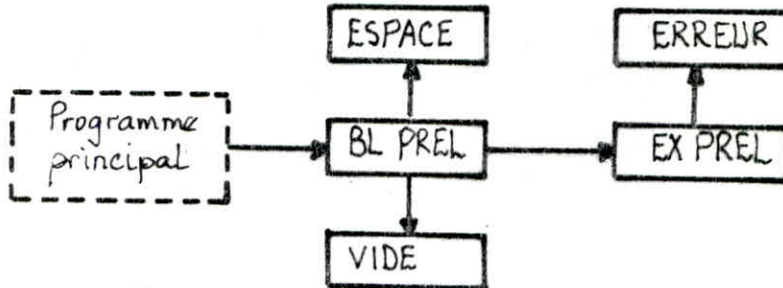
#### BLOC 'COOR'



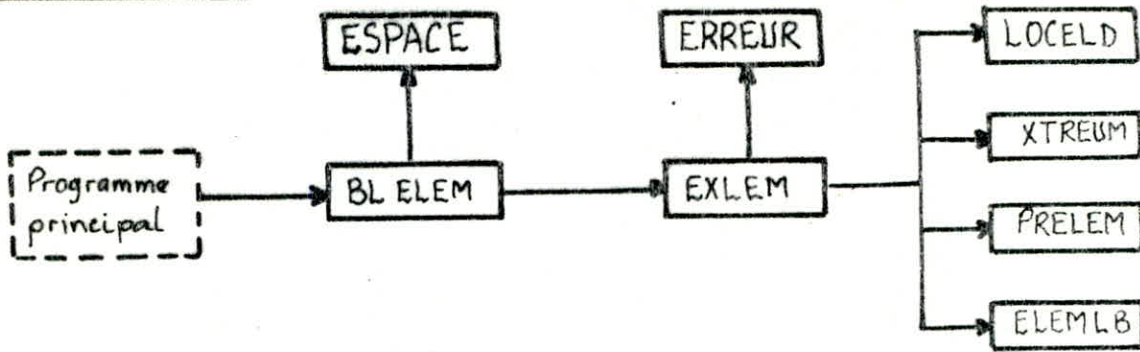
#### BLOC 'COND'



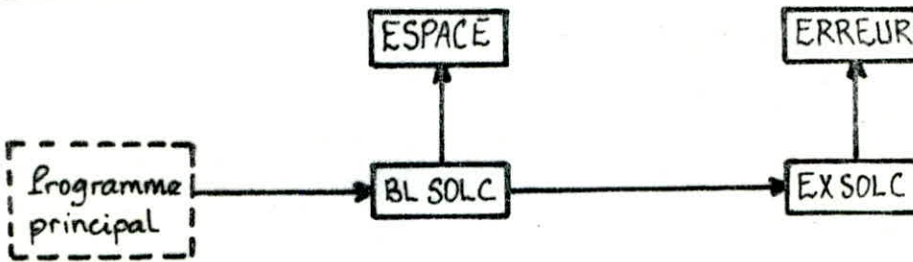
#### BLOC 'PREL'



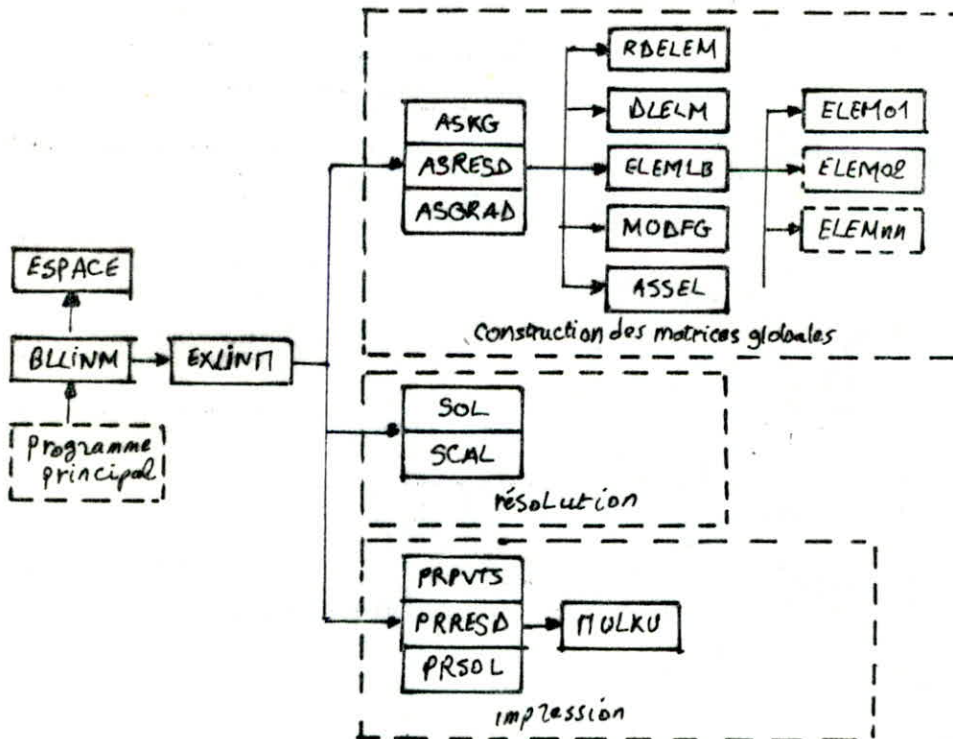
## BLOC 'ELEM'



## BLOC 'SOLC'



## BLOC 'LINM'



**V PRINCIPALES EQUATIONS  
AUX DERIVEES PARTIELLES  
DU MOUVEMENT DE L'EAU  
EN MILIEU POREUX**



## 1 PRINCIPES D'ETABLISSEMENT DES EQUATIONS

A la suite de la combinaison des diverses lois fondamentales liées à un écoulement, on obtient une équation de mouvement qui constitue une représentation mathématique du modèle conceptuel.

Le phénomène d'écoulement est un milieu continu, alors son équation est une équation aux dérivées partielles, faisant intervenir les paramètres du fluide du milieu. Mais sa forme dépend :

- de la ~~form~~ nature et du nombre de phases fluides en écoulement
- des conditions de géométrie
  - du domaine, d'une part : toutes limites rigides = écoulements captifs ou en charge ; certaines limites variables = écoulements à surface libre.
  - du champ de vitesse : toutes vitesses parallèles à un plan = écoulement bidimensionnel

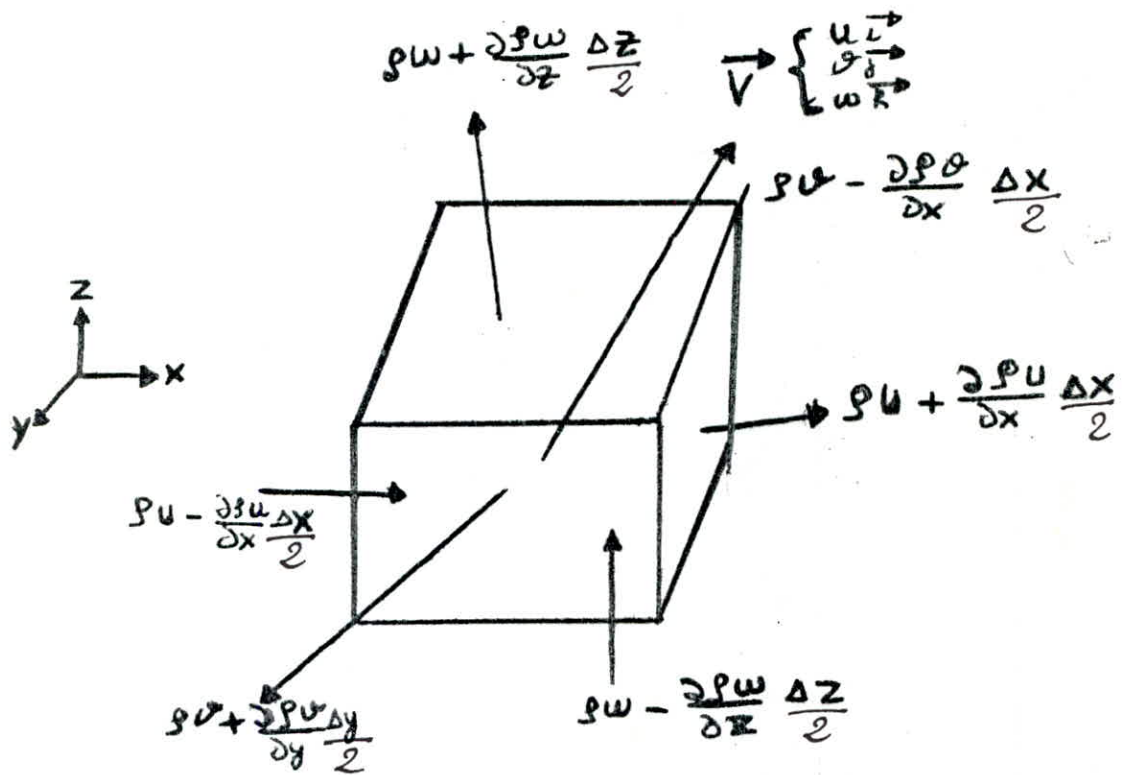
## 2 Les Lois fondamentales de l'Hydrodynamique des milieux poreux :

On établit les relations qui permettent de décrire le mouvement d'une particule d'eau en fonction de sa position, du temps, de caractéristiques physiques de l'eau et du milieu dans lequel elle circule.

### 2.1 Principe de conservation - Equation de continuité

Cette équation exprime la conservation de la masse du fluide, c'est-à-dire que l'augmentation de masse pendant un temps  $dt$  du fluide contenue dans un volume donné est égale entre les masses fluide qui entrent et celles qui sortent.

Pour l'établir, faisant la balance de matériel sur un élément infinitesimal cubique



$$\begin{array}{l}
 \text{Selon } x = \left[ \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] (\Delta y \cdot \Delta z) \quad \left| \quad \left[ \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] (\Delta y \cdot \Delta z) \right. \\
 \text{Selon } y = \left[ \rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right] (\Delta x \cdot \Delta z) \quad \left| \quad \left[ \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right] (\Delta x \cdot \Delta z) \right. \\
 \text{selon } z = \left[ \rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right] (\Delta x \cdot \Delta y) \quad \left| \quad \left[ \rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right] (\Delta x \cdot \Delta y) \right.
 \end{array}$$

Variation de la masse d'eau du cube, soit :  $\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z$   
 si on admet : flux sortant  $> 0$ , on trouve les deux formes classiques de l'équation de continuité.

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = -\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t}$$

ou en forme vectorielle :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = -\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} \quad \text{avec } \varepsilon = \text{porosité}$$

Cas particulier :

• écoulement permanent d'un fluide incompressible

nous avons  $\rho = \text{cte}$  donc  $\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = \rho \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = \rho \frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = \rho \frac{\partial w}{\partial z}$

alors  $\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = \rho \operatorname{div} \vec{V}$  et on a  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$   
d'où l'équation de continuité devient :  $\operatorname{div} \vec{V} = 0$

• écoulement non permanent

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$$

d'où l'équation de continuité s'écrit :  $\operatorname{div} \vec{V} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

### 2.3 Loi de DARCY

selon le principe fondamental de la dynamique, pour tout système en mouvement, il y a équilibre entre les forces d'inertie engendrées par le mouvement et les forces agissant pour créer ce mouvement :

$$m \vec{\gamma} = \sum \vec{F} \quad \text{avec :}$$

$m = \text{masse}$

$\vec{\gamma} = \text{accélération du mouvement}$

$\sum \vec{F} = \text{forces agissant sur le système}$

l'équation qui se base sur ce principe et qui caractérise l'écoulement dans les milieux poreux c'est l'équation de DARCY généralisée.

- Loi de DARCY :

$$V_x = \frac{K_x}{\mu} \left[ -\frac{\partial P}{\partial x} + F_x \right]$$

$$V_y = \frac{K_y}{\mu} \left[ -\frac{\partial P}{\partial y} + F_y \right]$$

$$V_z = \frac{K_z}{\mu} \left[ -\frac{\partial P}{\partial z} + F_z \right]$$

avec  $\vec{V} (V_x, V_y, V_z)$  : vitesse de filtration

$$K = \begin{vmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{vmatrix} = \text{tenseur de perméabilité pour un terrain anisotrope}$$

$P$  = pression

$\vec{F} (F_x, F_y, F_z)$  = forces de volume

$\mu$  = viscosité du fluide

Dans le cas où on a que les forces de pesanteur, c'est à dire,

$$F_x = F_y = 0 \quad , \quad F_z = -g$$

on a :

$$\vec{F} = -\rho g \vec{e}_z$$

et il vient

$$\vec{V} = -\frac{K}{\mu} \left[ g \vec{e}_z - \vec{\nabla} P \right]$$

pour un liquide non compressible

$$\vec{V} = -\frac{K \rho g}{\mu} \left[ g \vec{\text{grad}} \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) \right]$$

en faisant intervenir le potentiel hydraulique :

$$\vec{V} = -\frac{K \rho g}{\mu} \text{grad } \Phi \quad \text{ou encore} \quad \vec{V} = -K g \vec{\text{grad}} \Phi$$

avec  $\Phi = \frac{p}{\rho g} + z$

## 2.2 Equation des écoulements en milieu poreux :

- l'équation générale qui régit les écoulements en milieux poreux est obtenue à partir des équations suivantes :
  - équation de continuité
  - Loi de DARCY .

avec

$$\text{div} \left[ K g \vec{\text{grad}} \bar{\Phi} \right] = C_s \frac{\partial h}{\partial t} + q$$

$C_s$  : coefficient d'emmagasinement

$q$  : débit volumique

$\rho$  : masse volumique du fluide

$g$  : accélération de la pesanteur

### 3 Mise en équation d'un écoulement dans les milieux poreux à régime permanent :

En combinant l'équation de continuité et la loi de DARCY, on obtient l'équation d'écoulement  
l'équation de continuité s'écrit vectoriellement :

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0$$

et la loi de DARCY s'écrit :  $\vec{V} = -K \operatorname{grad} \Phi$

l'équation de l'écoulement est alors :

$$\operatorname{div} K \operatorname{grad} \Phi = 0$$

Dans le cas le plus simple d'un terrain homogène et isotrope cette dernière expression se réduit à l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla^2 \text{ est le laplacien de la fonction } \Phi$$

### 4 Mise en équation d'un écoulement dans les milieux poreux à régime non permanent :

L'équation des écoulements en milieu poreux est

$$\operatorname{div} [K \operatorname{grad} \Phi] = C_s \frac{\partial h}{\partial t} + q$$

le coefficient d'emmagasinement est négligeable  
alors on écrit l'équation s'écrit :

$$\operatorname{div} [K \operatorname{grad} \Phi] = \frac{\partial h}{\partial t} + q$$

d'où

$$\boxed{\nabla^2 \Phi = \frac{\partial h}{\partial t} + q}$$

## 5 Réseau d'écoulement :

### 5.1. Lignes de courant

De l'équation de continuité, nous pouvons déduire les composantes  $u, v, w$  du vecteur vitesse qui dérivent d'une même fonction  $\psi$ .

Cette fonction définit les lignes de courant qui sont tangentes en tous points au vecteur vitesse, ce qu'exprime l'égalité des pentes de la tangente à la ligne de courant et du vecteur vitesse  $\vec{v}$ .

$$\text{d'où } \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = 0$$

c'est à dire  $d\psi = 0$

où  $\psi(x, y, z) = \text{constante}$

A chaque ligne de courant correspond une valeur bien définie de la constante.

### 5.2. Lignes équipotentiellles :

La vitesse  $\vec{v}$  dérive d'un potentiel, donc il existe une fonction  $\Phi(x, y, z)$  telle que :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

Les lignes équipotentiellles correspondantes auront pour équation :  $\Phi(x, y, z) = \text{constante}$

Le vecteur vitesse  $\vec{v}$  est en tout point normal aux lignes d'égal potentiel.

### 5.3. Réseau d'écoulement dans un plan :

Les propriétés essentielles des fonctions  $\Phi(x, y)$  et  $\Psi(x, y)$  sont qu'elles vérifient toutes deux l'équation de Laplace.

D'autre part, les lignes ayant pour équation

$\Phi(x, y) = \text{constante}$  et  $\Psi(x, y) = \text{constante}$  forment un réseau curviligne à mailles carrées appelé réseau d'écoulement.



**VI APPLICATION DE LA  
METHODE DES ELEMENTS  
FINIS AUX ECOULENTS  
EN MILIEU POREUX**

# 1 GENERALITES

Si les premières applications de la méthode des éléments finis ont été orientées vers la résolution des équations d'équilibre en élasticité il est très vite apparu que cette méthode pouvait aussi être utilisée pour la résolution de nombreux problèmes physiques régis par un système d'équations aux dérivées partielles.

En particulier, les problèmes de répartition de la charge hydraulique dans les écoulements en milieu poreux, ces problèmes se ramènent à la résolution d'une équation du type  $\Delta u = f$ , peuvent être traités aisément par la méthode des éléments finis. Après avoir posé les équations du problème, on abordera la technique générale de résolution et on verra sa particularisation pour des exemples concrets, les écoulements à travers les pal planches, les écoulements à travers un batardeau, les infiltrations au-dessous des barrages, les infiltrations à travers des barrages.

## 2 RESOLUTION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

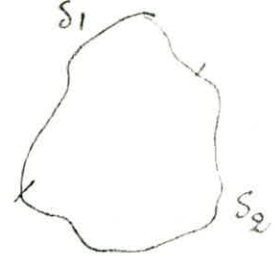
La méthode décrite ici est une méthode de résolution d'une équation de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \varphi = 0$$

cette dernière est variable sur un domaine  $\mathcal{D}$  et associée à des conditions aux limites sur le contour

- condition de potentiel imposé ou condition de DIRICHLET  
 $h = h(p)$  sur  $S_1$

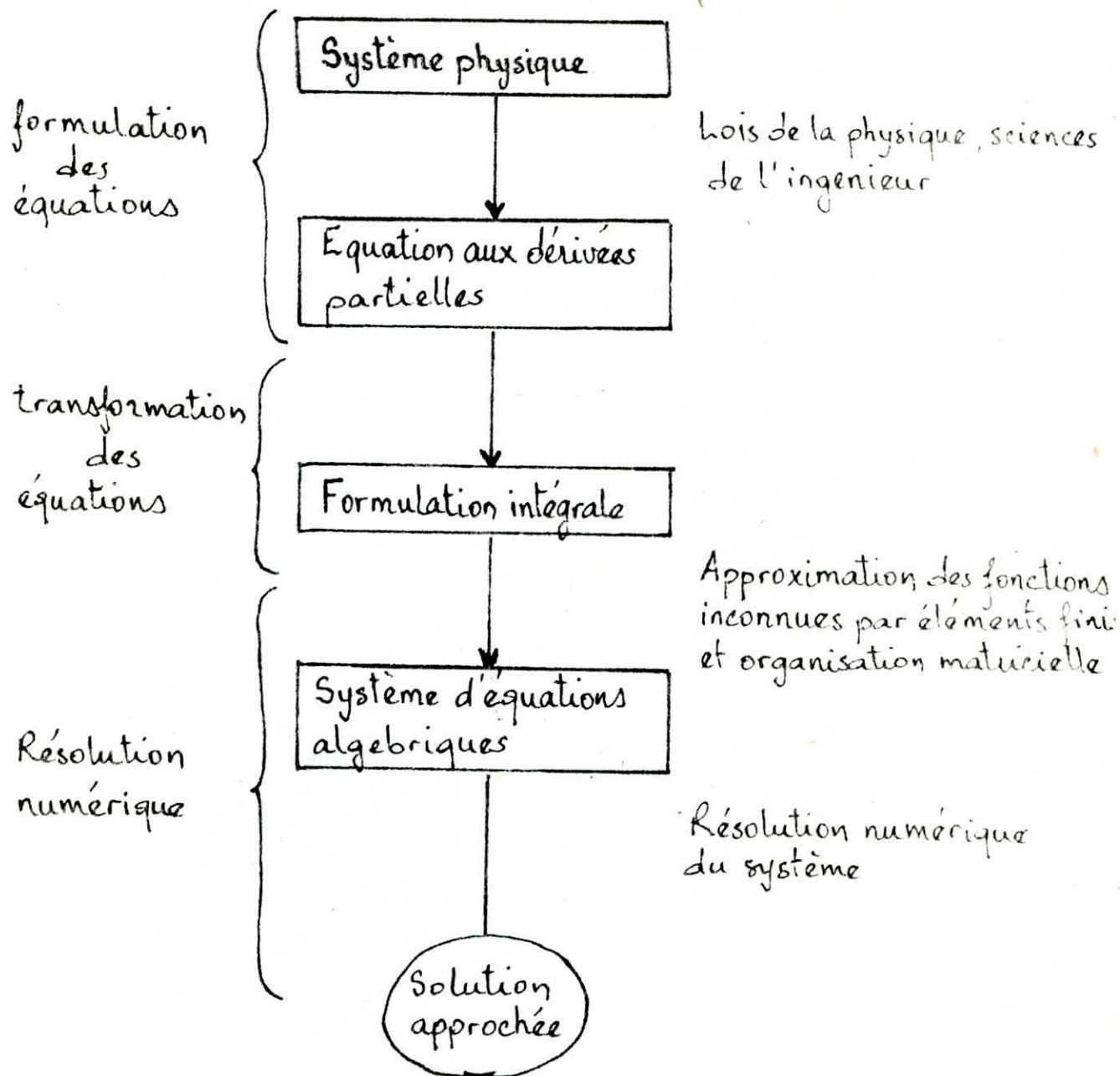
- condition de flux imposé ou  
condition de Neumann  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = \Phi$



la démarche suivie pour arriver à une formulation "éléments finis" est une démarche en 2 étapes :

1. On ramène le problème à la résolution d'un système différentiel à celui de la recherche du minimum d'une fonctionnelle
2. On ramène ensuite le problème de la détermination d'une fonction inconnue minimisant cette fonctionnelle à celui du calcul d'un nombre fini d'inconnues, par décomposition du domaine  $D$  en un nombre fini d'éléments sur chacun, on impose le type de variation de la fonction inconnue.  
On traitera d'abord le cas du régime permanent en milieu poreux, on abordera ensuite le régime transitoire.

