

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**

*Département de Génie Mécanique*

**THESE**



**BEY Mohamed**

Ingénieur d'état en Génie Mécanique de l' U.S.T.H.B.

Pour l'obtention du titre de

**MAGISTER EN GENIE MECANIQUE**

Option : Construction Mécanique

**THEME**

**MODELISATION STATIQUE  
DES ENGRENAGES SPIRO-CONIQUES  
PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS**

Soutenu le Mardi 02 Février 1999 devant le jury composé de :

S. Rechak. Professeur. E.N.P	Président
H. Belhanèche. Docteur. E.N.P	Rapporteur
M. Bouaziz. Maître de Conférences. E.N.P	Examineur
A. Yousnadj. Docteur. E.M.P	Examineur
T. Kirati. Docteur. I.N.G.M	Examineur
S. Larbi. Docteur. E.N.P	Invité

ملخص :

الهدف من هذا العمل هو حساب الإجهادات و الانتقالات في المسننات المخروطية ذات الأسنان الحلزونية المصنعة بطريقة غليزون و هذا باستعمال طريقة العناصر المنتهية. القوة مطبقة في مختلف نقاط التماس المتحصل عليها عبر محاكاة عمل المسننات. الهيكل مجزأ أوتوماتيكيا بعناصر سداسية ذات عشرين عقدة.

كلمات مفتاحية :

محاكاة. المسننات المخروطية ذات الأسنان الحلزونية. تجزيء أوتوماتيكيا. تماس الأسنان. الإجهادات. الانتقالات.

**Abstract** : The objective of our work is to determine the states of stresses and displacements for spiral bevel gears cut by the Gleason method by using the finite element method. Loads are applied at different points of contact obtained by contact simulation between pinion and gear with different misalignments. The structure is meshed automatically with an hexahedron elements of 20 nodes.

**Key words** : Modelisation, Spiral bevel gear, Simulation, Automatic Mesh, Finite elements, Tooth contact, Stress, Displacements.

**Résumé** : L'objectif de notre travail est la détermination des états de contraintes et de déplacements dans les engrenages spiro-coniques taillés par le procédé Gleason en utilisant la méthode des éléments finis. La charge est appliquée aux différents points de contact obtenus par simulation d'engrènement du pignon et de la roue en assumant différents mésalignements. La structure étant maillée automatiquement avec des éléments hexaédriques à 20 nœuds.

**Mots clés** : Modélisation, Engrenages Spiro-Coniques, Simulation, Maillage automatique, Eléments Finis, Contact des Dents, Contraintes, Déplacement.

## REMERCIEMENTS

Je remercie en premier et en dernier lieu **DIEU** tout puissant de m'avoir donné le courage et la bonne volonté pour réaliser ce modeste travail.

Je tiens à remercier particulièrement mon Directeur de thèse **Dr. H. BELHANECHÉ** pour son aide à l'élaboration de ce travail, pour sa participation à la mise en forme de ce document et pour ces précieux conseils.

Mes sincères salutations sont réservées au Professeur **S. RECHAK** pour l'estime qu'il me manifeste en présidant le jury de ma thèse.

Je suis sensible à l'honneur que me font : **Dr M. BOUAZIZ** (Maître de conférences) de l'E.N.P, **Dr A. YOUSNADJ** de l'E.M.P et **Dr. T. KIRATI** de l'I.N.G.M d'avoir accepté de juger mon travail et de faire partie du jury de ma thèse.

C'est pour moi un devoir agréable de remercier **Dr. S. LARBI** pour avoir répondu favorablement à notre invitation et pour sa participation à la mise en forme de ce document.

Mes remerciements sont réservés aussi à Monsieur **ALI NOUR** pour son soutien moral, ses encouragements et son aide dans les moments difficiles. Qu'il trouve ici toutes mes sincères salutations et ma reconnaissance.

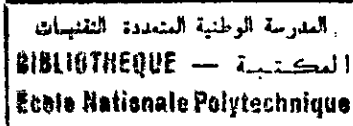
Je tiens à remercier également le personnel du centre de calcul de l'Ecole Nationale Polytechnique pour leur aide et leur compréhension. Sans oublier les membres de l'association *El-Amel* de la cité des Anassers, Kouba.

## DEDICACE

Je dédie ce modeste travail à mes très chers parents, qui sans leur soutien et encouragements, ce travail n'a pu avoir lieu.

Je le dédie aussi à :

- Mes frères,
- Mes soeurs,
- Toute la famille,
- Tous mes amis.

**SOMMAIRE**

<i>INTRODUCTION GENERALE</i> .....	1
------------------------------------	---

**CHAPITRE 1 : TAILLAGE DES ENGRENAGES SPIRO-CONIQUES**

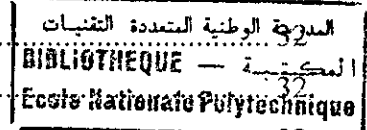
1.1. Introduction.....	3
1.2. Méthodes d'obtention des surfaces de denture .....	3
1.3. Paramètres d'une roue plate génératrice.....	4
1.4. Types de fraises.....	5
1.5. Conicités de la denture .....	5
1.6. Description d'une machine universelle Gleason.....	6
1.6.1. Parties constituantes d'une machine universelle .....	6
1.6.2. Définition des différents réglages machine.....	9
1.7. Description des méthodes de taillage de Gleason.....	13
1.7.1. Méthode de taillage par génération .....	13
1.7.2. Méthode de taillage sans génération.....	14
1.8. Profils conjugués.....	14
1.9. Cycles de taillage .....	15
1.10. Conclusion .....	15

**CHAPITRE 2 : DESCRIPTION DU MODELE DE SIMULATION DE TAILLAGE DES ENGRENAGES SPIRO-CONIQUES**

2.1. Introduction.....	16
2.2. Coordonnées homogènes .....	16
2.3. Modélisation mathématique du procédé de taillage.....	17
2.3.1. Modèle mathématique de la fraise de taillage.....	17
2.3.2. Mise en position du centre de fraise et inclinaison de son axe .....	20
2.3.3. Relation entre le mouvement de berceau et la pièce à tailler.....	25
2.3.4. Equation d'engrènement .....	28
2.4. Conclusion .....	31

## CHAPITRE 3 : AUTOMATISATION DE LA GENERATION DU MAILLAGE

3.1. Introduction.....	32
3.2. Procédure de calcul des coordonnées d'un point sur un flanc.....	32
3.2.1. Surface générée .....	32
3.2.2. Surface non générée.....	35
3.3. Discrétisation de la surface d'un flanc .....	35
3.4. Algorithmes de résolution.....	36
3.5. Orientation des flancs concave et convexe.....	38
3.6. Maillage d'une dent.....	39
3.7. Maillage d'un certain nombre de dents .....	40
3.8. Introduction des conditions aux limites.....	42
3.9. Conclusion .....	43



## CHAPITRE 4 : SIMULATION D'ENGRENEMENT DU PIGNON ET DE LA ROUE

4.1. Introduction.....	44
4.2. Déflexions relatives entre le pignon et la roue .....	44
4.3. Machine de contrôle des engrenages spiro-coniques .....	45
4.4. Analyse de contact des dents .....	46
4.4.1. Base mathématiques de l'analyse de contact des dents.....	46
4.4.2. Simulation d'engrènement .....	47
4.4.3. Contact des surfaces de denture .....	50
4.5. Calcul des charges nodales équivalentes.....	53
4.6. Conclusion .....	55

## CHAPITRE 5 : RESULTATS ET DISCUSSIONS

5.1. Introduction.....	56
5.2. Description des différents programmes de calcul .....	56
5.3. Validation .....	57
5.3.1. Validation du programme de simulation de taillage.....	57
5.3.2. Validation du programme de calcul par éléments finis .....	58
5.4. Résultats de la génération automatique du maillage .....	59
5.4.1. Maillage d'une dent.....	59
5.4.2. Maillage d'un certain nombre de dents .....	60
5.4.3. Maillage complet d'un membre .....	61
5.4.4. Application aux engrenages cylindriques .....	62

5.5. Chemin de contact sur les flancs de la denture.....	64
5.6. Résultats de l'analyse par la méthode des éléments finis.....	65
5.6.1. Contact entre le flanc concave du pignon et le flanc convexe de la roue.....	65
5.6.2. Contact entre le flanc convexe du pignon et le flanc concave de la roue.....	71
5.7. Conclusion .....	77

<b>CONCLUSION GENERALE</b> .....	78
----------------------------------	----

## **ANNEXES**

Annexe 1.....	80
Annexe 2.....	82

<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b> .....	85
--	----

**NOMENCLATURE**

$\beta_m$	: Angle de spirale moyen
$\varepsilon$	: Angle d'inclinaison de la tête porte fraise
$L$	: Rayon du cercle d'excentrique
$S$	: Distance radiale du centre de fraise par rapport au centre machine
$q$	: Positionnement angulaire du centre de la fraise dans le plan machine
$\varphi_c$	: Angle de berceau
$\varphi_e$	: Angle d'excentrique
$\varphi_s$	: Angle de socle
$\varphi_t$	: Angle de tête porte fraise
$\mu$	: Angle d'inclinaison de l'axe de la fraise par rapport à l'axe de berceau
$\gamma_m$	: Angle de pied machine
$D_x$	: Recule machine
$E_v$	: Décalage vertical
$E_s$	: Position de la base coulissante par rapport au centre machine
$E_h$	: Décalage horizontal
$\frac{L}{2\pi}$	: Paramètre du mouvement hélicoïdal de la base coulissante en mm/rad
$\chi_b$	: Réglage de base de la base coulissante
$\xi_c$	: Angle de rotation du berceau au cours de taillage
$\omega_c$	: Vitesse angulaire du berceau
$\omega_w$	: Vitesse angulaire de la pièce
$\eta$	: Rapport de roulement
$\gamma$	: Angle primitif de la pièce
$\nu_f$	: Angle de creux de la pièce
$R_L$	: Repère lié à la lame
$R_F$	: Repère lié à la fraise
$R_1$	: Repère lié à l'excentrique
$R_e$	: Repère lié au berceau
$R_2$	: Repère lié au socle
$R_3$	: Repère lié rigidement au socle
$R_4$	: Repère lié à la tête porte fraise
$R_5$	: Repère lié rigidement à la tête porte fraise
$R_b$	: Repère lié au bâti de la machine
$R_{po}$	: Repère lié à la poupée
$R_{gl}$	: Repère lié à la tête porte roue
$R_g$	: Repère lié à la roue
$R_{pt}$	: Repère lié à la tête porte pignon
$R_f$	: Repère lié à la machine de contrôle
$R_p$	: Repère lié au pignon
$X_i, Y_i$ et $Z_i$	: Coordonnées d'un point dans le repère $R_i$
$\psi_o$	: Angle de pression des tranchants rectilignes extérieurs
$\rho_i$	: Rayon de raccordement de la partie circulaire intérieure de la lame
$\rho_o$	: Rayon de raccordement de la partie circulaire extérieure de la lame
$W$	: Largeur d'entre pointes de la lame
$\beta$	: Coordonnée de surface positionne la section normale de la lame dans $R_F$



$r_m$	: Rayon de la fraise de taillage
$\vec{\omega}_c$	: Vecteur vitesse angulaire du berceau au cours de taillage
$\vec{\omega}_p$	: Vecteur vitesse angulaire de la pièce au cours de taillage
$\vec{n}$	: Vecteur normal à la surface de lame
$\vec{V}^r$	: Vecteur vitesse relative entre la fraise et la pièce
$\vec{V}_c^{(b)}$	: Vecteur vitesse absolue d'un point sur la lame exprimée dans $R_b$
$\vec{V}_p^{(b)}$	: Vecteur vitesse absolue d'un point sur la denture exprimée dans $R_b$
$\bar{X}$	: Position axiale d'un point sur la surface de denture de la pièce
$\bar{R}$	: Distance radiale d'un point sur la surface de denture de la pièce
$n_s$	: Nombre d'éléments dans la saillie
$n_{c1}$	: Nombre d'éléments dans la partie active du creux
$n_{c2}$	: Nombre d'éléments dans la racine de la dent
$n_x$	: Nombre d'éléments suivant la largeur de denture
$n_1$	: Nombre d'éléments dans la jante du côté concave de la dent
$n_2$	: Nombre d'éléments dans la jante du côté convexe de la dent
$n$	: Nombre d'éléments dans la partie centrale de la jante
$n_{r1}$	: Nombre d'éléments suivant l'épaisseur de la jante
$r_j$	: Rayon intérieur de la pièce
$E$	: Modification de la distance qui sépare les axes du pignon et de la roue
$P$	: Modification de la position axiale du pignon
$G$	: Modification de la position axiale de la roue
$\alpha$	: Modification de l'angle de croisement des arbres du pignon et de la roue
$\bar{R}_p$	: Vecteur position d'un point sur la surface de denture du pignon
$\bar{R}_g$	: Vecteur position d'un point sur la surface de denture de la roue
$\vec{n}_p$	: Vecteur normal unitaire à la surface de denture du pignon en un point
$\vec{n}_g$	: Vecteur normal unitaire à la surface de denture de la roue en un point
$\varphi_p$	: Angle de rotation du pignon pendant l'engrènement
$\varphi_g$	: Angle de rotation de la roue pendant l'engrènement
$\xi, \eta$ et $\zeta$	: Coordonnées d'un point dans le repère de référence

# **INTRODUCTION GENERALE**

## INTRODUCTION GENERALE

Les engrenages spiro-coniques sont des pièces mécaniques très complexes, opérant cinématiquement à trois dimensions d'espace et permettant la transmission de grandes puissances à des vitesses élevées entre arbres concourants.

Ces engrenages ont un large champ d'applications et sont utilisés dans les renvois d'angle, tels que les boîtes de transmission des hélicoptères, les ponts arrières des véhicules lourds ....etc.

L'application prise comme exemple type de part son importance est celle des boîtes de transmission des hélicoptères, où il est nécessaire d'améliorer leurs performances, réduire leurs poids et leurs dimensions tout en augmentant la puissance transmise et la durée de service. Une prédiction précise de l'état de déplacements et de contraintes est très importante pour réduire le poids et assurer une durée de service plus longue, en assurant une résistance suffisante aux efforts appliqués.

Les engrenages spiro-coniques sont caractérisés par une grande capacité de charge, un excellent rendement et un transfert progressif des charges d'une dent à une autre. Ces caractéristiques les rendent, les plus utilisés dans les transmissions de haute performance [1].

Les exigences majeures dans presque tous les champs d'application des engrenages spiro-coniques sont :

- L'amélioration de la durée de vie et la fiabilité,
- La réduction du poids total et l'augmentation de la puissance transmise (grand rapport puissance au poids) sans compromettre la rigidité ainsi que le rendement de la transmission pendant la durée de service,
- La réduction du bruit de la transmission.

La géométrie très complexe des engrenages spiro-coniques et l'exigence d'une grande précision, nécessitent de connaître les méthodes et les machines de taillage. L'analyse de ces engrenages se fait par des simulations numériques vu leur complexité géométrique.

A cause de la géométrie complexe de ces engrenages, leurs analyses sont plus difficiles que les autres types d'engrenages, car ils n'existent pas de méthodes simplifiées permettant de calculer les caractéristiques géométriques de la denture et la flexion de la dent. Avec le développement qu'a connu l'informatique et les méthodes numériques, il est devenu possible de déterminer ces caractéristiques ainsi que l'état des contraintes et des déformations.

Il existe plusieurs types de spirales; spirale logarithmique, spirale circular-cut et spirale en développante [2,3,4,5,6]. La hauteur de la denture peut être constante ou variable [7,8,9], et les engrenages coniques à denture spirale peuvent être : Zerol, Spiro-conique ou Hypoïde (annexe 1).

Différents aspects des engrenages spiro-coniques ont été étudiés. La plupart des études étaient consacrées à la géométrie dans le but de réduire le bruit et les vibrations (en minimisant l'erreur cinématique de transmission), d'optimiser la portée de contact [2,3,4,5,6,10,11,12,13,...37], de mesurer les coordonnées et minimiser les déviations de la surface réelle [38,39,40,...44], ainsi que d'autres aspects [45,46,47].

L'analyse des contraintes et des déformations est un autre aspect très important permettant de prédire l'état de contraintes, d'augmenter la sécurité de fonctionnement et la durée de vie et de réduire le poids.

D'énormes efforts ont été consacrés à l'analyse de l'état des contraintes et des déformations dans les engrenages et un nombre restreint de chercheurs ont étudié les engrenages spiro-coniques en utilisant la méthode des éléments finis [48,49,50,...54]. Ces derniers ont utilisé un élément hexaédrique à 8 nœuds, avec non simulation du taillage de la partie de raccordement entre la partie active de la dent et le cône de pied (le rayon était imposé). Madrosky [33] a utilisé un élément hexaédrique à 20 nœuds pour calculer les rigidités aux nœuds, mais le maillage qu'il a développé ne considère qu'une seule dent avec des divisions imposées.

Notre travail consiste à développer un logiciel permettant l'analyse statique des engrenages spiro-coniques à hauteur variable taillés par le procédé GLEASON (spiral circular cut) en utilisant la méthode des éléments finis. L'élément utilisé est un élément hexaédrique à 20 nœuds. Ce choix a été fait, car il permet de mieux représenter les structures massives à frontières courbes avec une meilleure précision.

L'objectif de cette étude est de déterminer l'état de contraintes et de déplacements pour ce type d'engrenages dans le but de localiser les zones dangereuses, de réduire le poids, de vérifier la résistance du couple aux efforts appliqués et d'assurer une durée de service plus longue.

Notre travail est réparti suivant 5 chapitres :

Dans le chapitre 1, nous présentons les différentes méthodes de taillage, les outils utilisés, ainsi que la machine de taillage utilisée et les réglages machines associés. Cette présentation est nécessaire puisque la simulation de taillage est basée sur une bonne compréhension des techniques de taillage.

La description du modèle de simulation de taillage est présentée dans le chapitre 2. Dans cette simulation nous avons tenu compte des réglages machine, de la définition de la géométrie de la fraise utilisée, des mouvements relatifs pièce-fraise ainsi que des dimensions du pignon et de la roue en appliquant la théorie d'engrènement et la géométrie différentielle.

Dans le chapitre 3, nous présentons la procédure utilisée permettant de générer automatiquement le maillage des engrenages spiro-coniques et d'autres types d'engrenages.

En considérant différents défauts d'alignement, la simulation de l'engrènement du pignon et de la roue est donnée dans le chapitre 4. Cette simulation permet de déterminer les différents points de contact et par suite les charges nodales équivalentes.

Le chapitre 5 est consacré à la présentation des différents résultats obtenus. Ces résultats concernent : la génération automatique du maillage des engrenages spiro-coniques et une application aux engrenages cylindriques, le chemin de contact sur la surface de denture pour différents défauts d'alignement ainsi qu'une présentation de quelques résultats obtenus lors de l'analyse par la méthode des éléments finis.

*CHAPITRE 1*

**TAILLAGE DES ENGRENAGES  
SPIRO-CONIQUES**

## CHAPITRE 1

### TAILLAGE DES ENGRENAGES SPIRO-CONIQUES

#### 1-1. INTRODUCTION

Comment produire une géométrie de denture spécifiée sur une pièce ébauche? Quel type de machine faut-il utiliser? Quelle est la forme de l'outil ou des outils utilisés? Quelle est la position relative entre pièce-outil? Quels sont les mouvements relatifs entre pièce-outil pendant le taillage de la denture? Quelle est la cinématique de la machine? Dans le champ des engrenages, ces questions sont essentielles et, les réponses dépendent de la forme de la denture qu'on veut obtenir.

Les coordonnées des différents points sur la surface de denture des engrenages spiro-coniques sont déterminées par une simulation numérique du procédé de taillage. Cette simulation ne peut être faite sans connaître les machines et les méthodes de taillage.

Le présent chapitre est consacré à la description des différentes méthodes de taillage des engrenages spiro-coniques, les outils utilisés, ainsi qu'une présentation d'une machine universelle Gleason et les réglages machine associés avec la définition des différents cycles de taillage.

#### 1-2. METHODES D'OBTENTION DES SURFACES DE DENTURE

Les surfaces de denture du pignon et de la roue d'un engrenage spiro-conique peuvent être obtenues à l'aide de deux méthodes [55] :

- *La méthode des enveloppes* : pendant le roulement sans glissement des deux cônes primitifs  $C_1$  et  $C_2$  d'un couple d'engrenages tangents le long de la génératrice SI l'un sur l'autre, la surface  $P_1$  liée au cône primitif  $C_1$  enveloppe une autre surface  $P_2$  liée au cône primitif  $C_2$  (figure 1-1-a).

Dans cette méthode la surface de denture de la roue est taillée sans génération, tandis que la surface de denture du pignon est engendrée par un ensemble générateur (P-N) matérialisant exactement la roue. Avec P est le cône primitif de la roue, et N est la surface de denture de cette roue.

- *La méthode des roulettes* : pendant le roulement sans glissement d'une surface conique P sur les deux cônes primitifs  $C_1$  et  $C_2$  tangents le long de la génératrice SI, la surface N liée à P enveloppe par rapport à ceux-ci deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  représentant respectivement la surface de denture du pignon et de la roue (figure 1-1-b). Les dentures conjuguées du pignon et de la roue sont obtenues par génération à partir du même ensemble générateur matérialisé par la surface primitive P et la surface génératrice N.

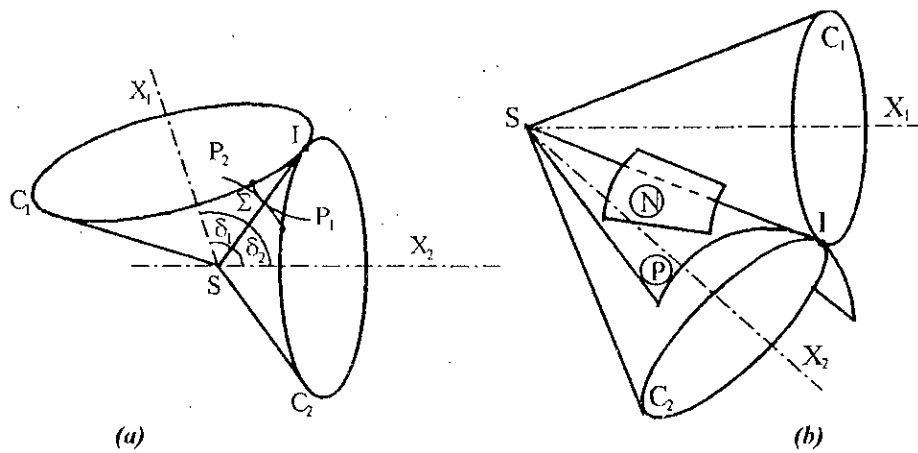


Figure 1-1 Méthodes de taillage des engrenages spiro-coniques [55].  
a- Principe de la méthode des enveloppes. b- Principe de la méthode des roulettes.

### 1-3. PARAMETRES D'UNE ROUE PLATE GENERATRICE

La définition du profil d'un engrenage cylindrique à denture droite ou hélicoïdale passe par le concept de la crémaillère génératrice, alors que pour les engrenages coniques, la définition de la surface de denture doit passer par le concept de la roue génératrice, dont la forme de sa denture dépend du type de denture (conique droite, conique hélicoïdale ou conique spirale).

Pour l'usinage des engrenages spiro-coniques sur des machines Gleason, on utilise le principe de taillage par roue génératrice (figure 1.2). Cette dernière est caractérisée par :

- Son plan primitif : le cône primitif est réduit à un plan, pouvant tourner sur lui-même autour de l'axe  $SX$ , où  $S$  est le sommet du cône primitif et  $l_1$  est la largeur de denture.
- Sa surface génératrice  $N$  définie par :
  - Son intersection  $AB$  avec le plan primitif, où  $AB$  est un arc de cercle de centre  $O$  et de rayon  $R_f$  décalé de  $S$  de  $SO$ , tel que la tangente qui lui est menée par le point moyen  $M$  fasse un angle  $\beta$  avec la génératrice  $SM$ . L'angle  $\beta$  est l'angle de spirale.
  - La surface  $N$  est une surface d'égale pente, engendrée par des segments rectilignes s'appuyant sur  $AB$  et inclinée d'un angle constant  $(\pi/2 - \alpha)$  sur le plan primitif.

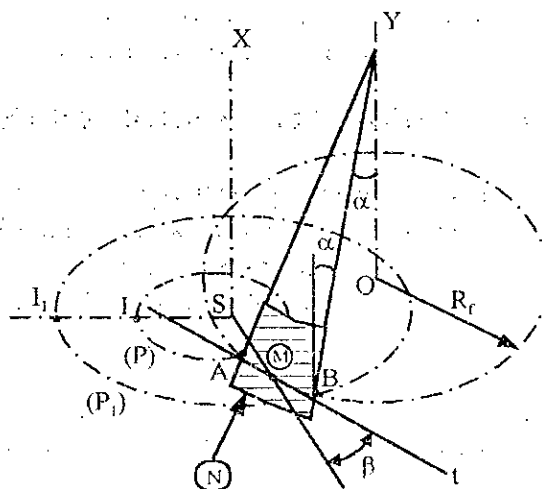


Figure 1-2 Roue plate génératrice de Gleason [55].

## 1-4. TYPES DE FRAISES

L'outil de taillage utilisé par la machine Gleason se présente sous la forme d'un tourteau cylindrique auquel sont fixées des lames à tranchants inclinés, généralement rectilignes [9,55], et peuvent être quelquefois sphériques [9,55,25].

La firme Gleason fournit trois types de fraises [56,57,58,59], qui sont :

1. Fraise à tranchants extérieurs, taillant le flanc concave de la denture (figure 1-3-a).
2. Fraise à tranchants intérieurs, taillant le flanc convexe de la denture (figure 1-3-b).
3. Fraise à tranchants alternés extérieurs et intérieurs, taillant les flancs concave et convexe de la denture (figure 1-3-c).