L'organigramme du passage d'un problème physique (écoulement en milieu poreux) à un système des équations algébriques



### 3 - CALCUL DES MATRICES ELEMENTAIRES :

L'écoulement en milieu poreux en régime permanent est caractérisé par l'équation élémentaire suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_y \frac{\partial \phi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (K_z \frac{\partial \phi}{\partial z}) - Q = 0 \quad (*)$$

avec :  $\phi = \left( \frac{p}{\rho g} \right) + z$  Le potentiel moteur de l'écoulement  
 $p$  : la pression

$\rho$  : la masse volumique du liquide.

$x, y, z$  : les coordonnées.

$K_x, K_y, K_z$  : les composantes principales du tenseur de perméabilité dont les axes sont supposés parallèles aux axes de coordonnées,  $Q$  la densité du flux prélevée ou injectée.

La résolution de l'équation précédente (\*) équivaut à trouver  $\phi$  de telle façon qu'on a :

$$\iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_y \frac{\partial \phi}{\partial y}) - Q \right] w(x, y) dx dy = 0$$

$$\iint_D \left[ w \frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial \phi}{\partial x}) + w \frac{\partial}{\partial y} (K_y \frac{\partial \phi}{\partial y}) - wQ \right] dx dy = 0$$

En utilisant l'intégration par partie :

$$\int K_x w \frac{\partial \phi}{\partial x} dy = \underbrace{\int w \frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial \phi}{\partial x}) dx dy}_A + \int K_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx$$

$$\int K_y w \frac{\partial \phi}{\partial y} dx = \underbrace{\int w \frac{\partial}{\partial y} (K_y \frac{\partial \phi}{\partial y}) dy dx}_B + \int K_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dy$$

$$A + B - \iint_D Q w dy dx = \int K_x w \frac{\partial \phi}{\partial x} dy + \int K_y w \frac{\partial \phi}{\partial y} dx - \left( \int K_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx + \int K_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dy \right)$$

$$\text{avec : } A = \int w \frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial \phi}{\partial x}) dx \quad ; \quad B = \int w \frac{\partial}{\partial y} (K_y \frac{\partial \phi}{\partial y}) dy$$

on a :  $n_x = \frac{dx}{dn}$  ,  $n_y = \frac{dy}{dn}$

en posant :  $q_n = K_x \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + K_y \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y$

$$\iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial w}{\partial x} K_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} K_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + w Q \right] dx dy - \int_{\Gamma_n} q_n w dS = 0$$

on prend

$$\phi(x, y) = \sum \phi_j N_j(x, y)$$

pour  $w = N_i$  avec  $i = 1, \dots, m$

on peut écrire

$$\iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} K_x \sum \phi_j \frac{\partial N_i}{\partial y} K_y \sum \phi_j \frac{\partial N_i}{\partial y} + N_i Q \right] dx dy - \int_{\Gamma_n} q_n N_i dS = 0$$

puis écrire cette dernière sous forme matricielle.

$$[K_{ij}]^{e_i} \{ \Phi_j \} = \{ Q_i \}^{e_i} \quad e_i : \text{element}$$

avec :

$$[K_{ij}] = \int_{\Omega} \left[ K_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + K_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy$$

$$[Q_i] = \int_{\Omega} N_i Q dx dy + \int_{\Gamma_n} q_n N_i dS$$

La matrice élémentaire  $[K]$  et le vecteur de sollicitation élémentaire  $[Q]$  s'expriment sous forme d'intégrales sur l'élément réel ve par la formule admise suivante :

$$[K] = \int_{ve} [B]^T [D] [B] dV$$

$$\{Q\} = \int_{V_e} \{N\} f_v dv + \int_{S_e} \{N\} f_s ds$$

sur l'élément de référence, ces intégrales deviennent :

$$[K] = \int_{V_r} [B(\xi)]^T [D(\xi)] [B(\xi)] \det(J(\xi)) dv^e$$

$$\{Q\} = \int_{V_r} \{N(\xi)\} f_v \det(J(\xi)) dv^r + \int_{S^r} \{N(\xi)\} f_s ds$$

$$\text{avec } [B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [J]^{-1} [B_\xi]$$

$J = \text{Jacobien}$

$$D = \begin{bmatrix} dx & 0 & 0 \\ 0 & dy & 0 \\ 0 & 0 & dz \end{bmatrix}$$

dans notre cas  $dx = K_x$ ,  $dy = K_y$ ,  $dz = K_z$

## PROGRAMMATION

Pour le calcul des matrices élémentaires d'un élément quadratique isoparamétrique pour les problèmes quasi-harmoniques, on a un programme ELEM. Ce dernier utilise des sous-programmes pour la construction des fonctions d'interpolation puis le calcul des matrices élémentaires

## 4 ASSEMBLAGE DES MATRICES ELEMENTAIRES

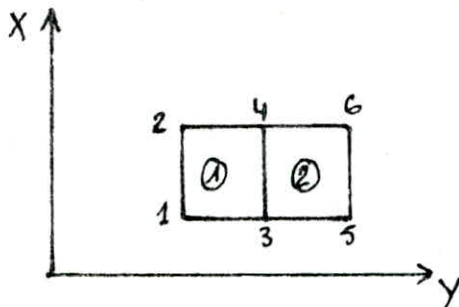
Après avoir déterminé les matrices élémentaires  $[K_{ij}]^e$   $[Q_{ij}]^e$ , il faut maintenant les assembler pour déterminer les 2 matrices globales  $[K]$  et  $[Q]$  où  $[K]$  est la matrice carrée d'ordre  $n$  (si  $n$  est le nombre total de noeuds de l'ensemble des éléments) et  $[Q]$  la matrice second membre qui prend compte outre le terme  $Q$ , les diverses conditions aux limites.

### PROGRAMMATION

#### REGLES D'ASSEMBLAGE

Pour rendre les opérations d'assemblage normales, on a créé pour chaque élément la table de localisation ELÉMENTAIRE LOCE qui donne la position de chaque terme  $\{\phi_n\}$  dans  $\{\Phi_n\}$ . Dans le cas où il n'y a qu'un degré de liberté par noeud comme dans notre cas, cette table est identique à la table de connectivité CONEC définie dans le sous-programme ELEM qui lit les cartes de connectivités des éléments et crée le fichier des éléments la dimension de la table LOCE est égale au nombre de degrés de liberté de l'élément.

Exemple de définition de la table de localisation pour 1 degré de libe





La table de connectivité CONEC est :

élément	noeuds			
1	1	3	4	2
2	3	5	6	4

pour la localisation

$$\langle \bar{\Phi}_n \rangle = \langle \bar{\Phi}_1 \bar{\Phi}_2 \bar{\Phi}_3 \bar{\Phi}_4 \bar{\Phi}_5 \bar{\Phi}_6 \rangle$$

• élément 1

$$\langle \Phi_n \rangle = \langle \bar{\Phi}_1 \bar{\Phi}_3 \bar{\Phi}_4 \bar{\Phi}_2 \rangle$$

$$LOCE = \langle 1 \ 3 \ 4 \ 2 \rangle$$

• élément 2

$$\langle \Phi_n \rangle = \langle \bar{\Phi}_3 \bar{\Phi}_5 \bar{\Phi}_6 \bar{\Phi}_4 \rangle$$

$$LOCE = \langle 3 \ 5 \ 6 \ 4 \rangle$$

On introduit un sous-programme ASSEL qui est appelé par le sous-programme LINM qui s'occupe de l'assemblage.

L'algorithme général qui effectue les deux étapes de l'assemblage est le suivant :

- Initialiser les termes de  $[K]$  et  $\{F\}$  à zéro.

- pour chaque élément  $e$  :

• Ajouter chaque terme  $K_{ij}$  de sa matrice élémentaire au terme  $K_{IJ}$  de la matrice globale.

$$K_{IJ} = K_{IJ} + K_{ij}$$

$$j = 1, 2, \dots, n_{de}$$

$$i = 1, 2, \dots, n_{de}$$

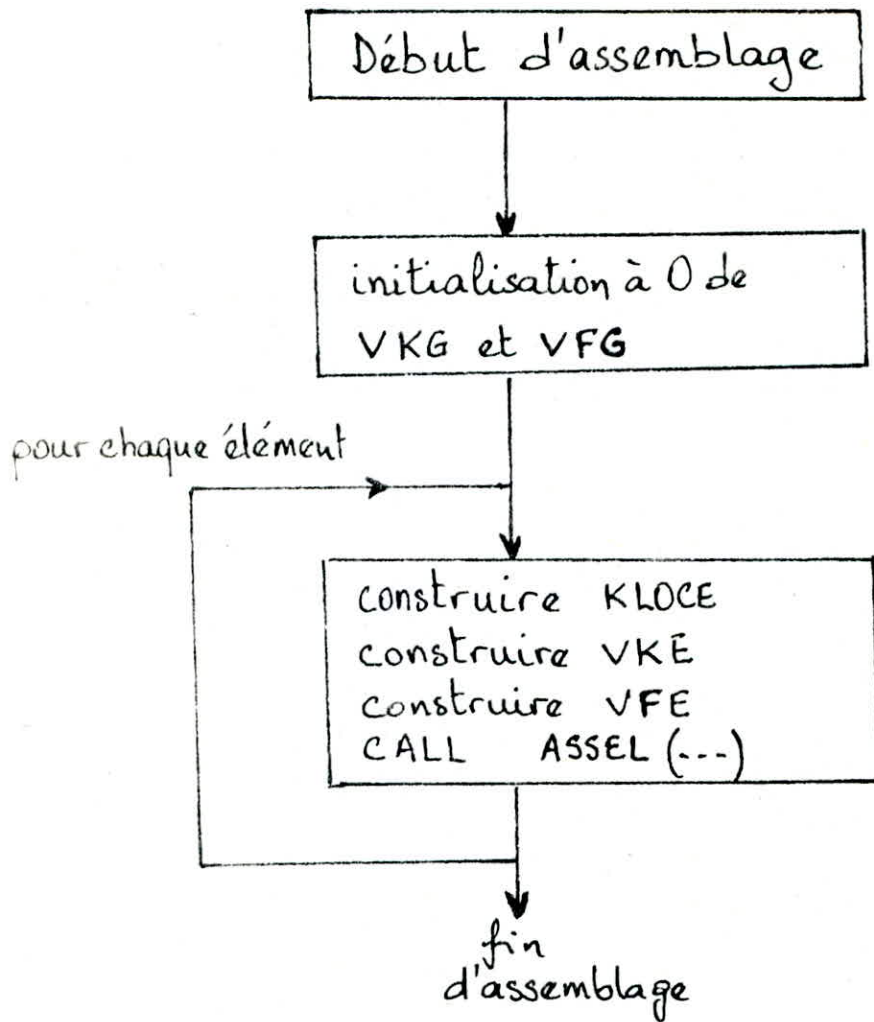
• Ajouter chaque terme  $f_i$  du vecteur élémentaire des sollicitations au terme  $F_I$  du vecteur global

36

$$F_I = F_I + f_i$$

$$i = 1, 2, \dots, n_{de}$$

# ORGANIGRAMME



VKE : matrice [K]

VFE : vecteur {F}

KLOCE : table LOCE

VKG : matrice [K] (globale)

VFG : vecteur {F} (global)

après l'assemblage des matrices et vecteurs élémentaires, on obtient

un système d'équations de la forme suivante :

$$[K] \{\Phi\} = \{F\}$$

où :  $[K]$  est une matrice caractérisant le système dans notre problème : représente la matrice de perméabilité  
 $\{\Phi\}$  sont les variables inconnues (les charges)  
 $\{F\}$  sont les sollicitations connues

## 5 INTRODUCTION DES CONDITIONS AUX LIMITES

Pour notre problème on a  $n$  noeuds ( $NNT$  (nombre de noeuds total)) alors on a  $n$  inconnues à déterminer, mais le nombre des inconnues est  $NEQ$  qui est inférieur à  $NNT$ , alors le nombre des inconnues est supérieure au nombre d'équations

$$NNT = NEQ + NCLT$$

où  $NCLT$  représente le nombre total de degré de liberté imposé, soit nul ou non.

alors on introduit  $NCLT$  conditions aux limites pour rendre le système d'équations résoluble.

On a deux catégories de conditions aux limites :

- Condition de Dirichlet : on connaît le potentiel  $\Phi$  sur une des limites du domaine étudié.

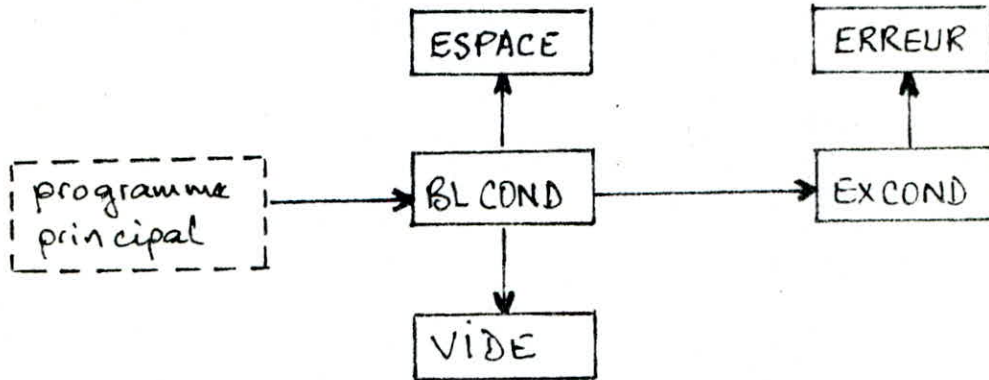
(conditions aux limites essentielles réduisent la taille du système à résoudre.)

- Condition de Neumann : on connaît le gradient de potentiel  $\frac{d\Phi}{dn}$  dans une direction donnée  $\vec{n}$  sur les limites du domaine étudié

limites naturelles. elles jouent le rôle de force.

On introduit un sous-programme COND qui s'occupe de la lecture des conditions et il crée les tables KNEQ (numéro d'équation de chaque degré de liberté) et VDIMP (valeurs des degrés de liberté imposés)

## ORGANIGRAMME



avec :

ESPACE : sous-programme qui assure l'allocation de l'espace dans la mémoire pour une table donnée

VIDE : sous-programme à comme rôle l'élimination d'une table donnée

ERREUR : sous-programme qui imprime les erreurs dans les blocs de lecture des données

Les conditions aux limites peuvent être introduites dans le système de plusieurs manières

- Méthode du terme diagonal dominant
- Méthode du terme unité sur la diagonale
- Méthode de suppression des équations.

C'est la dernière qu'on a utilisée pour l'introduction des conditions aux limites .

Le principe de cette méthode est de restructurer la matrice  $[K]$  en éliminant les équations correspondant aux degrés de liberté imposés . Son avantage est de réduire le nombre d'inconnues du système .

## 6 RESOLUTION

La résolution du système d'équation donné par la méthode d'élimination de GAUSS.

La méthode d'élimination de GAUSS est constituée de deux étapes :

- Triangularisation

Cette étape consiste à transformer le système d'équation

$$[K] \{u_n\} = \{F\} \text{ en un système triangulaire}$$

$$\begin{bmatrix} \diagup \\ 0 \end{bmatrix} \{u_n\} = \{F\}$$

- Résolution du système triangulaire supérieur précédent

Cette étape consiste à calculer les inconnues  $u_n$  de la dernière à la première, par résolution du système triangulaire (en anglais : « back-substitution »).

Pour effectuer ces deux étapes, on a le sous-programme 'SOL' qui est destiné à la résolution d'un système linéaire

## 7 IMPRESSION DES RESULTATS

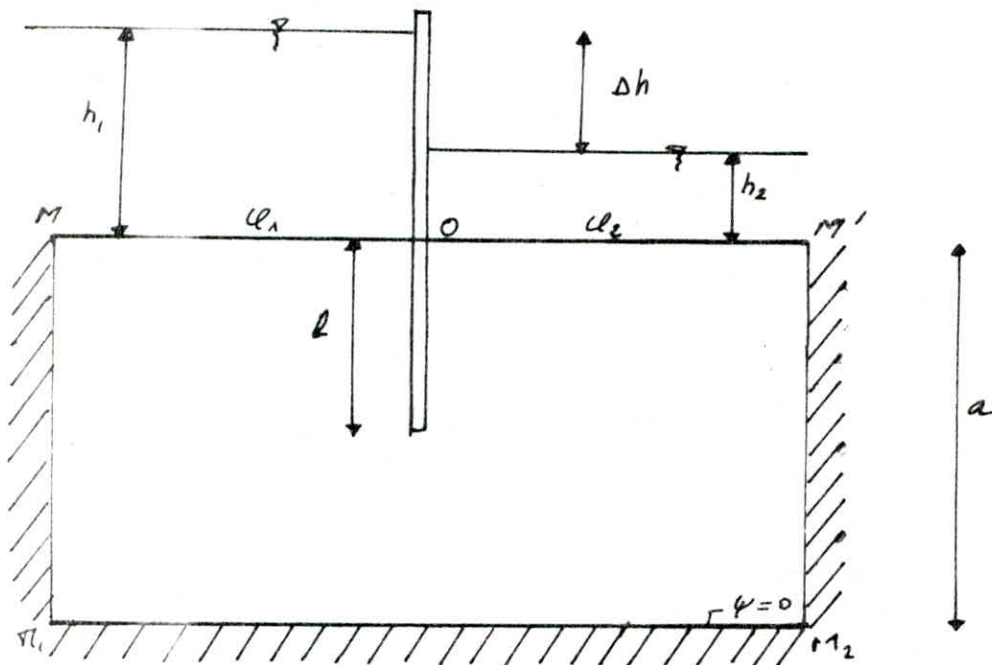
Impression des variables nodales et des divers résultats additionnels : gradient hydraulique, .....

On a introduit un sous-programme qui s'occupe d'impression des résultats qu'est 'PRSOL'.

**VII ECOULEMENT EN  
CHARGE**

# 1 ECOULEMENT AUTOUR D'UNE FILE DE PALPANCHES

Supposons qu'une paroi de palplanches imperméables soit enfoncée verticalement jusqu'à une profondeur  $l$  (longueur de fiche) dans une couche d'épaisseur  $a$  de sol perméable et homogène caractérisé par une vitesse de filtration  $K = 10^{-2} \text{ m/p}$ .



Sous l'influence de la charge  $\Delta h = h_1 - h_2$ , il va s'établir un écoulement à travers le massif perméable. l'écoulement est le même dans toutes les sections normales à la ligne de palplanches.

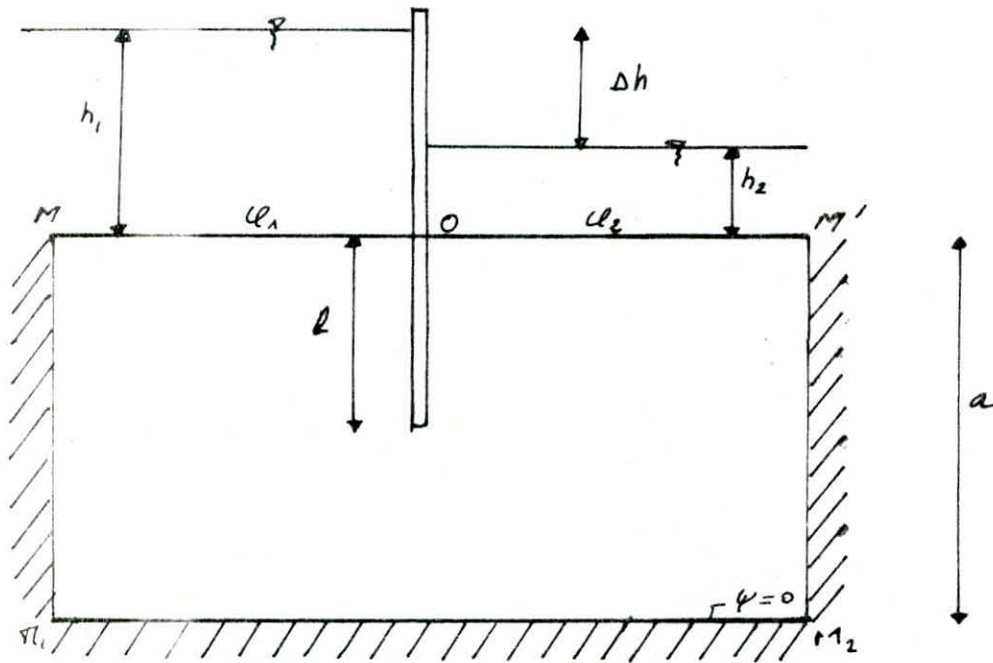
## 1.1 CONDITIONS AUX LIMITES

- les demi-droites  $OM$  et  $OM'$  constituent les limites entre le massif et une masse d'eau libre, ce sont donc des équipotentiels
- les faces amont et aval des palplanches constituent



# 1 ECOULEMENT AUTOUR D'UNE FILE DE PALPLANCHES

Supposons qu'une paroi de palplanches imperméables soit enfoncée verticalement jusqu'à une profondeur  $l$  (longueur de fiche) dans une couche d'épaisseur  $a$  de sol perméable et homogène caractérisé par une vitesse de filtration  $K = 10^{-2} \text{ m/p}$ .



Sous l'influence de la charge  $\Delta h = h_1 - h_2$ , il va s'établir un écoulement à travers le massif perméable. L'écoulement est le même dans toutes les sections normales à la ligne de palplanches.

## 1.1 CONDITIONS AUX LIMITES

- les demi-droites  $OM$  et  $OM'$  constituent les limites entre le massif et une masse d'eau libre, ce sont donc des équipotentielles
- les faces amont et aval des palplanches constituent

les limites entre le massif et une paroi impermeable, ce sont donc des lignes de courant. Il en est de même de la surface supérieure de la couche impermeable  $M_1M_2M_3$ , d'où on applique la condition de Neumann:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$$

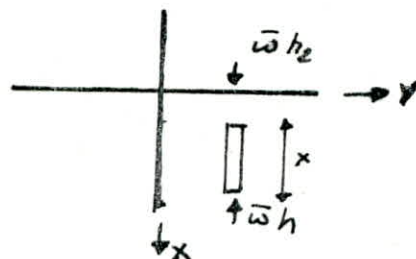
- $\vec{n}$ : une direction normale en tout point de la surface impermeable

# 1.2 APPLICATION AU CALCUL DE LA CONDITION D'ENTRAÎNEMENT DES PARTICULES RISQUE DE RENARD

Le calcul de la profondeur d'enfoncement de l'écran  
Pour qu'il n'y ait pas d'entraînement des particules  
(risque de Renards), se fait suivant la condition  
d'équilibre suivante :

$$\bar{\omega} h - \bar{\omega} h_2 \leq \gamma_a \cdot x \quad (1)$$

où:  $\gamma_a$ : C'est le poids déjaugé de l'élément  
en négligeant les forces de cohésion  
et de frottement du sol



$$h = \frac{\Delta h}{-\pi} \arccos\left(\frac{x}{l}\right) + h_2 \quad \text{avec } y = 0$$

$$h = \frac{\Delta h}{\pi} \arccos\left(\frac{x}{l}\right) + h_2$$

Si  $x = 0$  on aura  $\arccos\left(\frac{x}{l}\right) = \pi/2$   
remplaçant dans (1)

$$\bar{\omega} (h - h_2) \leq \gamma_a \cdot l$$

$$\bar{\omega} \frac{\Delta h}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \gamma_a \cdot l$$

$$\text{d'où } l \geq \frac{\bar{\omega} \cdot \Delta h}{2 \gamma_a}$$

Cette condition correspond à un début d'érosion.

## APPLICATION

$$\Delta h = 8 - 4 = 4,00 \text{ m} ; \bar{\omega} = 10 \text{ kN/m}^3 ; \gamma_a = 8,2 \text{ kN/m}^3$$

$$l \geq \frac{10 \cdot 4}{2 \cdot 8,2} = 2,5 \text{ m}$$

## 1.3 APPLICATION DE LA METHODE DE CALCUL NUMÉRIQUE

de calcul numérique sur ordinateur va résoudre numériquement le problème des infiltrations grâce au programme MEF, d'où la méthode numérique utilisée par partie "simulateur d'écoulement" des modèles mathématiques présentés est la méthode des éléments finis. nous avons opté à appliquer ce programme sur des cas pratique:

1<sup>er</sup> Cas :

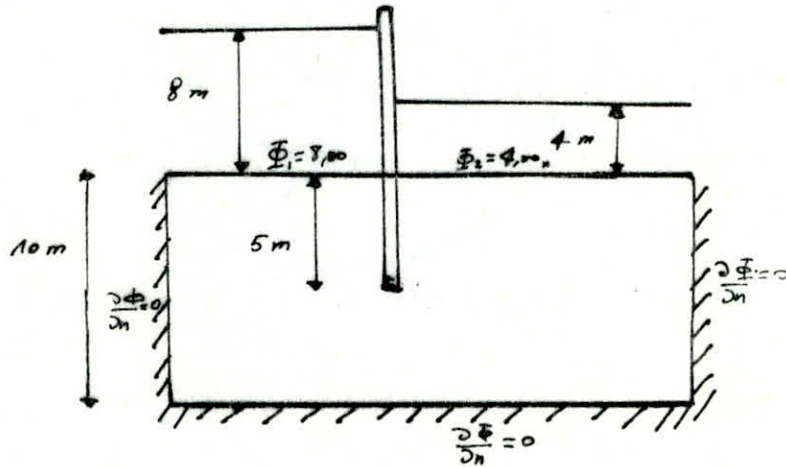
données géométrique:

$$h_1 = 8m ; h_2 = 4m ; l = 5m ; a = 10m$$

Discrétisation en éléments finis

- formes des éléments: quadratique à 8 nœuds
- nombre d'éléments: 50
- nombre de nœuds: 181

Caractéristique du matériau:  $K = 10^{-2} m/s$



2<sup>e</sup> Cas :

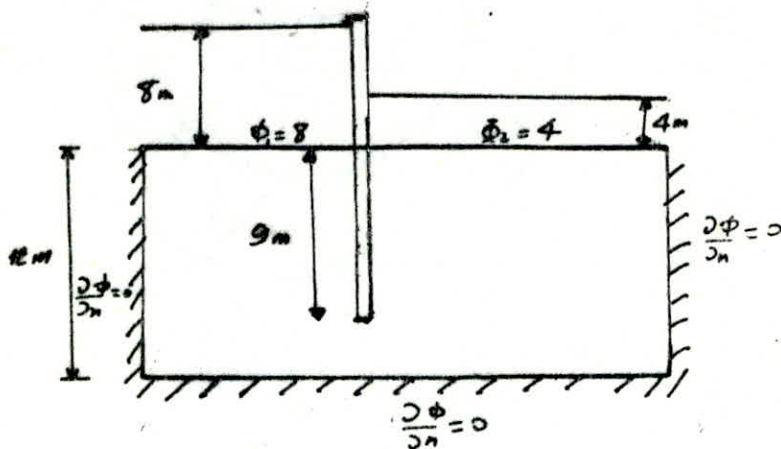
données géométrique :

$$h_1 = 8,00 \text{ m} ; h_2 = 4 \text{ m} ; l = 9 \text{ m} , a = 12 \text{ m}$$

discrétisation en éléments finis :

- forme de éléments: quadratique à 8 nœuds
- nombre d'éléments: 60
- nombre de nœuds: 213

Caractéristique du matériau:  $K = 10^{-2} \text{ m/p}$



ECHÉLLE

(largeur 1/200  
hauteur 1/100)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

DETAILED MESH (1st CAP)

ECHELLE

(largeur 1/200)  
(hauteur 1/100)

8000	8000	8000	8000	8000	8000	8000	8000	8000	8000	4000	4000	4000	4000	4000	4000	4000	4000	4000	4000		
7994		7991		7998		7994		7863	7711	4289	4137		4053		4022		4009		4006		
7987	7986	7989	7983	7958	7933	7893	7826	7733	7540	7405	4594	4460	4267	4174	4107	4067	4042	4027	4019	4140	4015
7981		7973		7937		7846		7576	6960	5040	4484		4154		4063		4023			4029	
7975	7973	7970	7963	7945	7871	7798	7671	7451	7140	6446	5554	4860	4549	4329	4202	4127	4082	4052	4030	4027	4024
7971		7967		7955		7746		7335	6000	6000	4805			4254		4095		4043			4060
7967	7962	7957	7952	7938	7865	7723	7550	7262	6841	6000	5159	4738	4500	4217	4175	4112	4072	4045	4027	4024	4021
7964		7959		7947		7805		7202		6000		4738		4305		4123		4054			4026
7961	7957	7953	7946	7933	7874	7872	7815	7771	6682	6000	5318	4829	4525	4308	4206	4131	4084	4057	4043	4039	4036
7957		7952		7940		7800		7660		6000		4800		4340		4136		4050			4040
7953	7951	7947	7943	7930	7894	7855	7851	7850	6641	6000	5359	4867	4549	4345	4216	4157	4089	4060	4045	4041	4037

RESULTATS DE CALCUL (1<sup>er</sup> CAS)

A partir des valeurs de  $\Phi$  calculées aux nœuds.  
On fait une interpolation linéaire pour calculer les valeurs intermédiaires qui donnent le tracé des éléments de courbes équipotentielles.

On obtient les lignes de courants en construisant le réseau de courbes qui se raccordent orthogonalement à ces équipotentielles.

### 1.3.1 CALCUL DES LIGNES D'ÉCOULEMENT: $\Psi$

Pour la détermination des lignes d'écoulement, on a utilisé une méthode analytique. Le réseau d'écoulement dans un plan est donné par une fonction analytique de la forme :

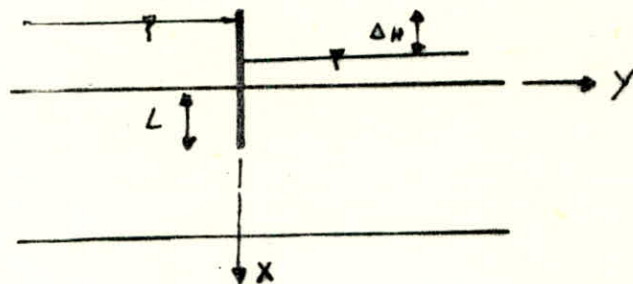
$$f(z) = \Phi(x, y) + i \Psi(x, y) \quad (1)$$

avec  $z = x + iy$  c'est la variable complexe ;

$f(z)$  est le potentiel complexe ;

Dans notre cas nous avons pris

$$f(z) = \text{Arccos} \frac{z}{L} \quad (2)$$





en combinant ① et ②, on obtient

$$\cos(\Phi + i\psi) = \frac{z}{L} = \frac{x}{L} + i \frac{y}{L}$$

$$\text{où } \cos \Phi \cos i\psi - \sin \Phi \sin i\psi = \frac{x}{L} + i \frac{y}{L}$$

en appliquant les formules d'Euler:

$$\cos i\psi = \frac{e^{-\psi} + e^{\psi}}{2} = \text{ch } \psi$$

$$\sin i\psi = \frac{e^{-\psi} - e^{\psi}}{2} = i \text{sh } \psi$$

$$\text{il vient : } \cos \Phi \text{ch } \psi - i \sin \Phi \text{sh } \psi = \frac{x}{L} + i \frac{y}{L}$$

d'où, en égalant les parties réelles et les parties imaginaires :

$$x = L \cos \Phi \text{ch } \psi \quad \text{①}$$

$$y = -L \sin \Phi \text{sh } \psi \quad \text{②}$$

de ① on tire

$$\text{ch } \psi = \frac{x}{L \cos \Phi} \implies$$

$$\psi = \text{Arg ch } \frac{x}{L \cos \Phi}$$

d'où

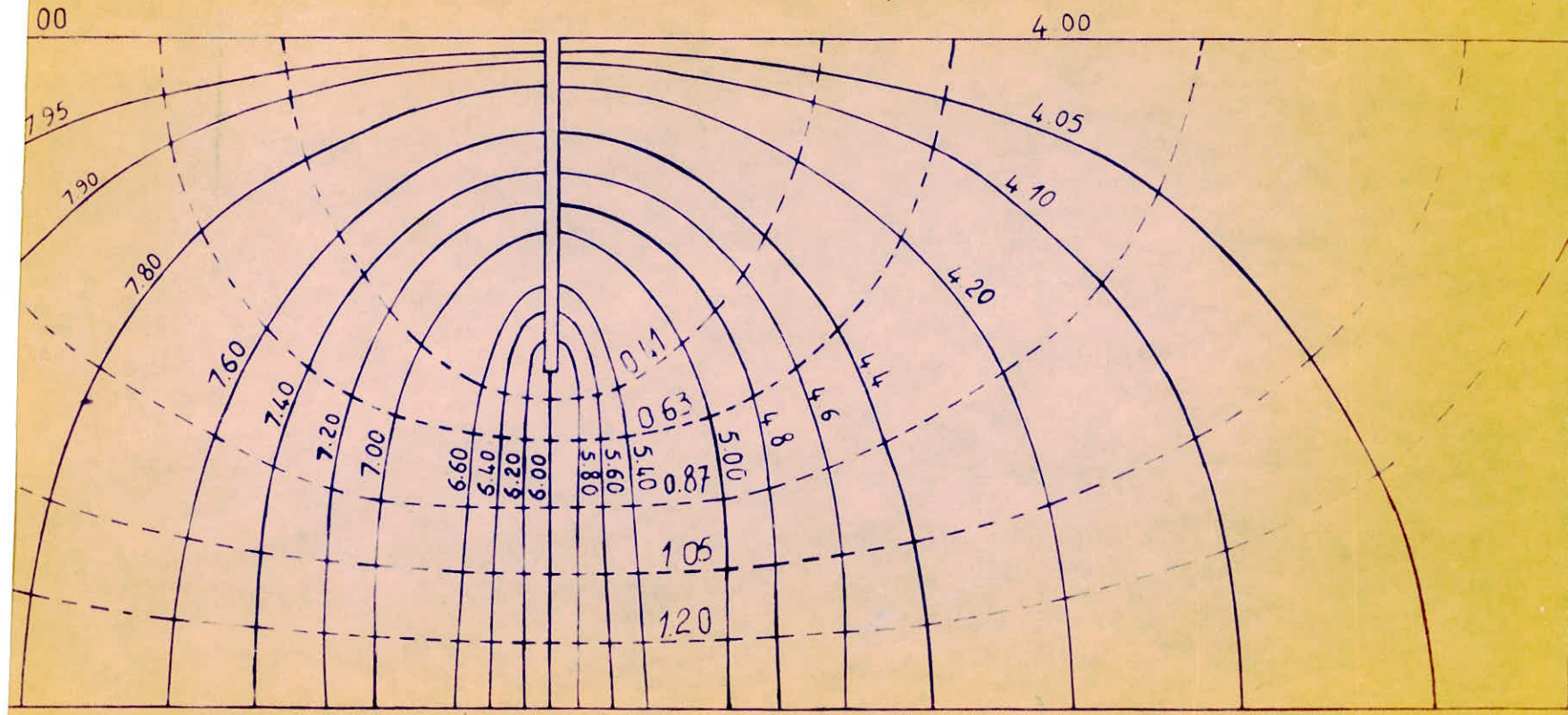
$$\psi = \log \left( \frac{x}{L \cos \Phi} + \sqrt{\left( \frac{x}{L \cos \Phi} \right)^2 - 1} \right)$$

avec  $x$ ,  $L$  et  $\cos \Phi$  sont connues

les  $\psi$  sont reportées sur le graphe.

ECHELLE

( largeur 1/200  
hauteur 1/100 )



T PERMANENT AUTOUR D'UNE FILE DE PALPLANCHES (1<sup>er</sup> CAS)

LEGENDE :

- equipotentielle
- ligne de courant

$$T = 3 \times 10^3 \text{ Sec.}$$

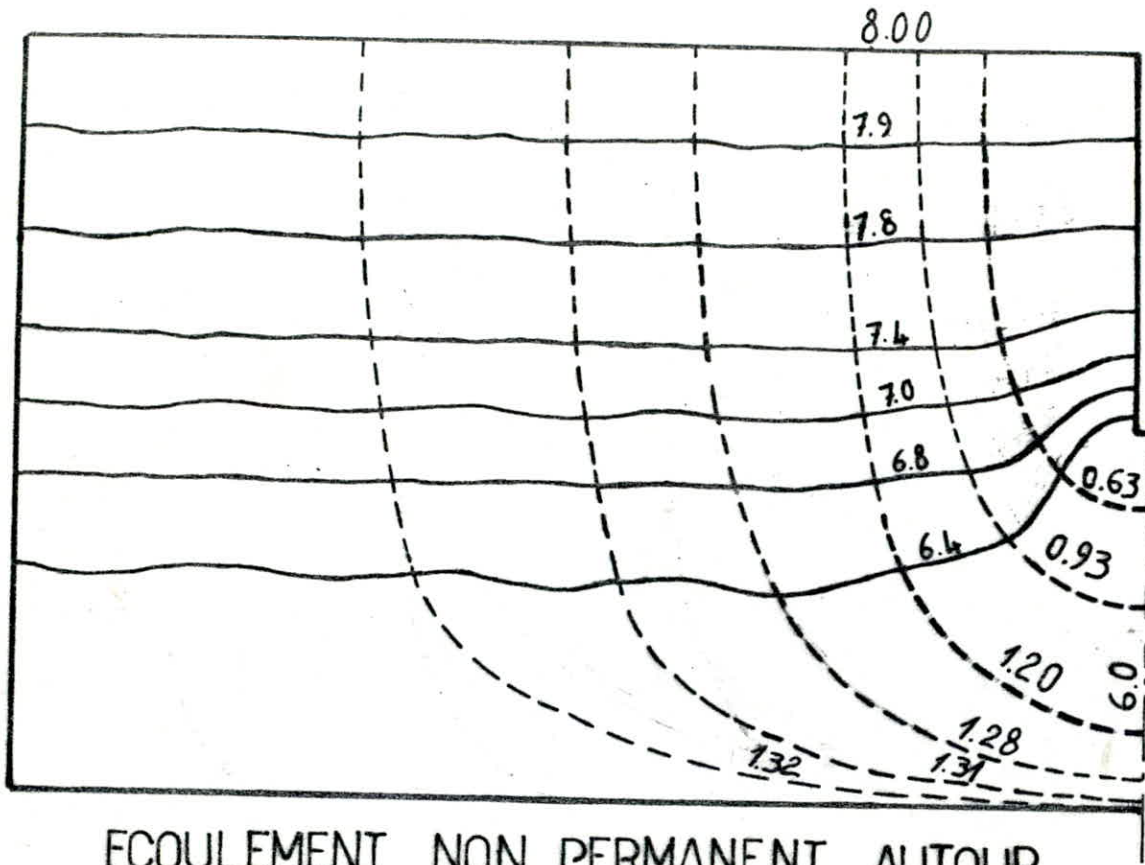
8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000
7.990		7.990		7.991		7.993		7.984	7.925	
7.893	7.893	7.893	7.893	7.893	7.894	7.895	7.899	7.892	7.864	7.828
7.741		7.742		7.745		7.754		7.736	7.733	
7.385	7.385	7.385	7.387	7.390	7.393	7.399	7.399	7.392	7.123	7.002
6.880		6.881		6.884		6.879		6.877	6.000	
6.589	6.589	6.589	6.592	6.595	6.600	6.601	6.608	6.512	6.412	6.000
6.457		6.458		6.451		6.427		6.317	6.000	
6.303	6.303	6.304	6.306	6.311	6.316	6.346	6.350	6.283	6.221	6.000
6.325		6.327		6.333		6.341		6.267	6.000	
5.207	5.207	5.271	6.274	6.278	6.285	6.293	6.303	6.256	6.210	6.000

RESULTATS DE  
CALCUL

ECOULEMENT NON PERMANENT AUTOUR  
D'UNE FILE DE PALPLANCHES (1<sup>er</sup> CAS)

ECHELLE

(largeur 1/200  
hauteur 1/100)



LEGENDE :