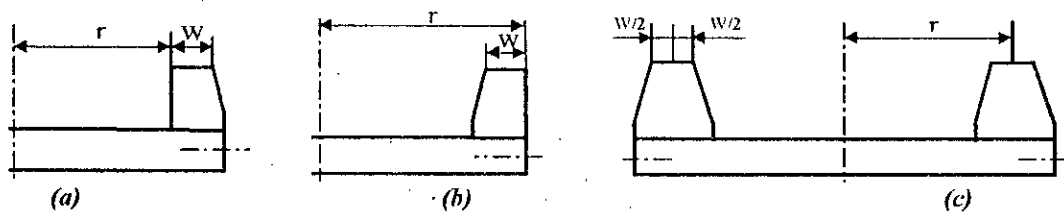


Figure 1-3. Différents types de fraises [55].

a- Fraise à lames extérieures. b- Fraise à lames intérieures. c- Fraise à lames alternées.

Chaque fraise est définie par le rayon  $r$ , la largeur entre pointes des lames  $W$ , l'angle d'inclinaison des tranchants rectilignes et les rayons de raccordement des lames intérieures et extérieures.

## 1-5. CONICITES DE LA DENTURE

Gleason Works a adopté pour les engrenages spiro-coniques une denture conique. Cette denture est caractérisée par quatre types de conicités [8,60] (figure 1-4) :

- Conicité de hauteur.
- Conicité d'épaisseur.
- Conicité d'entre dent.
- Conicité de fond de dent (de largeur entre pointe).

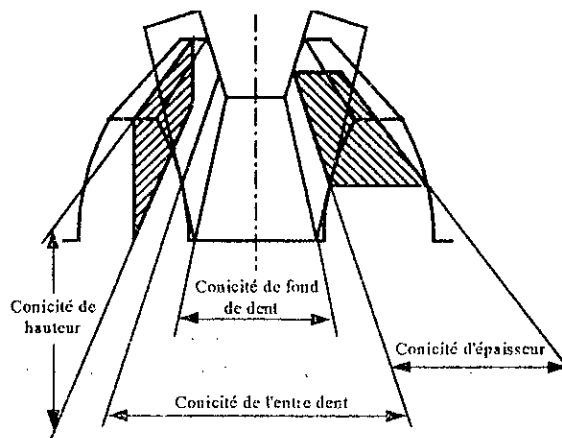


Figure 1-4 Différentes conicités d'une dent spiro-conique [8].



En plus des quatre conicités, Gleason définit deux autres types de conicités, qui sont :

1- *Conicité normale* : les dimensions de hauteur et d'épaisseur de la dent sont proportionnelles à la distance d'une section donnée au sommet du cône primitif. Par conséquent, les sommets du cône primitif et du cône de pied coïncideront et les côtés de la dent convergeront au sommet du cône primitif [61].

2- *Conicité duplex* : caractérisée par une conicité de largeur entre pointes nulle sur toute la largeur de denture sur les deux membres (pignon et roue) [60,61,62,63]. Cette conicité est obtenue par inclinaison de la ligne de pied autour de n'importe quel point du pied le long de la dent. Le sommet du cône de pied ne coïncide pas avec le sommet du cône primitif.

Afin de produire une denture conique, l'axe de la fraise frontale doit être normal à la génératrice du cône de pied [13,20,64] (figure 1-5).

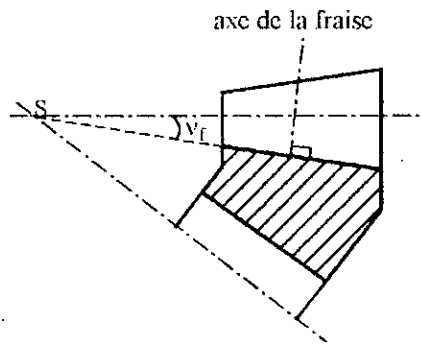


Figure 1-5 Disposition de l'axe de la fraise.

## 1-6. DESCRIPTION D'UNE MACHINE UNIVERSELLE GLEASON

Les méthodes de taillage des engrenages spiro-coniques sont basées sur le concept de la roue génératrice théorique. En pratique, cette roue génératrice est matérialisée à travers l'utilisation des machines de taillage spécifiques. Ces machines sont souvent conçues pour permettre de simuler une large gamme de géométries des roues génératrices, d'où la complexité de leur mécanique.

Ces machines possèdent un certain nombre de réglages spécifiques à chaque couple d'engrenages appelés "réglages machine", dont les valeurs sont souvent contenues dans un listing appelé "Summary". Ces réglages sont nécessaires pour commencer le taillage. Une fois ces réglages sont obtenus, ils peuvent être ajustés pour produire une géométrie désirée, avec des caractéristiques géométriques et cinématiques meilleures.

### 1-6-1. PARTIES CONSTITUANTES D'UNE MACHINE UNIVERSELLE

Une machine de taillage universelle Gleason (figure 1-6) est composée principalement de trois parties :

- 1/- Le berceau (repère 1).
- 2/- La base coulissante (repère 10).
- 3/- Le bâti principal (repère 11).

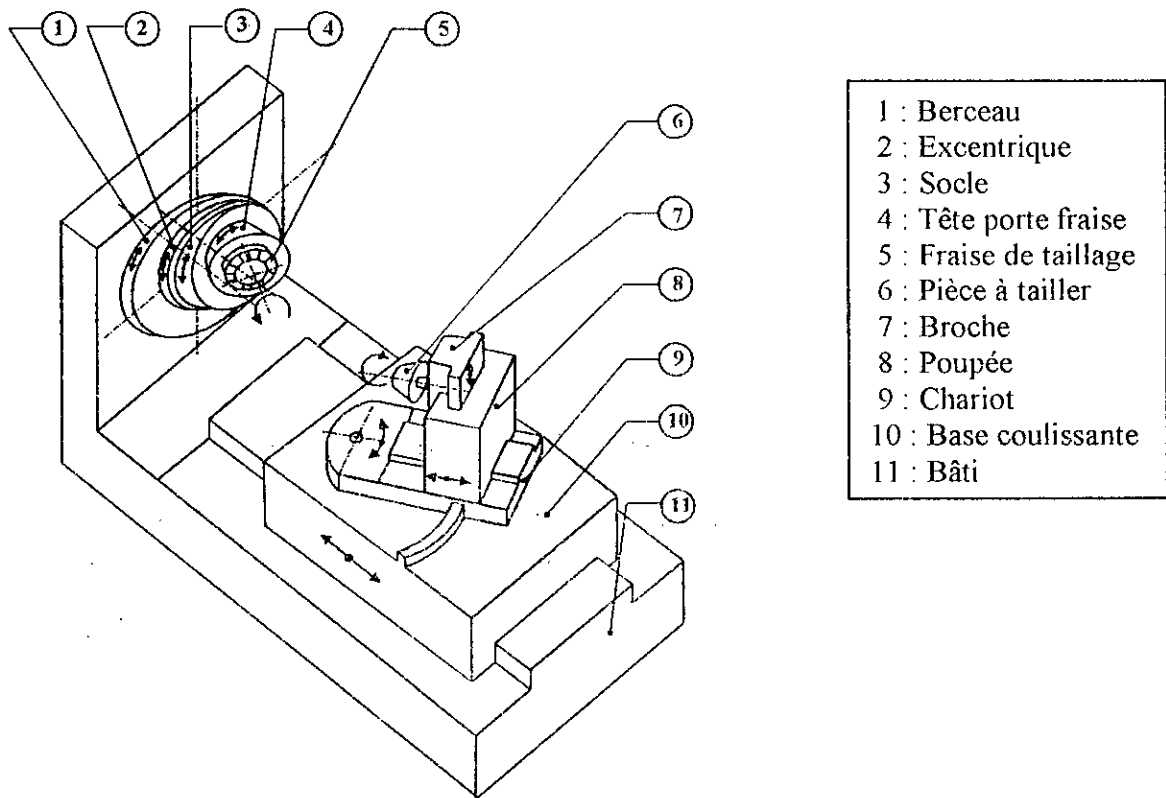


Figure 1-6 Vue schématique d'une machine de taillage universelle GLEASON [65].

### 1. Le berceau

Le berceau (repère 1) est animé d'un mouvement d'oscillation de rotation autour de son axe horizontal, sur lequel est monté un excentrique (repère 2) d'axe horizontal parallèle à celui du berceau et décalé d'une distance  $L$ .

Le socle (repère 3) d'axe horizontal parallèle à celui de berceau et passant par le centre  $O$  de la fraise, est réglable en position angulaire par rapport à son axe.

La tête porte fraise (repère 4) s'appuie sur la face inclinée du socle, et est réglable en position angulaire sur une glissière circulaire aménagée sur la face inclinée. L'axe de la tête porte fraise fait un angle  $\epsilon$  avec l'axe de socle, qui est égal à l'angle que fait la face inclinée avec la verticale (figure 1-7-a).

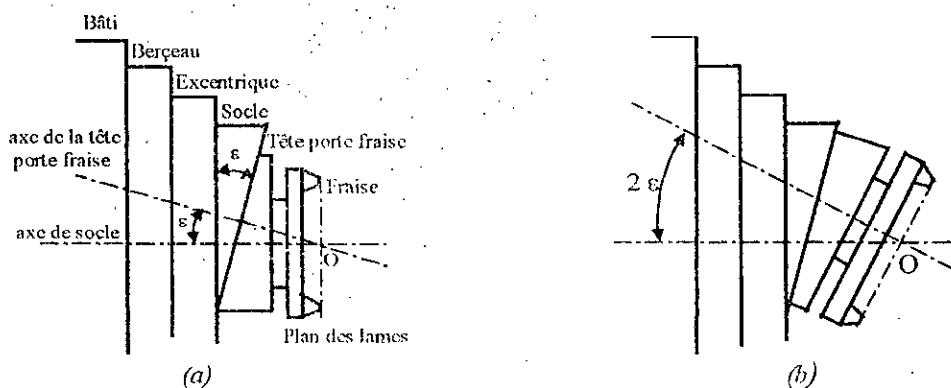


Figure 1-7 Mécanisme d'inclinaison de l'axe de fraise [55].  
a- Position initiale avant inclinaison. b- Position finale après inclinaison maximale.

La fraise de taillage (repère 5) s'appuie sur la face verticale de la tête porte fraise, avec l'angle entre l'axe de la fraise et l'axe de la tête porte fraise est également égal à  $\varepsilon$ . Pendant l'opération de taillage, la fraise effectue un mouvement de rotation uniforme (mouvement de coupe) autour de son axe.

Le centre O de la fraise est choisi sur l'axe de la fraise et appartenant au plan passant par le sommet des lames (figure 1-7) [65].

Les axes du socle, de la tête porte fraise et de la fraise convergent au centre O de la fraise. Par conséquent, la position du centre O est fixe et ne change pas de position lors du réglage du socle et de la tête porte fraise [14,66,64].

L'ensemble (berceau, excentrique, socle, tête porte fraise et la fraise) effectue un mouvement de rotation autour de l'axe du berceau si la surface de denture est générée, sinon est immobile.

Ce mécanisme permet l'inclinaison de l'axe de la fraise suivant différentes orientations, simplement par rotation du socle et/ou de la tête porte fraise. Ainsi, il est possible d'obtenir toute inclinaison de l'axe de la fraise par rapport à l'axe du berceau dont les valeurs des angles sont comprises entre  $0^\circ$  et  $2\varepsilon$ . Le mécanisme d'inclinaison est schématisé en figure 1-8. Le tableau 1-1 donne les valeurs de  $\varepsilon$  pour certaines machines.

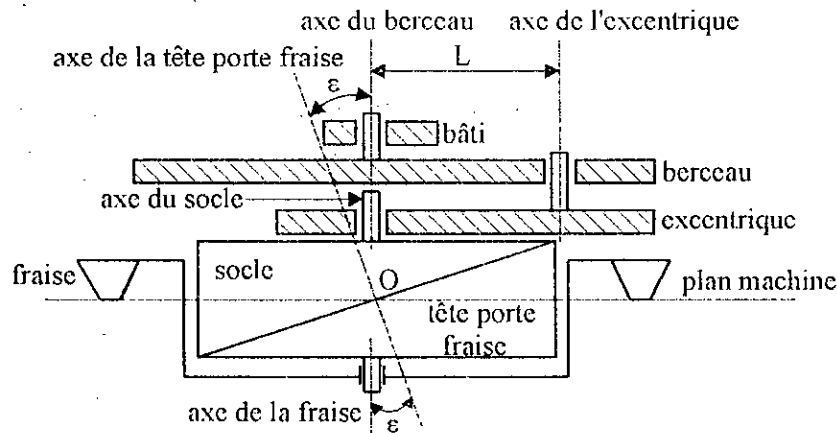


Figure 1-8 Schéma du mécanisme de positionnement du centre de la fraise et d'inclinaison de son axe [64].

Le plan fictif perpendiculaire à l'axe du berceau et passant par le centre O de la fraise est appelé plan machine. Le point d'intersection du plan machine avec l'axe du berceau est appelé centre machine [14,65].

Dans le plan machine, la distance entre le centre machine et le centre d'excentrique est égale à la distance entre le centre de la fraise et le centre d'excentrique. Cette distance est appelée rayon du cercle d'excentrique et est notée L. Elle est spécifique pour chaque type de machine. Le tableau 1-2 donne les valeurs du rayon du cercle d'excentrique pour certaines machines.

Machine	Valcur de $\varepsilon$
Gleason N°.122	15 ° [14]
Gleason N°.106	15 ° [14]
Gleason N°.116	15 ° [14]

Tableau 1-1 Valeurs de  $\varepsilon$  pour quelques machines.

Machine	Rayon du cercle d'excentrique (inch)
Gleason N°.102	1,125 [14]
Gleason N°.106	3,0 [14]
Gleason N°.7A	2,5 [14]
Gleason N°.122	4,375 [14]
Gleason N°.16	3,5 [57]
Gleason N°.116	4,375 [57]

Tableau 1-2 Valeurs du rayon du cercle d'excentrique pour quelques machines.

## 2. La base coulissante

La base coulissante (repère 10) peut se déplacer parallèlement à l'axe du berceau, permettant son positionnement axial. Le chariot (repère 9) est réglable en position angulaire. La poupée aussi (repère 8) est réglable en position axiale suivant l'axe de la pièce à tailler. La broche (repère 7) supportant la pièce à tailler est réglable en hauteur sur la poupée permettant de positionner le sommet du cône primitif par rapport au centre machine [66].

La pièce à tailler (repère 6) est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de son axe horizontal si la surface de denture est générée, sinon elle est immobile.

## 3. Le bâti principal

Il porte le berceau, la base coulissante, les éléments machine nécessaires pour le taillage de la pièce, les mécanismes d'entraînement du berceau et de la pièce et les systèmes mécaniques de conjugaison des différents mouvements relatifs nécessaires au taillage.

### 1-6-2. DEFINITION DES DIFFERENTS REGLAGES MACHINE

Afin de permettre une définition exacte de la position relative pièce-fraise ainsi que les mouvements relatifs nécessaires au taillage, un certain nombre de réglages machine sont nécessaires. Ces réglages sont divisés en trois parties : ceux relatifs au positionnement de la fraise, au positionnement de la pièce à tailler et ceux du mouvement relatif entre pièce-fraise.

#### 1. Positionnement de la fraise

Le positionnement du centre de la fraise dans le plan machine et l'orientation de son axe par rapport à l'axe de rotation du berceau s'obtiennent à partir des réglages suivants :

- Angle de berceau  $\varphi_c$  : c'est le réglage angulaire du berceau par rapport à son axe, avec  $\varphi_c \in [0, 2\pi]$  [14,64]. Il permet de positionner l'axe de rotation de l'excentrique par rapport au centre machine (figure 1-9-a-b).

- Angle d'excentrique  $\varphi_e$  : c'est le réglage angulaire de l'excentrique par rapport à son axe, avec  $\varphi_e \in [0, \pi]$  [64]. Il permet d'ajuster la distance radiale entre le centre de la fraise et le centre machine (figure 1-9-a-b).

Le centre de la fraise est positionné dans le plan machine par la distance radiale  $S$  et l'angle de base de berceau  $q$ , dépendant de la génératrice moyenne de la pièce à tailler, de l'angle de spirale, du rayon de la fraise et du sens de spirale [60,41] (figure 1-9).

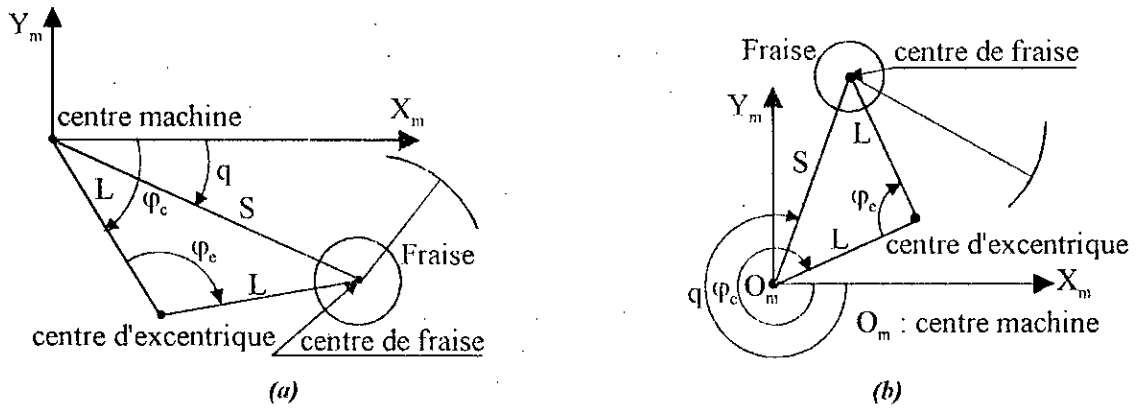


Figure 1-9 Positionnement du centre de fraise dans le plan machine en fonction du sens de la spirale [64].  
 a- Roue génératrice avec une spirale à droite. b- Roue génératrice avec une spirale à gauche.

L'angle  $q \in [0, 2\pi]$ . Avec  $q \in [0, \pi]$  pour une spirale à gauche de la pièce (figure 1-9-a), et  $q \in [\pi, 2\pi]$  pour une spirale à droite de la pièce [64] (figure 1-9-b).

L'angle d'excentrique  $\varphi_e$  et la distance radiale  $S$  sont liés par la relation [64] :

$$S = 2L \sin \frac{\varphi_e}{2} \quad (1-1)$$

D'après la relation (1-1), la valeur maximale de la distance radiale  $S$  est égale à  $2L$ . Par conséquent, le rayon du cercle d'excentrique est le paramètre le plus important qui détermine la dimension maximale de la pièce pouvant être taillée sur une machine donnée.

Les angles  $\varphi_e$ ,  $q$  et  $\varphi_s$  sont liés par la relation [14] :

$$q = \varphi_e - \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi_s}{2} \quad (1-2)$$

- Angle de socle  $\varphi_s$  : c'est le réglage angulaire du socle par rapport à son axe. Cet angle contrôle l'orientation et la direction d'inclinaison de l'axe de la fraise.

- Angle de tête porte fraise  $\varphi_t$  : c'est le réglage angulaire de la tête porte fraise par rapport à son axe, avec  $\varphi_t \in [0, \pi]$  [64]. Cet angle contrôle l'angle entre l'axe du berceau et l'axe de la fraise.

En combinant  $\varphi_s$  et  $\varphi_t$ , différentes orientations et inclinaisons de l'axe de fraise sont obtenues. L'angle entre l'axe de fraise et l'axe du berceau est noté  $\mu$ .

Les angles  $\varphi_t$ ,  $\mu$  et  $\varepsilon$  sont liés par la relation [64] :

$$\sin \frac{\varphi_t}{2} = \frac{\sin \frac{\mu}{2}}{\sin \varepsilon} \quad (1-3)$$

D'après la relation (1-3), l'angle de tête porte fraise  $\varphi_t$  est égal à zéro lorsque l'angle  $\mu$  est égal à zéro.

## 2. Positionnement de la pièce

Le positionnement, l'orientation de l'axe de la pièce à tailler et la position du sommet du cône primitif sont montrés par la figure 1-10.

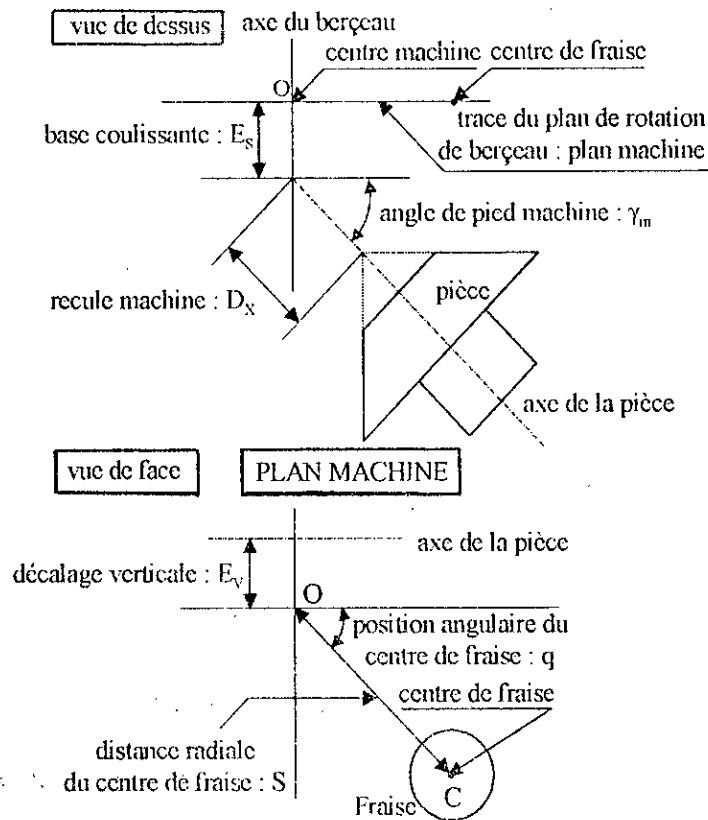


Figure 1-10 Définition des différents réglages machine pour le positionnement de la pièce [65].

Ils s'obtiennent à partir des réglages suivants :

- Angle de pied machine  $\gamma_m$  : c'est le positionnement angulaire du chariot. Cet angle oriente la poupée par rapport à l'axe du berceau et donne l'angle entre l'axe de la pièce à tailler et le plan machine.
- Recule machine  $D_X$  : c'est l'ajustement longitudinal de la poupée suivant l'axe de la pièce à tailler. Il positionne le sommet du cône primitif par rapport à un plan parallèle au plan machine.
- Décalage vertical  $E_V$  : c'est le réglage vertical de la broche. Il positionne l'axe de la pièce à tailler par rapport au centre machine.
- Base coulissante  $E_S$  : c'est l'ajustement longitudinal de la base coulissante dans la direction parallèle à l'axe du berceau. Il positionne le point d'intersection de l'axe de la pièce avec un plan parallèle au plan machine relativement au centre machine.

Pour permettre de corriger la portée de contact, Gleason a développé plusieurs mécanismes. Parmi lesquels "Helical Motion". Ce mécanisme provoque un certain déplacement longitudinal de la base coulissante suivant l'axe du berceau durant le cycle de taillage [52,40]. Cette procédure est habituellement utilisée pour le pignon seulement.

La distance de la base coulissante  $E_s$  par rapport au plan machine est donnée par [14]:

$$E_s = \chi_b - \frac{L}{2\pi} \cdot \xi_c \quad (1-4)$$

Avec :

$E_s$  : position de la base coulissante pendant le taillage.

$\chi_b$ : réglage de base de la base coulissante.

$\xi_c$  : angle de rotation du berceau pendant le taillage.

$\frac{L}{2\pi}$  : paramètre du mouvement hélicoïdal (mm/rad), fonction du nombre de dents des roues du train de rechange et d'une constante machine [18,67].

### 3. Relation entre la rotation du berceau et celle de la pièce

Le berceau et la pièce sont connectés par un système de roues dentées et arbres permettant la synchronisation de la rotation du berceau et celle de la pièce à tailler. La vitesse de rotation de la pièce et la vitesse de rotation du berceau sont liées par le rapport de roulement défini par [53] :

$$\eta = \frac{\omega_w}{\omega_c} \quad (1-6)$$

Avec :

$\omega_w$  : vitesse angulaire de la pièce autour son axe .

$\omega_c$  : vitesse angulaire du berceau autour son axe .

Le rapport de roulement dépend de la méthode de taillage choisie ( méthode de taillage par ou sans génération).

- *Méthode de taillage par génération* : la forme de la denture est obtenue en appliquant la méthode des roulettes. Pour cette méthode nous avons deux possibilités pour le rapport de roulement :

1. *Roulement constant* : les vitesses angulaires  $\omega_c$  et  $\omega_w$  du berceau et de la pièce à tailler sont constantes. Par conséquent, le rapport de roulement l'est aussi.
2. *Roulement variable* : pour permettre de corriger la portée de contact, Gleason a développé un mécanisme qui modifie le rapport de roulement pendant le processus de taillage. Cette méthode de taillage est appelée "Roulement modifié" [9,25,55].

La relation cinématique entre les angles de rotation de la pièce  $\xi_w$  et du berceau  $\xi_c$  est représentée par une série de Taylor jusqu'au 5<sup>ème</sup> ordre [9,25,33]:

$$\xi_w = \eta(\xi_c - C \xi_c^2 - D \xi_c^3 - E \xi_c^4 - F \xi_c^5) \quad (1-7)$$

Les coefficients C, D, E et F sont calculés à partir des caractéristiques de la came utilisée, du nombre de dents et d'autres paramètres de la machine.

- *Méthode de taillage sans génération* : la forme de la denture est obtenue sans mouvement relatif entre pièce et fraise. Les vitesses angulaires du berceau  $\omega_c$  et de la pièce à tailler  $\omega_w$  sont nulles. Le rapport de roulement l'est aussi.

## 1-7. DESCRIPTION DES METHODES DE TAILLAGE DE GLEASON

Les surfaces de denture des engrenages spiro-coniques peuvent être obtenues par deux méthodes de taillage (par génération ou sans génération).