- equipotentielle
- - - - ligne de courant

ÉCOULEMENT NON PERMANENT AUTOUR  
D'UNE FILE DE PALPLANCHES (1<sup>er</sup> CAS)

$$T = 3 \times 10^3 \text{ s}$$

53

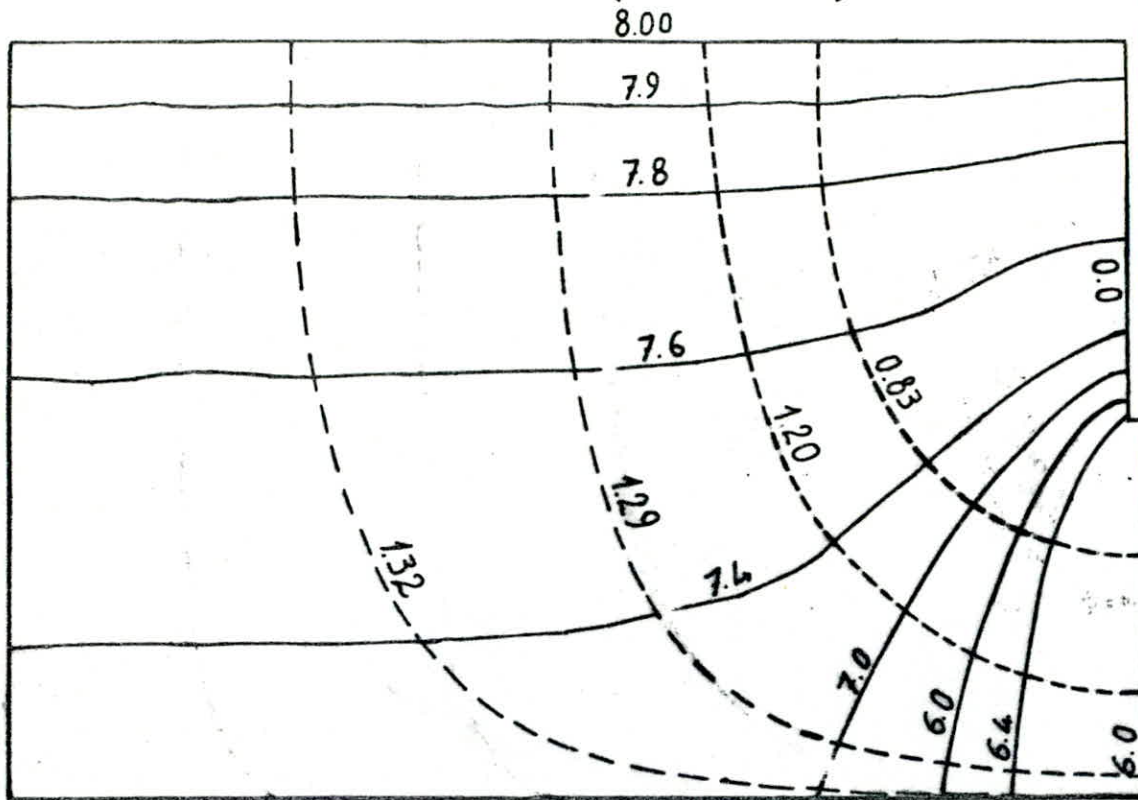
53

$$T = 5 \times 10^3 \text{ Sec.}$$

8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000
7.897		7.897		7.896		7.890		7.886		7.948
7.806	7.806	7.806	7.806	7.806	7.805	7.801	7.798	7.779	7.796	7.786
7.798		7.798		7.796		7.787		7.656		7.589
7.662	7.662	7.662	7.661	7.658	7.646	7.616	7.601	7.597	7.526	7.244
7.589		7.589		7.588		7.583		7.523		6.000
7.549	7.549	7.548	7.548	7.542	7.519	7.476	7.415	7.376	6.919	6.000
7.480		7.481		7.476		7.442		7.010		6.000
7.394	7.394	7.394	7.395	7.389	7.387	7.388	7.322	6.987	6.513	6.000
7.386		7.386		7.380		7.362		6.979		6.000
7.369	7.368	7.368	7.367	7.362	7.356	7.316	7.158	6.828	6.326	6.000

RESULTATS DE CALCUL

ECHELLE (largeur 1/200)  
(hauteur 1/100)



LEGENDE :

- equipotentielle
- - - ligne de courant

ÉCOULEMENT NON PERMANENT AUTOUR  
D'UNE FILE DE PALPLANCHES (1<sup>er</sup> CAS)

$$T = 5 \times 10^{-3} \text{ s}$$

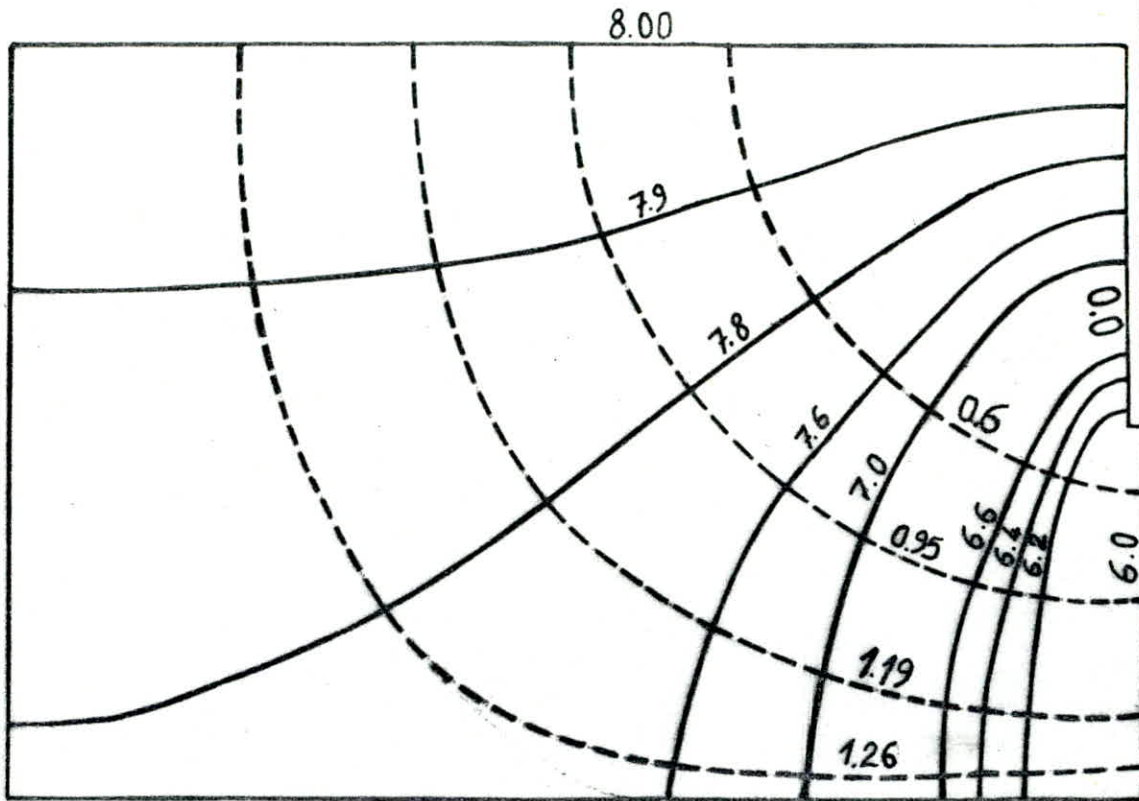
$$T = 10^4 \text{ Sec.}$$

8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000
7.998		7.997		7.992		7.986		7.908		7.847
7.997	7.995	7.993	7.991	7.990	7.986	7.978	7.868	7.825	7.754	7.669
7.904		7.997		7.896		7.877		7.725		6.928
7.899	7.892	7.890	7.887	7.888	7.862	7.856	7.743	7.591	6.660	6.695
7.897		7.889		7.879		7.796		7.033		6.000
7.895	7.890	7.888	7.881	7.871	7.757	7.743	7.406	6.735	6.533	6.000
7.882		7.878		7.796		7.728		6.718		6.000
7.878	7.868	7.857	7.799	7.759	7.692	7.633	7.417	6.709	6.276	6.000
7.800		7.797		7.748		7.580		6.689		6.000
7.788	7.777	7.768	7.759	7.708	7.676	7.455	7.023	6.664	6.040	6.000

RESULTATS DE CALCUL

ECHELLE

(largeur 1/200)  
hauteur 1/100)



LEGENDE :

- equipotentielle
- - - ligne de courant

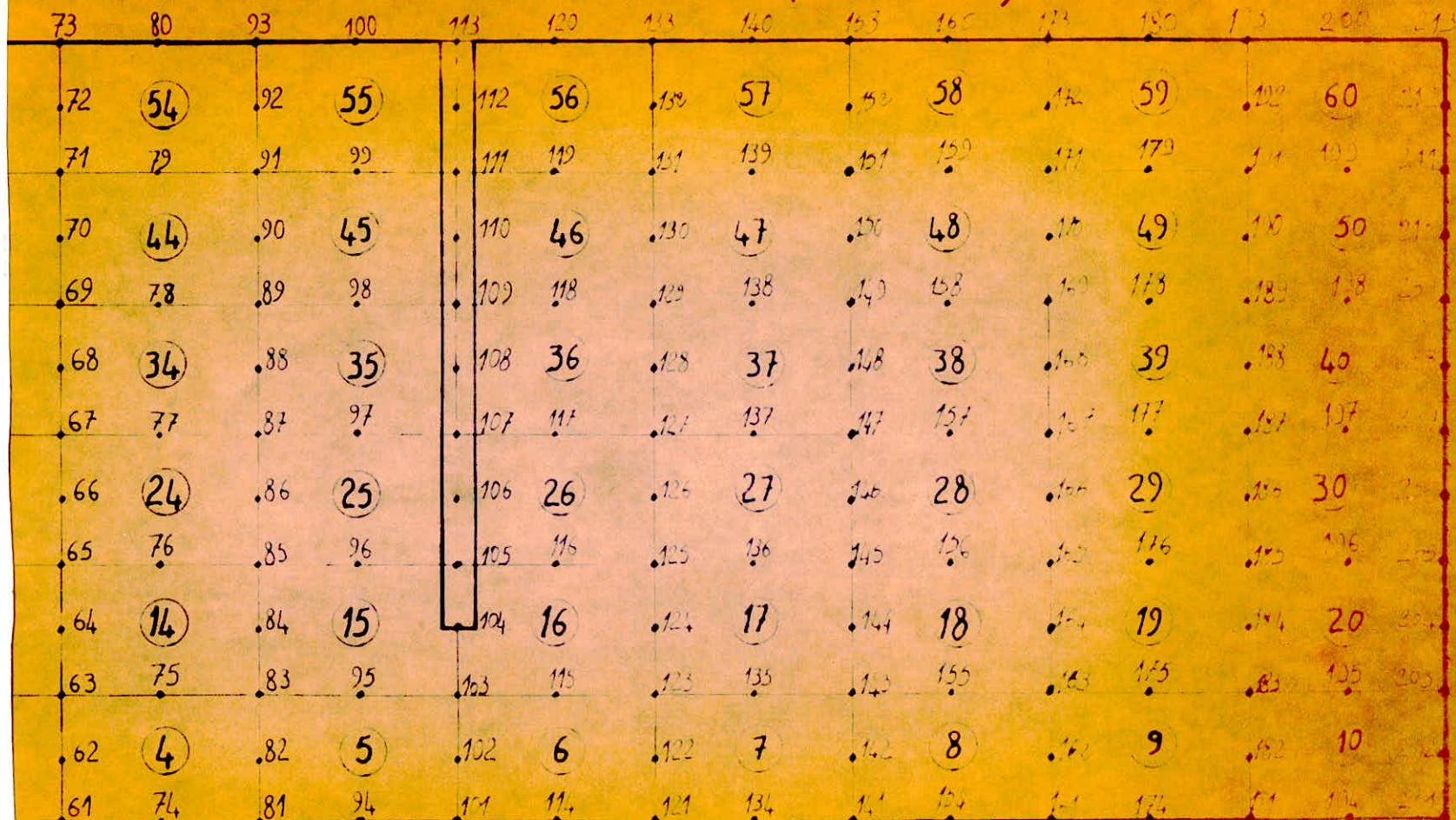
ÉCOULEMENT NON PERMANENT AUTOUR  
D'UNE FILE DE PALPLANCHES

(1<sup>er</sup> CAS)

$$T = 10^4 \text{ S}$$



FOURILLE (largeur 200)  
hauteur 1/100



DETAIL DU MAILLAGE (25<sup>me</sup> CAS)

ECHELLE  
(largeur 1/200)  
(hauteur 1/100)

8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000
7.952		7.908	7.866		4.134	4.092		4.048		4.023		4.012		4.009	
7.904	7.862	7.813	7.754	7.729	4.271	4.246	4.187	4.138	4.096	4.066	4.046	4.033	4.024	4.020	4.018
7.857		7.620	7.586		4.414	4.380		4.143		4.068		4.036		4.027	
7.813	7.731	7.530	7.494	7.431	4.569	4.506	4.470	4.269	4.187	4.128	4.089	4.063	4.047	4.038	4.036
7.772		7.448	7.258		4.742	4.552		4.228		4.109		4.057		4.043	
7.734	7.610	7.345	7.206	7.059	4.941	4.794	4.655	4.390	4.266	4.182	4.125	4.090	4.067	4.054	4.050
7.703		7.268	6.736		5.264	4.754		4.297		4.143		4.075		4.057	
7.672	7.514	7.246	6.946	6.349	5.651	5.054	4.732	4.486	4.328	4.224	4.156	4.110	4.082	4.067	4.062
7.640		7.165	6.000		6.000	4.835		4.360		4.164		4.088		4.066	
7.632	7.450	7.147	6.755	6.000	5.245	4.853	4.550	4.368	4.251	4.174	4.128	4.091	4.074	4.069	
7.623		7.144	6.000		4.856		4.377		4.178		4.094		4.071		
7.618	7.428	7.143	6.684	6.000	5.316	4.857	4.572	4.382	4.260	4.180	4.127	4.095	4.077	4.071	

RESULTATS DE CALCUL (2<sup>eme</sup> CAS)

$$T = 3 \times 10^3 \text{ Sec.}$$

8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000
7.834		7.134		7.835		7.841		7.855		7.865
7.710	7.710	7.710	7.711	7.713	7.716	7.723	7.736	7.762	7.774	7.786
7.509		7.510		7.513		7.529		7.572		7.578
7.148	7.149	7.149	7.151	7.154	7.161	7.175	7.200	7.244	7.284	7.298
6.881		6.882		6.888		6.914		6.988		7.081
6.697	6.697	6.698	6.700	6.705	6.715	6.774	6.774	6.826	6.879	6.885
6.501		6.502		6.510		6.546		6.593		6.609
6.296	6.296	6.297	6.299	6.306	6.318	6.345	6.394	6.472	6.565	6.591
6.282		6.283		6.292		6.336		6.456		6.000
6.159	6.159	6.160	6.163	6.170	6.184	6.212	6.274	6.344	6.410	6.000
6.025		6.027		6.136		6.185		6.218		6.000
6.081	6.081	6.081	6.086	6.093	6.108	6.139	6.100	6.199	6.228	6.000

RESULTATS DE  
CALCUL

69

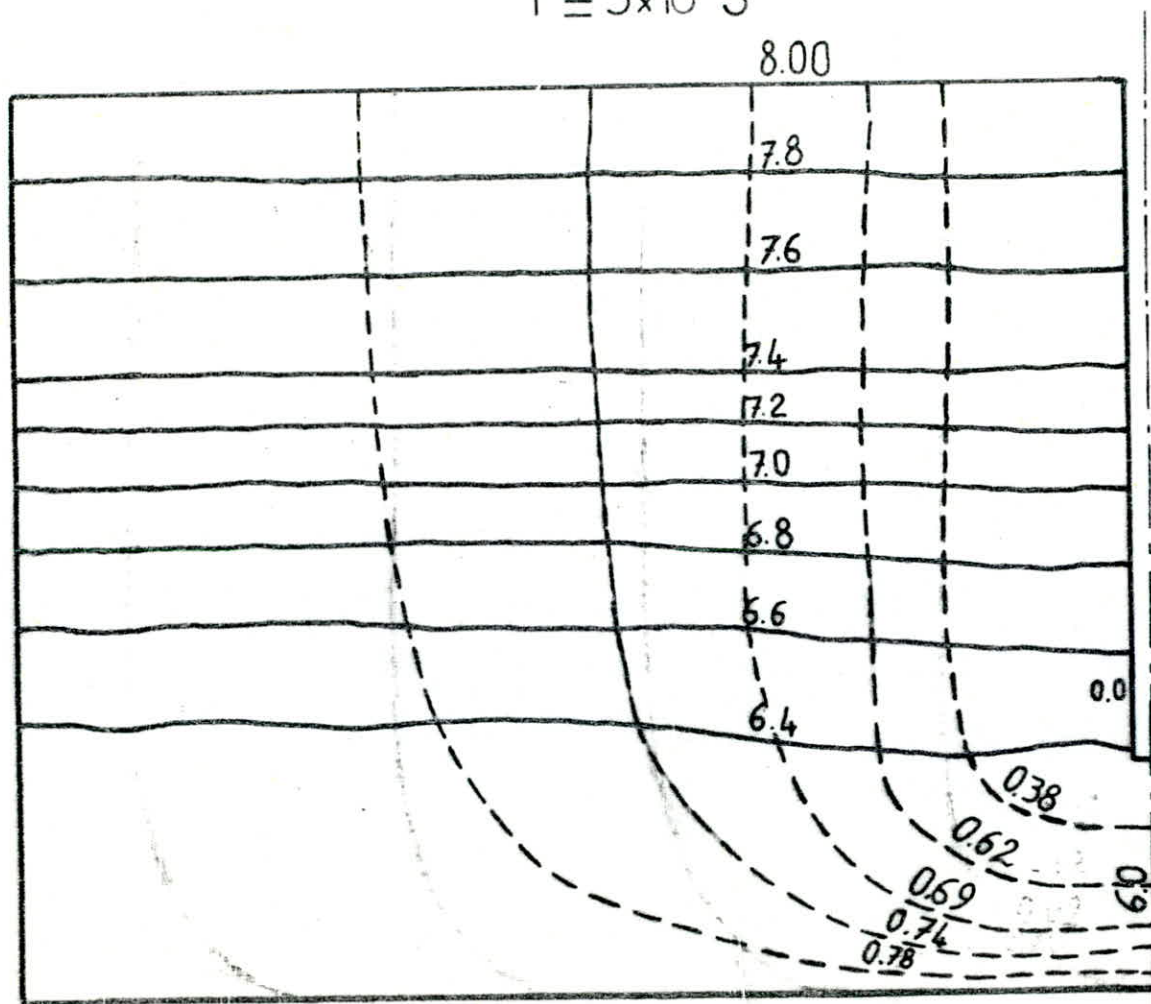
ECOULEMENT NON PERMANENT AUTOUR

D'UNE FILE DE PALPLANCHES (2<sup>eme</sup> CAS)

$$T = 3 \times 10^3 \text{ S}$$

ECHELLE

(largeur 1/200  
hauteur 1/100)



LEGENDE :

- equipotentielle
- - - ligne de courant

ÉCOULEMENT NON PERMANENT AUTOUR  
D'UNE FILE DE PALANQUES

(2<sup>ème</sup> CAS)

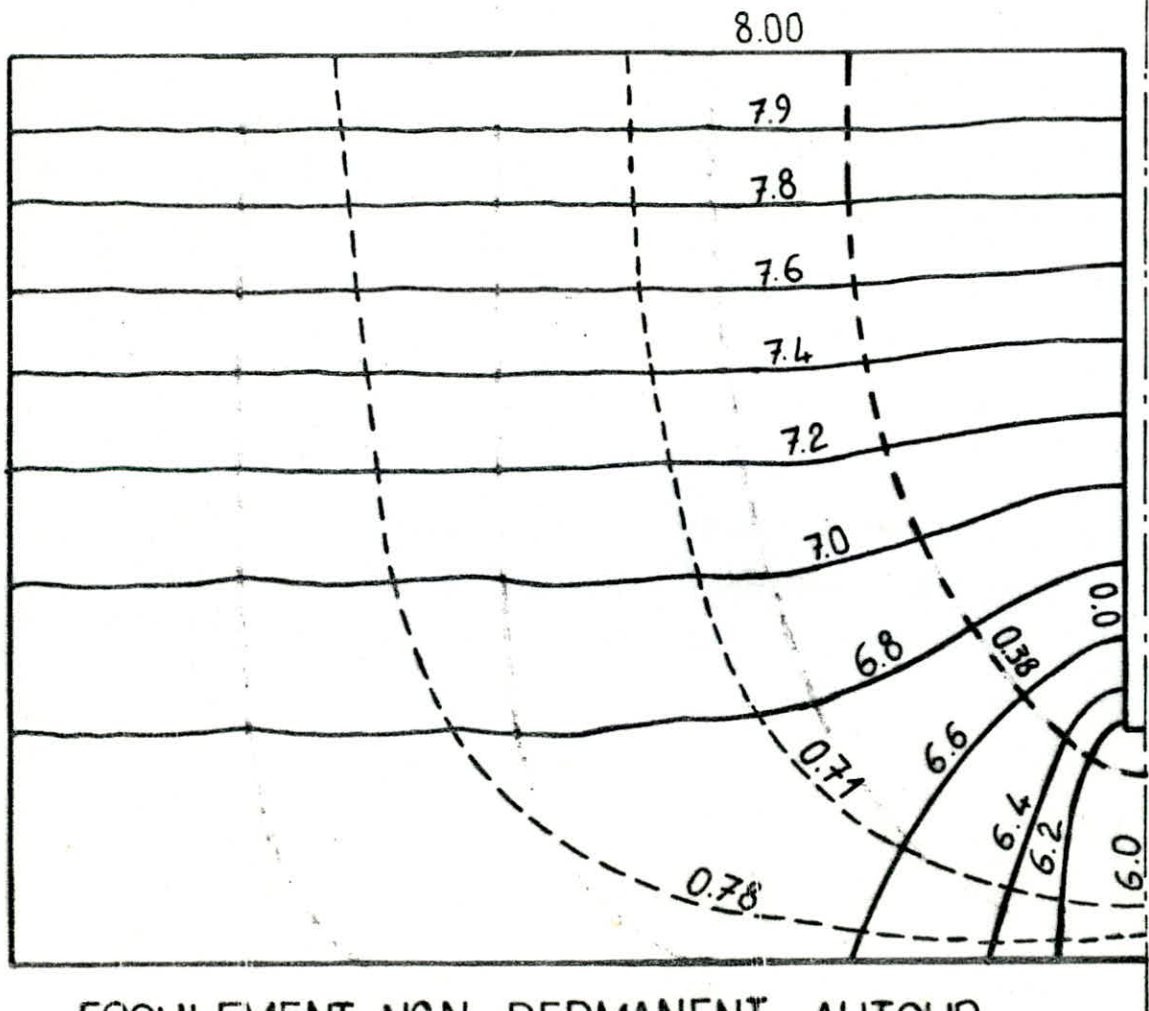
$$T = 6 \times 10^3 \text{ Sec.}$$

8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000
7.899		7.899		7.900		7.898		7.891		7.861
7.807	7.807	7.807	7.808	7.809	7.809	7.805	7.799	7.770	7.741	7.726
7.532		7.633		7.635		7.629		7.574		7.500
7.483	7.483	7.484	7.486	7.487	7.486	7.478	7.454	7.399	7.396	7.388
7.367		7.369		7.372		7.360		7.254		
7.192	7.193	7.194	7.196	7.198	7.196	7.181	7.144	7.147	6.974	6.971
6.964		6.966		6.970		6.952		6.891		6.758
6.888	6.888	6.890	6.893	6.896	6.891	6.872	6.874	6.803	6.610	6.429
6.868		6.871		6.874		6.784		6.711		6.000
6.809	6.810	6.811	6.815	6.817	6.812	6.777	6.768	6.602	6.531	6.000
6.782		6.785		6.790		6.763		6.486		6.000
6.780	6.781	6.782	6.786	6.789	6.782	6.756	6.677	6.480	6.260	6.000