### 1-7-1. METHODE DE TAILLAGE PAR GENERATION

La surface de denture est obtenue par une roue génératrice fictive en appliquant la méthode des roulettes. Durant le processus de taillage, le berceau représentant le corps de la roue génératrice effectue un mouvement de rotation oscillatoire autour de son axe matérialisant l'axe de rotation de la roue génératrice imaginaire, tandis que la fraise entraînée par le berceau est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de son axe.

Pendant la rotation de la fraise, les lames enveloppent une surface dont la trace représente une dent de la roue génératrice (figure 1-11) [13,65]. La vitesse angulaire de la fraise est indépendante des vitesses de rotation de la pièce et du berceau, et ne dépend que de la vitesse de coupe désirée donnant un bon usinage [66,68].

La pièce à tailler à son tour est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de son axe. Pendant le taillage d'un entre-dent, la roue génératrice engrène avec la pièce à tailler (figure 1-11) et la surface de denture de la roue génératrice enveloppe la surface de denture de la pièce à tailler. A chaque instant ces deux surfaces sont en contact linéaire suivant une courbe spatiale dont la forme et l'emplacement sur les surfaces en contact changent pendant le processus d'engrènement [26,69,70].

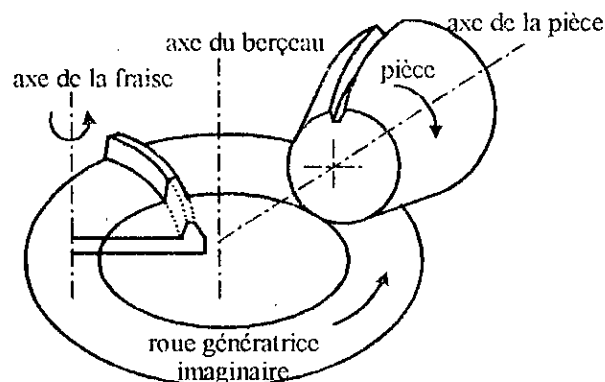


Figure 1-11 Principe de taillage par roue génératrice suivant la méthode de Gleason [22].

Les machines Gleason sont à division discontinue, c'est-à-dire qu'un entre-dent est taillé jusqu'à sa profondeur totale, suivi de la rotation de la pièce d'une division et ainsi de suite jusqu'au taillage du dernier entre-dent.

Les profils des dentures des engrenages spiro-coniques correspondent soit à des octoïdes de 1<sup>ère</sup> espèce ou à des octoïdes de 2<sup>ème</sup> espèce suivant la méthode de taillage [9,55].

1. *Octoïde de 2<sup>ème</sup> espèce* : l'axe du berceau est perpendiculaire au cône de pied de la pièce à tailler. Par conséquent, la roue génératrice est une roue conique (figure 1-12-b).

2. *Octoïde de 1<sup>ère</sup> espèce* : l'axe du berceau est perpendiculaire au cône primitif de la pièce. La roue génératrice est une roue plate (figure 1-12-a).



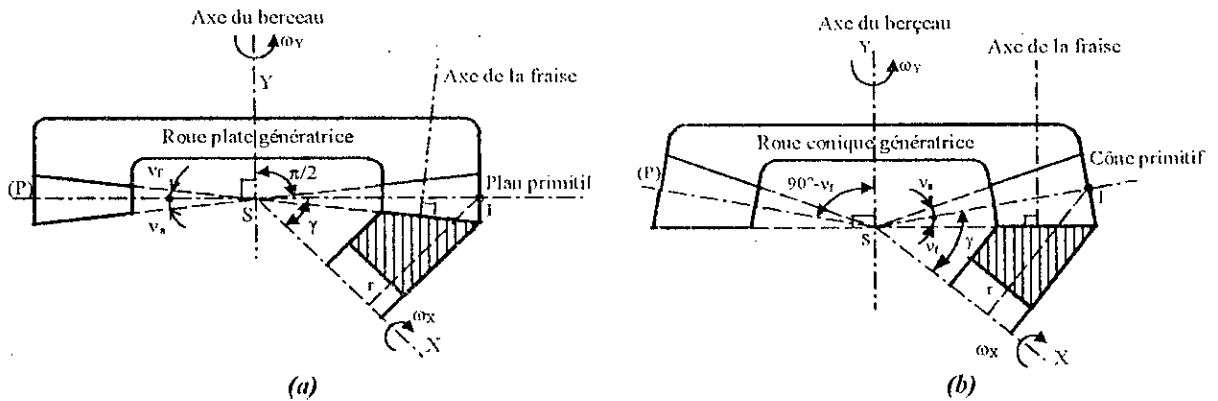


Figure 1-12 Différents types de profils [55].  
a- Octoïde de 1<sup>ère</sup> espèce. b- Octoïde de 2<sup>ème</sup> espèce.

### 1-7-2. METHODE DE TAILLAGE SANS GENERATION

C'est une application de la méthode des enveloppes. Elle n'est applicable que pour le taillage des roues dont l'angle primitif est plus grand approximativement que  $70^\circ$  [13,56,59].

La roue est taillée sans génération (sans mouvement relatif entre le berceau et la pièce) par une sorte de brochage en une seule passe (taillage de forme), avec finition du flanc concave et du flanc convexe en même temps. La surface de chaque flanc de la denture n'est qu'une copie de la surface de lame [63]. Parmi ces méthodes, nous citons la méthode FORMATE développée par Gleason [10,13,27,56,59]. La méthode FORMATE est à division discontinue comme la méthode de taillage par génération.

Les surfaces de denture de la roue ne sont pas générées, par contre les surfaces de denture du pignon doivent être générées [9,55].

### 1-8. PROFILS CONJUGUES

Les surfaces de denture des flancs conjugués sont dites conjuguées, si elles sont constamment tangentes suivant une ligne.

Pour obtenir des surfaces de denture conjuguées, certaines conditions géométriques et cinématiques doivent être remplies par les machines de taillage. Ces conditions sont les suivantes [9,22] :

1. Les surfaces génératrices des flancs conjugués doivent être en coïncidence parfaite,
2. Les axes de rotation des roues génératrices doivent être identiques,
3. Le plan de contact du pignon et de la roue est identique avec la roue génératrice (ligne de contact, même nombre de dents sur la roue génératrice).

Dans les méthodes de taillage Gleason, les axes des fraises sont normaux respectivement aux cônes de pied du pignon et au cône de pied de la roue. Etant donné que les lames sont à tranchants rectilignes, les surfaces génératrices sont des cônes. Dans cette situation, les axes des cônes font entre eux un angle égal à la somme des angles des creux ( $v_{fp} + v_{fg}$ ) (figure 1-13). Par conséquent, il est impossible d'avoir une coïncidence parfaite entre les deux cônes et les surfaces obtenues ne sont pas conjuguées et la transmission n'est pas exacte (le rapport de transmission n'est pas constant, des erreurs cinématiques dans la transmission existent. Ces erreurs sont la source majeure de bruits et de vibrations).

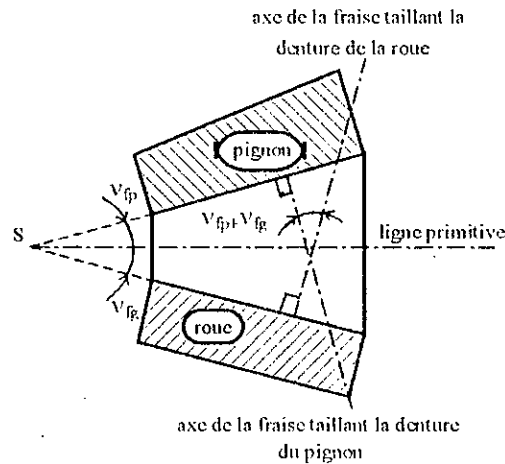


Figure 1-13 Disposition des axes des fraises de taillage du pignon et de la roue.

## 1-9. CYCLES DE TAILLAGE

Quatre cycles de taillage peuvent être utilisés pour la finition des surfaces de denture des engrenages spiro-coniques [55,57,58] :

1. *Spead Blade* : la pièce est taillée avec une fraise à lames alternées intérieures et extérieures, taillant simultanément les deux flancs concave et convexe d'un même creux.
2. *Single Setting* : c'est une variante de la précédente. Elle n'est utilisée que pour tailler des dentures de grande largeur afin d'éviter que deux lames consécutives taillent simultanément.
3. *Single Side* : la pièce est taillée avec une fraise à lames alternées intérieures et extérieures, taillant les deux flancs séparément avec des réglages machine différents.
4. *Fixed Setting* : La pièce est taillée avec deux fraises, une avec des lames intérieures seulement, et l'autre avec des lames extérieures. Les deux flancs sont taillés séparément sur deux machines avec des réglages machines entièrement différents.

Pour produire un couple d'engrenage spiro-conique, il est habituel de combiner les différents cycles cités. Pratiquement, nous n'avons que quatre combinaisons [58] :

- Spead Blade-Single Side,
- Spead Blade-Fixed Setting,
- Duplex Spead Blade,
- Single Side-Single Side.

## 1-10. CONCLUSION

Les différentes méthodes de taillage des engrenages spiro-coniques, les fraises ainsi que la machine Gleason avec les réglages machines associés ont été présentées dans ce chapitre.

Cette présentation est nécessaire, étant donné que la surface de denture des engrenages spiro-coniques est obtenue par simulation du procédé d'usinage en tenant compte des différents paramètres rentrant dans l'usinage.

## *CHAPITRE 2*

# **DESCRIPTION DU MODELE DE SIMULATION DE TAILLAGE DES ENGRENAGES SPIRO-ONIQUES**

## CHAPITRE 2

### DESCRIPTION DU MODELE DE SIMULATION DE TAILLAGE DES ENGRENAGES SPIRO-CONIQUES

#### 2-1. INTRODUCTION

La représentation mathématique des surfaces de denture des engrenages spiro-coniques est un problème complexe puisqu'elle ne possède pas de solutions analytiques pour les décrire. La détermination des coordonnées des points sur la surface de denture doit passer impérativement par une simulation numérique de la méthode de taillage utilisée.

Dans ce chapitre, nous présentons le modèle de simulation de taillage, en tenant compte des réglages machine, de la définition de la géométrie de la fraise utilisée, des mouvements relatifs entre pièce et fraise ainsi que des dimensions du pignon et de la roue en appliquant la théorie d'engrènement et la géométrie différentielle et en utilisant une représentation en coordonnées homogènes.

#### 2-2. COORDONNEES HOMOGENES

La transformée d'un point P de coordonnées (x, y, z) en un point P' de coordonnées (x', y', z') est obtenue par une formule de transformation linéaire des coordonnées donnée par un système d'équations algébriques en coordonnées :

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + d_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + d_2 \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + d_3 \end{cases} \quad (2-1)$$

Les  $a_{ij}$  ( $i=1,3$  et  $j=1,3$ ) et  $d_i$  ( $i=1,3$ ) représentent les paramètres de cette transformation.

En utilisant une notation matricielle, le système (2-1) peut être écrit sous une forme plus compacte et plus appropriée :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2-2)$$

La représentation d'une transformation linéaire par le système (2-2) est un artifice qui permet de représenter toute transformation linéaire quelconque par une matrice carrée. Cette représentation des coordonnées est dite représentation en coordonnées homogènes.

Les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace seront ainsi représentées par un vecteur à quatre composantes, dont la première, la deuxième et la troisième composante sont les coordonnées du point, et la quatrième composante est un terme unité pour homogénéisation de la notation. Par conséquent, en coordonnées homogènes, toute transformation linéaire de l'espace est caractérisée par une matrice carrée (4×4).

La représentation en coordonnées homogènes permet d'effectuer des rotations et des translations des vecteurs, simplement par multiplication des matrices de transformation correspondantes. La matrice résultante est une matrice carrée homogène du même ordre [52,71,72].

En coordonnées homogènes, les coordonnées d'un point exprimées dans un repère  $R_j$  seront exprimées dans un repère  $R_i$  par :

$$\begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & T_x \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & T_y \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_j \\ Y_j \\ Z_j \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2-3)$$

Où :  $X_i, Y_i$  et  $Z_i$ , sont les coordonnées du point dans le repère  $R_i$ .

$X_j, Y_j$  et  $Z_j$ , sont les coordonnées du même point exprimées dans le repère  $R_j$ .

$T_x, T_y$  et  $T_z$ : les coordonnées de l'origine du repère  $R_j$  dans le repère  $R_i$ .

$m_{11}, m_{12}$  et  $m_{13}$ : les cosinus directeurs du vecteur unitaire  $\vec{i}$  du repère  $R_i$  exprimées dans le repère  $R_j$ .

$m_{21}, m_{22}$  et  $m_{23}$ : les cosinus directeurs du vecteur unitaire  $\vec{j}$  du repère  $R_i$  exprimés dans le repère  $R_j$ .

$m_{31}, m_{32}$  et  $m_{33}$ : les cosinus directeurs du vecteur unitaire  $\vec{k}$  du repère  $R_i$  exprimés dans le repère  $R_j$ .

## 2-3. MODELISATION MATHEMATIQUE DU PROCEDE DE TAILLAGE

Pendant l'opération de taillage, si un point appartient à la surface de denture, alors il appartient également à la surface des lames de la fraise. Le modèle mathématique utilisé consiste à transformer les coordonnées d'un point sur la surface de lame de la fraise, en les coordonnées d'un point appartenant à la surface de denture de la pièce à tailler en utilisant les coordonnées homogènes.

### 2-3-1. MODELE MATHEMATIQUE DE LA FRAISE DE TAILLAGE

La fraise de taillage est constituée d'un certain nombre de lames. La section normale de chaque lame est composée de deux tranchants rectilignes inclinés taillant la partie active de la dent, et de deux parties circulaires taillant la racine de la dent (figure 2-1).

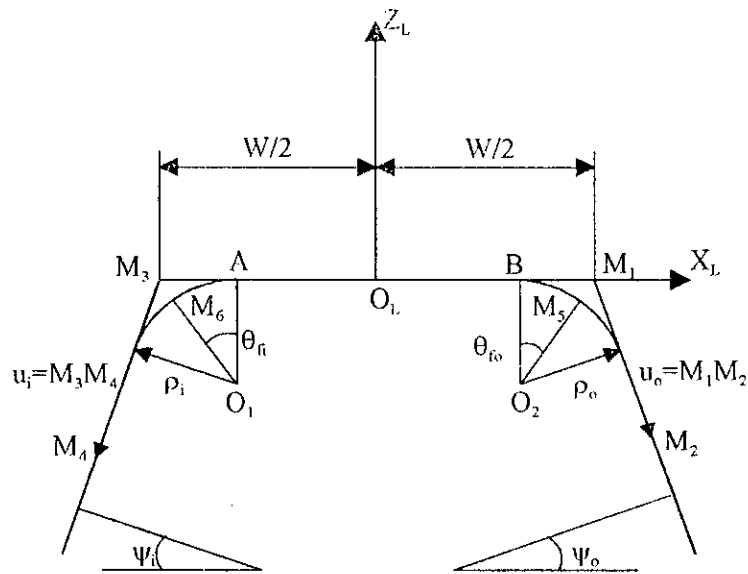


Figure 2-1 Section normale d'une lame [14].

- **Détermination des coordonnées d'un point sur la surface de lame**

- a- **Dans le repère lié à la lame**

Le repère  $R_L$  est rigidement lié à une lame, tel que son origine  $O_L$  est le milieu de la largeur d'entre pointes de la lame. L'axe  $\bar{Z}_L$  est parallèle à l'axe de rotation de la fraise, et les axes  $\bar{X}_L$  et  $\bar{Y}_L$  passent par le sommet des lames, avec l'axe  $\bar{X}_L$  est dirigé suivant la largeur de la lame (figure 2-1).

Le paramètre  $u_i$  positionne un point sur le tranchant rectiligne intérieur, et le paramètre  $u_o$  positionne un point sur le tranchant rectiligne extérieur.  $u_i$  est égale à la distance  $M_3M_4$  et  $u_o$  est égale à la distance  $M_1M_2$ . Les paramètres  $u_i$  et  $u_o$  constituent les coordonnées de surface d'un point sur les tranchants rectilignes intérieur et extérieur respectivement.

Le paramètre  $\theta_{fi}$  positionne un point sur le tranchant circulaire intérieur, et le paramètre  $\theta_{fo}$  positionne un point sur le tranchant circulaire extérieur.  $\theta_{fi}$  est égale à l'angle  $AO_1M_6$  et  $\theta_{fo}$  est égale à l'angle  $BO_2M_5$ , avec  $O_1$  et  $O_2$  sont les centres des rayons de raccordement des tranchants circulaires intérieur et extérieur respectivement. Les paramètres  $\theta_{fi}$  et  $\theta_{fo}$  constituent les coordonnées de surface d'un point sur les tranchants circulaires intérieur et extérieur respectivement.

$\psi_i$  et  $\psi_o$ , sont respectivement les angles de pression des tranchants rectilignes intérieur et extérieur.

$\rho_i$  et  $\rho_o$ , sont respectivement les rayons de raccordement pour les tranchants circulaires intérieur et extérieur.

$W$  est la largeur d'entre pointes égale à la distance  $M_1M_3$ .

Les coordonnées d'un point  $M_2$  sur le tranchant rectiligne extérieur sont exprimées dans le repère  $R_L$  par :

$$\begin{cases} X_L^o = \frac{W}{2} + u_o \sin \psi_o \\ Y_L^o = 0 \\ Z_L^o = -u_o \cos \psi_o \end{cases} \quad (2-4)$$

Les coordonnées d'un point  $M_4$  sur le tranchant rectiligne intérieur sont exprimées dans le repère  $R_L$  par :

$$\begin{cases} X_L^i = -\frac{W}{2} - u_i \sin \psi_i \\ Y_L^i = 0 \\ Z_L^i = -u_i \cos \psi_i \end{cases} \quad (2-5)$$

Les coordonnées d'un point  $M_5$  sur le tranchant circulaire extérieur sont exprimées dans le repère  $R_L$  par :

$$\begin{cases} X_L^{ro} = \frac{W}{2} - \rho_o \left( \frac{1 - \sin \psi_o}{\cos \psi_o} \right) + \rho_o \sin \theta_{fo} \\ Y_L^{ro} = 0 \\ Z_L^{ro} = -\rho_o (1 - \cos \theta_{fo}) \end{cases} \quad (2-6)$$

Les coordonnées d'un point  $M_6$  sur le tranchant circulaire intérieur sont exprimées dans le repère  $R_L$  par :

$$\begin{cases} X_L^{ri} = -\frac{W}{2} + \rho_i \left( \frac{1 - \sin \psi_i}{\cos \psi_i} \right) - \rho_i \sin \theta_{fi} \\ Y_L^{ri} = 0 \\ Z_L^{ri} = -\rho_i (1 - \cos \theta_{fi}) \end{cases} \quad (2-7)$$

Avec :

$$0 \leq \theta_{fo} \leq 90^\circ - \psi_o, \quad 0 \leq \theta_{fi} \leq 90^\circ - \psi_i, \quad u_o \geq \rho_o \left( \frac{1 - \sin \psi_o}{\cos \psi_o} \right) \quad \text{et} \quad u_i \geq \rho_i \left( \frac{1 - \sin \psi_i}{\cos \psi_i} \right)$$

#### b- dans le repère lié à la fraise

Le repère  $R_F$  est rigidement lié à la fraise, avec l'axe  $\vec{Z}_F$  est l'axe de rotation de la fraise et les axes  $\vec{X}_F$  et  $\vec{Y}_F$  passent par les sommets des lames. L'origine de  $R_F$  est le centre de la fraise  $O_F$ . La figure 2-2 montre la position d'une lame dans le repère  $R_F$ . Le paramètre  $\beta$  est la deuxième coordonnée de surface permettant le positionnement du repère de la lame  $R_L$  dans le repère  $R_F$ .

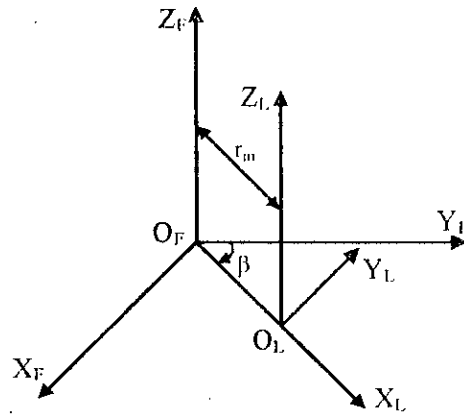


Figure 2-2 Position de la lame dans le repère  $R_F$  lié à la fraise.

Les coordonnées d'un point sur la lame (sur les tranchants rectilignes et circulaires) sont exprimées dans le repère  $R_F$  par :

$$\begin{Bmatrix} X_F \\ Y_F \\ Z_F \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \beta & -\cos \beta & 0 & r_m \sin \beta \\ \cos \beta & \sin \beta & 0 & r_m \cos \beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2-8)$$

Où :  $X_L$ ,  $Y_L$  et  $Z_L$ , sont les coordonnées de ce point exprimées dans le repère  $R_L$ , et  $r_m$  est le rayon de la fraise.

Les coordonnées d'un point sur la surface de lame exprimées dans le repère  $R_F$  sont fonctions des coordonnées de surface :

- $u_i$  et  $\beta$  si le point est sur le tranchant rectiligne intérieur.
- $u_o$  et  $\beta$  si le point est sur le tranchant rectiligne extérieur.
- $\theta_{ri}$  et  $\beta$  si le point est sur le tranchant circulaire intérieur.
- $\theta_{ro}$  et  $\beta$  si le point est sur le tranchant circulaire extérieur.

### 2-3-2. MISE EN POSITION DU CENTRE DE FRAISE ET INCLINAISON DE SON AXE

Le repère  $R_e$  est rigidement lié au berceau dont l'origine est  $O_e$  le centre machine. Le plan formé par les axes  $\bar{X}_e$  et  $\bar{Y}_e$  est le plan machine et l'axe  $\bar{Z}_e$  est l'axe de rotation du berceau (figure 2-3).

#### 1. Mise en position du centre de fraise

Le positionnement du centre de fraise sur le plan machine est déterminé par l'angle de berceau  $\phi_c$  et l'angle de l'excentrique  $\phi_e$ .

##### a- Réglage du berceau

A l'excentrique est lié le repère  $R_1$  dont l'axe  $\bar{Z}_1$  est parallèle à l'axe  $\bar{Z}_e$  et la distance entre eux est égale au rayon du cercle d'excentrique  $L$ .



Le réglage du berceau est obtenu en faisant tourner le berceau autour de l'axe  $\vec{Z}_e$  de l'angle  $\phi_c$ , avec le centre de fraise demeure confondu avec le centre machine  $O_c$  (figure 2-3).

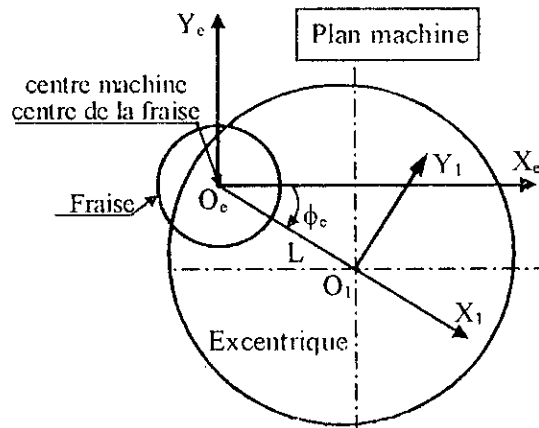


Figure 2-3 Positionnement du centre de l'excentrique dans le plan machine.

Les coordonnées d'un point exprimées dans le repère  $R_1$  seront exprimées dans le repère  $R_c$  par :

$$\begin{Bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_c & \sin \phi_c & 0 & L \cos \phi_c \\ -\sin \phi_c & \cos \phi_c & 0 & -L \sin \phi_c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2-9)$$

**b- Réglage de l'excentrique**

Le repère  $R_2$  est lié au socle d'axe  $\vec{Z}_2$  parallèle à l'axe du berceau et dont l'origine  $O_2$  est le centre de fraise. Le positionnement final du centre de fraise  $O_2$  sur le plan machine est obtenu en faisant tourner l'excentrique autour de l'axe  $\vec{Z}_1$  de l'angle  $\phi_c$ .

Puisque la distance entre le centre de la fraise  $O_2$  et le centre de l'excentrique  $O_1$  est égale au rayon du cercle d'excentrique  $L$ , le centre de la fraise  $O_2$  suit une trajectoire circulaire centrée en  $O_1$  (figure 2-4).

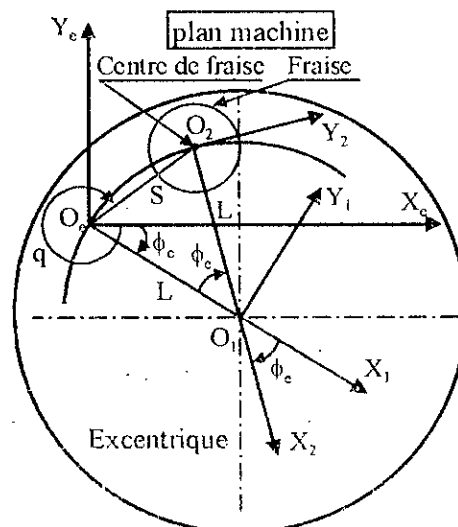


Figure 2-4 Positionnement du centre de fraise dans le plan machine. [18].

Les coordonnées d'un point exprimées dans le repère  $R_2$ , seront exprimées dans le repère  $R_1$  par :

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_c & \sin \varphi_c & 0 & L \cos \varphi_c \\ -\sin \varphi_c & \cos \varphi_c & 0 & L \sin \varphi_c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2-10)$$

### 1. Inclinaison de l'axe de la fraise

L'orientation et l'inclinaison de l'axe de fraise sont déterminées par le réglage du socle et de la tête porte fraise.

#### a- Réglage du socle

Le repère  $R_3$  est lié rigidement au socle, avec les origines  $O_2$  et  $O_3$  de  $R_2$  et de  $R_3$  confondues. Le réglage du socle s'obtient en le faisant tourner autour de l'axe  $\vec{Z}_2$  d'un angle  $\varphi_s$  (figure 2-5).