RESULTATS DE CALCUL

$$T = 6 \times 10^3 \text{ S}$$

ECHELLE  
(largeur 1/200)  
(hauteur 1/100)



LEGENDE :

- equipotentielle
- - - ligne de courant

ECOULEMENT NON PERMANENT AUTOUR  
D'UNE FILE DE PALPLANCHES (2<sup>eme</sup> CAS)

$$T = 10^4 \text{ Sec.}$$

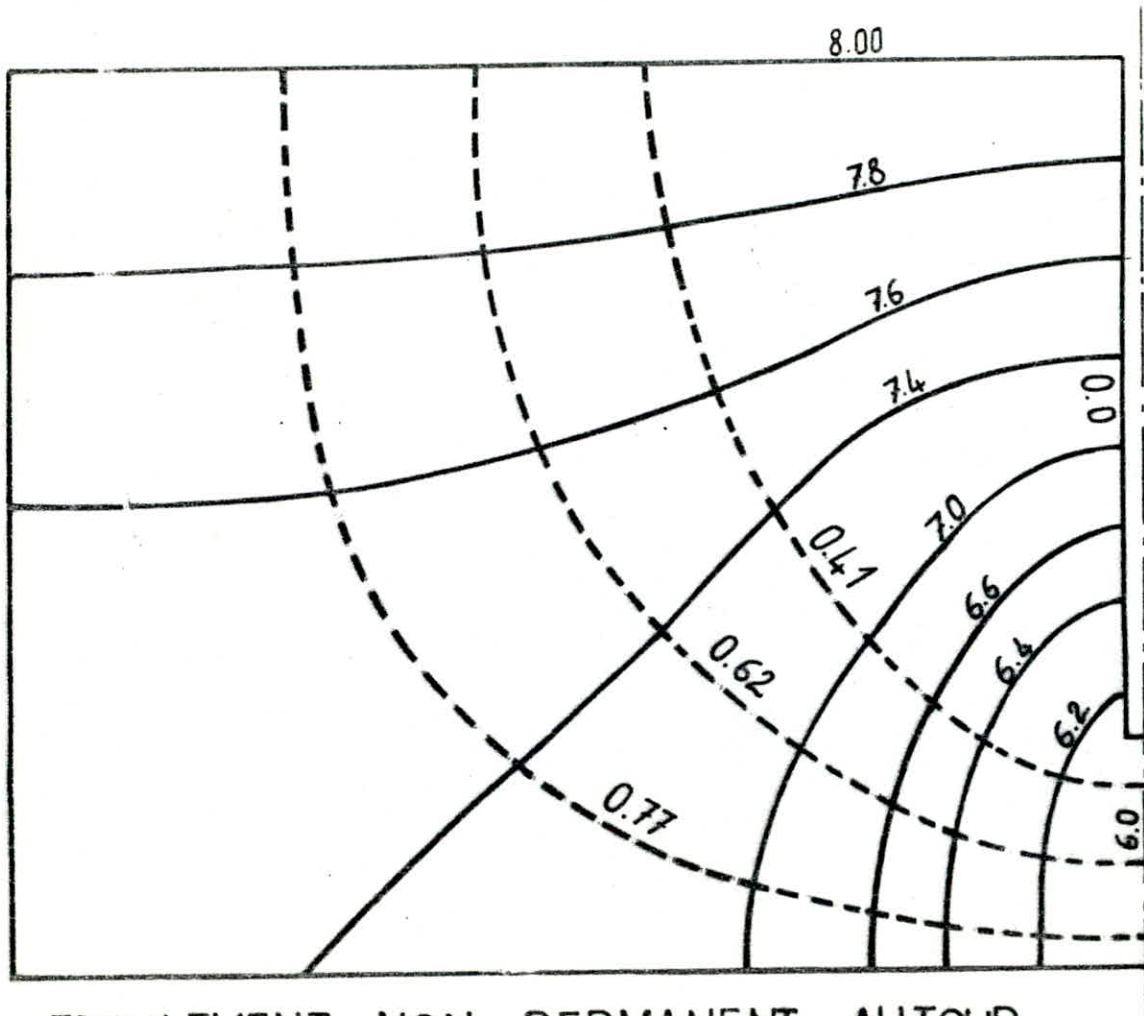
8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000
7.998		7.997		7.992		7.986		7.908		7.847
7.997	7.995	7.993	7.991	7.990	7.986	7.978	7.868	7.825	7.754	7.669
7.901		7.997		7.896		7.877		7.725		6.928
7.899	7.892	7.890	7.887	7.888	7.862	7.856	7.743	7.591	6.660	6.695
7.897		7.889		7.879		7.796		7.033		6.000
7.895	7.890	7.888	7.881	7.871	7.757	7.743	7.406	6.735	6.533	6.000
7.882		7.878		7.796		7.728		6.718		6.000
7.878	7.868	7.857	7.799	7.759	7.692	7.633	7.417	6.709	6.276	6.000
7.800		7.797		7.748		7.580		6.689		6.000
7.788	7.777	7.768	7.759	7.708	7.676	7.455	7.023	6.664	6.010	6.000

RESULTATS DE CALCUL

$$T = 1.2 \times 10^4 \text{ s}$$

ECHELLE

(largeur 1/200  
hauteur 1/100)



LEGENDE :

- equipotentielle
- - - ligne de courant

ÉCOULEMENT NON PERMANENT AUTOUR  
D'UNE FILE DE PALPLANCHES (2<sup>ème</sup> CAS)



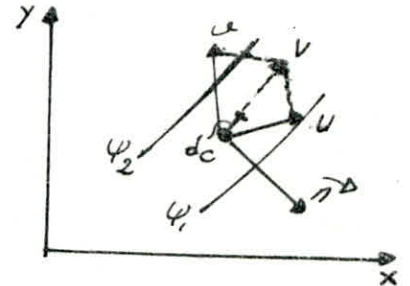
# 1.4 CALCUL DU DÉBIT DE FUITE par une méthode analytique

En considérant un tube de courant limité par les lignes de courant  $\psi_1$  et  $\psi_2$  correspondant à deux valeurs constantes de fonction  $\psi$ , nous pouvons calculer le débit de ce tube de courant comme suite :

ona  $\vec{v} = -K \text{grad } \Phi$  ce qui donne :

$$u = -K \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$v = -K \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$



Par définition

$$q = \int_C \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dc \quad , \quad dc = (dx, dy)$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos \alpha = 0$$

alors ona  $\vec{dc} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{dc} \cdot \vec{n} = 0 = a dx + b dy$

$$\Rightarrow a = -\frac{dy}{dc} \quad ; \quad b = \frac{dx}{dc}$$

d'où

$$q = \int_C \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dc = \int_C -K \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \left( -\frac{dy}{dc} \right) dc + \left( -K \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right) \left( \frac{dx}{dc} \right) dc$$

à partir des conditions de Cauchy-Riemann on peut écrire

$$q = \int_C K \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + K \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = \int_C K d\psi = \int_{\psi_1}^{\psi_2} K d\psi$$

$$q = K [\psi_2 - \psi_1]$$

Dans le mouvement à potentiel de vitesse la fonction  $\Phi$  passe de  $\Phi_1 = \pi/8$  à l'origine amont du massif à  $\Phi_2 = -\pi/8$  à l'extrémité aval  $\Delta \Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = \pi$

Dans le sol  $\Delta \Phi = K \Delta h = K (H_1 - H_2)$

Dans chacun des mouvements, la vitesse entre deux points est

Proportionnelle à la différence de potentiel, soit :

$$\frac{\rho}{k(h_1 - h_2)} = \frac{\bar{v}}{\pi} \Rightarrow \rho = \frac{k(h_1 - h_2) \bar{v}}{\pi}$$

$$\text{donc } u = \frac{k(h_1 - h_2)}{\pi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v = \frac{k(h_1 - h_2)}{\pi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

l'expression du débit est donc

$$q = \frac{k(h_1 - h_2)}{\pi} \cdot (\psi_2 - \psi_1)$$

$\psi_1 = 0$  contour de l'écran

$\psi_2$  correspond à  $x = a$  et  $y = 0$

$$\psi_2 = \ln \left( \frac{a}{L} + \sqrt{\left(\frac{a}{L}\right)^2 - 1} \right)$$

d'où

$$q = \frac{k(h_1 - h_2)}{\pi} \ln \left( \frac{a}{L} + \sqrt{\left(\frac{a}{L}\right)^2 - 1} \right)$$

## APPLICATION

1<sup>er</sup> Cas :  $L = 5 \text{ m} ; a = 10 \text{ m} ; h_1 = 8,00 \text{ m} ; h_2 = 4,00 \text{ m}$

$$k = 10^{-2} \text{ m/A}$$

$$q = \frac{10^{-2} (8 - 4)}{\pi} \cdot \ln \left( \frac{10}{5} + \sqrt{\left(\frac{10}{5}\right)^2 - 1} \right) = 1,68 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2/\text{A}$$

2<sup>er</sup> Cas :  $L = 9 \text{ m} ; a = 12 \text{ m} ; h_1 = 8,00 \text{ m} ; h_2 = 4,00 \text{ m}$

$$k = 10^{-2} \text{ m/A}$$

$$q = \frac{10^{-2} (8 - 4)}{\pi} \cdot \ln \left( \frac{12}{9} + \sqrt{\left(\frac{12}{9}\right)^2 - 1} \right) = 0,95 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2/\text{A}$$

## 1.5 CALCUL DU DÉBIT DE FUITE PAR LA METHODE DE PRASIL

Lorsque le réseau définitif est tracé, on passe au calcul du débit d'infiltration  $Q$ . Soient :

$a$  : le côté d'un des carrés,

$m$  : le nombre de carrés compris entre deux lignes de courant

$n$  : le nombre de carrés compris entre deux lignes équipotentielles.

Pour une tranche de la ligne de largeur unité la section totale d'écoulement  $\bar{S}$  pour expression :

$$\bar{S} = n \cdot a$$

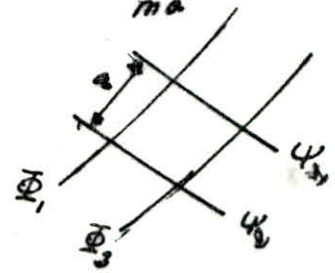
la perte de charge unitaire  $J \bar{a}$  pour valeur :

$$J = \frac{H}{m \cdot a}$$

le débit  $\bar{a}$  donc pour expression :

$$Q = K \cdot \bar{S} \cdot J = K \cdot n \cdot a \cdot \frac{\Delta H}{m \cdot a}$$

$$Q = K \Delta H \frac{n}{m}$$



### APPLICATION

1<sup>er</sup> Cas : pour  $L = 5 \text{ m}$  ; profondeur =  $10 \text{ m}$

$$n = 6 \quad ; \quad m = 22$$

$$K = 10^{-2} \text{ m/p} \quad ; \quad \Delta H = h_1 - h_2 = 8 - 4 = 4,00 \text{ m}$$

$$q = 10^{-2} \cdot 4 \cdot \frac{6}{22} = 1,09 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2/\text{p}$$

2<sup>es</sup> Cas : pour  $L = 9 \text{ m}$  ; profondeur =  $12 \text{ m}$

$$n = 4 \quad ; \quad m = 20 \quad ; \quad K = 10^{-2} \text{ m/p} \quad ; \quad \Delta H = 4 \text{ m}$$

$$q = 10^{-2} \cdot 4 \cdot \frac{4}{20} = 0,8 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2/\text{p}$$

## CONCLUSION

La méthode des éléments finis nous a permis de tracer le réseau d'écoulement, à partir duquel nous avons calculé le débit par une méthode graphique (profil), puis la comparer au débit calculé analytiquement.

L'erreur est de l'ordre de (35% pour le premier cas et 15% pour le deuxième cas).

Cette erreur est due au calcul numérique car de la méthode numérique, et au calcul analytique parce que nous avons pris un domaine limité par des parois verticales où nous avons appliqué la condition de Neumann ( $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ ).

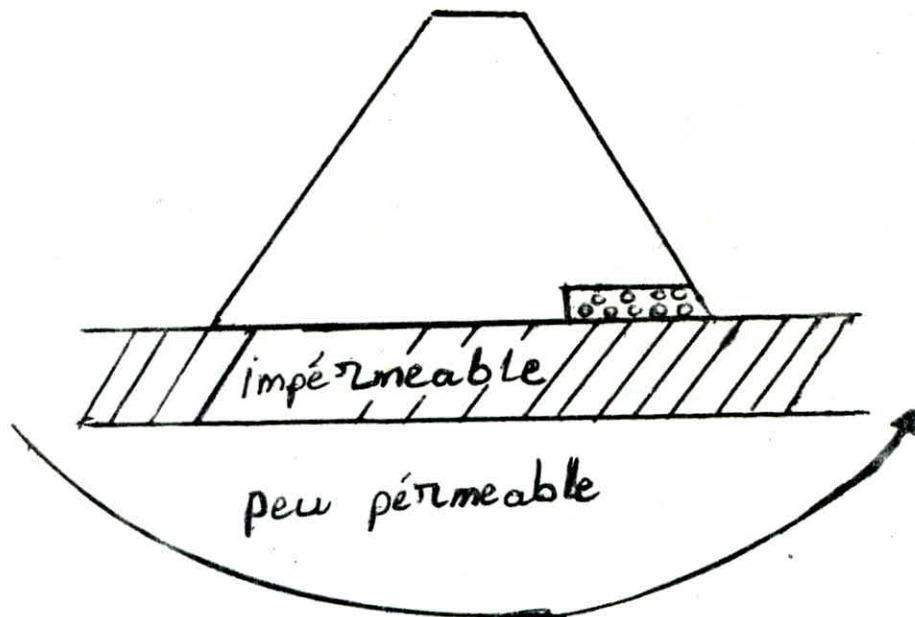
Le calcul du débit numériquement se fait en ajoutant un sous-programme au programme général.

## 2 INFILTRATIONS DANS LES FONDATIONS

En ce qui concerne les infiltrations dans les fondations, plusieurs cas peuvent se présenter :

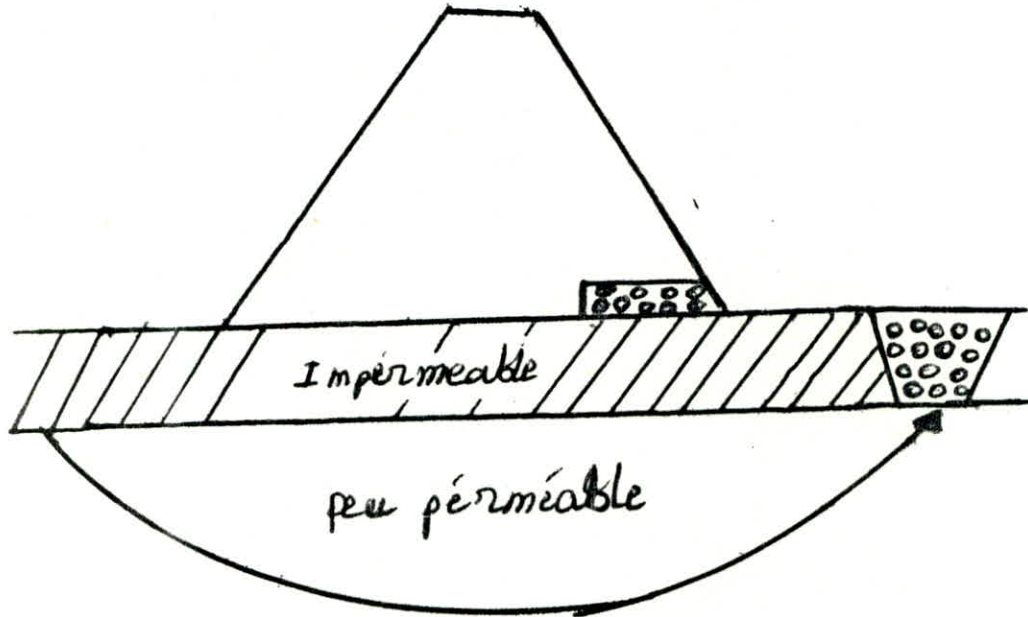
- 1° le terrain d'assise est constitué d'une couche imperméable reposant sur une couche perméable.
- 2° l'assise est constituée d'une couche d'alluvions peu perméable reposant sur une couche imperméable.
- 3° les terrains de fondation sont constitués d'alluvions reposant sur des couches alternées plus ou moins perméables ou sur des roches fissurées.
- 4° la digue repose sur une fondation rocheuse saine et non fissurée.

Cas 1 - Dans le premier cas, la couche imperméable risque d'être soulevée par l'eau sous pression qui serait infiltrée dans la couche perméable sous-jacente.



### Solution :

On pourra drainer la couche impénétrable en aval en creusant des puits de décompression.



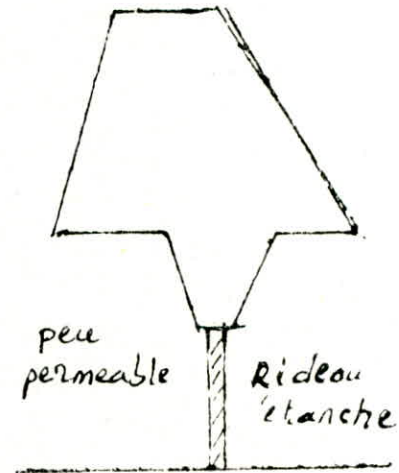
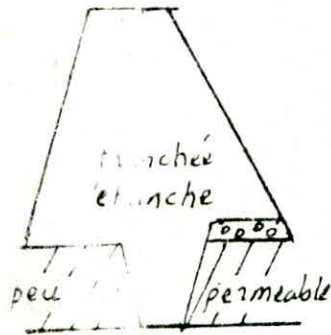
### DRAINAGE des FONDATION impénétrable

#### Cas 2 -

Lorsque la digue repose sur une assise d'alluvions peu perméable, on déduira les courants d'infiltration dans cette couche par un écran impénétrable. Si la couche n'est pas profonde, cet écran pourra descendre jusqu'à l'impénétrable, sinon on lui donnera une profondeur suffisante pour réduire les débits d'infiltration et l'effet érosif des courants grâce à un allongement du parcours d'infiltration, c'est-à-dire à une augmentation des pertes de charge.

# SOLUTION

L'écran le plus simple consiste à creuser dans l'axe de la digue une tranchée de la largeur des machines de terrassement et d'une profondeur suffisante pour assurer l'étanchéité. Cette tranchée sera remblayée avec les matériaux argileux utilisés pour la digue.

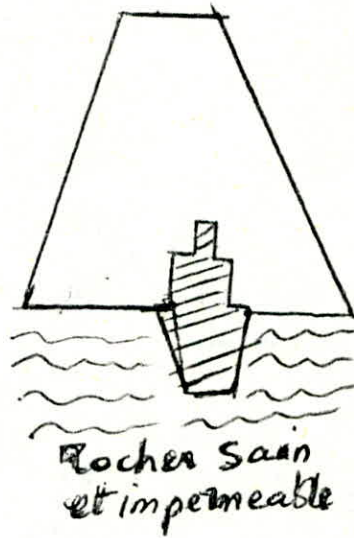


## Cas 3.

De même, lorsque les terrains d'assise présentent des veines ou filons perméables (couches de sable ou de graviers, roches fissurées), on pourra avoir recours à des injections d'argile thixotropique, de produits chimiques, de ciment, de produits bitumeux ou d'un mélange d'argile, sable et ciment suivant l'importance des fissures.