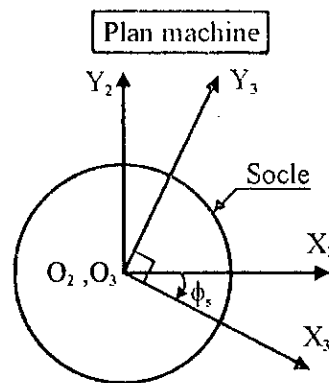


Figure 2-5 Relation entre le repère  $R_2$  et le repère  $R_3$ .

Les coordonnées d'un point exprimées dans le repère  $R_3$ , seront exprimées dans le repère  $R_2$  par :

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_s & \sin \varphi_s & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_s & \cos \varphi_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2-11)$$

#### b- Passage du repère lié au socle au repère lié à la tête porte fraise

A la tête porte fraise est lié le repère  $R_4$  dont l'axe  $\vec{Y}_4$  est parallèle à  $\vec{Y}_3$  et avec son origine  $O_4$  confondue avec  $O_3$ . L'axe  $\vec{Z}_4$  est normal au plan incliné et fait un angle constant avec l'axe  $\vec{Z}_3$  égal à  $\varepsilon$  (figure 2-6).

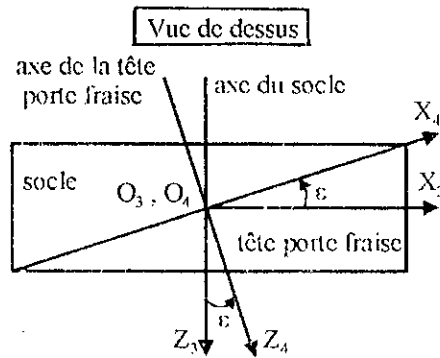


Figure 2-6 Relation entre le repère  $R_3$  et le repère  $R_4$ .

Les coordonnées d'un point exprimées dans le repère  $R_4$ , seront exprimées dans le repère  $R_3$  par :

$$\begin{Bmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon & 0 & \sin \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varepsilon & 0 & \cos \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ Z_4 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2-12)$$

### c- Réglage de la tête porte fraise

Le repère  $R_5$  est rigidement lié à la tête porte fraise, dont l'axe  $\bar{Z}_5$  est colinéaire à l'axe  $\bar{Z}_4$  avec les origines  $O_4$  et  $O_5$  confondues. Le réglage de la tête porte fraise est obtenu en faisant tourner la tête porte fraise autour de l'axe  $\bar{Z}_4$  d'un angle  $\varphi_t$  (figure 2-7).

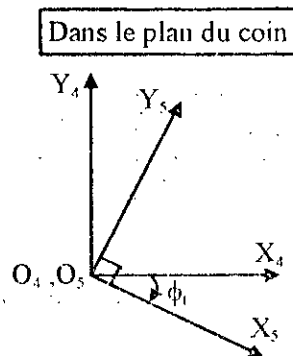


Figure 2-7 Relation entre le repère  $R_4$  et le repère  $R_5$ .

Les coordonnées d'un point exprimées dans le repère  $R_5$ , seront exprimées dans le repère  $R_4$  par :

$$\begin{Bmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ Z_4 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_t & \sin \varphi_t & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_t & \cos \varphi_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_5 \\ Y_5 \\ Z_5 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2-13)$$

#### d- Passage du repère lié à la tête porte fraise au repère lié à la fraise

L'axe  $\vec{Z}_F$  du repère lié à la fraise fait un angle constant égal à  $\varepsilon$  avec  $\vec{Z}_5$ , l'axe de rotation de la tête porte fraise, et dont les origines  $O_F$  et  $O_5$  de  $R_F$  et de  $R_5$  sont confondues (figure 2-8).

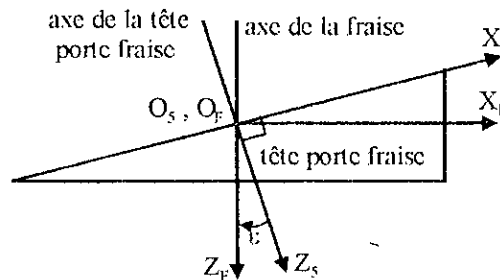


Figure 2-8 Relation entre le repère  $R_5$  et le repère  $R_F$ .

Les coordonnées d'un point exprimées dans le repère  $R_F$ , seront exprimées dans le repère  $R_5$  par :

$$\begin{Bmatrix} X_5 \\ Y_5 \\ Z_5 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon & 0 & -\sin \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \varepsilon & 0 & \cos \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_F \\ Y_F \\ Z_F \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2-14)$$

- **Expression des coordonnées d'un point de la fraise dans le repère  $R_e$**

Les composantes du vecteur position d'un point appartenant à une lame de fraise exprimées dans le repère  $R_F$ , peuvent être exprimées dans le repère  $R_e$  en effectuant le produit matriciel des relations (2-9)-(2-10)-(2-11)-(2-12)-(2-13) et (2-14) dans l'ordre inverse.

La matrice obtenue, est une matrice carrée homogène (4x4) représentant toutes les transformations effectuées depuis le repère  $R_F$  jusqu'au repère  $R_e$ .

Les coordonnées d'un point exprimées dans le repère  $R_F$ , seront exprimées dans le repère  $R_e$  par :

$$\begin{Bmatrix} X_e \\ Y_e \\ Z_e \\ 1 \end{Bmatrix} = [A_{Fe}] \begin{Bmatrix} X_F \\ Y_F \\ Z_F \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2-15)$$

Où :  $X_e$ ,  $Y_e$  et  $Z_e$ , représentent les coordonnées d'un point de la surface de denture de la roue génératrice, et  $[A_{Fe}]$  est la matrice de passage du repère  $R_F$  au repère  $R_e$  et est donnée par :

$$[A_{Fe}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

Les termes de la matrice  $[A_{1,c}]$  dépendent des réglages machine ( $\varphi_c, \varphi_s, \varphi_t$ ) et des paramètres spécifiques de la machine de taillage ( $L$  et  $\epsilon$ ). Par conséquent, sont constants pendant la simulation de taillage d'un flanc de la surface de denture.

### 2-3-3. RELATIONS ENTRE LE MOUVEMENT DE BERCEAU ET LA PIÈCE A TAILLER

#### A TAILLER

L'établissement des relations entre le berceau et la pièce à tailler nécessite trois étapes : le mouvement de roulement de berceau, le positionnement spatial de la pièce et le mouvement de roulement de la pièce.

#### 1. Mouvement de roulement de berceau

Si la surface de denture de la pièce à tailler est générée, alors durant le processus de taillage le berceau effectue un mouvement de rotation autour de son axe.

Au bâti de la machine est lié rigidement le repère  $R_b$ , dont l'axe  $\bar{Z}_b$  est confondu avec l'axe  $\bar{Z}_c$  du berceau, avec les origines  $O_b$  et  $O_c$  des repère  $R_b$  et  $R_c$  confondues.  $O_b$  est le centre machine tandis que le plan formé par les axes  $\bar{X}_b$  et  $\bar{Y}_b$  est le plan machine.

Au cours de taillage, le repère  $R_c$  effectue un mouvement de rotation autour de l'axe  $\bar{Z}_b$  de vitesse angulaire  $\vec{\omega}_c$ , dont l'angle de rotation est appelé angle de roulement du berceau et est noté  $\xi_c$  (figure 2-9).

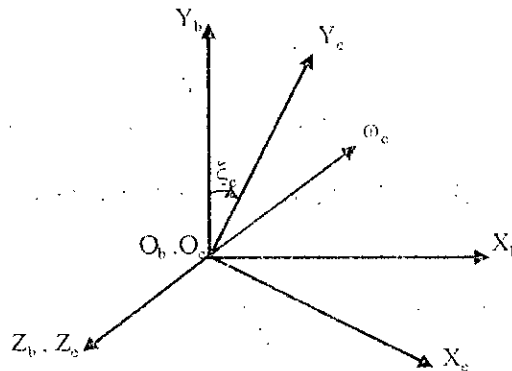


Figure 2-9 Relation entre le repère  $R_c$  et le repère  $R_b$ .

Les coordonnées d'un point exprimées dans le repère  $R_c$ , seront exprimées dans le repère  $R_b$  par :

$$\begin{Bmatrix} X_b \\ Y_b \\ Z_b \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \xi_c & \sin \xi_c & 0 & 0 \\ -\sin \xi_c & \cos \xi_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2-17)$$

#### 2. Positionnement de la pièce à tailler

Le positionnement de la pièce à tailler est obtenu par déplacement de la base coulissante, rotation du chariot, décalage vertical de la broche et déplacement de la poupée suivant l'axe de la pièce.

A la broche est lié le repère  $R_{br}$ . L'axe  $\vec{X}_{br}$  fait un angle  $\gamma_m$  avec le plan machine et l'axe  $\vec{Y}_{br}$  est parallèle à l'axe  $\vec{Y}_b$  (figure 2-10-a-b).

Le positionnement de  $O_{br}$  origine du repère  $R_{br}$  est effectué en fonction des paramètres suivants :

- La distance de la base coulissante ( $E_s$ ) par rapport au plan machine,
- Le décalage vertical ( $E_v$ ) de l'axe de la pièce par rapport au centre machine  $O_b$  suivant l'axe  $\vec{Y}_b$ ,
- Le décalage horizontal ( $E_h$ ) de  $O_{br}$  suivant  $\vec{X}_b$ .

Les axes du repère  $R_{po}$  lié à la poupée sont parallèles à ceux du repère  $R_{br}$ , mais avec un déplacement de son origine  $O_{po}$  sommet du cône primitif de la pièce à tailler suivant  $\vec{X}_{po}$  d'une distance  $D_x$ .

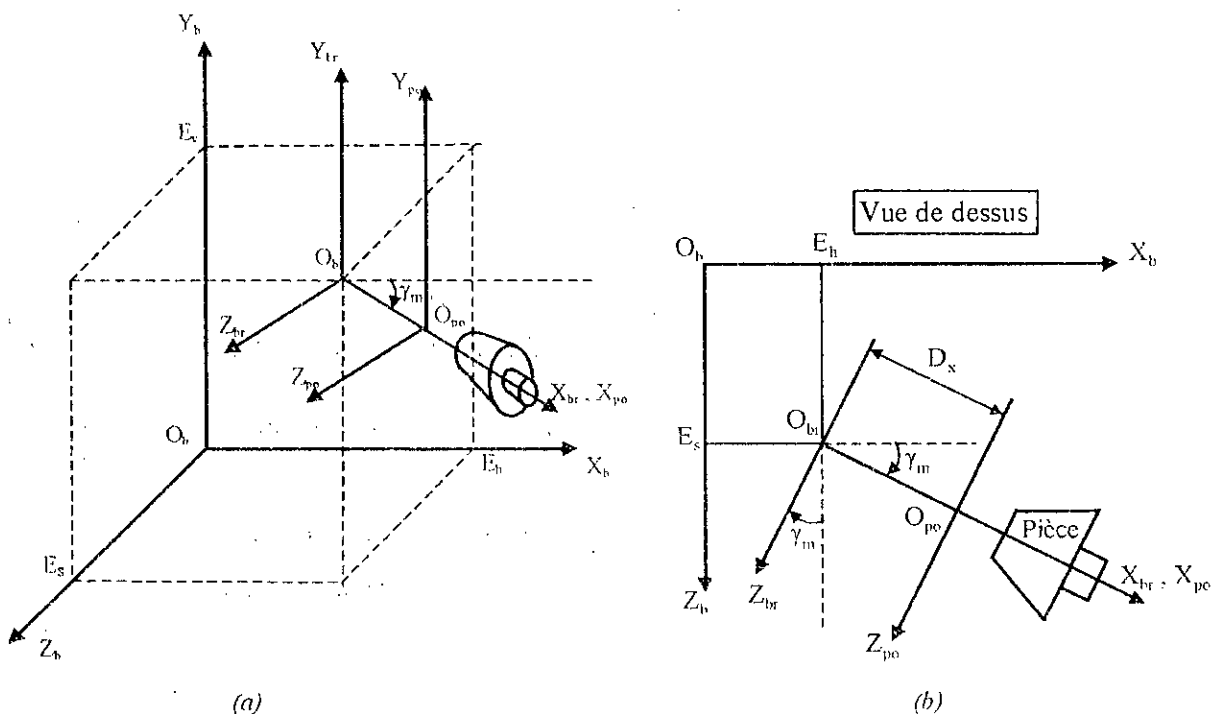


Figure 2-10 Positionnement spatial de la pièce à tailler dans le repère  $R_b$   
 a- Positionnement spatial des repères  $R_{br}$  et  $R_{po}$  par rapport au repère  $R_b$   
 b- Positionnement de  $O_{br}$  et  $O_{po}$  dans le plan  $X_bZ_b$

Les coordonnées d'un point exprimées dans le repère  $R_b$ , seront exprimées dans le repère  $R_{po}$  par :

$$\begin{Bmatrix} X_{po} \\ Y_{po} \\ Z_{po} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_m & 0 & \sin \gamma_m & -(E_h \cos \gamma_m + E_s \sin \gamma_m) - D_x \\ 0 & 1 & 0 & -E_v \\ -\sin \gamma_m & 0 & \cos \gamma_m & E_h \sin \gamma_m - E_s \cos \gamma_m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_b \\ Y_b \\ Z_b \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2-18)$$

### 3. mouvement de roulement de la pièce

La pièce effectue un mouvement de rotation uniforme autour de son axe si sa surface de denture est générée.

A la pièce à tailler est lié rigidement le repère  $R_p$ , dont l'axe de rotation  $\bar{X}_p$  est confondu avec l'axe  $\bar{X}_{p0}$  et les origines  $O_p$  et  $O_{p0}$  des repères  $R_p$  et  $R_{p0}$  confondues.

Au cours de taillage le repère  $R_p$  effectue un mouvement de rotation autour de l'axe  $\bar{X}_{br}$  avec une vitesse angulaire  $\bar{\omega}_p$ , dont l'angle de rotation est appelé angle de roulement de pièce et est noté  $\xi_w$  (figure 2-11).

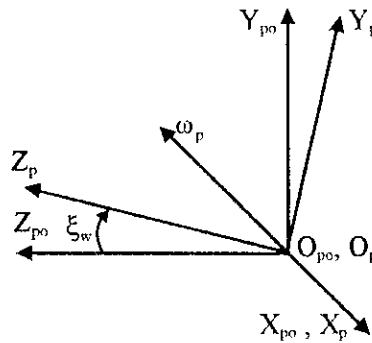


Figure 2-11 Relation entre le repère  $R_p$  et le repère  $R_{p0}$

Les coordonnées d'un point exprimées dans le repère  $R_{p0}$ , seront exprimées dans le repère  $R_p$  par :

$$\begin{Bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cos \xi_w & -\sin \xi_w & 0 \\ 0 & \sin \xi_w & \cos \xi_w & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{p0} \\ Y_{p0} \\ Z_{p0} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2-19)$$

- Expression des coordonnées d'un point de la roue génératrice dans le repère  $R_p$

Les composantes du vecteur position d'un point appartenant à la roue génératrice exprimées dans le repère  $R_e$ , peuvent être exprimées dans le repère  $R_p$  en effectuant le produit matriciel des relations (2-17), (2-18) et (2-19) dans l'ordre inverse. La matrice résultante est une matrice carrée homogène (4x4) représentant toutes les transformations effectuées depuis le repère  $R_e$  jusqu'au repère  $R_p$ .

Les coordonnées d'un point exprimées dans le repère  $R_e$ , seront exprimées dans le repère  $R_p$  par :

$$\begin{Bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \\ 1 \end{Bmatrix} = [A_{ep}] \begin{Bmatrix} X_e \\ Y_e \\ Z_e \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2-20)$$

Où :  $[A_{eP}]$  est la matrice de passage du repère  $R_e$  au repère  $R_p$  donnée par :

$$[A_{eP}] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

Les termes de la matrice  $[A_{eP}]$  dépendent des réglages machine ( $D_x, E_h, E_v, E_s, \gamma_m, \chi_b, L/(2\pi)$ ) et des paramètres de génération les angles de rotation du berceau et de la pièce. Par conséquent, ils sont variables pendant la simulation de taillage d'un flanc de la surface de denture.

- **Transformation des coordonnées d'un point du repère  $R_F$  au repère  $R_P$**

Connaissions la matrice de transformation des coordonnées  $[A_{Fe}]$  du repère  $R_F$  au repère  $R_e$  et la matrice de transformation des coordonnées  $[A_{eP}]$  du repère  $R_e$  au repère  $R_P$ , les composantes du vecteur position d'un point appartenant à la fraise seront exprimées dans le repère  $R_P$  par :

$$\begin{Bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{Bmatrix} = [A_{FP}] \begin{Bmatrix} X_F \\ Y_F \\ Z_F \\ 1 \end{Bmatrix} = [A_{eP}] [A_{Fe}] \begin{Bmatrix} X_F \\ Y_F \\ Z_F \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2-22)$$

Où :  $[A_{FP}]$  est la matrice de passage du repère  $R_F$  au repère  $R_P$ .

#### 2-3-4. EQUATION D'ENGRENEMENT

Si la surface de denture est générée, la surface génératrice et la surface générée sont à chaque instant en contact linéaire suivant une courbe spatiale. En chaque point de contact sur cette ligne, la normale à la surface génératrice est perpendiculaire au vecteur vitesse relative entre la fraise et la surface de denture de la pièce.

Mathématiquement, cette condition est exprimée par le produit scalaire suivant [14,22,52,69]:

$$\vec{n} \cdot \vec{V}_r = 0 \quad (2-23)$$

Où :

$\vec{n}$  : est le vecteur normal à la surface génératrice et à la surface générée au point considéré.

$\vec{V}_r$  : est la vitesse relative entre la fraise et la pièce au même point considéré.

L'équation (2-23) est appelée "Equation d'Engrenement". Elle permet la définition de l'équation de la surface de denture de n'importe quelle géométrie d'engrenage, selon la méthode de génération, la géométrie de l'outil et son mouvement relatif par rapport à la pièce à tailler. Elle permet également d'assurer que la surface de denture générée et la fraise sont tout le temps tangentes durant le processus de taillage. Si cette équation n'est pas vérifiée en



certaines points, alors il y aura interpénétration des surfaces (problème d'interférence au cours de taillage).

L'équation d'engrènement est une équation scalaire ne dépendant pas du repère choisi. Nous choisissons le repère  $R_b$  pour exprimer cette condition. Ainsi le vecteur normal  $\vec{n}$  et le vecteur vitesse relative  $\vec{V}_r$  seront exprimés dans  $R_b$ .

### 1. Calcul du vecteur normal

Si une surface (S) quelconque est fonction de deux paramètres  $u$  et  $v$ , alors le vecteur position  $\vec{R}$  d'un point appartenant à cette surface sera également fonction des paramètres  $u$  et  $v$ .

$$\vec{R} = \vec{R}(u, v) \quad (2-24)$$

Les paramètres  $u$  et  $v$  représentent les coordonnées de surface d'un point sur cette surface.

La normale en n'importe quel point à cette surface est donnée par [2,3,4,73] :

$$\vec{N} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{R}}{\partial v} \quad (2-25)$$

et le vecteur normal unitaire est donné par :

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} \quad (2-26)$$

La rotation des lames autour de l'axe de la fraise enveloppent quatre surfaces de révolution d'axe de révolution l'axe de la fraise. Les coordonnées de surface  $u$  et  $v$  de chaque surface sont :

- 1-  $u=u_0$  et  $v=\beta$  pour le tranchant rectiligne extérieur.
- 2-  $u=u_i$  et  $v=\beta$  pour le tranchant rectiligne intérieur.
- 3-  $u=\theta_{f0}$  et  $v=\beta \theta_{f0}$  pour le tranchant circulaire extérieur.
- 4-  $u=\theta_{f0}$  et  $v=\beta \theta_{f0}$  pour le tranchant circulaire intérieur.

### 2. Calcul de la vitesse relative

La vitesse relative entre un point sur la surface de lame et le même point sur la surface de denture est donnée par la relation :

$$\vec{V}^r = \vec{V}_c^{(b)} - \vec{V}_p^{(b)} \quad (2-27)$$

Où :  $\vec{V}_c^{(b)}$  est la vitesse absolue d'un point sur la surface de lame exprimée dans le repère  $R_b$  et  $\vec{V}_p^{(b)}$  est la vitesse absolue du même point sur la surface de denture de la pièce à tailler exprimée dans le repère  $R_b$ .

Chaque point sur la surface de lame effectue un mouvement de rotation autour de l'axe  $\bar{Z}_b$  avec une vitesse angulaire  $\bar{\omega}_c$  (figure 2-9), dont la vitesse linéaire est donnée par :

$$\bar{V}_c^{(b)} = \bar{R}_b \wedge \bar{\omega}_c = \begin{Bmatrix} X_b \\ Y_b \\ Z_b \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\omega_c Y_b \\ \omega_c X_b \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-28)$$

Avec :  $\bar{R}_b$  est le vecteur position de ce point exprimé dans le repère  $R_b$ .

Chaque point sur la surface de denture de la pièce à tailler effectue un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe  $\bar{X}_p$  avec une vitesse angulaire  $\bar{\omega}_p$  (figure 2-11), et en même temps est animé d'une vitesse linéaire de translation suivant l'axe  $\bar{Z}_b$  si le mécanisme du mouvement hélicoïdal est utilisé.

La vitesse linéaire résultante de ce point est donnée par la relation :

$$\bar{V}_p^{(b)} = (\bar{O}_{br} \bar{O}_b + \bar{R}_b) \wedge \bar{\omega}_p + \frac{L}{2\pi} \omega_c \bar{k}_b = \begin{Bmatrix} X_b - E_h \\ Y_b - E_v \\ Z_b - E_s \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} -\omega_p \cos \gamma_m \\ 0 \\ -\omega_p \sin \gamma_m \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{L}{2\pi} \omega_c \end{Bmatrix} \quad (2-29)$$

Avec :  $X_b$ ,  $Y_b$  et  $Z_b$ , les composantes du vecteur position  $\bar{R}_b$  exprimées dans le repère  $R_b$ .

Les vitesses angulaires  $\omega_c$  et  $\omega_p$  du berceau et de la pièce à tailler sont liées par le rapport de roulement  $\eta$  :

$$\omega_p = \eta \omega_c \quad (2-30)$$

A partir des relations (2-28), (2-29) et (2-30), le vecteur vitesse relative sera donné par :

$$\bar{V}^r = \begin{Bmatrix} \eta \omega_c (Y_b - E_v) \sin \gamma_m - \omega_c Y_b \\ -\eta \omega_c (X_b - E_h) \sin \gamma_m + \eta \omega_c (Z_b - E_s) \cos \gamma_m + \omega_c X_b \\ -\eta \omega_c (Y_b - E_v) \cos \gamma_m - \frac{L}{2\pi} \omega_c \end{Bmatrix} \quad (2-31)$$

L'équation d'engrènement est obtenue en effectuant le produit scalaire des relations (2-26) et (2-31). Cette équation est donnée par :

$$\begin{aligned} & (\eta \omega_c (Y_b - E_v) \sin \gamma_m - \omega_c Y_b) n_x + (-\eta \omega_c (X_b - E_h) \sin \gamma_m + \eta \omega_c (Z_b - E_s) \cos \gamma_m + \omega_c X_b) n_y \\ & + \left( -\eta \omega_c (Y_b - E_v) \cos \gamma_m - \frac{L}{2\pi} \omega_c \right) n_z = 0 \end{aligned} \quad (2-32)$$

Avec :  $n_x$ ,  $n_y$  et  $n_z$  les composantes du vecteur normal unitaire exprimées dans le repère  $R_b$  calculées par la relation (2-26).

## 2-4. CONCLUSION

Le modèle mathématique du procédé de taillage décrit dans ce chapitre est basé sur l'utilisation d'une représentation en coordonnées homogènes. Dans ce modèle, nous avons tenu compte des réglages machine et de la géométrie de la fraise, en appliquant la théorie d'engrènement et la géométrie différentielle.

Avec cette modélisation, nous pouvons calculer les coordonnées des points sur les flancs concave et convexe d'un engrenage conique à denture spirale de type *Zerol*, *Spiro-conique* ou *Hypoïde* et dont la hauteur de denture est variable.

## *CHAPITRE 3*

# **AUTOMATISATION DE LA GENERATION DU MAILLAGE**

## CHAPITRE 3

### AUTOMATISATION DE LA GENERATION DU MAILLAGE

#### 3-1. INTRODUCTION

L'utilisation de la méthode des éléments finis nécessite une étape de préparation des tables des coordonnées et des connectivités. Lorsque le nombre de nœuds devient important ainsi que le nombre d'éléments qu'il faut utiliser pour représenter la solution avec une précision suffisante ainsi que la géométrie (en particulier si le domaine qu'il faut représenter est tridimensionnel et de forme complexe), cette étape de préparation devient volumineuse et entachées d'erreurs inévitables, c'est le cas des engrenages spiro-coniques.

Pour les applications industrielles, on doit disposer d'outils d'assistance permettant la préparation et la vérification des données. Cela nécessite le développement de programmes de génération automatique et de tracé de maillage.

Dans ce chapitre, nous présentons la procédure suivie dans le code de calcul que nous avons développé pour la génération automatique du maillage et des conditions aux limites.

#### 3-2. PROCEDURE DE CALCUL DES COORDONNEES D'UN POINT SUR UN FLANC

La procédure de calcul des coordonnées d'un point sur la surface d'un flanc de denture dépend directement du procédé de taillage (taillage par génération ou taillage sans génération).

##### 3-2-1. SURFACE GENEREE

Si la surface de denture est générée, les coordonnées de chaque point sur cette surface doivent vérifier l'équation d'engrènement donnée par la relation (2-23).

L'équation d'engrènement est une équation algébrique non linéaire liant trois variables : deux coordonnées de surface,  $u_i$  et  $\beta$  pour le tranchant rectiligne intérieur,  $u_o$  et  $\beta$  pour le tranchant rectiligne extérieur,  $\theta_{fi}$  et  $\beta$  pour le tranchant circulaire intérieur,  $\theta_{fo}$  et  $\beta$  pour le tranchant circulaire extérieur et le paramètre de génération l'angle de rotation du berceau  $\xi_c$ .

Handschuh et Litvin [52,53] ont utilisé une méthode permettant le calcul des coordonnées des points sur chaque flanc de la denture. Cette méthode convient très bien pour la génération automatique du maillage.

La méthode utilise le processus de transformation des coordonnées d'un point sur la surface de la lame de fraise en les coordonnées du même point exprimées dans le repère  $R_p$  lié à la pièce, les dimensions générales de la pièce ainsi que l'équation d'engrènement. Le but de cette démarche est la formation de deux autres équations nécessaires à la résolution, pour construire un système d'équations non linéaires à trois variables qu'il faut résoudre.

Par la suite le paramètre  $u$  représentera  $u_i$  ou  $u_o$ , et le paramètre  $\theta_f$  représentera  $\theta_{fi}$  ou  $\theta_{fo}$ , afin de traiter les flancs concave et convexe de la même manière.

### • CONDITIONS A SATISFAIRE

Un point sur la surface de la lame appartient à la surface de denture si les trois conditions suivantes sont vérifiées simultanément :

#### • condition 1

Le point doit vérifier l'équation d'engrènement :

$$\bar{n} \bar{V}_r = 0 \quad (3-1)$$

Où:  $\bar{n}$  est le vecteur normal unitaire à la surface de la lame et à la surface de denture au point considéré, et  $\bar{V}_r$  est le vecteur vitesse relative entre les surfaces de la lame et de la denture au point considéré.

Si le point est situé dans la partie active de la dent, l'équation (3-1) est mise sous la forme :

$$f_i(u, \beta, \xi_c) = 0 \quad (3-2-1)$$

Et si le point est situé dans la racine de la dent, alors :

$$f_i(\theta_f, \beta, \xi_c) = 0 \quad (3-2-2)$$

#### • Condition 2

En utilisant les dimensions générales de la pièce calculées à partir du système de proportion [74], et par des considérations géométriques, nous calculons la position axiale notée  $\bar{X}$  d'un point sur la surface de denture dans le repère  $R_p$  lié à la pièce (figure 3-1).

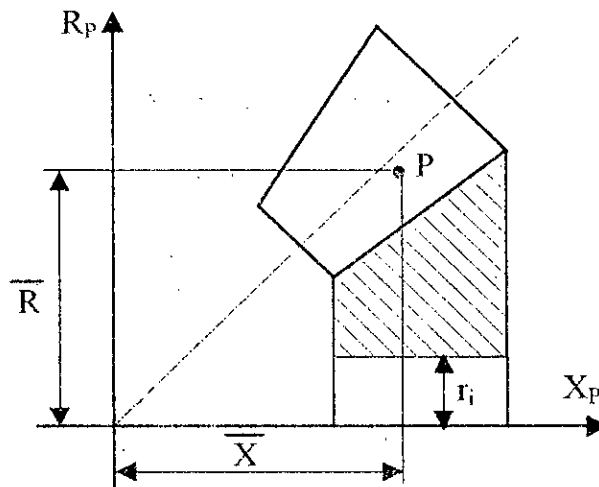


Figure 3-1 La position axiale  $\bar{X}$  et la distance radiale  $\bar{R}$  d'un point sur la surface de denture.

Après la transformation d'un point sur la surface de lame, et en exprimant ses coordonnées dans le repère  $R_p$ . La coordonnée  $X_p$  doit être égale à  $\bar{X}$ .

Cette condition s'écrit sous la forme :

$$\bar{X} - X_p = 0 \quad (3-3)$$

Si le point est situé dans la partie active de la dent, l'équation (3-3) est mise sous la forme :

$$f_2(u, \beta, \xi_c) = 0 \quad (3-4-1)$$

Et si le point est situé dans la racine de la dent, alors :

$$f_2(\theta_f, \beta, \xi_c) = 0 \quad (3-4-2)$$

• Condition 3

En utilisant les dimensions générales de la pièce calculées à partir du système de proportion [74], et par des considérations géométriques, nous calculons la distance radiale notée  $\bar{R}$  d'un point sur la surface de denture dans le repère  $R_p$  (figure 3-1).

Après transformation d'un point sur la surface de lame, et en exprimant ses coordonnées dans le repère  $R_p$ . A partir des nouvelles coordonnées  $Y_p$  et  $Z_p$  nous calculons la distance radiale  $R$  par rapport à l'axe  $\bar{X}_p$ .

Cette condition s'écrit sous la forme :

$$\bar{R} - R = 0 \quad (3-5)$$

Avec :

$$R = \sqrt{Y_p^2 + Z_p^2} \quad (3-6)$$

Si le point est situé dans la partie active de la dent, l'équation (3-5) est mise sous la forme:

$$f_3(u, \beta, \xi_c) = 0 \quad (3-7-1)$$

Et si le point est situé dans la racine de la dent, alors :

$$f_3(\theta_f, \beta, \xi_c) = 0 \quad (3-7-2)$$

Les équations (3-1), (3-3) et (3-5) prises simultanément définissent un système de trois équations algébriques non linéaires à trois variables :

- $u, \beta$  et  $\xi_c$  si le point est situé dans la partie active de la dent,
- $\theta_f, \beta$  et  $\xi_c$  si le point est situé dans la racine de la dent.

### 3-2-2. SURFACE NON GENEREE

La surface de denture n'est pas générée; par conséquent l'équation d'engrènement n'est pas alors nécessaire.

Pour qu'un point sur la surface de lame soit un point appartenant à la surface de denture, il faut que les coordonnées de ce point vérifient simplement les relations (3-3) et (3-5) avec la condition :

$$\xi_c = \xi_w = 0 \quad (3-8)$$

Les équations (3-3) et (3-5) prises simultanément définissent un système de deux équations algébriques non linéaires à deux variables :

- $u$  et  $\beta$  si le point est dans la partie active de la dent,
- $\theta_f$  et  $\beta$  si le point est dans la racine de la dent.

### 3-3. DISCRETISATION DE LA SURFACE D'UN FLANC

La surface de denture est discrétisée en un certain nombre de points afin de déterminer leurs coordonnées et par suite cette surface.

Dans le cadre du travail, dans le programme que nous avons développé, la surface d'un flanc est discrétisée en  $n_s$  éléments dans la saillie,  $n_x$  éléments suivant la largeur de denture,  $n_{c1}$  éléments dans la partie active du creux et en  $n_{c2}$  éléments dans la racine de la dent [75] (figure 3-2).

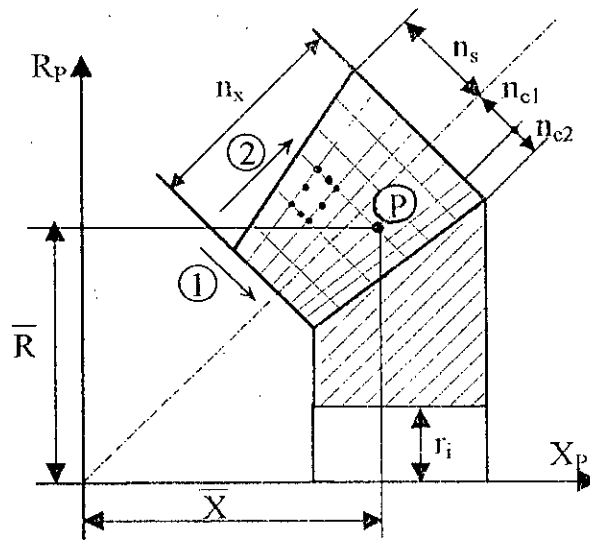


Figure 3-2 Discretisation de la surface d'un flanc de la dent.

Le nombre d'éléments suivant la hauteur de la dent noté  $n_r$  est égal à :

$$n_r = n_s + n_{c1} + n_{c2} \quad (3-9)$$

Pour chaque point spécifié sur un flanc, la distance radiale et la position axiale sont calculées et le système d'équations algébriques non linéaires correspondant est résolu pour déterminer ses coordonnées.



Les flancs (concave et convexe) d'une dent sont discrétisés de la même manière avec les mêmes nombres d'éléments. La même procédure est suivie pour chaque flanc.

Le premier point à calculer se trouve au sommet de la dent du côté petit bout, et les flèches 1 et 2 représentées en figure 3-2 indiquent l'ordre de parcourt sur chaque flanc.

### 3-4. ALGORITHMES DE RESOLUTION

Pour les deux cas envisagés (surface générée et surface non générée), nous devons résoudre un système d'équations algébriques fortement non linéaires ne possédant pas de solutions analytiques.

La résolution ne peut être faite que numériquement par des méthodes itératives, où le nombre d'itérations n'est pas connu et dont la rapidité de convergence dépend essentiellement des valeurs des estimés initiaux.

Pour résoudre les systèmes obtenus, deux méthodes de résolution ont été combinées.

- La méthode de Newton-Raphson qui converge si la matrice Jacobienne n'est pas singulière et si le vecteur estimé initial  $X^{(0)}$  est suffisamment proche de la solution exacte  $X^*$  [76,77,78]. Si ses conditions sont vérifiées, la convergence est quadratique. Cependant, l'inconvénient de cette méthode est la possibilité de non convergence si l'estime initial  $X^{(0)}$  n'est pas suffisamment proche de  $X^*$ .

- La méthode du gradient conjugué dont la convergence est certaine même si l'estime initial  $X^{(0)}$  est loin de la solution exacte  $X^*$ , mais elle peut se bloquer sur un minimum local [77,78]. Cette méthode a une convergence linéaire.

Il semble donc judicieux de générer l'estimé initial de la méthode de Newton-Raphson par la méthode du gradient conjugué. C'est cette démarche qui est utilisée par l'algorithme de résolution.

Pour les deux méthodes, nous devons construire la matrice Jacobienne, dont l'ordre dépend du type de la surface simulée.

- Pour une surface générée : les inconnues du problème sont :

- $x_1=u$ ,  $x_2=\beta$  et  $x_3=\xi_c$  pour des points dans la partie active de la dent,
- $x_1=\theta_f$ ,  $x_2=\beta$  et  $x_3=\xi_c$  pour des points dans la racine de la dent.

La matrice Jacobienne  $E(X)$  est d'ordre 3 et elle est donnée par :

$$E(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

Où :  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  sont les fonctions données par les relations (3-2), (3-4) et (3-7) et qui correspondent à la partie prise de la dent.

- Pour une surface non générée : les inconnues du problème sont :
  - $x_1=u$  et  $x_2=\beta$  pour des points dans la partie active de la dent,
  - $x_1=\theta_f$  et  $x_2=\beta$  pour des points dans la racine de la dent.

La matrice Jacobienne  $E(X)$  est d'ordre 2 et elle est donnée par :

$$E(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (3-12)$$

Où :  $f_1, f_2$  sont les fonctions données par les relations (3-4) et (3-7) et qui correspondent à la partie prise de la dent.

Pour les deux cas (surface générée et surface non générée), les fonctions obtenues doivent être dérivées par rapport à toutes les inconnues à chaque itération pour former la matrice Jacobienne. Vu la forme complexe de ces fonctions et les erreurs inévitables lors d'une dérivation manuelle, nous avons opté pour une dérivation numérique en appliquant la formule des cinq points [76].

L'organigramme donné par la figure 3-3 résume les étapes suivies pour le calcul des coordonnées d'un point sur la surface de denture.

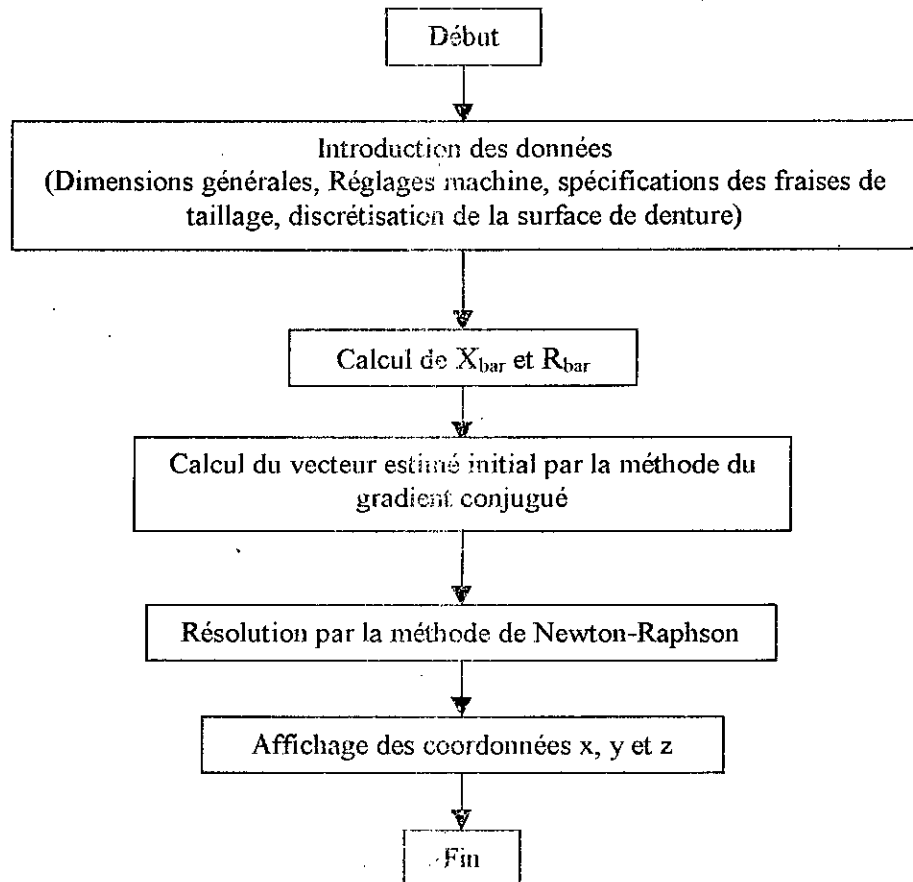


Figure 3-3 Organigramme de calcul des coordonnées d'un point.

### 3-5. ORIENTATION DES FLANCS CONCAVE ET CONVEXE

D'après la procédure adoptée pour le calcul des coordonnées, les deux flancs ne sont pas analysés simultanément, et rien ne nous affirme que les surfaces des deux flancs sont dans leur propre orientation relative. Nous devons donc déterminer l'angle de rotation d'un flanc par rapport à l'autre pour avoir la bonne orientation relative et par suite la bonne épaisseur de dent.

L'angle de rotation est déterminé dans le repère  $R_P$  lié à la pièce par la condition d'avoir la bonne épaisseur de la dent entre deux points homologues situés sur les flancs concave et convexe.

Pour faire ce travail, nous avons choisi deux possibilités :

1. Les deux points se trouvent au sommet de la dent du côté petit bout, pour ce cas nous devons avoir l'épaisseur du plat au sommet de la dent.
2. Les deux points se trouvent sur le cône primitif du côté gros bout de la dent, pour ce cas nous devons avoir l'épaisseur de la dent dans le cône primitif.

Pour les deux possibilités, le flanc concave est fixe, et c'est le flanc convexe qui subit cette rotation qui dépend du sens de spirale, du nombre de dent et de l'épaisseur voulue.

Nous définissons les paramètres suivants (figure 3-4 et figure 3-5) :

$r$ , la distance radiale des points considérés.

$P_1$ , la position d'un point sur le flanc concave.

$P_2$ , la position initiale d'un point sur le flanc convexe.

$P_2'$ , la position finale d'un point sur le flanc convexe après rotation.

$\beta$ , l'angle formé entre les deux points homologues dans leur position finale correspondant à l'épaisseur de dent désirée.

$\xi$ , l'angle d'un point sur le flanc concave.

$\delta$ , l'angle final d'un point sur le flanc convexe.

$\theta_1$  ou  $\theta_2$ , l'angle initial d'un point sur le flanc convexe.

$\phi_1$  ou  $\phi_2$ , l'angle de rotation nécessaire pour avoir l'épaisseur de la dent entre les deux points homologues considérés.

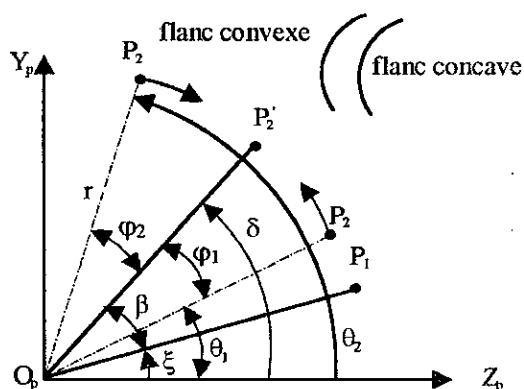


Figure 3-4 Orientation des flancs concave et convexe pour un sens de spirale à droite.

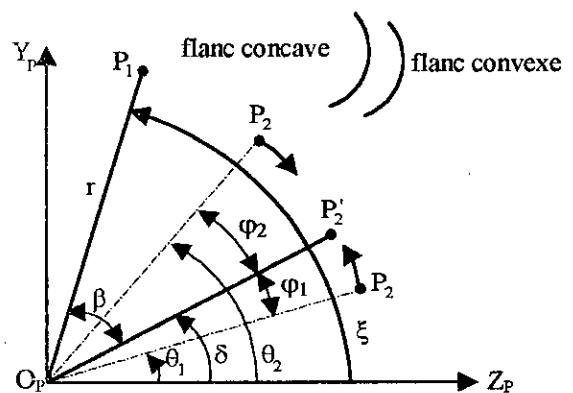


Figure 3-5 Orientation des flancs concave et convexe pour un sens de spirale à gauche.

L'angle de rotation est déterminé dans le plan  $Y_P Z_P$  perpendiculaire à l'axe de rotation de la pièce. Cet angle est donné par :

$$\phi_1 = |\delta - \theta_1| \quad (3-14)$$

Ou :

$$\phi_2 = |\delta - \theta_2| \quad (3-15)$$

La rotation est faite dans le sens horaire si  $\theta_2 > \delta$ , et dans le sens anti-horaire si  $\theta_1 < \delta$ .

Après avoir déterminé l'angle de rotation, tous les points sur le flanc convexe vont subir une rotation dans le même sens et avec le même angle de rotation.

### 3-6. MAILLAGE D'UNE DENT

La dent est définie par deux réseaux de points représentant les flancs concave et convexe. A partir de cet ensemble de points, nous devons déterminer les coordonnées des points à l'intérieur de la dent et ceux de la jante et générer le maillage. Dans le cadre de notre travail pour la génération automatique du maillage, nous avons utilisé l'élément hexaédrique à 20 nœuds (figure 3-6).

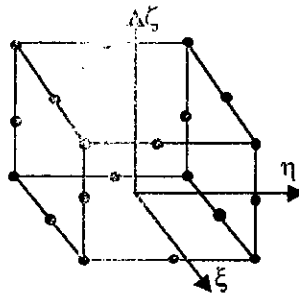


Figure 3-6 Élément utilisé pour la génération du maillage.

La génération automatique du maillage d'une dent est faite en trois étapes:

- **Etape 1** : à partir des deux réseaux de points des flancs concave et convexe, et en spécifiant le nombre d'éléments suivant l'épaisseur de la dent (figure 3-7), les tables de coordonnées et de connectivités de la dent sont établies.

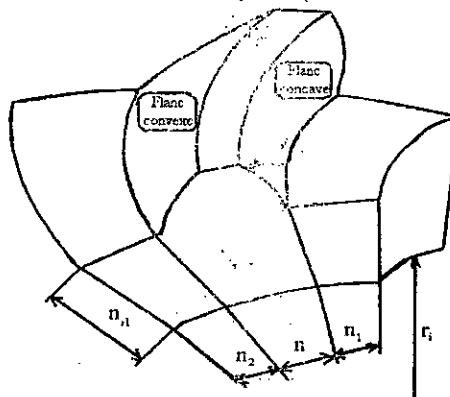


Figure 3-7 Différentes divisions de jante.

- **Etape2** : en spécifiant les nombres d'éléments du côté concave de la dent, du côté convexe et suivant l'épaisseur de la jante (figure 3-7), les parties de la jante sont localisées (figure 3-8), et par suite les tables de coordonnées et de connectivités de la jante sont établies.

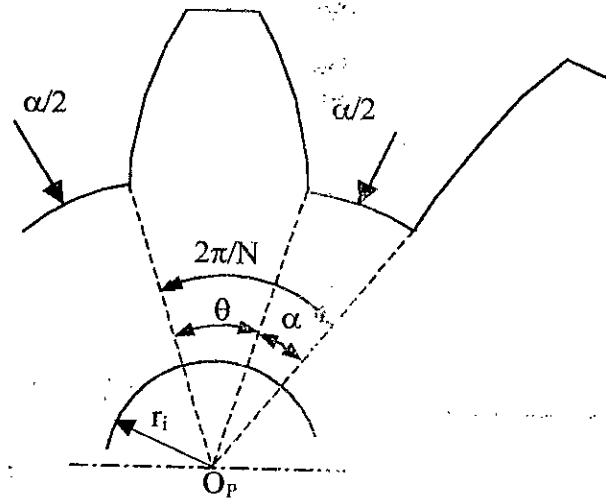


Figure 3-8 Localisation des parties de la jante liées à une dent.

Pour le rayon intérieur  $r_i$  de la jante, nous avons émis deux possibilités :

1. Le rayon intérieur est pris constant égal au rayon intérieur de la jante,
  2. Le rayon intérieur est variable (nous avons à spécifier une épaisseur constante de la jante égale à  $x$  fois la hauteur de la dent).
- **Etape3** : établissement des tables de coordonnées et de connectivités globales de l'ensemble dent-jante.

Le maillage de l'ensemble dent-jante est automatique et en même temps conversationnel et flexible, puisque les nombres d'éléments à spécifier ( $n_s$ ,  $n_{c1}$ ,  $n_{c2}$ ,  $n_x$ ,  $n_{r1}$ ,  $n_1$  et  $n_2$ ) sont arbitraires et peuvent être choisis pour affiner le maillage dans une seule région.

### 3-7. MAILLAGE D'UN CERTAIN NOMBRE DE DENTS

Le mailleur que nous avons développé, permet également de mailler n'importe quel nombre de dents avec la jante incluse, jusqu'au maillage complet de la pièce considérée.

La génération automatique du maillage d'un certain nombre de dent est faite en trois étapes:

- **Etape 1** : génération du maillage de chaque dent en suivant les mêmes étapes du paragraphe précédent.
- **Etape 2** : tous les nœuds d'une dent subissent une rotation de  $(I-1)*2\pi/N$ , où  $N$  est le nombre de dents du membre considéré et  $I$  le numéro de la dent.
- **Etape 3** : détermination des nœuds d'interface entre les dents adjacentes, puis établissement des tables de coordonnées et de connectivités globales.

Pour le maillage d'un certain nombre de dents, nous avons le choix entre deux possibilités :

- La première possibilité est le maillage de toutes les dents de la même manière avec les mêmes divisions. Pour ce cas il suffit de spécifier les paramètres du maillage ( $n_s$ ,  $n_{c1}$ ,  $n_{c2}$ ,  $n_x$ ,  $n_{r1}$ ,  $n$ ,  $n_1$  et  $n_2$ ) une seule fois.

- La deuxième est le maillage de chaque dent indépendamment des autres. Pour ce cas les paramètres ( $n_s$ ,  $n_{c1}$ ,  $n_{c2}$ ,  $n$ ,  $n_1$  et  $n_2$ ) sont spécifiés pour chaque dent.

Pour les deux possibilités considérées, les paramètres  $n_{r1}$  et  $n_x$  sont pris les mêmes pour toutes les dents afin d'assurer la continuité à l'interface entre les éléments des dents adjacentes.

La deuxième possibilité est très importante du fait qu'il n'est pas nécessaire d'affiner le maillage loin des zones ne présentant pas des gradients importants en contraintes, pour ne pas augmenter le temps de résolution et l'espace mémoire nécessaire au stockage des différentes matrices sans amélioration de la précision des résultats.

La génération du maillage d'une dent est illustrée par l'organigramme donné par la figure 3-9.

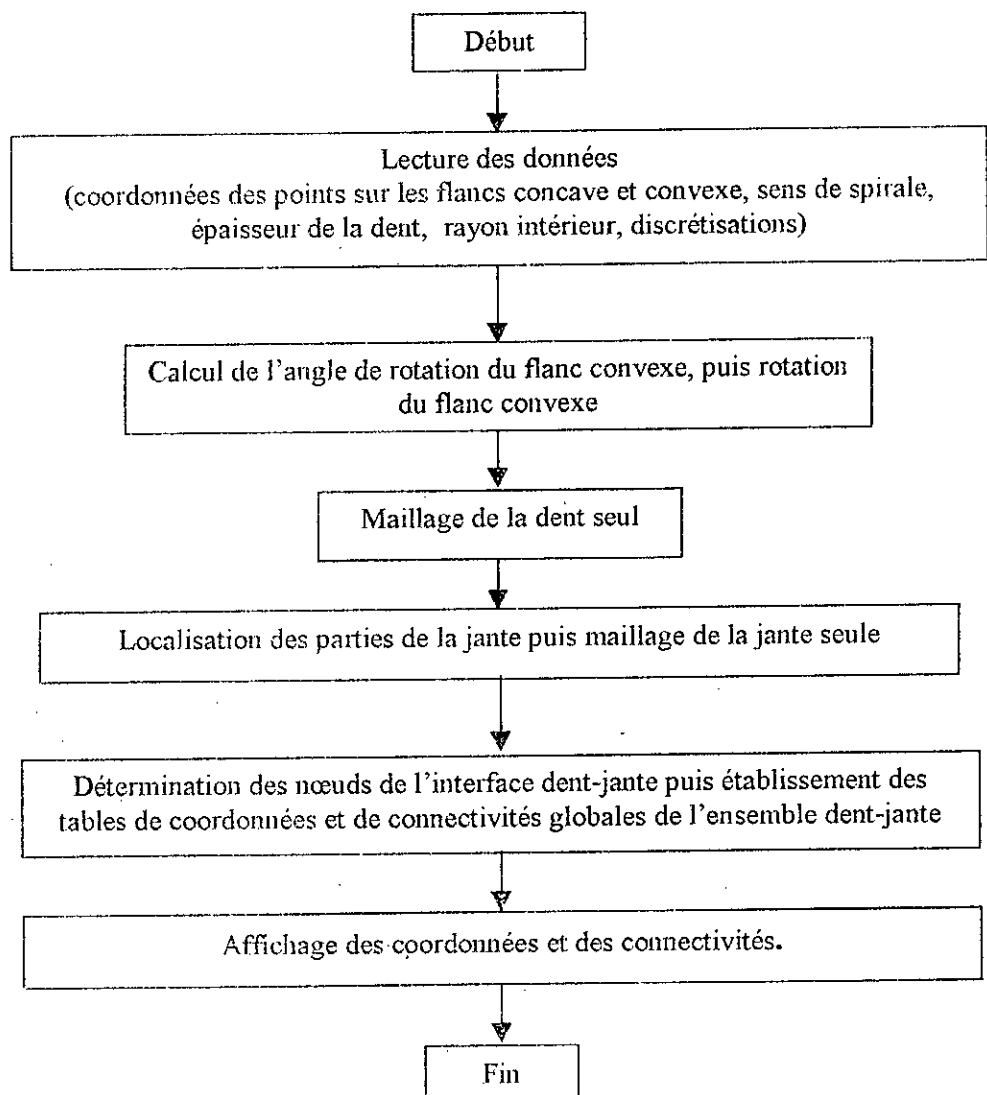


Figure 3-9 Organigramme du maillage automatique d'une dent.