Cas 4 - Lorsque le massif de terre repose directement sur un rocher sain et non fissuré, on devra encore vérifier que la longueur de cheminement préférentiel des eaux au contact terre-rocher est suffisante pour éviter le phénomène de Renard.

On pourra éventuellement allonger ce parcours en construisant un mur parafouille.



- Dans notre exemple, on a le deuxième cas, c'est-à-dire, la digue repose sur une assise peu perméable.

La couche imperméable se trouve à 10m de profondeur.  
nous avons suivi les mêmes étapes pour tracer le réseau d'écoulement.



## 2.1 CALCUL DU DEBIT DE FUITE

Pour le calcul du débit de fuite dans la fondation, nous avons utilisé la méthode de PRASIL.

le débit de fuite est donné par la formule suivante:

$$Q = KH \frac{n}{m}$$

avec  $n$ : le nombre de carrés compris entre deux lignes équipotentielles

$m$ : le nombre de carrés compris entre de courant

### APPLICATION

$$k = 10^{-3} \text{ m/d} ;$$

$$n = 4$$

$$m = 30$$

$$H = 18,00 \text{ m}$$

$$Q = 10^{-3} \cdot 18 \cdot \frac{4}{30} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{d}$$

Pour éviter ce débit de fuite, on propose la solution suivante.

## 2.2. SOLUTION

Toutefois, il est difficile pour des raisons économiques de descendre la tranchée d'argiles à des profondeurs égales ou supérieures à 10 m, il sera souvent plus économique de constituer un rideau de palplanches ou d'injection ou des rideaux en béton.

**VIII** ECOULEMENT A SURFACE  
LIBRE

# 1 DEFINITION - HYPOTHESES

- D'une manière générale, on appelle surface libre toute limite géométrique du domaine d'écoulement non fixe rigidement, c'est-à-dire, dont la forme dépend du champ  $\phi(x, y, z, t)$  à l'intérieur du domaine.

- En pratique, en ce qui concerne les écoulements monophasiques d'eau, on considère qu'une telle surface ne peut exister qu'à la séparation entre domaine saturé et le domaine non saturé du milieu aquifère. On admettra pour en donner une définition mathématique précise que c'est : le lieu géométrique des points où la pression (de l'eau) est nulle (par rapport à la pression atmosphérique, c'est l'hypothèse de base de la théorie des écoulements monophasiques à surface libre.

- De plus, pour développer cette théorie, on admettra (hypothèses de **FORCHHEIMER** et **BOUSSINESQ**) :

- que la hauteur capillaire est négligeable
- que la saturation ou la désaturation du terrain est instantanée et intéresse uniquement la porosité efficace.

Selon ces hypothèses, la surface libre sépare donc nettement 2 domaines

1. Le domaine saturé où s'appliquent les équations fondamentales de l'écoulement monophasique.
2. Le domaine non saturé où n'a lieu aucun écoulement.

## 2 EQUATIONS FONDAMENTALES APPLICABLES AUX ÉCOULEMENTS A SURFACE LIBRE

Le problème des écoulements à surface libre est un problème à deux inconnues :

- Le champ de potentiel  $\Phi(x, y, z, t)$
- la forme de la surface libre  $h(x, y, t)$

Sa solution, en toute généralité, implique la résolution d'un système de deux équations, l'une caractérisant le potentiel, l'autre la surface libre.

### 2.1 EQUATION DE POTENTIEL

Elle s'applique en tout point à l'intérieur du domaine saturé et s'écrit :  $S \frac{\partial \Phi}{\partial t} = dw (K \text{ grad } \Phi)$

où,

$S$  : coefficient d'emmagasinement (est négligeable)  
alors on prend

$$\text{div} (K \text{ grad } \Phi) = 0$$

### 2.2 EQUATION DE LA SURFACE LIBRE

Elle s'obtient en combinant les deux propriétés fondamentales de la surface libre :

1. la surface libre reste à tout instant le lieu des points de pression nulle, ce qui implique

$$P(x, y, z, t) = 0 \quad \frac{dP}{dt} = 0$$

Soit

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t} = 0$$

2. L'équation de continuité s'applique à la surface libre, on a donc, sur chaque élément  $ds$  de surface libre :

$$(\vec{v} - \vec{q}) \cdot \vec{n} \cdot ds \, dt = \vec{u} \cdot \vec{n} \, dt \, \omega_{eff}$$

Soit :

$\Sigma$  flux à travers la surface libre = volume envahi par l'avancée de la surface libre

on en déduit :

$$(\vec{v} - \vec{q}) = \vec{u} \cdot \omega_{eff}$$

$\vec{v}$  = vitesse d'infiltration

$\vec{q}$  = flux échangé à travers la surface libre

en combinant les 2 équations précédentes, on obtient :

$$\frac{dP}{dt} = \left[ \frac{\vec{v} - \vec{q}}{\omega_{eff}} \right] q \vec{\text{grad}} P + \frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

avec  $P = \rho g(\Phi - Z)$  et  $\vec{v} = -K q \vec{\text{grad}} \Phi$

on trouve

$$\omega_{eff} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[ K q \vec{\text{grad}} \Phi + \vec{q} \right] \left[ q \vec{\text{grad}} \Phi - K \right]$$

$$\left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]^2 + \frac{q}{K} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{q}{K} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\omega_{eff}}{K} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

où

$$\left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{K+q}{2K} \right]^2 = \left[ \frac{K-q}{2K} \right]^2 + \frac{\omega_{eff}}{K} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

C'est l'équation fondamentale définissant la surface libre.

Dans cette équation  $\phi$  désigne le potentiel en  $(x, y, h)$ , c'est-à-dire sur la surface libre.

Elle admet les formes simplifiées suivantes :

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \frac{\omega_e}{K} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

régime transitoire sans échange avec l'extérieur.

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{K+q}{2K} \right)^2 = \left( \frac{K-q}{2K} \right)^2$$

régime permanent avec échange

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

régime permanent sans échange.

### 3 ETUDE DE FILTRATION A TRAVERS LES BARRAGES EN TERRE

La filtration d'eau à travers les barrage en terre et sous ces ouvrages est créée par la charge d'eau  $H$  au bief amont. En cas d'écoulement de filtration libre, celui-ci est limité au dessus par la surface de dépression (ligne phréatique).

Les statistiques montrent que supérieur à 50% des avarie de barrages sont provoquées par la déformation de filtration.

C'est pourquoi il faut toujours faire un calcul de filtration (calcul hydrotechnique), c'est-à-dire, établir la position de la ligne phréatique dans le massif du barrage.

Il existe plusieurs méthodes pour la détermination de la ligne phréatique : les méthodes expérimentales, hydromécaniques et hydrauliques

- les méthodes expérimentales se basent sur les modèles (électrique hélé-show, ----).
- Les méthodes hydrauliques : méthode de **DUPUIT**
- Les méthodes hydromécaniques se basent sur l'énoncé de l'équation de **Laplace**, c'est-à-dire, la résolution de cette dernière par une méthode mathématique, suite à la résolution de l'équation de Laplace, on peut déterminer les paramètres de l'écoulement souterrain à n'importe quel point de la zone considérée, et cette méthode donne les résultats les plus exactes.



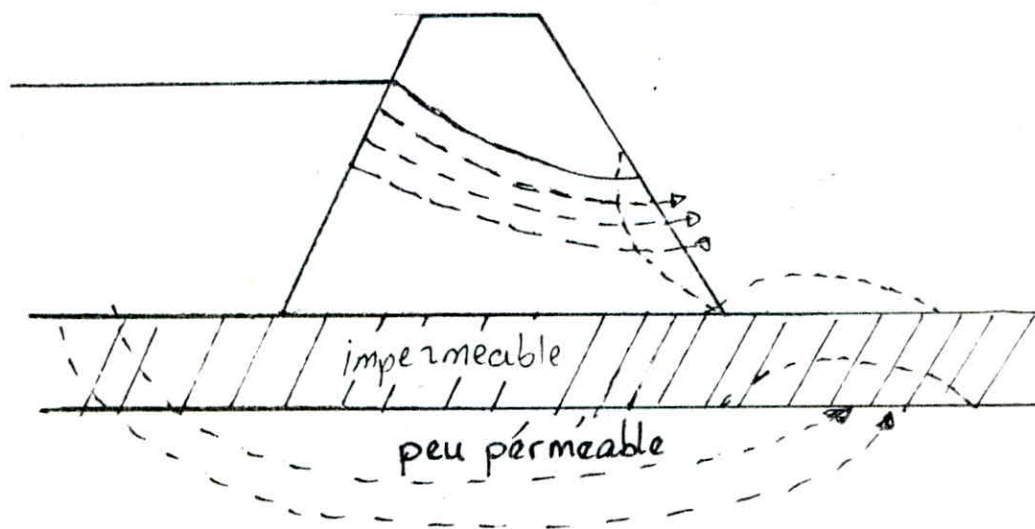
#### 4 BUT D'ETUDE D'INFILTRATION A TRAVERS LES BARRAGES EN TERRE

Suite aux avaries causées par les infiltrations à travers les barrages, l'étude de cette dernière est devenue nécessaire avant le calcul de la stabilité de l'ouvrage. Cette étude est nécessaire pour

- La détermination de ligne de saturation
- le réseau d'écoulement dans la ligne (les équipotentiels et les lignes de courant).
- la détermination de la pression hydrodynamique qui rentre dans le calcul de la stabilité de l'ouvrage.
- fixer l'emplacement et le type de drainage
- détermination de la vitesse d'infiltration nécessaire à la vérification à l'érosion
- déterminer le débit d'infiltration
- déterminer la ligne de saturation lors d'une vidange.

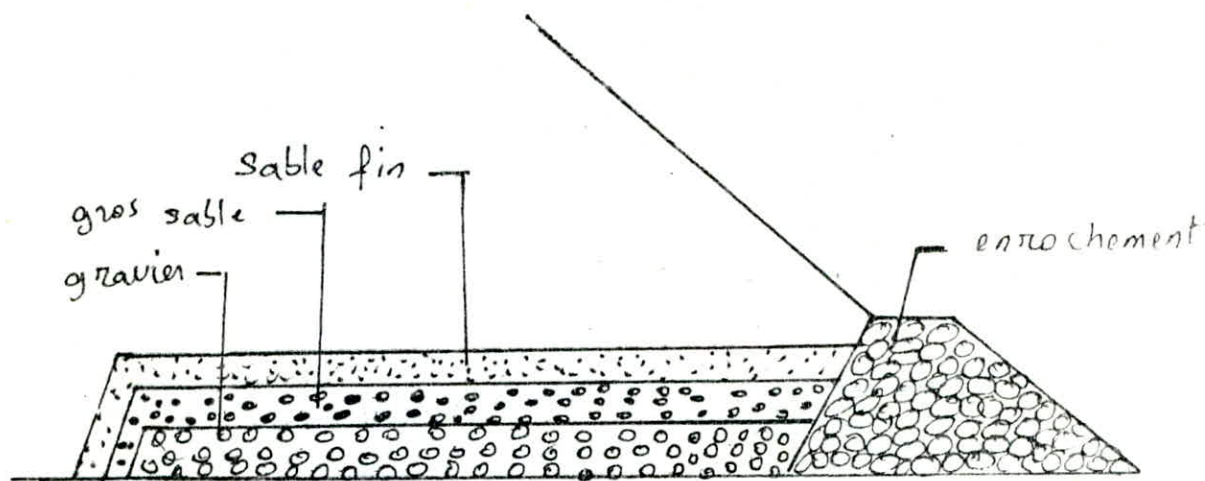
## 5 PROTECTION CONTRE LES INFILTRATIONS DANS LA DIGUE

Du fait qu'on a créé une charge hydraulique derrière la digue, l'eau aura tendance à s'infiltrer dans le massif même du barrage et dans les terrains d'assise. Le choix des matériaux de construction et de l'emplacement de la digue aura été fait de telle sorte que les débits d'infiltration soient négligeables. Toutefois, ceux-ci ne sont jamais nuls et il importe de s'assurer que les résurgences, à l'aval, des eaux infiltrées ne nuisent pas à la stabilité de l'ouvrage. Pour ce, il faut éviter, d'une part que ces eaux ne causent des destructions locales en entraînant des particules de terre du talus aval, d'autre part que les sous-pressions en aval ne tendent à soulever le pied de la digue (fig\*).



Action des eaux d'infiltration

En ce qui concerne les infiltrations à travers la digue, on aura soin de placer au pied aval du massif un tapis filtrant et un drain de pied qui auront pour effet de rebattre la ligne de saturation à l'intérieur de la digue en interceptant les eaux d'infiltration.



### Tapis filtrant

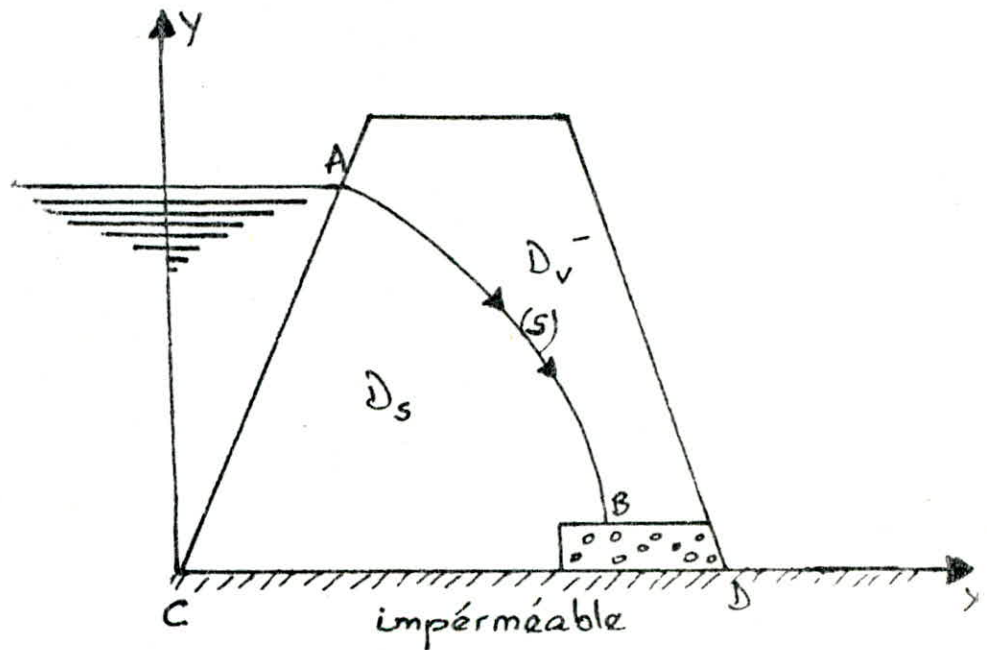
En pratique, le tapis filtrant pourra occuper environ  $\frac{1}{3}$  ou même  $\frac{1}{4}$  de la largeur du barrage de façon à maintenir la ligne de saturation à au moins  $2\text{ m}$  du parement aval environ. La granulométrie de ce filtre devra être étudiée de façon à empêcher l'entraînement des fines particules hors de l'ouvrage. La couche supérieure, au contact du massif, sera constituée de grains les plus fins, on pourra prendre comme épaisseur de chaque couche 50 fois le diamètre de 15% des éléments les plus fins. Toutefois, on ne descendra pas au-dessous de  $30\text{ cm}$  afin que le débit du drain reste supérieur à celui des eaux d'infiltration.

## 6 DETERMINATION DE LA SURFACE LIBRE EN REGIME STATIONNAIRE

Considérons un domaine (D) non saturé. Il apparaît alors une surface libre (S) qui sépare (D) en deux domaines :

$D_s$  : domaine d'écoulement

$D_v$  : domaine où il n'y a pas d'écoulement



Le problème est la détermination de la surface libre en utilisant la méthode des éléments finis.

Supposons que le problème soit celui de la figure précédente : AB représente la surface libre ; sur DCA, les conditions aux limites sont imposées (potentiel ou débit). Dans ce cas, AB sera une ligne de courant (on néglige l'effet capillaire) sur laquelle :

$$\phi_s = \gamma_s \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi_s}{\partial n} = 0 \quad (\text{double conditions à satisfaire})$$

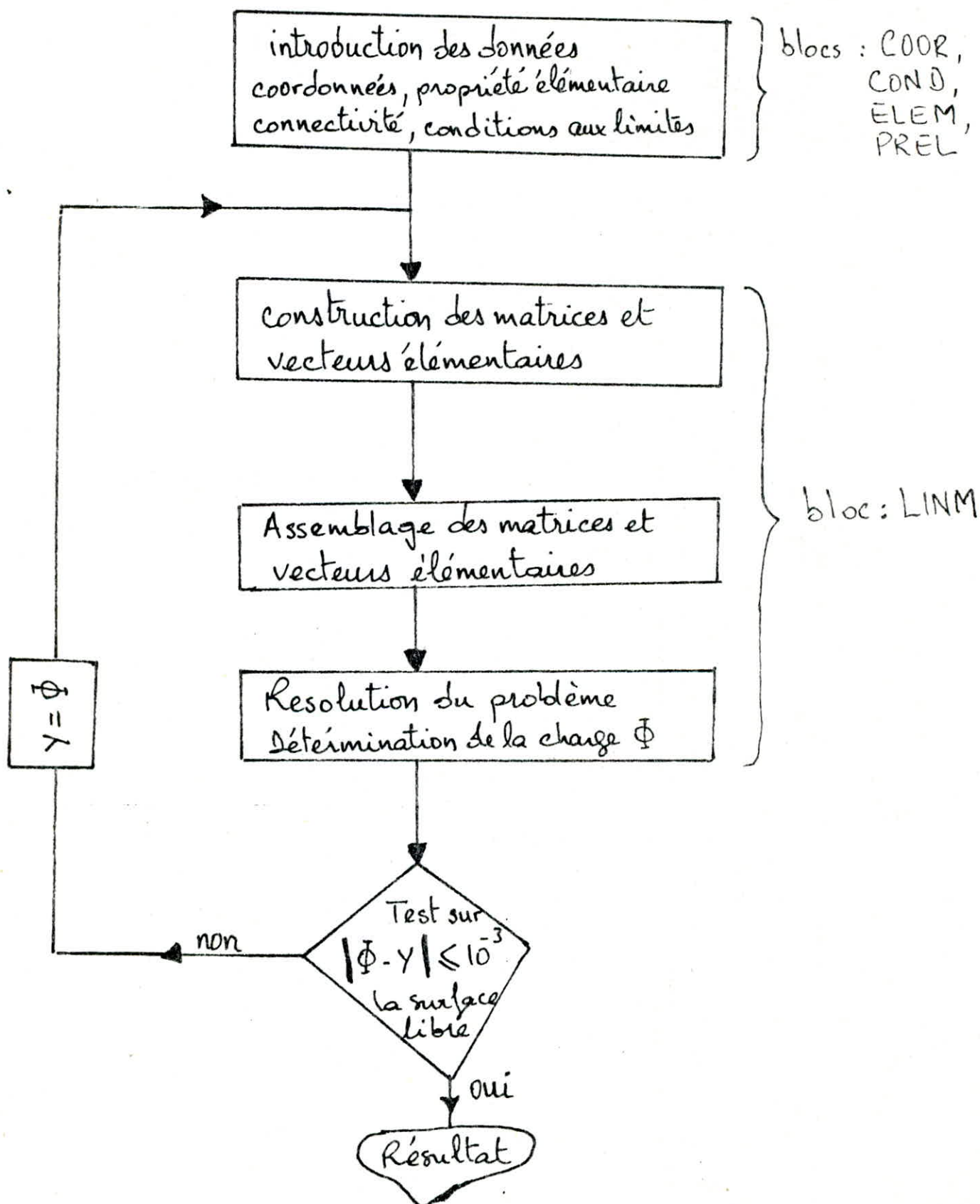
Ce problème a une solution unique (la position du point B doit être considéré comme l'une des inconnues du problème).

On obtient la surface libre par une méthode itterative.

Cette méthode et la méthode des éléments finis, en imposant une condition aux limites  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ , et en vérifiant par la deuxième condition  $\phi = \gamma$ , c'est-à-dire, en calculant  $\phi$  et en la comparant avec les coordonnées des points qui se trouvent sur la surface libre  $|\phi - \gamma|$  soit inférieure ou égale à  $(\epsilon)$  ( $\epsilon = 10^{-3}$ ).

Si cette condition est satisfaite alors on arrête les calculs et on prend les valeurs de la dernière itteration, sinon, alors, les coordonnées  $y$  prennent les valeurs de la charge  $\phi$  des points correspondant (sur la surface libre) et ainsi de suite jusqu'ou le test est vérifié  $|\phi - \gamma| \leq 10^{-3}$ .