La génération du maillage de plusieurs dents est donné par l'organigramme de la figure 3-10.

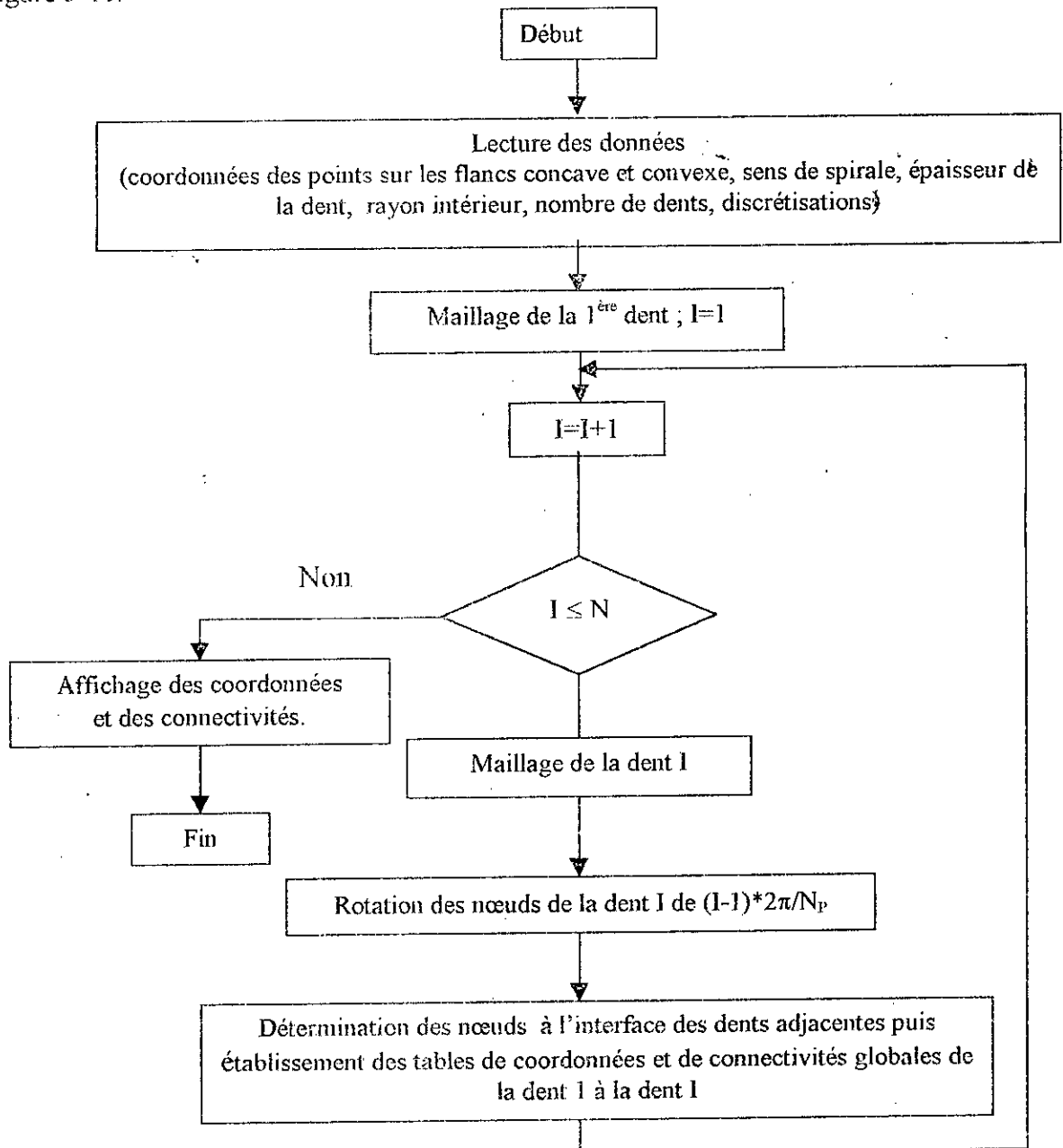


Figure 3-10 Organigramme de la génération du maillage de plusieurs dents.

Le mailleur que nous avons développé peut être également utilisé pour mailler tous les types d'engrenages couramment utilisés dans l'industrie (engrenages cylindriques à denture droite ou hélicoïdale, engrenages coniques à denture droite, hélicoïdale et à denture spirale).

### 3-8. INTRODUCTION DES CONDITIONS AUX LIMITES

L'introduction des conditions aux limites en des endroits spécifiques est une opération très longue et difficile, et peut être entachée d'erreurs inévitables, particulièrement où nous avons à traiter une géométrie tridimensionnelle complexe.

Pour notre étude, cinq cas de conditions aux limites peuvent être générées automatiquement après maillage.

Les cinq cas de conditions aux limites sont :

1. Sur la jante des côtés concave et convexe de la dent (figure 3-11-a),
2. Sur le rayon intérieur de la jante (figure 3-11-b),
3. Les cas 1 et 2 simultanément (figure 3-11-c),
4. Le cas 3 et la surface de la jante des côtés petit et gros bout de la dent (figure 3-11-d).
5. Toute la surface de la jante (figure 3-11-e).

Pour tous ces cas, les nœuds sont bloqués dans les trois directions ( $u=0$ ,  $v=0$ ,  $w=0$ ), où  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont les déplacements suivant les axes  $X_p$ ,  $Y_p$  et  $Z_p$ .

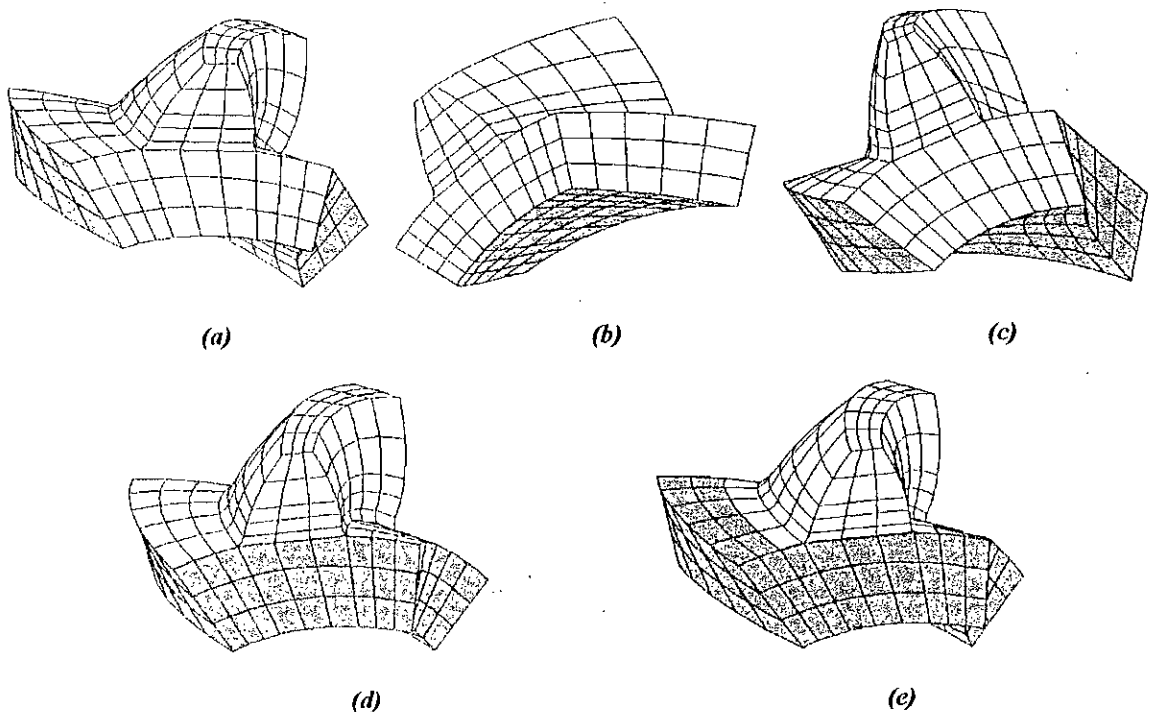


Figure 3-11 Différentes conditions aux limites pouvant être générées automatiquement.

### 3-9. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté la procédure suivie pour la génération automatique du maillage d'une ou de plusieurs dents. En discrétisant la surface de denture, la partie active de la dent et la partie de raccordement entre le cône de pied et la partie active peuvent être définies.

Pour la génération du maillage, les coordonnées des points sur la surface de denture peuvent être déterminées numériquement ou à partir de mesures prises avec une machine à mesurer tridimensionnelle. La procédure présentée n'est pas spécifique aux engrenages spiro-coniques, mais peut être utilisée pour d'autres types d'engrenages.



## *CHAPITRE 4*

# **SIMULATION D'ENGRENEMENT DU PIGNON ET DE LA ROUE**

## CHAPITRE 4

### SIMULATION D'ENGRENEMENT DU PIGNON ET DE LA ROUE

#### 4-1. INTRODUCTION

Contrairement aux engrenages cylindriques à denture droite où le chargement est linéaire et supporté par toute la largeur de denture, les engrenages spiro-coniques sont à contact ponctuel et dont le point de contact se déplace sur la surface de denture [21,47]. Des erreurs de réglage et de montage modifient la position du point de contact.

A cause de la forme complexe des surfaces de denture des engrenages spiro-coniques, les différents points de contact ne peuvent être obtenus que numériquement par simulation de l'engrènement du pignon et de la roue dans leurs positions relatives de fonctionnement.

Dans ce chapitre, nous simulons l'engrènement du pignon et de la roue en tenant compte de possibles défauts de positionnement des deux membres, afin de déterminer les coordonnées des différents points de contact et les composantes du vecteur normal qui servent au calcul des charges nodales équivalentes.

#### 4-2. DEFLEXIONS RELATIVES ENTRE LE PIGNON ET LA ROUE

Théoriquement les axes du pignon et de la roue sont concourants. Mais, après chargement, les supports d'arbres ainsi que les engrenages fléchissent, ce qui modifie la position relative entre le pignon et la roue. De même cette modification peut être causée par des défauts de positionnement des deux membres.

Les déplacements relatifs d'un membre par rapport à l'autre sont caractérisés par [24,55,70] (figure 4-1):

- E, la modification de la distance verticale qui sépare les axes du pignon et de la roue.
- P, la modification de la position axiale du pignon.
- G, la modification de la position axiale de la roue.
- $\alpha$ , la modification de l'angle de croisement des arbres du pignon et de la roue.

Les valeurs de ces modifications sont relevées sur le banc d'essai de flexion. Lorsque ces données de flexion ne sont pas disponibles, des déflexions approchées sont calculées.

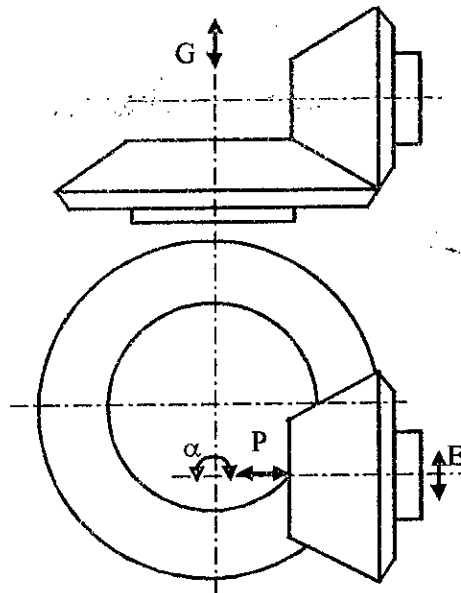


Figure 4-1 Différents défauts d'alignement.

### 4-3. MACHINE DE CONTRÔLE DES ENGRÉNAGES SPIRO-CONIQUES

Les engrenages spiro-coniques fonctionnent généralement sous mésalignements causés par les tolérances des supports et les déflexions. Il est donc nécessaire de les tester en des conditions similaires. La firme Gleason a mis sur le marché plusieurs types de machines de contrôle spécialement adaptées à cet effet. Ces machines sont utilisées pour simuler l'engrènement du pignon et de la roue, déterminer la longueur totale de contact, et pour contrôler (la forme, la position, l'orientation et les dimensions de la portée de contact), vérifier la douceur de fonctionnement et apprécier le bruit résultant.

Une machine de contrôle universelle est conçue avec quatre degrés de liberté [61]:

- E, l'ajustement perpendiculaire aux axes du pignon et de la roue,
- P, l'ajustement axial du pignon,
- G, l'ajustement axial de la roue,
- $\alpha$ , l'ajustement de l'angle de croisement des arbres du pignon et de la roue.

En agissant séparément ou simultanément sur les différents ajustements (E, P, G et  $\alpha$ ), nous simulons les différents défauts d'alignement.

Le pignon et la roue sont montés dans leur position de fonctionnement dans la machine de contrôle. Les surfaces de denture sont enduites d'un produit colorant. En faisant engrener le couple sous faible charge, le produit colorant est éjecté des zones de contact suite au contact des dents. Cette zone constitue la portée de contact [36,79].

A la suite de nombreux essais sur machine de contrôle sous faible charge, Gleason a trouvé que le contact autour du point théorique se produit lorsque la distance de séparation entre les surfaces de denture est égale ou inférieure à 0,00635 mm [25,36,79,80].

## 4-4. ANALYSE DE CONTACT DES DENTS

L'analyse de contact des dents sert à simuler l'engrènement et le contact des engrenages à défauts d'alignement, afin de déterminer l'influence des erreurs de fabrication, de montage et de positionnement et des déflexions des arbres. Elle permet également de prédire la performance cinématique du couple d'engrenages et de contrôler la qualité de la portée de contact.

### 4-4-1. BASES MATHÉMATIQUES DE L'ANALYSE DE CONTACT DES DENTS

#### 1. Hypothèses

L'analyse de contact des dents est basée sur les hypothèses suivantes [24,36,79] :

- Les dents sont rigides,
- Il n'y a qu'une paire de dents en contact à chaque instant,
- L'engrènement des dents se fait sous faible charge,
- Le contact des dents aura lieu lorsque la distance de séparation entre les surfaces de denture est inférieure ou égale à 0,00635 mm,
- Le membre menant tourne à une vitesse constante.

#### 2. Conditions de contact des dents

Le contact des surfaces de denture des engrenages spiro-coniques est ponctuel. La position d'un point de contact sur les surfaces de denture est obtenue en spécifiant deux conditions (figure 4-2) [12,20,25] :

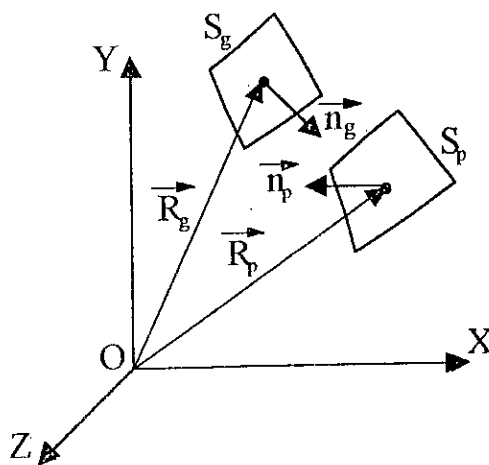


Figure 4-2 Conditions de contact des surfaces de dentures.

$$\begin{cases} \vec{R}_p = \vec{R}_g & (4-1) \\ \vec{n}_p + \vec{n}_g = \vec{0} & (4-2) \end{cases}$$

Avec :

$$|\vec{n}_p| = |\vec{n}_g| = 1 \quad (4-3)$$

Où :  $\vec{R}_p$  et  $\vec{n}_p$  représentent respectivement le vecteur position et le vecteur normal unitaire à la surface de denture  $S_p$  d'un point du pignon;  $\vec{R}_g$  et  $\vec{n}_g$  représentent respectivement le vecteur position et le vecteur normal unitaire à la surface de denture  $S_g$  d'un point de la roue.

### 3. Données nécessaires à l'analyse de contact des dents

Pour analyser le contact des surfaces de denture, les données suivantes doivent être connues :

- Les réglages machine pour les flancs du pignon et de la roue,
- Les spécifications des fraises de taillage des flancs du pignon et de la roue,
- Les dimensions générales du pignon et de la roue,
- Les valeurs des défauts d'alignement (E, P, G et  $\alpha$ ),
- Les flancs en contact.

### 4. Résultats de l'analyse de contact des dents

Les résultats de l'analyse de contact des dents permettent la quantification de toutes les caractéristiques du couple considéré.

Pour chaque point de contact, nous pouvons connaître :

- La position angulaire du membre menant et du membre mené,
- La vitesse absolue du point sur la dent du pignon et sur la dent de la roue,
- Les caractéristiques géométriques des surfaces de denture,
- Le vecteur position et le vecteur normal unitaire du point de contact sur la surface de denture du pignon et de la roue.

Les points successifs de contact peuvent être connectés par une courbe appelée chemin de contact ou ligne d'action [20].

#### 4-4-2. SIMULATION D'ENGRENEMENT

La simulation d'engrènement est basée sur une modélisation mathématique de la machine de contrôle. A cette machine est lié rigidement le repère  $R_f$  dont la position correspond au couple d'engrenages montés sans défauts, son origine est  $O_f$  et l'axe  $\vec{X}_f$  est parallèle à l'axe de rotation de la roue.

Afin de simuler l'engrènement, nous devons définir la position du pignon et de la roue dans la machine de contrôle ainsi leur rotation pendant le fonctionnement.

#### 1. Positionnement de la tête porte roue

A la tête porte roue est lié rigidement le repère  $R_{g1}$  dont l'origine  $O_{g1}$  est le sommet du cône primitif de la roue. Ces axes sont parallèles à ceux du repère  $R_f$  et de même sens, avec l'axe  $\vec{X}_{g1}$  est déplacé suivant  $\vec{X}_f$  de G, et l'axe  $\vec{Y}_{g1}$  est déplacé suivant  $\vec{Y}_f$  de E (figure 4-3).

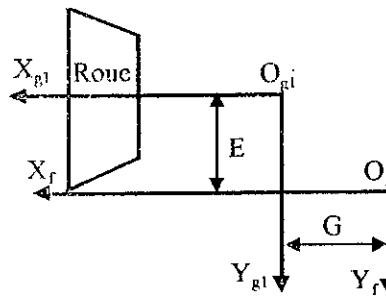


Figure 4-3 Relation entre le repère  $R_f$  et le repère  $R_{g1}$

Les coordonnées d'un point exprimées dans le repère  $R_{g1}$  seront exprimées dans le repère  $R_f$  par :

$$\begin{cases} x_f^g \\ y_f^g \\ z_f^g \\ 1 \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & G \\ 0 & 1 & 0 & -E \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} x_{g1} \\ y_{g1} \\ z_{g1} \\ 1 \end{cases} \quad (4-4)$$

## 2. Rotation de la roue

Le repère  $R_g$  est lié rigidement à la roue. Les origines  $O_g$  et  $O_{g1}$  confondues, ainsi que  $\bar{X}_g$  et  $\bar{X}_{g1}$ . Pendant l'engrènement, la roue effectue un mouvement de rotation autour de l'axe  $\bar{X}_{g1}$ , d'angle de rotation noté  $\varphi_g$  (figure 4-4).

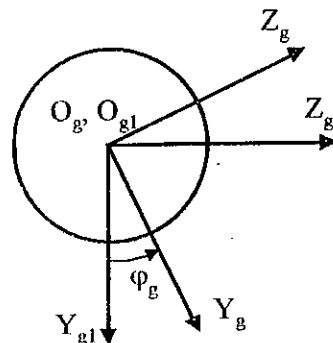


Figure 4-4 Relation entre le repère  $R_{g1}$  et le repère  $R_g$

Les coordonnées d'un point exprimées dans le repère  $R_g$  seront exprimées dans le repère  $R_{g1}$  par :

$$\begin{cases} x_{g1} \\ y_{g1} \\ z_{g1} \\ 1 \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_g & -\sin\varphi_g & 0 \\ 0 & \sin\varphi_g & \cos\varphi_g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} x_g \\ y_g \\ z_g \\ 1 \end{cases} \quad (4-5)$$

Où :  $x_g$ ,  $y_g$  et  $z_g$ , les coordonnées d'un point sur la surface de denture de la roue exprimées dans le repère  $R_g$ .

A partir des équations (4-4) et (4-5), les coordonnées d'un point exprimées dans le repère  $R_g$  seront exprimées dans le repère  $R_f$  par :

$$\begin{Bmatrix} x_f^g \\ y_f^g \\ z_f^g \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & G \\ 0 & \cos\varphi_g & -\sin\varphi_g & -E \\ 0 & \sin\varphi_g & \cos\varphi_g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4-6)$$

### 3. Positionnement de la tête porte pignon

A la tête porte pignon est lié rigidement le repère  $R_{p1}$ . Les axes  $\bar{X}_{p1}$  et  $\bar{Z}_{p1}$  sont contenus dans le plan  $X_f Z_f$  avec  $\bar{Y}_{p1}$  et  $\bar{Y}_f$  parallèles et de sens opposé. L'axe de rotation du pignon  $\bar{X}_{p1}$  fait un angle égal à  $\alpha$  avec  $\bar{X}_f$ .  $O_{p1}$  origine de  $R_{p1}$  est le sommet du cône primitif du pignon déplacé d'une distance égale à  $P$  suivant l'axe  $\bar{X}_{p1}$  (figure 4-5).

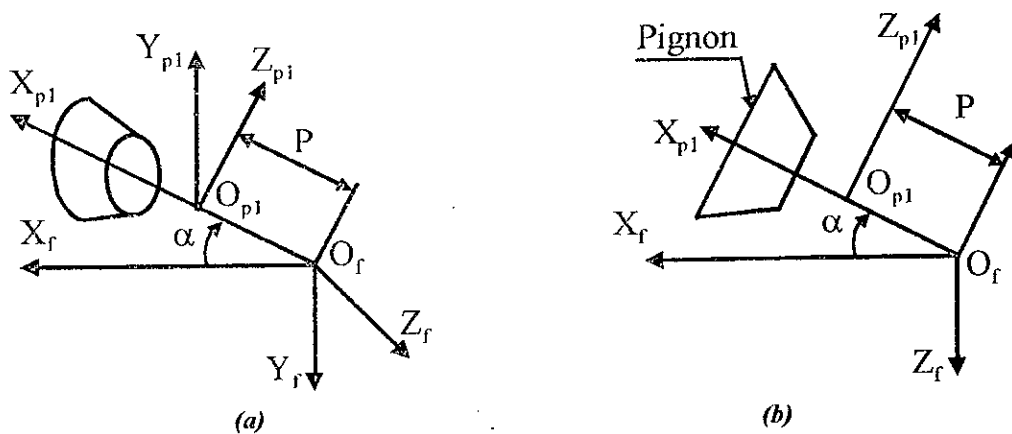


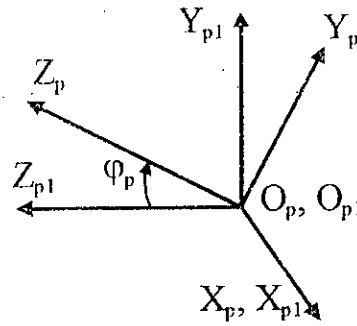
Figure 4-5 Relation entre le repère  $R_{p1}$  et le repère  $R_f$   
a- Position spatiale du repère  $R_{p1}$  par rapport à  $R_f$  b- Position de  $O_{p1}$  dans le plan  $X_f Z_f$

Les coordonnées d'un point exprimées dans le repère  $R_{p1}$  sont exprimées dans  $R_f$  par :

$$\begin{Bmatrix} x_f^p \\ y_f^p \\ z_f^p \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha & P \cos\alpha \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & -\cos\alpha & -P \cos\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{p1} \\ y_{p1} \\ z_{p1} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4-7)$$

### 4. Rotation du pignon

Le repère  $R_p$  est lié rigidement à la roue, avec les origines  $O_p$  et  $O_{p1}$  confondues, ainsi que les axes  $\bar{X}_p$  et  $\bar{X}_{p1}$ . Pendant l'engrènement, le pignon effectue un mouvement de rotation autour de l'axe  $\bar{X}_{p1}$  d'angle de rotation noté  $\varphi_p$  (figure 4-6).


 Figure 4-6 Relation entre le repère  $R_{p1}$  et le repère  $R_p$ 

Les coordonnées d'un point exprimées dans le repère  $R_p$  seront exprimées dans le repère  $R_{p1}$  par :

$$\begin{Bmatrix} x_{p1} \\ y_{p1} \\ z_{p1} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_p & \sin\varphi_p & 0 \\ 0 & -\sin\varphi_p & \cos\varphi_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4-8)$$

Où :  $x_p$ ,  $y_p$  et  $z_p$ , les coordonnées d'un point sur la surface de denture du pignon exprimées dans le repère  $R_p$ .

A partir des équations (4-7) et (4-8), les coordonnées d'un point exprimées dans le repère  $R_p$  seront exprimées dans le repère  $R_f$  par :

$$\begin{Bmatrix} x_f^p \\ y_f^p \\ z_f^p \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \sin\varphi_p & -\sin\alpha \cos\varphi_p & P \cos\alpha \\ 0 & -\cos\varphi_p & -\sin\varphi_p & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \sin\varphi_p & -\cos\alpha \cos\varphi_p & -P \sin\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4-9)$$

#### 4-4-3. CONTACT DES SURFACES DE DENTURE

Au point de contact entre les surfaces de denture du pignon et de la roue, les coordonnées et les composantes du vecteur normal unitaire doivent vérifier les équations (4-1) et (4-2). Puisque les points sont sur les surfaces de denture du pignon et de la roue, les coordonnées du point de contact doivent vérifier les équations d'engrènement  $F_p$  pour le pignon et  $F_g$  pour la roue si les surfaces de denture sont générées.

Donc, au point de contact nous avons les équations suivantes :

$$\vec{R}_p^f = \vec{R}_g^f \quad (4-10)$$

$$\vec{n}_p^f + \vec{n}_g^f = \vec{0} \quad (4-11)$$

$$F_p = 0 \quad (4-12)$$

$$F_g = 0 \quad (4-13)$$

Avec :

$$|\vec{n}_p^f| = |\vec{n}_g^f| = 1 \quad (4-14)$$



Où :  $\vec{R}_p^f$  et  $\vec{n}_p^f$ , représentent respectivement le vecteur position et le vecteur normal unitaire à la surface de denture du pignon exprimés dans le repère  $R_f$ ;  $\vec{R}_g^f$  et  $\vec{n}_g^f$ , représentent respectivement le vecteur position et le vecteur normal unitaire à la surface de denture de la roue exprimés dans le repère  $R_f$ .

Les coordonnées des points de contact sur la surface de denture du pignon et de la roue, sont obtenues après résolution du système d'équations algébriques non linéaires donné par les équations 4-10, 4-11, 4-12 et 4-13.

#### • Méthode de Résolution

Les équations vectorielles (4-10) et (4-11) fournissent cinq équations algébriques non linéaires indépendantes compte tenu que nous avons utilisé les vecteurs normaux unitaires. Les cinq équations sont obtenues en considérant les équations (4-10) et (4-11) et en ne prenant pas en compte la troisième composante du vecteur normal unitaire.

Les cinq équations peuvent s'écrire implicitement :

$$F_i(u_p, \beta_p, \xi_{cp}, \varphi_p, u_g, \beta_g, \xi_{cg}, \varphi_g) \quad i=1, 5 \quad (4-15)$$

Où :  $u_p, \beta_p$ , les coordonnées de surface d'un point du pignon et  $\xi_{cp}$  l'angle de rotation du berceau au cours de taillage de la surface de denture du pignon;  $u_g, \beta_g$ , les coordonnées de surface d'un point de la roue et  $\xi_{cg}$  l'angle de rotation du berceau au cours du taillage de la surface de denture du pignon.

Les équations (4-15) forment un système de cinq équations non linéaires avec huit inconnues ( $u_p, \beta_p, \xi_{cp}, \varphi_p, u_g, \beta_g, \xi_{cg}$  et  $\varphi_g$ ). En utilisant les équations d'engrènement  $F_p$  et  $F_g$ , nous réduisons le nombre d'inconnues à déterminer.

Les équations d'engrènement  $F_p$  et  $F_g$  s'écrivent implicitement :

$$\begin{cases} F_p(u_p, \beta_p, \xi_{cp})=0 & (4-16) \\ F_g(u_g, \beta_g, \xi_{cg})=0 & (4-17) \end{cases}$$

Les équations d'engrènement (4-16) et (4-17) sont linéaires respectivement par rapport à  $u_p$  et  $u_g$ . Par conséquent nous pouvons éliminer  $u_p$  et  $u_g$  du système d'équations non linéaires (4-15). Les variables  $u_p$  et  $u_g$  s'écrivent implicitement :

$$\begin{cases} u_p = u_p(\beta_p, \xi_{cp}) & (4-18) \\ u_g = u_g(\beta_g, \xi_{cg}) & (4-19) \end{cases}$$

Par ce moyen, les équations (4-15) s'écrivent implicitement:

$$F_i(\beta_p, \xi_{cp}, \varphi_p, \beta_g, \xi_{cg}, \varphi_g) \quad i=1, 5 \quad (4-20)$$

Finalement, nous avons obtenu un système de cinq équations algébriques non linéaires à six variables ( $\beta_p, \xi_{cp}, \varphi_p, \beta_g, \xi_{cg}, \varphi_g$ ) qu'il faut résoudre. La résolution de ce système est effectuée après avoir fixé une des six variables. Comme la pièce menante est souvent le pignon, nous avons fixé l'angle de rotation du pignon  $\varphi_p$  pour pouvoir résoudre le système obtenu.

La solution du système (4-20) est obtenue en utilisant la méthode du gradient conjugué, suivie de la méthode de Newton-Raphson. Les solutions sont données implicitement par :

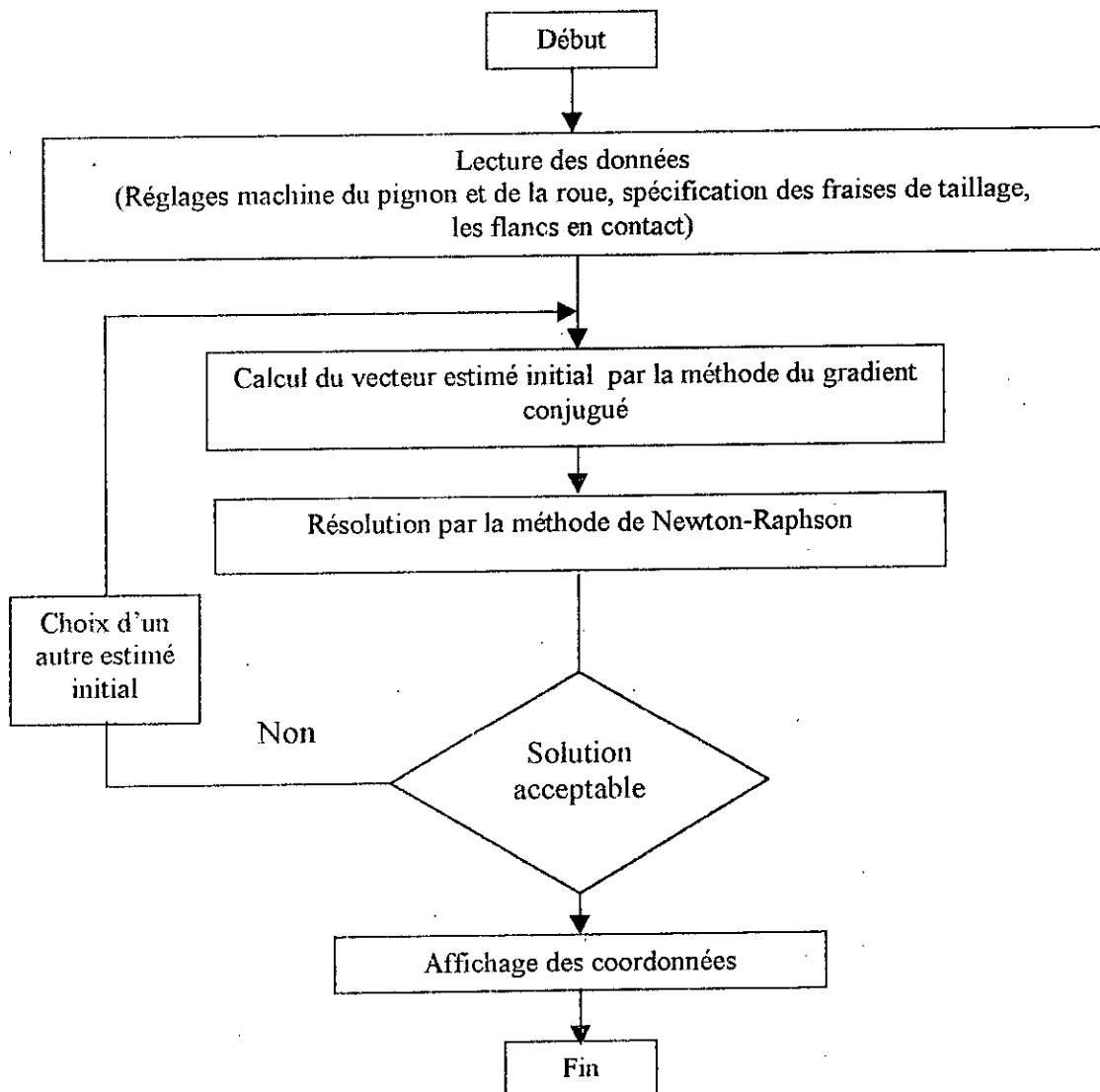
$$\begin{cases} \beta_p = \beta_p(\varphi_p) & (4-21) \\ \xi_{cp} = \xi_{cp}(\varphi_p) & (4-22) \\ \beta_g = \beta_g(\varphi_p) & (4-23) \\ \xi_{cg} = \xi_{cg}(\varphi_p) & (4-24) \\ \varphi_g = \varphi_g(\varphi_p) & (4-25) \end{cases}$$

La valeur de  $\varphi_p$  est limitée à l'intervalle  $[0, 2\pi/N_p]$ , où  $N_p$  est le nombre de dents du pignon.

Les chemins de contact sur la surface de denture du pignon et de la roue sont donnés respectivement par:

$$\begin{cases} \vec{R}_p = \vec{R}_p(\beta_p, \xi_{cp}, \varphi_p) & (4-26) \\ \vec{R}_g = \vec{R}_g(\beta_g, \xi_{cg}, \varphi_g) & (4-27) \end{cases}$$

L'organigramme ci-dessous résume le calcul des coordonnées d'un point de contact.



## 4-5. CALCUL DES CHARGES NODALES EQUIVALENTES

Pour pouvoir calculer les charges nodales équivalentes, un certain nombre d'étapes sont nécessaires.

### 1. Appartenance d'un point à la surface de denture

Un système d'équations non linéaires peut admettre plusieurs solutions, et parmi ses solutions il y a qui sont acceptables et qui sont à rejeter. Par conséquent, les coordonnées des points de contact sur les surfaces de denture du pignon et de la roue solutions du système (4-20) n'appartiennent pas forcément aux domaines physiques réels de ces surfaces. Donc, après chaque résolution, nous devons vérifier l'appartenance de ces points aux domaines physiques.

Pour que les deux points trouvés soient des solutions acceptables, il faut que la position axiale  $x$  et la distance radiale  $r$  des points de contact appartiennent simultanément au quadrilatéral 1234 du pignon et de la roue respectivement (figure 4-8), sinon la solution n'est pas acceptable.

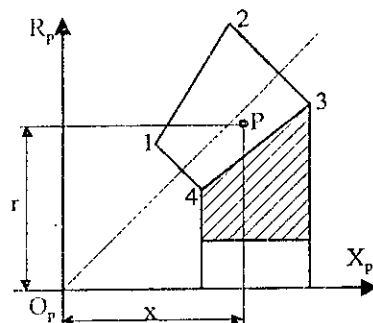


Figure 4-8 Domaine physique de la surface de denture.

### 2. Détermination de la facette où se trouve le point de contact

Si le test précédent est vérifié, nous suivons les flèches 1 puis 2 (figure 4-9) et nous appliquons le test précédent aux différentes facettes de la surface de denture afin de déterminer l'élément et la facette sur laquelle la force est appliquée.

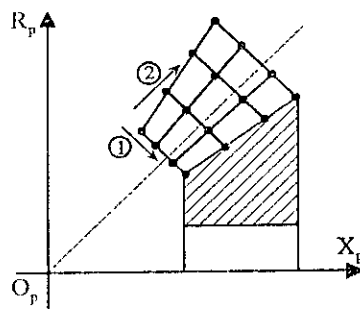


Figure 4-9 Facettes d'un flanc de la denture.

### 3. Appartenance du point à une facette

Si le test précédent est vérifié, rien ne nous affirme que le point appartient à cette facette dans le système de coordonnées global  $X_P Y_P Z_P$  pour le pignon et  $X_g Y_g Z_g$  pour la roue, puisque la vérification est faite dans le plan  $X_P R_P$  pour le pignon et  $X_g R_g$  pour la roue. Donc, nous devons faire subir le vecteur position  $\vec{P}$  et le vecteur normal unitaire  $\vec{n}$  en ce point des incréments de rotation, jusqu'à ce que le point appartienne à la facette (figure 4-10).

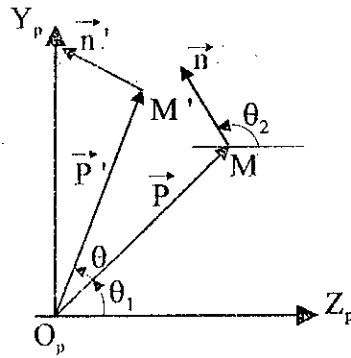


Figure 4-10 Rotation du vecteur position et du vecteur normal.

L'élément utilisé est un élément isoparamétrique, donc les coordonnées d'un point sur la facette d'un élément sont interpolées par :

$$\begin{cases} x = \sum N_i x_i \\ y = \sum N_i y_i \\ z = \sum N_i z_i \end{cases} \quad (4-28)$$

Où :  $x_i, y_i$  et  $z_i$  ( $i=1, 20$ ), les coordonnées des nœuds de l'élément considéré et  $N_i(\xi, \eta, \zeta)$  ( $i=1, 20$ ), les fonctions d'interpolation de l'élément hexaédrique à 20 nœuds.

L'élément de référence et le repère local sont représentés par la figure 4-11.

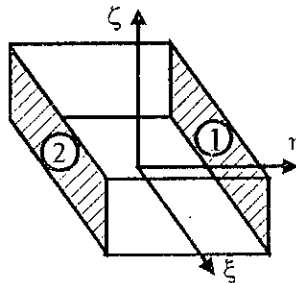


Figure 4-11 Élément de référence et les facettes de contact.

Le point appartient au flanc concave de la dent (facette 1) si :

$$\begin{cases} \xi \in [-1, 1] & (4-29) \\ \zeta \in [-1, 1] & (4-30) \\ \eta = 1 & (4-31) \end{cases}$$

Le point appartient au flanc convexe de la dent (facette 2) si :

$$\begin{cases} \xi \in [-1, 1] & (4-32) \\ \zeta \in [-1, 1] & (4-33) \\ \eta = -1 & (4-34) \end{cases}$$

Afin de déterminer les valeurs de  $\xi, \eta$  et  $\zeta$ , le système d'équations non linéaires (4-28) est résolu pour chaque angle de rotation  $\theta$ . Après chaque résolution, nous vérifions les conditions (4-29) à (4-31) si le point est sur le flanc concave, (4-32) à (4-34) si le point est sur le flanc convexe. Si les trois conditions sont vérifiées simultanément, alors le point est sur cette facette.

#### 4. Charges nodales équivalentes

En éléments finis les charges sont introduites aux nœuds. Mais les points de contact (points d'application de la charge) ne coïncident pas forcément avec les nœuds du quadrillage de la surface de denture. Nous devons donc déterminer les charges nodales équivalentes à la charge concentrée en appliquant le principe d'équivalence statique.

Les charges nodales équivalentes sont données par:

$$\{R\} = [N]^T \{P\} \quad (4-35)$$

Avec:

$\{R\}$ , le vecteur des forces nodales.

$\{P\}$ , le vecteur des forces concentrées.

$[N]^T$ , la matrice des fonctions d'interpolation.

#### 4-6. CONCLUSION

En modélisant la machine de contrôle des engrenages spiro-coniques et en considérant différents défauts d'alignement, nous avons simulé l'engrènement du pignon et de la roue. Les points de contact successifs sont déterminés au cours de l'engrènement des flancs conjugués. Cette simulation peut être utilisée pour quantifier toutes les caractéristiques du couple d'engrenages considéré. Les coordonnées des points de contact ont servi au calcul des charges nodales équivalentes.

Cette simulation peut être également utilisée pour analyser le contact des engrenages *Zerol* et *Hypoïde*.

## *CHAPITRE 5*

# **RESULTATS ET DISCUSSIONS**

## CHAPITRE 5

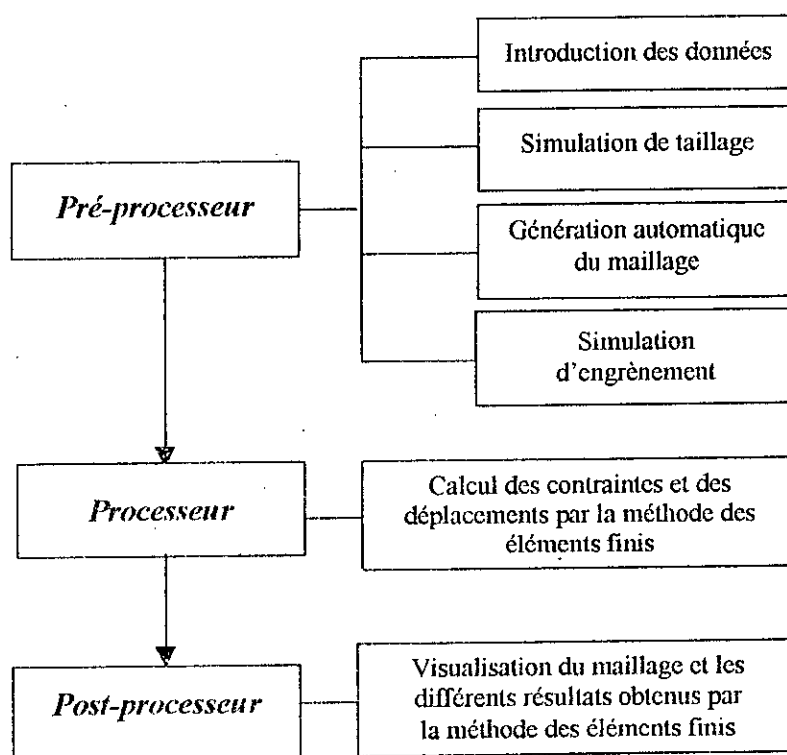
### RESULTATS ET DISCUSSIONS

#### 5-1. INTRODUCTION

Dans les chapitres précédents, nous avons décrit les modèles de simulation de taillage, d'engrènement et de génération du maillage. Dans ce chapitre, nous présentons d'abord les différents résultats obtenus pour la génération automatique du maillage, ensuite les résultats relatifs aux déplacements et contraintes obtenus par la méthode des éléments finis pour différents points de contact en considérant certains défauts d'alignement.

#### 5-2. DESCRIPTION DES DIFFERENTS PROGRAMMES DE CALCUL

Dans le cadre de notre travail, nous avons développé les programmes nécessaires pour mettre au point un outil permettant l'analyse statique des engrenages spiro-coniques en utilisant la méthode des éléments finis. Ces programmes sont écrits en langage FORTRAN. L'ensemble des programmes développés sont divisés en trois parties principales. L'organigramme ci-dessous montre l'enchaînement des différentes parties.



Par rapport au maillage 2D, le maillage 3D entraîne des nombres très importants de degré de liberté et des matrices de rigidité fortement peuplées, ce qui augmente de façon très significative le temps de calcul et l'espace nécessaire au stockage des différentes matrices. La technique de stockage en ligne de ciel avec segmentation sur disque dur de la matrice de rigidité globale est utilisée pour palier à cette difficulté.

Les résultats obtenus après analyse en utilisant la méthode des éléments finis se présentent sous la forme de listes volumineuses difficiles à exploiter. Nous devons donc disposer d'outils de représentation sélective des résultats obtenus et de tracé de maillage.

L'aspect tridimensionnel des contraintes et des déplacements rend l'interprétation des résultats difficiles. Pour faciliter cette tâche, nous avons développé un post-processeur pour visualiser les cartes de contraintes, de déplacements et du maillage obtenu.

Ce post-processeur permet de représenter :

- La géométrie de la structure (déformée ou non déformée) pour différentes orientations,
- Les cartes des contraintes élémentaires et des contraintes principales,
- Les cartes des déplacements suivant les trois axes et la carte du déplacement total,
- Les conditions aux limites imposées à la structure,
- Les cartes de la contrainte équivalente au sens de Tressa et de Von-Mises, la contrainte principale maximale, la contrainte principale minimale et la contrainte moyenne.

Ce post-processeur est général. Il peut être utilisé pour toute structure modélisée avec des éléments hexaédriques à 20 nœuds.

### 5-3. VALIDATION

#### 5-3-1. VALIDATION DU PROGRAMME DE SIMULATION DE TAILLAGE

Afin de valider notre code de calcul, nous avons considéré le même couple d'engrenages étudiés par Fong et Tsay [14]. Les données principales du couple sont données dans le tableau 1, les spécifications des fraises de taillage dans le tableau 2 et les réglages machine dans le tableau 3.

Paramètres	Pignon	Roue
Nombre de dents	16	28
Module	6.8 mm	
Largeur de denture	30 mm	
Angle de pression	20°	
Angle de spirale	35°	
Angle des arbres	90°	
Sens de spirale	RH	LH

Tableau 1 : Données principales du couple.

Paramètres	Pignon	Roue
Diamètre de fraise	200 mm	200 mm
Angle de pression des lames extérieures	12° 15'	12° 15'
Angle de pression des lames intérieures	27° 47'	27° 45'
Largeur entre-pointes	3.4 mm	3.4 mm
Rayon de raccordement extérieur	1.3 mm	1.3 mm
Rayon de raccordement intérieur	1.3 mm	1.3 mm

Tableau 2 : Spécification des fraises de taillage.

Paramètres	Pignon	Roue
Angle de berceau	358° 42'	130° 53'
Angle d'excentrique	47° 42'	47° 54'
Angle de socle	185° 8'	27° 33'
Angle de tête porte fraise	8° 51'	17° 56'
Angle de pied machine	25° 10'	54° 41'
Recul machine	-0.68 mm	0. mm
Décalage vertical	-0.96 mm	0. mm
Paramètre du mouvement hélicoïdal	-10.179 mm/rad	0. mm
Rapport de roulement	2.0059	1.460

Tableau 3 : Réglages machine pour le pignon et la roue.

La machine de taillage est la Gleason N°.122, avec  $L = 111.125$  mm et  $\varepsilon = 15^\circ$ .



La comparaison de calcul des coordonnées sur les flancs concave et convexe du pignon pour les abscisses  $X_p=83\text{mm}$  et  $X_p=88$  est donnée respectivement dans les tableaux 4 et 5.

FLANC	Coordonnée $Y_p$ en mm				Coordonnée $Z_p$ en mm			
	Tsay	Mesurée	Calcul	Erreur	Tsay	Mesurée	Calcul	Erreur
FLANC CONVEXE	13.801	13.973	13.8055	0.0045	-50.248	-50.200	-50.2468	0.0012
	11.623	11.804	11.6198	-0.0032	-48.740	-48.696	-48.7408	-0.0008
	10.264	10.428	10.2541	-0.0099	-47.660	-47.625	-47.6621	-0.0021
	8.476	8.619	8.4578	-0.0182	-46.030	-46.004	-46.0333	-0.0033
FLANC CONCAVE	0.454	0.326	0.4240	-0.0300	-44.326	-44.327	-44.3263	-0.0003
	0.579	0.444	0.5229	-0.0561	-47.224	-47.226	-47.2247	-0.0007
	0.440	0.296	0.3645	-0.0755	-50.068	-50.069	-50.0686	-0.0006
	0.171	0.022	0.216	0.0450	-52.609	-52.610	-52.6088	0.0002

Tableau 4 : Comparaison des coordonnées des points sur les flancs concave et convexe du pignon à l'abscisse axiale  $X_p=83$  mm.

FLANC	Coordonnée $Y_p$ mm				Coordonnée $Z_p$ mm			
	Tsay	Mesurée	Calcul	Erreur	Tsay	Mesurée	Calcul	Erreur
FLANC CONVEXE	21.221	21.403	21.2214	0.0004	-52.712	-52.639	-52.7118	0.0002
	19.563	19.746	19.5583	-0.0047	-51.954	-51.885	-51.9558	-0.0018
	16.220	16.408	16.2059	-0.0141	-50.122	-50.061	-50.1265	-0.0045
FLANC CONCAVE	4.411	4.275	4.3742	-0.0368	-46.626	-46.636	-46.6295	-0.0035
	4.852	4.702	4.7885	-0.0064	-49.558	-49.573	-49.5642	-0.0062
	5.017	4.854	4.9358	-0.0081	-52.223	-52.238	-52.2307	-0.0077

Tableau 5 : Comparaison des coordonnées des points sur les flancs concave et convexe du pignon à l'abscisse axiale  $X_p=88$  mm.

Les résultats obtenus montrent qu'il y a un bon accord entre les coordonnées calculées par Fong et Tsay [14] et celles obtenues par notre code de calcul. Nous pouvons ainsi affirmer que le code développé est fiable pour la simulation de taillage.

### 5-3-2. VALIDATION DU PROGRAMME DE CALCUL PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Pour valider notre code de calcul, nous avons considéré une poutre rectangulaire encastrée dans la section de coordonnée  $Z=0$  dont les dimensions caractéristiques sont données sur la figure 5-1. Les résultats obtenus sont comparés avec les résultats calculés par la résistance des matériaux (RDM) en traction-compression, flexion simple et flexion déviée.

Pour les trois tests, un élément est pris suivant la largeur et suivant la hauteur et un nombre variable d'éléments est pris suivant la longueur de la poutre.