# L'organigramme de la solution du problème :



## 6.1 APPLICATION

Nous avons pris l'exemple d'un barrage homogène de données géométriques :

- Hauteur du barrage  $H = 21 \text{ m}$
- largeur en crête  $L' = 7 \text{ m}$
- largeur à la base  $L = 122,5 \text{ m}$
- Pentes des talus amont  $1 : 3$   
aval  $1 : 2,5$

la propriété du matériau constituant la digue :

$$K = 10^{-6} \text{ m/s}$$

Désérialisation du barrage en éléments finis

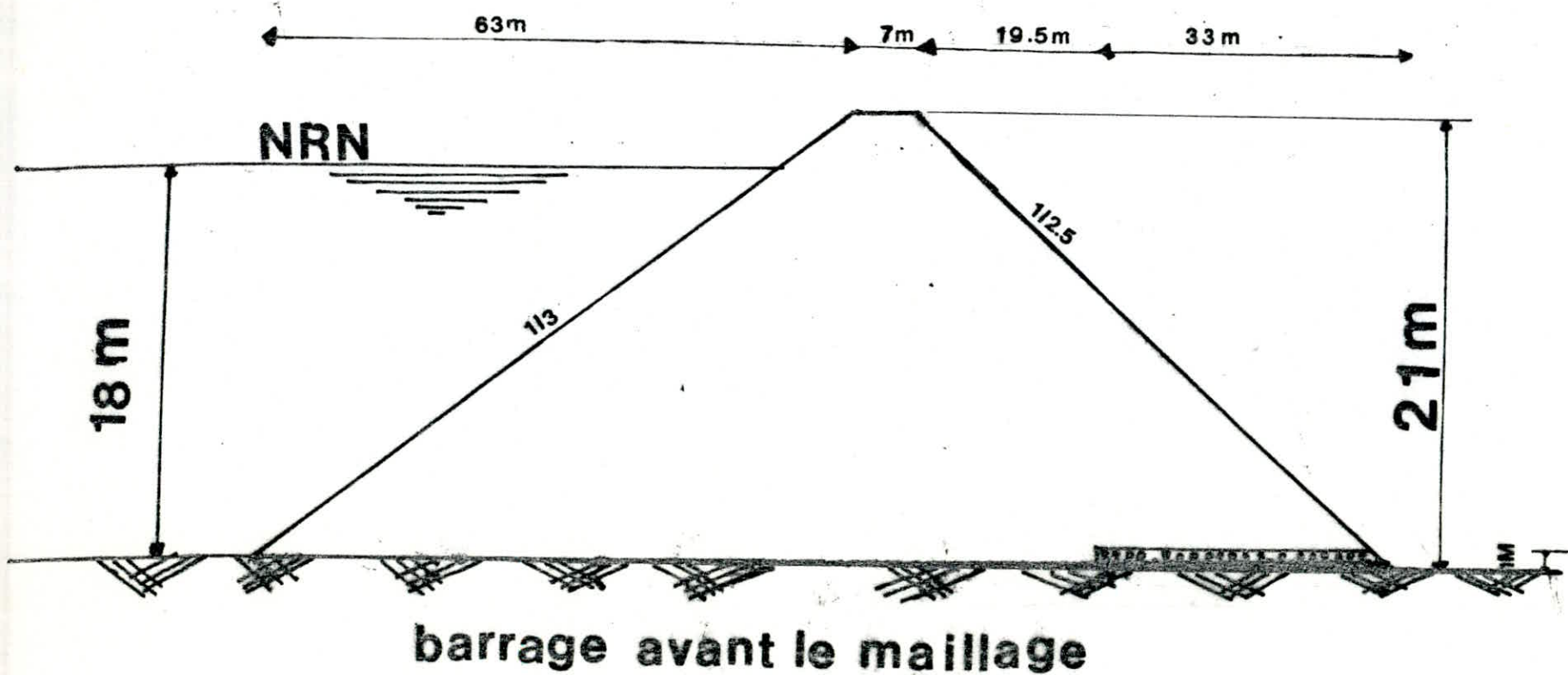
Comme on a indiqué au paravant, on a utilisé des éléments quadratiques à 8 noeuds.

Le nombre d'éléments : 12

Le nombre de noeuds : 55

ECHELLE

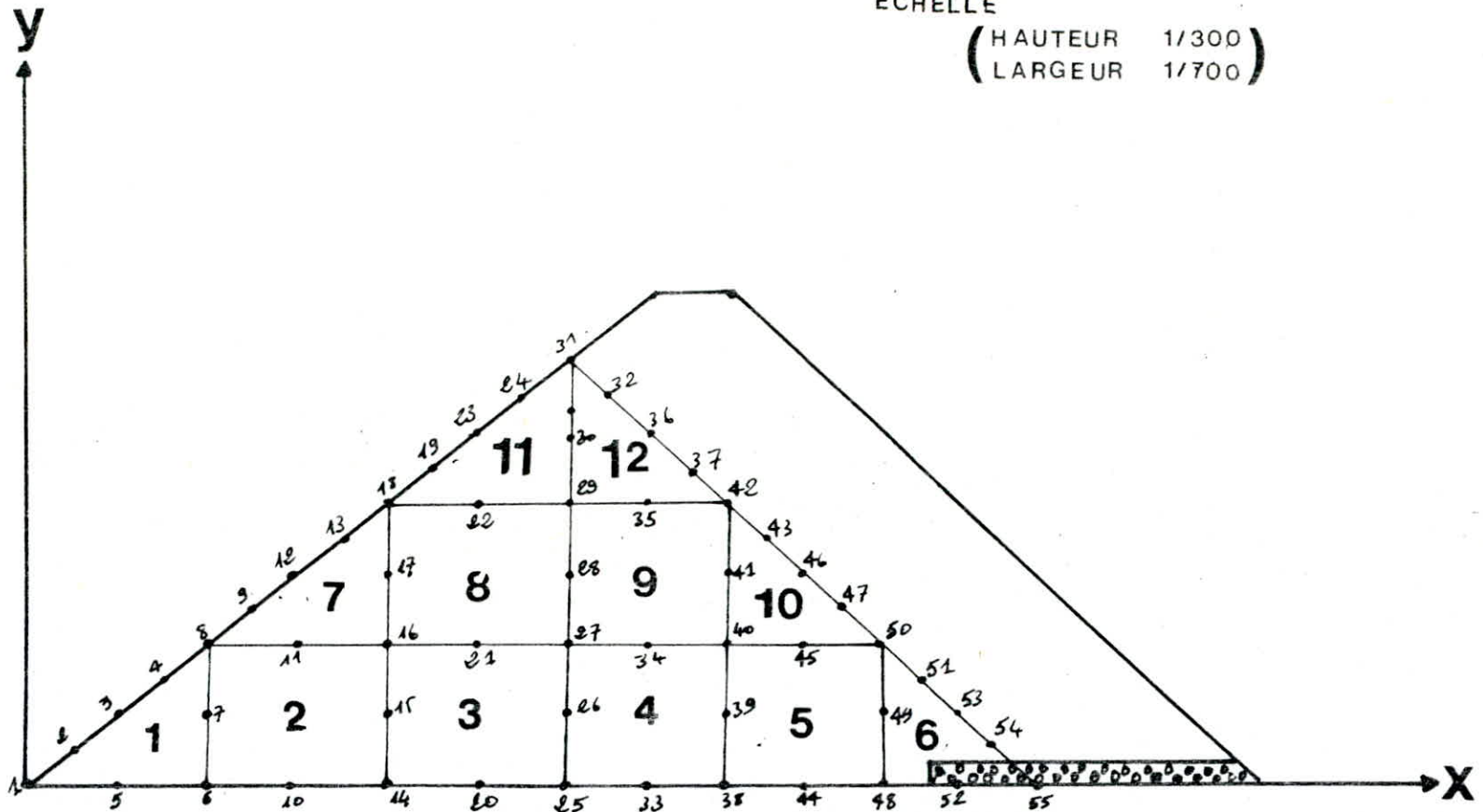
(hauteur 1/300  
largeur 1/700)





ECHELLE

( HAUTEUR 1/300 )  
( LARGEUR 1/700 )



maillage d'un barrage homogène  
avec drain horizontal

REGIME PERMANENT

\*\*\*\*\*

DE JOUR	X	Y	Z	CHARGE (H=(P/W)+1)
1	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.18000E+02
2	0.49000E+01	0.15000E+01	0.00000E+00	0.18000E+02
3	0.91000E+01	0.30000E+01	0.00000E+00	0.18000E+02
4	0.13300E+02	0.45000E+01	0.00000E+00	0.17900E+02
5	0.31000E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.17900E+02
6	0.28200E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.17900E+02
7	0.18200E+02	0.30000E+01	0.00000E+00	0.18000E+02
8	0.18200E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.18000E+02
9	0.22400E+02	0.75000E+01	0.00000E+00	0.17940E+02
10	0.26850E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.17887E+02
11	0.26850E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.18000E+02
12	0.26850E+02	0.90000E+01	0.00000E+00	0.18000E+02
13	0.31500E+02	0.16500E+02	0.00000E+00	0.17788E+02
14	0.35700E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.17789E+02
15	0.35700E+02	0.30000E+01	0.00000E+00	0.17888E+02
16	0.35700E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.17901E+02
17	0.35700E+02	0.90000E+01	0.00000E+00	0.18000E+02
18	0.35700E+02	0.12000E+02	0.00000E+00	0.18000E+02
19	0.40250E+02	0.13500E+02	0.00000E+00	0.17301E+02
20	0.44000E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.17400E+02
21	0.44000E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.17444E+02
22	0.44000E+02	0.12000E+02	0.00000E+00	0.17744E+02
23	0.44800E+02	0.15000E+02	0.00000E+00	0.18000E+02
24	0.49000E+02	0.16500E+02	0.00000E+00	0.18000E+02
25	0.53900E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.18068E+02
26	0.53900E+02	0.30000E+01	0.00000E+00	0.18078E+02
27	0.53900E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.18085E+02
28	0.53900E+02	0.90000E+01	0.00000E+00	0.18087E+02
29	0.53900E+02	0.12000E+02	0.00000E+00	0.18088E+02
30	0.53900E+02	0.15000E+02	0.00000E+00	0.17828E+02
31	0.53900E+02	0.18000E+02	0.00000E+00	0.18000E+02
32	0.50100E+02	0.16510E+02	0.00000E+00	0.18510E+02
33	0.31600E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.18229E+02
34	0.31600E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.18402E+02
35	0.31600E+02	0.12000E+02	0.00000E+00	0.18050E+02
36	0.31600E+02	0.15650E+02	0.00000E+00	0.18050E+02
37	0.35800E+02	0.14770E+02	0.00000E+00	0.14778E+02
38	0.69300E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.18568E+02
39	0.69300E+02	0.30000E+01	0.00000E+00	0.18580E+02
40	0.69300E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.18680E+02
41	0.69300E+02	0.90000E+01	0.00000E+00	0.18784E+02
42	0.69300E+02	0.13980E+02	0.00000E+00	0.18988E+02
43	0.73500E+02	0.13050E+02	0.00000E+00	0.19051E+02
44	0.77000E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.18787E+02
45	0.77000E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.18900E+02
46	0.77000E+02	0.12270E+02	0.00000E+00	0.18276E+02
47	0.80500E+02	0.11410E+02	0.00000E+00	0.18482E+02
48	0.84700E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.87000E+01
49	0.84700E+02	0.30000E+01	0.00000E+00	0.86784E+01
50	0.84700E+02	0.10320E+02	0.00000E+00	0.10312E+02
51	0.80900E+02	0.84100E+01	0.00000E+00	0.84107E+01
52	0.82400E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.85850E+01
53	0.82400E+02	0.79400E+01	0.00000E+00	0.79456E+01
54	0.85500E+02	0.63800E+01	0.00000E+00	0.66785E+01
55	0.10000E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.20000E+01

ECHELLE

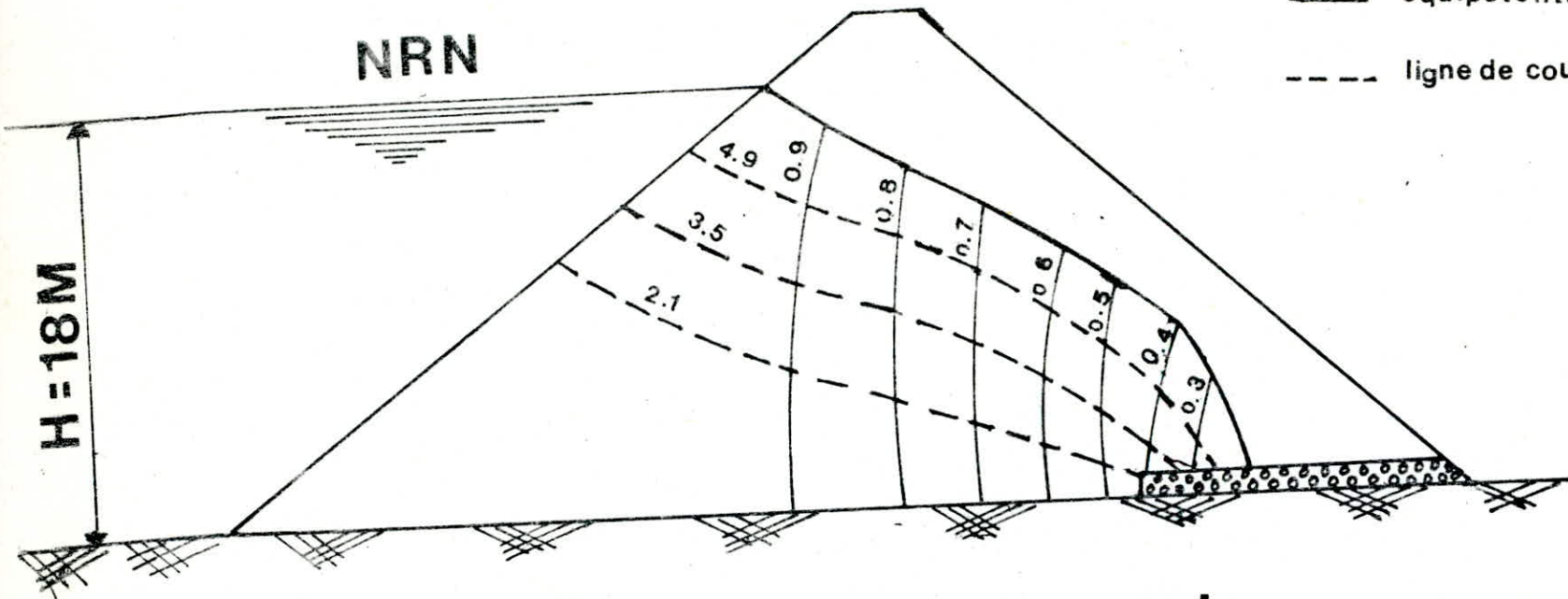
( HAUTEUR 1/300 )  
( LARGEUR 1/700 )

LEGENDE

— equipotentielle  
- - - ligne de courant

NRN

H = 18M



régime permanent

## 7 REGIME TRANSITOIRE

### VIDANGE RAPIDE

#### 7.1 Généralité

Il y a, vidange rapide, si la ligne de saturation reste à l'état initiale, ou bien, elle diminue à 10% de sa position initiale, c'est-à-dire, la ligne de saturation ne suit pas le mouvement du niveau d'eau dans la retenue.

#### 7.2 Conséquences de la vidange rapide

Lorsque la ligne de saturation reste à la position initiale, les lignes du courant se dirigent vers le talus amont, ceci provoquera un effet destabilisant qui entraîne un glissement du talus amont.

#### 7.3 Mesures à prendre (contre la vidange rapide)

Dans le cas d'une vidange rapide, certaines mesures peuvent être prises pour minimiser l'effet destabilisant du talus amont

- adapter des talus doux (faible)
- revêtir le talus amont par une couche suffisamment épaisse de matériau très perméable (gravier propre, enrochement), dans laquelle le niveau de l'eau pendant la vidange rapide s'abaisse à la même vitesse que le niveau d'eau dans la retenue.
- interposer un tapis drainant entre le talus amont et le sol de fondation, alors, ce qui donne l'horizontalité des équipotentielles dans le talus amont, et dans ces conditions, les pressions hydrodynamiques sont négligeables.

- pour assurer une bonne dissipation des pressions hydrodynamiques qui se développent dans le massif assez argileux il est recommandé de placer des drains sub-horizontaux dans le massif, ou dans la recharge amont s'il s'agit d'un barrage avec noyau.

Le nombre maximum de ces drains a été donné par ERINUS à 5, à tous  $0,2H$ , on place un drain, sont destinés à assurer la stabilité du parement amont.

## 7.4 APPLICATION

nous avons pris le barrage précédant

Les conditions aux limites sont :

Sur AB double condition

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \quad \bar{\phi} = \gamma$$

Sur BC

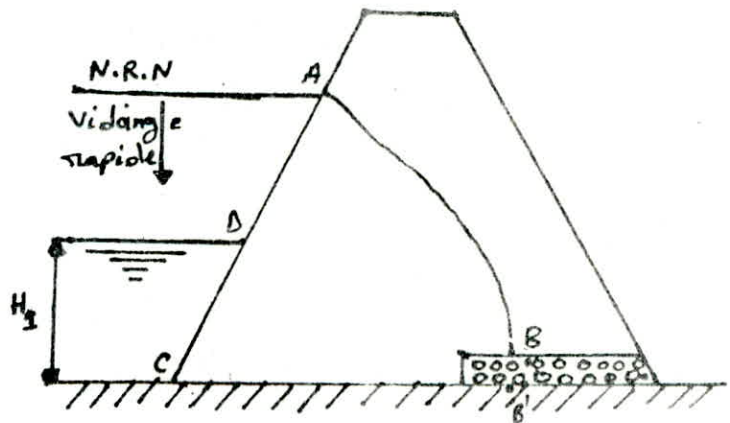
$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

Sur CD

$$\bar{\phi} = H_1$$

Sur DA

$$\bar{\phi} = \gamma$$



## 7.5 ÉTAPES A SUIVRE

Les mêmes étapes que pour l'exemple du régime permanent sauf qu'on a modifié dans ce cas les conditions aux limites c'est-à-dire, pour le régime permanent, on a sur CA  $\Phi = H$  et pour le régime transitoire, CA se divise en deux parties CD, DA sur CD on a  $\Phi = H_1$ , sur DA on a  $\Phi = y$

après les calculs des sollicitations dans les points nodaux, on trace le réseau d'écoulement. On a fait le calcul pour trois niveaux dans la retenue.

le premier à  $H_1 = 9\text{m}$ , le deuxième à  $H_1 = 6\text{m}$  et à  $H_1 = 0\text{m}$ .

les réseaux d'écoulement sont donnés par les figures suivante pour les trois cas.

INFILTRATION A TRAVERS UNE DIGUE EN TERRE

\*\*\*\*\*

REGIME NON PERMANENT(vidange de 50% de la retenue)

\*\*\*\*\*

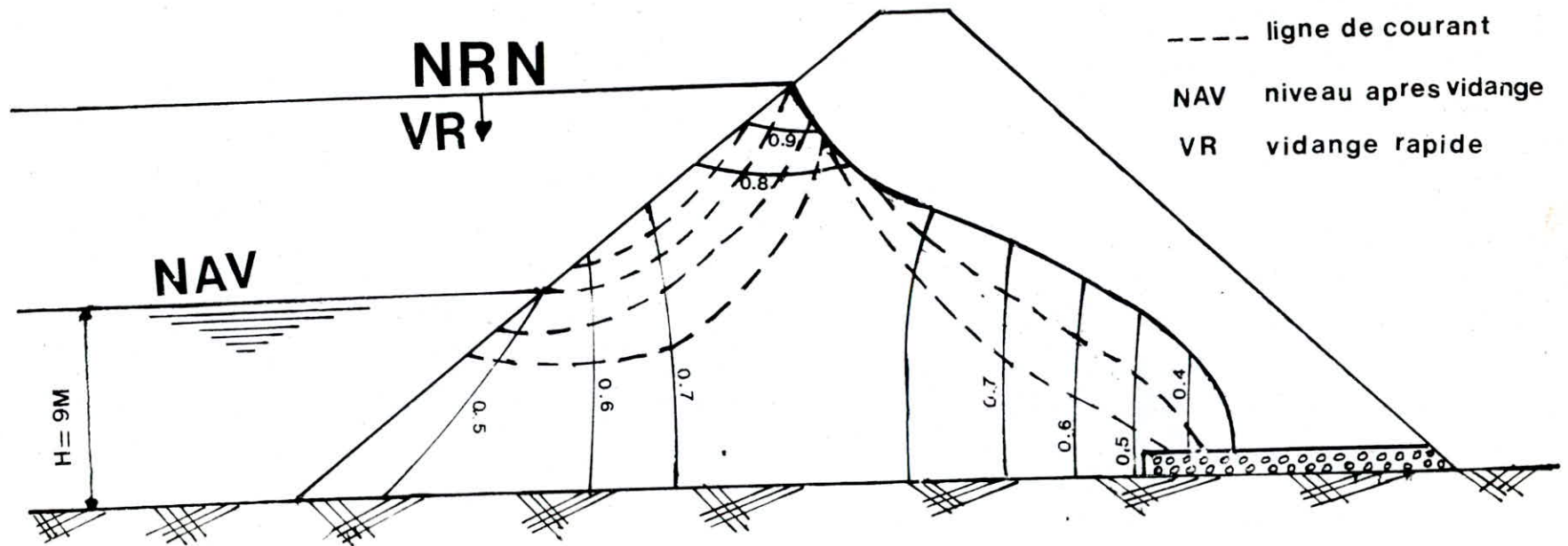
NOEUDS	LES COORDONNEES			CHARGE[H=(E <sub>1</sub> )+Y]
	X	Y	Z	
1	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.90000E+01
2	0.49000E+01	0.15000E+01	0.00000E+00	0.90000E+01
3	0.91000E+01	0.30000E+01	0.00000E+00	0.90000E+01
4	0.13300E+02	0.45000E+01	0.00000E+00	0.90000E+01
5	0.91000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.89991E+01
6	0.18200E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.91059E+01
7	0.18200E+02	0.30000E+01	0.00000E+00	0.91103E+01
8	0.18200E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.90000E+01
9	0.22400E+02	0.75000E+01	0.00000E+00	0.90000E+01
10	0.26850E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.99388E+01
11	0.26850E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.96161E+01
12	0.26850E+02	0.90000E+01	0.00000E+00	0.90000E+01
13	0.31500E+02	0.10500E+02	0.00000E+00	0.10500E+02
14	0.35700E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.11640E+02
15	0.35700E+02	0.30000E+01	0.00000E+00	0.11722E+02
16	0.35700E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.11803E+02
17	0.35700E+02	0.90000E+01	0.00000E+00	0.11734E+02
18	0.35700E+02	0.12000E+02	0.00000E+00	0.12000E+02
19	0.40250E+02	0.13500E+02	0.00000E+00	0.13500E+02
20	0.44800E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.13227E+02
21	0.44800E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.13480E+02
22	0.44800E+02	0.12000E+02	0.00000E+00	0.14347E+02
23	0.44800E+02	0.15000E+02	0.00000E+00	0.15000E+02
24	0.49000E+02	0.16500E+02	0.00000E+00	0.16500E+02
25	0.53900E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.13650E+02
26	0.53900E+02	0.30000E+01	0.00000E+00	0.13687E+02
27	0.53900E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.13947E+02
28	0.53900E+02	0.90000E+01	0.00000E+00	0.14426E+02
29	0.53900E+02	0.12000E+02	0.00000E+00	0.15000E+02
30	0.53900E+02	0.15000E+02	0.00000E+00	0.16189E+02
31	0.53900E+02	0.18000E+02	0.00000E+00	0.18000E+02
32	0.58100E+02	0.14900E+02	0.00000E+00	0.14900E+02
33	0.61600E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.13004E+02
34	0.61600E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.13179E+02
35	0.61600E+02	0.12000E+02	0.00000E+00	0.13609E+02
36	0.61600E+02	0.13640E+02	0.00000E+00	0.13644E+02
37	0.65800E+02	0.12800E+02	0.00000E+00	0.12800E+02
38	0.69300E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.11748E+02
39	0.69300E+02	0.30000E+01	0.00000E+00	0.11842E+02
40	0.69300E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.11852E+02
41	0.69300E+02	0.90000E+01	0.00000E+00	0.11957E+02
42	0.69300E+02	0.12050E+02	0.00000E+00	0.12050E+02
43	0.73500E+02	0.11240E+02	0.00000E+00	0.11240E+02
44	0.77000E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.10204E+02
45	0.77000E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.10397E+02
46	0.77000E+02	0.10560E+02	0.00000E+00	0.10560E+02
47	0.80500E+02	0.98100E+01	0.00000E+00	0.98100E+01
48	0.84700E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.84591E+01
49	0.84700E+02	0.30000E+01	0.00000E+00	0.84100E+01
50	0.84700E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.86908E+01
51	0.88900E+02	0.73100E+01	0.00000E+00	0.73100E+01
52	0.92400E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.59500E+01
53	0.92400E+02	0.67800E+01	0.00000E+00	0.67800E+01
54	0.95900E+02	0.51000E+01	0.00000E+00	0.51000E+01
55	0.10010E+03			

ECHELLE

( HAUTEUR 1/300 )  
( LARGEUR 1/700 )

LEGENDE

- equipotentielle
- - - - ligne de courant
- NAV niveau après vidange
- VR vidange rapide



**régime non Permanent**  
**vidange de 50% du**  
**niveau de la retenue**



INFILTRATION A TRAVERS UNE DIQUE EN TERRE HOMOGENE

\*\*\*\*\*

REGIME NON PERMANENT (vidange de 2/3 de la retenue)

\*\*\*\*\*

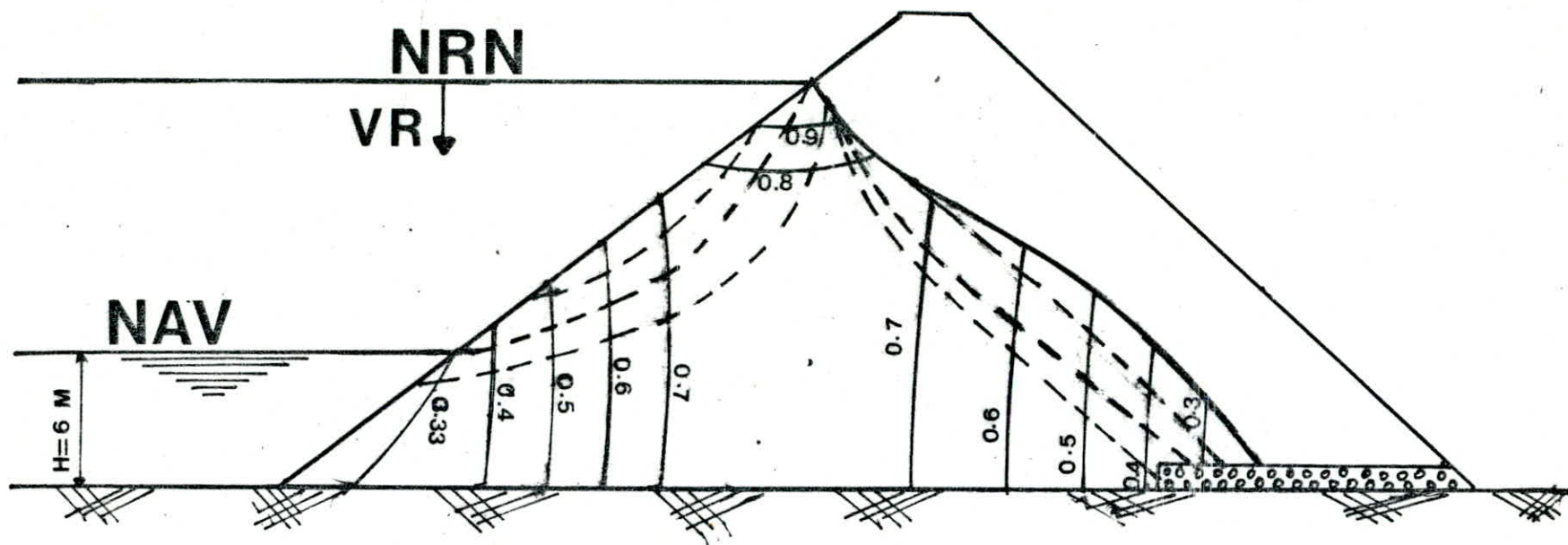
DEU(S)	LES COORDONNEES			CHARGE (P=17.0)
	X	Y	Z	
1	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.60000E+01
2	0.49000E+01	0.15000E+01	0.00000E+00	0.60000E+01
3	0.91000E+01	0.30000E+01	0.00000E+00	0.60000E+01
4	0.13300E+02	0.45000E+01	0.00000E+00	0.60000E+01
5	0.91000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.60387E+01
6	0.18200E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.66931E+01
7	0.18200E+02	0.30000E+01	0.00000E+00	0.64820E+01
8	0.18200E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.60000E+01
9	0.22400E+02	0.75000E+01	0.00000E+00	0.75000E+01
10	0.26850E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.88891E+01
11	0.26850E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.89546E+01
12	0.26850E+02	0.90000E+01	0.00000E+00	0.90000E+01
13	0.31500E+02	0.10500E+02	0.00000E+00	0.10500E+02
14	0.35700E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.11400E+02
15	0.35700E+02	0.30000E+01	0.00000E+00	0.11385E+02
16	0.35700E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.11500E+02
17	0.35700E+02	0.90000E+01	0.00000E+00	0.11694E+02
18	0.35790E+02	0.12000E+02	0.00000E+00	0.12000E+02
19	0.40250E+02	0.13500E+02	0.00000E+00	0.13500E+02
20	0.44800E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.13107E+02
21	0.44800E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.13405E+02
22	0.44800E+02	0.12000E+02	0.00000E+00	0.14310E+02
23	0.44800E+02	0.15000E+02	0.00000E+00	0.15000E+02
24	0.49000E+02	0.16500E+02	0.00000E+00	0.16500E+02
25	0.53900E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.13597E+02
26	0.53900E+02	0.30000E+01	0.00000E+00	0.13657E+02
27	0.53900E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.13896E+02
28	0.53900E+02	0.90000E+01	0.00000E+00	0.14337E+02
29	0.53900E+02	0.12000E+02	0.00000E+00	0.15051E+02
30	0.53900E+02	0.15000E+02	0.00000E+00	0.16195E+02
31	0.53900E+02	0.18000E+02	0.00000E+00	0.18000E+02
32	0.58100E+02	0.14880E+02	0.00000E+00	0.14887E+02
33	0.61600E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.12963E+02
34	0.61600E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.13141E+02
35	0.61600E+02	0.12000E+02	0.00000E+00	0.13578E+02
36	0.61600E+02	0.13610E+02	0.00000E+00	0.13614E+02
37	0.65800E+02	0.12760E+02	0.00000E+00	0.12762E+02
38	0.69300E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.11716E+02
39	0.69300E+02	0.30000E+01	0.00000E+00	0.11805E+02
40	0.69300E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.11816E+02
41	0.69300E+02	0.90000E+01	0.00000E+00	0.11920E+02
42	0.69300E+02	0.12010E+02	0.00000E+00	0.12011E+02
43	0.73500E+02	0.11200E+02	0.00000E+00	0.11209E+02
44	0.77000E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.10239E+02
45	0.77000E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.10256E+02
46	0.77000E+02	0.10530E+02	0.00000E+00	0.10532E+02
47	0.80500E+02	0.97800E+01	0.00000E+00	0.97841E+01
48	0.84700E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.84342E+01
49	0.84700E+02	0.30000E+01	0.00000E+00	0.83950E+01
50	0.84700E+02	0.89600E+01	0.00000E+00	0.88612E+01
51	0.88900E+02	0.72900E+01	0.00000E+00	0.72940E+01
52	0.92400E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.59415E+01
53	0.92400E+02	0.67500E+01	0.00000E+00	0.67590E+01
54	0.95900E+02	0.50800E+01	0.00000E+00	0.50856E+01
55	0.10000E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

LEGENDE

VR: VIDANGE RAPIDE  
NAV: NIVEAU ARRES VIDANGE  
— equipotentielle  
- - - ligne de courant

ECHELLE

( HAUTEUR 1/300  
LARGEUR 1/700 )



**régime non Permanent**  
**vidange de 2/3 du**  
**niveau de la retenue**

INFILTRATION A TRAVERS UNE DIGUE EN TERRE HOMOGENE  
 \*\*\*\*\*

REGIME NON PERMANENT(vidange totale)

\*\*\*\*\*

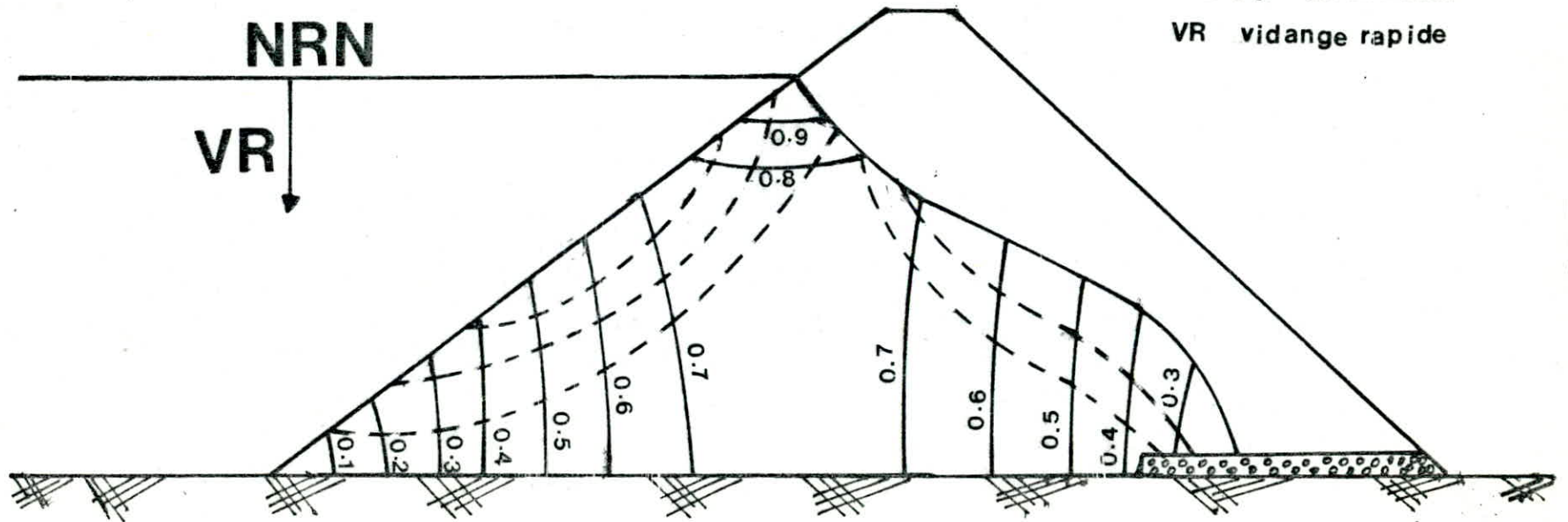
NŒUDS	LES COORDONNEES			CHARGE[H=(P/W)
	X	Y	Z	
1	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
2	0.49000E+01	0.15000E+01	0.00000E+00	0.15000E+01
3	0.91000E+01	0.30000E+01	0.00000E+00	0.30000E+01
4	0.13300E+02	0.45000E+01	0.00000E+00	0.45000E+01
5	0.91000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.29515E+01
6	0.18200E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.60685E+01
7	0.18200E+02	0.30000E+01	0.00000E+00	0.60682E+01
8	0.18200E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.60685E+01
9	0.22400E+02	0.75000E+01	0.00000E+00	0.75000E+01
10	0.26850E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.89211E+01
11	0.26850E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.89056E+01
12	0.26850E+02	0.90000E+01	0.00000E+00	0.90000E+01
13	0.31500E+02	0.10500E+02	0.00000E+00	0.10500E+02
14	0.35700E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.11341E+02
15	0.35700E+02	0.30000E+01	0.00000E+00	0.11364E+02
16	0.35700E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.11469E+02
17	0.35700E+02	0.90000E+01	0.00000E+00	0.11692E+02
18	0.35700E+02	0.12000E+02	0.00000E+00	0.12000E+02
19	0.40250E+02	0.13500E+02	0.00000E+00	0.13500E+02
20	0.44800E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.13036E+02
21	0.44800E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.13085E+02
22	0.44800E+02	0.12000E+02	0.00000E+00	0.14307E+02
23	0.44800E+02	0.15000E+02	0.00000E+00	0.15000E+02
24	0.49000E+02	0.16500E+02	0.00000E+00	0.16500E+02
25	0.53900E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.13500E+02
26	0.53900E+02	0.30000E+01	0.00000E+00	0.13652E+02
27	0.53900E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.13926E+02
28	0.53900E+02	0.90000E+01	0.00000E+00	0.14300E+02
29	0.53900E+02	0.12000E+02	0.00000E+00	0.15050E+02
30	0.53900E+02	0.15000E+02	0.00000E+00	0.16184E+02
31	0.53900E+02	0.18000E+02	0.00000E+00	0.18000E+02
32	0.58100E+02	0.14880E+02	0.00000E+00	0.14887E+02
33	0.61600E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.12961E+02
34	0.61600E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.13139E+02
35	0.61600E+02	0.12000E+02	0.00000E+00	0.13577E+02
36	0.61600E+02	0.13610E+02	0.00000E+00	0.13613E+02
37	0.65800E+02	0.12750E+02	0.00000E+00	0.12759E+02
38	0.69300E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.11712E+02
39	0.69300E+02	0.30000E+01	0.00000E+00	0.11800E+02
40	0.69300E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.11810E+02
41	0.69300E+02	0.90000E+01	0.00000E+00	0.11924E+02
42	0.69300E+02	0.12000E+02	0.00000E+00	0.12006E+02
43	0.73500E+02	0.11200E+02	0.00000E+00	0.11205E+02
44	0.77000E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.10280E+02
45	0.77000E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	0.10352E+02
46	0.77000E+02	0.10520E+02	0.00000E+00	0.10528E+02
47	0.80500E+02	0.97800E+01	0.00000E+00	0.97806E+01
48	0.84700E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.84318E+01
49	0.84700E+02	0.30000E+01	0.00000E+00	0.83923E+01
50	0.84700E+02	0.88600E+01	0.00000E+00	0.88503E+01
51	0.88900E+02	0.72900E+01	0.00000E+00	0.72900E+01
52	0.92400E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.58400E+01
53	0.92400E+02	0.67500E+01	0.00000E+00	0.67500E+01
54	0.95900E+02	0.50800E+01	0.00000E+00	0.50800E+01
55	0.10000E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.50000E+01

ECHELLE

( HAUTEUR 1/300  
LARGEUR 1/700 )

LEGENDE

- equipotentielle
- - - ligne de courant
- VR vidange rapide



**régime non Permanent**  
**vidange totale**  
**de la retenue**

A la suite du traitement des problèmes des deux types d'écoulement: en charge et à surface libre, nous pouvons conclure que la méthode des éléments finis offre la possibilité d'aborder de façon aisée le calcul des écoulements dans les milieux obéissant à la loi de Darcy.

--Parmi ces avantages évidents nous citerons:

1- La méthode permet l'introduction de nombreux paramètres:

- Hétérogénéité.
- Anisotropie.
- Conditions aux limites.

2 - Des études comparées peuvent être menées rapidement sur un même maillage.

3 - a)- Le calcul en régime permanent d'un modèle de cinq cents (500) points nécessite quinze (15) secondes environ.

b)- La recherche de la surface libre d'un barrage représenté par un maillage de cinq cents (500) points se fait en soixante (60) secondes .

4 - Le programme occupe très peu de place en mémoire .

5 - Le nombre de points est pratiquement illimité.

#### CONCLUSION GENERALE

La méthode des éléments finis permet:

- De faire varier très facilement les paramètres introduits dans le modèle.
- L'étude extrêmement rapide et peu coûteuse des réseaux d'écoulements.

BIBLIOGRAPHIE

- G. DHATT  
G. TOUZOT \_\_\_\_\_ UNE PRESENTATION DE LA METHODE DES  
ELEMENTS FINIS  
(MALOINE S.A. EDITEUR [1984])
- N. LECHTCHIL \_\_\_\_\_ HYDRAULIQUE GENERALE ET SOUTERRAINE  
2em PARTIE  
(C.A.H.T BOUMERDES [1969])
- ZIENKIEWICZ, O.C., \_\_\_\_\_ THE FINITE ELEMENT METHOD IN ENGINEER  
RING SCIENCE  
(Mc GRAW HILL [1971])
- R. VALID \_\_\_\_\_ LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS  
ET LE CALCUL DES STRUCTURES  
(EYROLLES [1977])
- MINISTER DE  
L'AGRICULTURE \_\_\_\_\_ LA DOCUMENTATION FRANCAISE  
(SERVICE DE LA DOCUMENTATION  
L'HYDRAULIQUE) PARIS 8em [1968]
- BULLETIN DE  
LIAISON DES  
LABORATOIRES \_\_\_\_\_ DIGUES ET BARRAGES EN TERRE DE  
DES PONTS ET FAIBLE HAUTEUR  
CHAUSSÉES [1984]  
(MM. PILOT ET  
CARTIER)
- DANIEL HILLEL \_\_\_\_\_ L'EAU ET LE SOL  
principes et processus  
physiques (CABAY 1984)  
(INA 1978)
- M. BOUMAH RAT \_\_\_\_\_ METHODES NUMERIQUES APPLIQUEES  
A. GOURDIN (OPU 1983)
- J. F. IMBERT \_\_\_\_\_ ANALYSE DES STRUCTURES PAR  
ELEMENTS FINIS  
cepadues editions  
(edition 1979)
- G. SCHNEEBELI \_\_\_\_\_ HYDRAULIQUE SOUTERRAINE  
(EYROLLES 1978)
- M. CARLIER \_\_\_\_\_ HYDRAULIQUE GENERALE  
ET APPLIQUEE  
(EYROLLES 1980)
- M. MULLER \_\_\_\_\_ COURS D'HYDRAULIQUE SOUTERRAINE  
(INA 1978)
- M. BONNET \_\_\_\_\_ METHODOLOGIE DES MODELES DE  
SIMULATION EN HYDROGÉOLOGIE  
(I.N.P.L. - NANCY 1978)