Les données sont :  $E=2.1E5$  N/mm<sup>2</sup>,  $\nu=0.3$ ,  $L=4000$  mm,  $A=200$  mm,  $B=100$  mm.

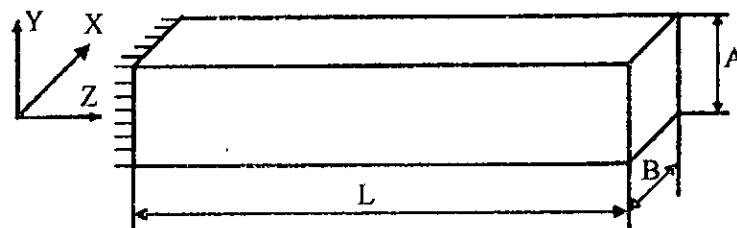


Figure 5-1 Dimensions caractéristiques de la poutre.

- **Test 1 : Traction (Compression)**

La force  $P$  est appliquée dans la section de coordonnée  $Z=L$ , avec  $P=100\text{KN}$ . Les résultats sont résumés dans le tableau 6.

Nombre d'éléments	Déplacement $w$ en mm ( $Z=L$ )	Contrainte en $\text{N/mm}^2$
1	0.092178	5.000
5	0.095285	5.000
7	0.095766	5.000
Solution de la RDM	0.095238	5.000

Tableau 6 : Comparaison des résultats de la RDM et ceux de notre code de calcul.

- **Test 2 : Flexion simple**

La force  $P$  est appliquée dans la section de coordonnée  $Z=L$  suivant l'axe  $Y$ , avec  $P=10\text{KN}$ . Les résultats sont résumés dans le tableau 7.

Nombre d'éléments	Déplacement $v$ en mm ( $Z=L$ )	Contrainte en $\text{N/mm}^2$ ( $Y=\pm A/2$ )
1	10.95	35.571
10	15.02	61.214
20	15.14	60.476
Solution de la RDM	15.2678	60.000

Tableau 7 : Comparaison des résultats de la RDM et ceux de notre code de calcul.

- **Test 3 : Flexion déviée**

La force  $P$  est appliquée dans la section de coordonnée  $Z=L$  suivant l'axe  $Y$  et suivant l'axe  $X$ , avec  $P=10\text{KN}$  dans chaque direction. Les résultats sont résumés dans le tableau 8.

Nombre d'éléments	Dépl't $u$ en mm ( $Z=L$ )	Dépl't $v$ en mm ( $Z=L$ )	Contrainte en $X=-B/2$ et $Y=-A/2$
1	42.797	10.958	107.88
20	60.308	15.140	184.05
60	60.637	15.205	180.57
Solution de la RDM	60.982	15.267	180.00

Tableau 8 : Comparaison des résultats de la RDM et ceux de notre code de calcul.

D'après les résultats obtenus, nous constatons qu'il y a un bon accord entre les résultats donnés par la RDM et ceux obtenues par notre code de calcul. Nous pouvons affirmer que le notre code de calcul est fiable.

## 5-4. RESULTATS DE LA GENERATION AUTOMATIQUE DU MAILLAGE

Nous présentons dans cette partie les possibilités du mailleur développé.

### 5-4-1. MAILLAGE D'UNE DENT

Le maillage d'une dent est généré en précisant les huit paramètres ( $n_s$ ,  $n_{c1}$ ,  $n_{c2}$ ,  $n_x$ ,  $n_r$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  et  $n$ ). Les divisions initiales sont :  $n_s=2$ ,  $n_{c1}=2$ ,  $n_{c2}=1$ ,  $n_x=5$ ,  $n_r=n_1=n_2=n=3$ . Afin de montrer les différentes possibilités du mailleur, nous varions ces paramètres un par un. La figure 5-2 montre le maillage initial avec les différentes possibilités.

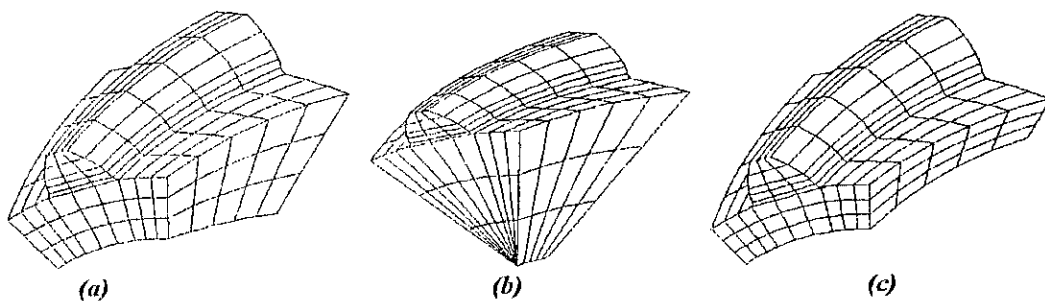


Figure 5-2. Maillage d'une dent suivant différents cas de rayons.  
a- Rayon intérieur constant non nul. b- Rayon intérieur nul. c- Epaisseur de jante constante.

Le maillage raffiné pour chaque zone est représenté par la figure 5-3.

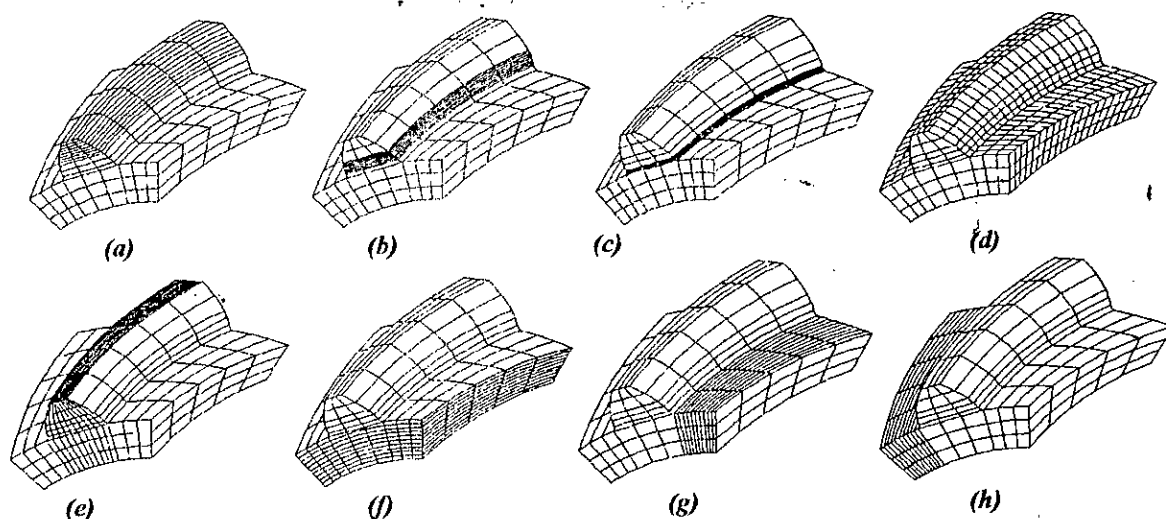


Figure 5-3. Génération du maillage raffiné :  
*a- Saillie. b- Creux. c- Racine de la dent. d- Largeur de denture. e- Epaisseur de la dent. f- Epaisseur de la jante. g- Côté concave. h- Côté convexe*

Ces exemples montrent la possibilité de raffiner le maillage suivant 8 cas dans une région sans modifier les divisions des autres régions. Cette possibilité est importante en calcul, puisqu'elle permet de raffiner le maillage dans les zones où nous constatons un gradient important et choisir un maillage grossier loin de ces zones lors du calcul des contraintes aux nœuds, cela conduit à réduire le nombre de nœuds et par suite la taille de la matrice de rigidité globale et les temps de résolution [75, 81].

#### 5-4-2. MAILLAGE D'UN CERTAIN NOMBRE DE DENTS

Le mailleur développé permet également de générer un maillage uniforme ou un maillage non uniforme de plusieurs dents.

##### 1. Maillage uniforme

Pour ce cas, toutes les dents ont les mêmes divisions. La figure 5-4 illustre cette possibilité en prenant quatre dents avec les divisions suivantes :  $n_s=4$ ,  $n_{c1}=4$ ,  $n_{c2}=2$ ,  $n_x=8$ ,  $n_r=4$ ,  $n_1=4$ ,  $n_2=5$ ,  $n=6$ . Le maillage est généré avec 3840 éléments et 19521 nœuds.

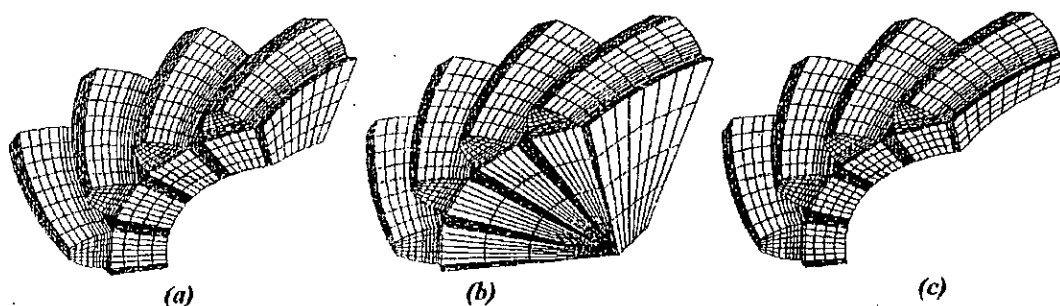


Figure 5-4. Génération d'un maillage uniforme de quatre dents.  
*a- Rayon intérieur constant non nul. b- Rayon intérieur nul. c- Epaisseur de jante constante*

## 2. Maillage non uniforme

Pour ce cas, les paramètres ( $n_s$ ,  $n_{c1}$ ,  $n_{c2}$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  et  $n$ ) peuvent prendre des valeurs arbitraires d'une dent à une autre. Afin d'illustrer cette possibilité nous avons pris deux dents, dont les divisions initiales sont données, et par la suite nous faisons varier un par un les paramètres de la deuxième dent. La figure 5-5 représente le maillage initial généré avec 510 éléments et 2986 nœuds, en considérant les divisions suivantes :  $n_s=3$ ,  $n_{c1}=3$ ,  $n_{c2}=2$ ,  $n_x=5$ ,  $n_r=3$ ,  $n_l=3$ ,  $n_2=3$ ,  $n=3$ .

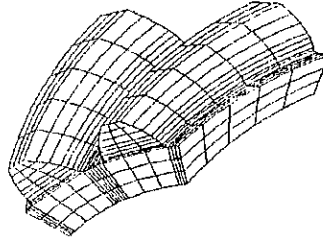


Figure 5-5 Maillage initial de deux dents.

La figure 5-6 montre les différents maillages générés en raffinant le maillage dans les différentes zones de la deuxième dent.

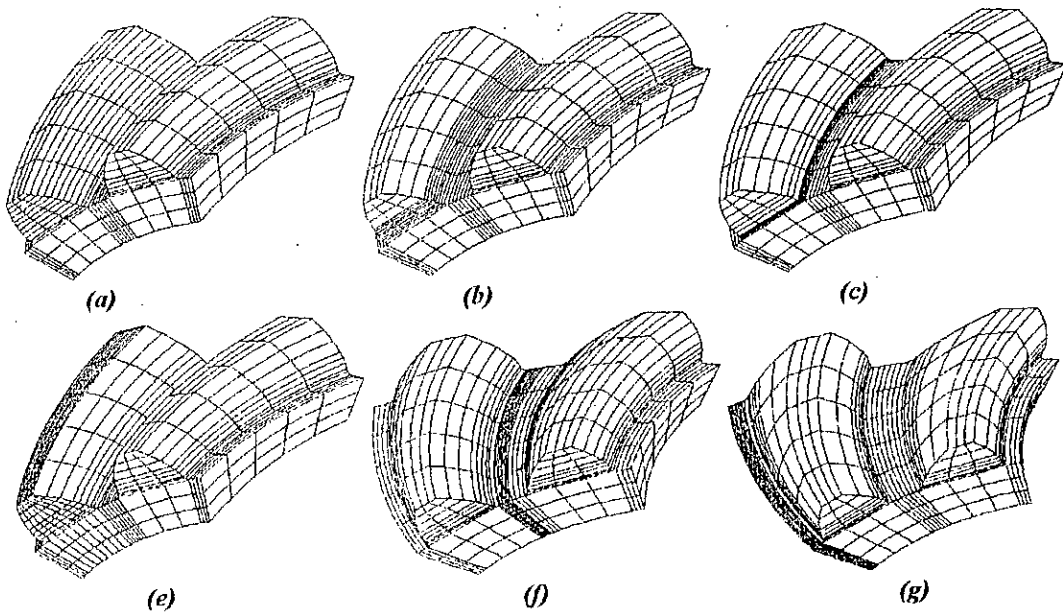


Figure 5-6. Génération non uniforme du maillage raffiné :  
a- Saillie. b- Creux. c- Racine de la dent. d- Épaisseur de la dent. e- Côté concave. f- Côté convexe

Le maillage pourra être généré avec une épaisseur de jante constante ou un rayon intérieur nul ou un rayon intérieur constant non nul.

### 5-4-3. MAILLAGE COMPLET D'UN MEMBRE

Ce mailleur permet également de générer un maillage uniforme ou un maillage non uniforme d'un membre.

#### 1. Maillage uniforme

Toutes les dents ont les mêmes divisions. En choisissant des divisions pour une dent, le maillage est généré avec 2320 éléments et 13936 nœuds. La figure 5-7 montre le maillage complet du pignon avec les différentes possibilités. En choisissant un rayon intérieur nul, nous pouvons représenter un pignon arbré.

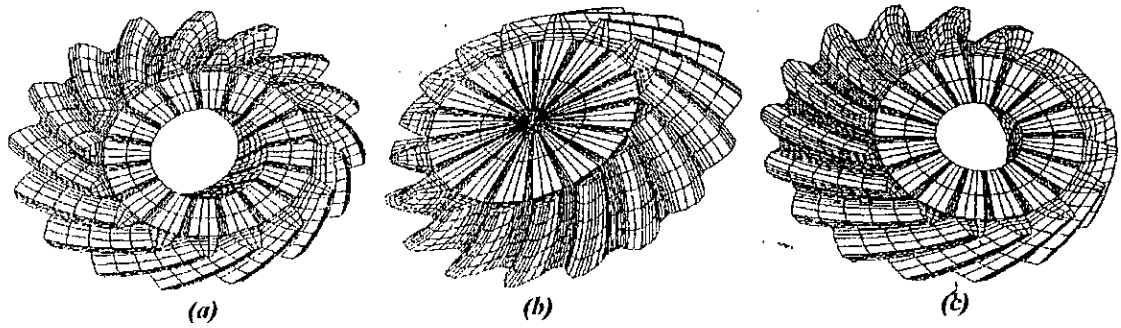


Figure 5-7. Génération d'un maillage uniforme pour le pignon.  
 a- Rayon intérieur constant non nul. b- Rayon intérieur nul. c- Epaisseur de jante constante

## 2. Maillage non uniforme

En choisissant des divisions arbitraires d'une dent à une autre, le maillage est généré avec 2570 éléments et 15511 nœuds. La figure 5-8 montre le maillage complet du pignon avec les différentes possibilités.

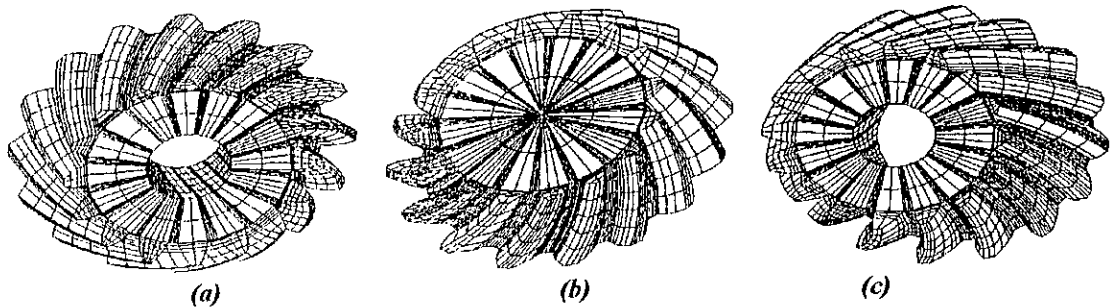


Figure 5-8. Génération d'un maillage non uniforme pour le pignon.  
 a- Rayon intérieur constant non nul. b- Rayon intérieur nul. c- Epaisseur de jante constante

A travers ces applications nous avons montré toutes les possibilités du mailleur que nous avons développé. La particularité de ce mailleur est la possibilité de générer un maillage uniforme ou un maillage non uniforme au choix. La dernière possibilité est importante en calcul, puisqu'elle permet de raffiner le maillage dans les zones présentant un gradient important et de choisir un maillage grossier loin de ces zones lors du calcul des contraintes aux nœuds, et permet également de réduire la taille du problème, l'espace mémoire nécessaire au stockage des différentes matrices et de réduire les temps de résolution [75, 81].

Pour le maillage d'un certain nombre de dents ou le maillage complet d'un membre, les paramètres fixes sont le nombre d'éléments suivant la largeur de denture  $n_x$  et le nombre d'éléments suivant l'épaisseur de la jante  $n_{r1}$ . Cette condition est nécessaire pour assurer la continuité à l'interface entre les éléments des dents adjacentes.

### 5-4-4. APPLICATION AUX ENGRENAGES CYLINDRIQUES

Ce mailleur tridimensionnel, permet également une génération automatique du maillage des différents types d'engrenages couramment utilisés dans l'industrie. A titre d'illustration, nous présentons les différents maillages obtenus en considérant des engrenages cylindriques à denture droite et à denture hélicoïdale.

### 1. Engrenage cylindrique à denture droite

La figure 5-9 montre les maillages obtenus d'une dent, de plusieurs dents et de l'engrenage complet.

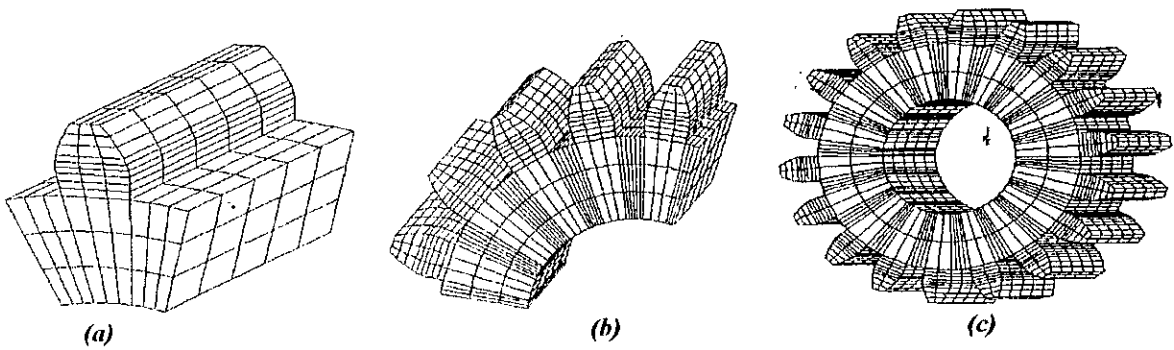


Figure 5-9. Différents maillages générés.  
a- Une dent. b- Plusieurs dents. c-. Engrenage complet.

### 2. Engrenage cylindrique à denture hélicoïdale

Les figures 5-10 et 5-11 montrent les différents maillages obtenus pour un engrenage à denture hélicoïdale avec une hélice à droite et une denture hélicoïdale avec une hélice à gauche.

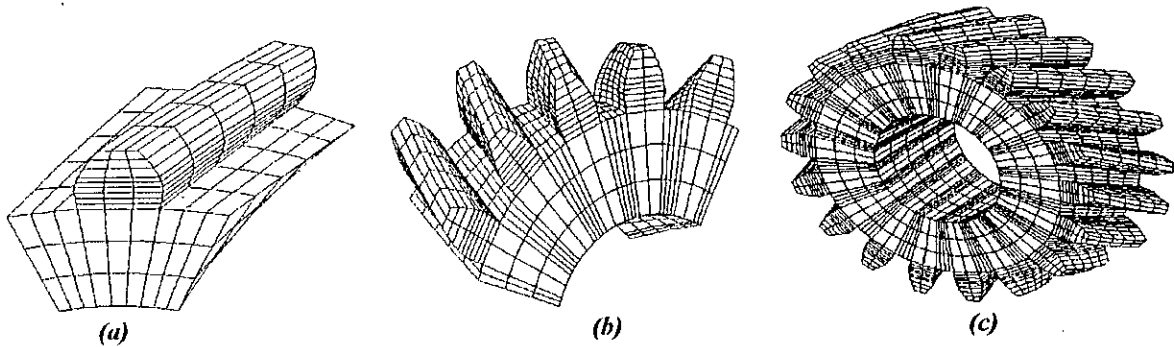


Figure 5-10. Différents maillages générés pour une denture hélicoïdale (hélice à droite).  
a- Une dent. b- Plusieurs dents. c-. Engrenage complet.

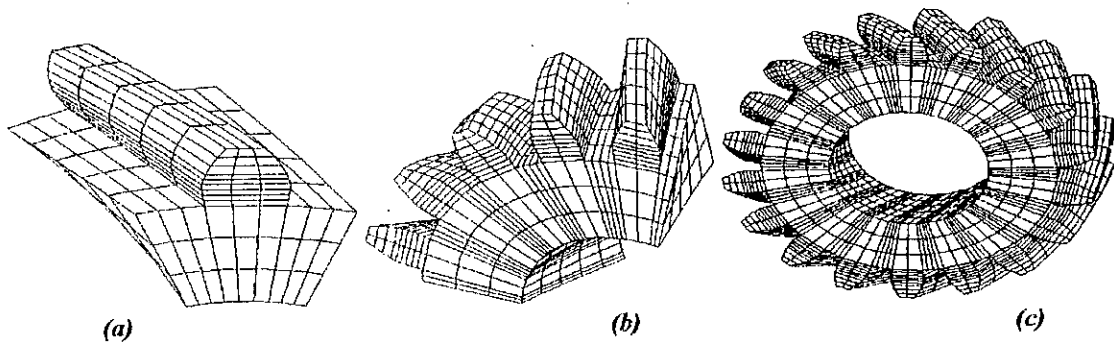


Figure 5-11. Différents maillages générés pour une denture hélicoïdale (hélice à gauche).  
a- Une dent. b- Plusieurs dents. c-. Engrenage complet.

Dans le mailleur développé, la génération automatique du maillage d'un engrenage nécessite la connaissance des coordonnées des points sur les deux flancs de la dent, l'épaisseur de la dent, le rayon intérieur ou l'épaisseur de la jante et le nombre de dents de l'engrenage. Cette particularité rend le mailleur indépendant du type d'engrenage à mailler.

### 5-5. CHEMIN DE CONTACT SUR LES FLANCS DE LA DENTURE

En considérant différents défauts d'alignement, nous avons analysé le contact entre les surfaces de denture du pignon et de la roue. Cette analyse nous a permis de déterminer les différents points de contact sur les flancs de la dent (flanc concave et flanc convexe). Les figures de 5-12 à 5-16 montrent le chemin de contact sur les flancs du pignon pour ces différents défauts d'alignement. Les coordonnées des points de contact sont données dans l'annexe 2.

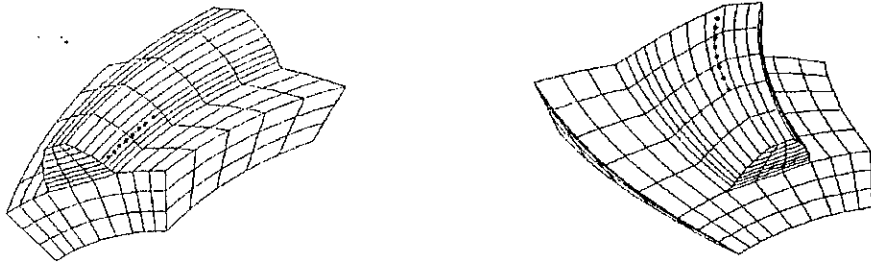


Figure 5-12. Chemin de contact pour  $E=P=G=0$ ,  $\alpha=90^\circ$ .

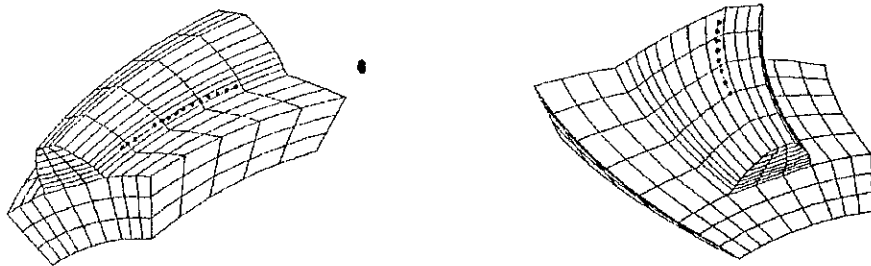


Figure 5-13. Chemin de contact pour  $E=P=G=0.1$ ,  $\alpha=90^\circ$ .

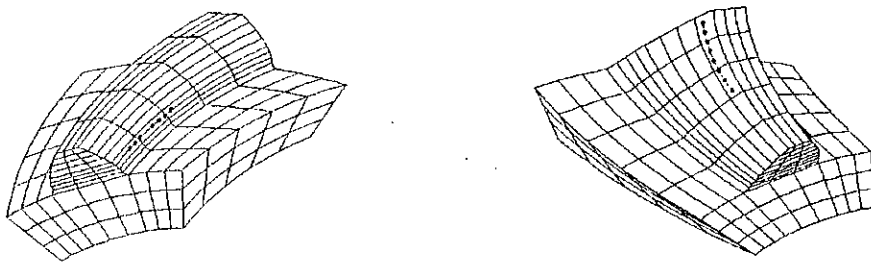


Figure 5-14. Chemin de contact pour  $E=P=G=-0.1$ ,  $\alpha=90^\circ$ .

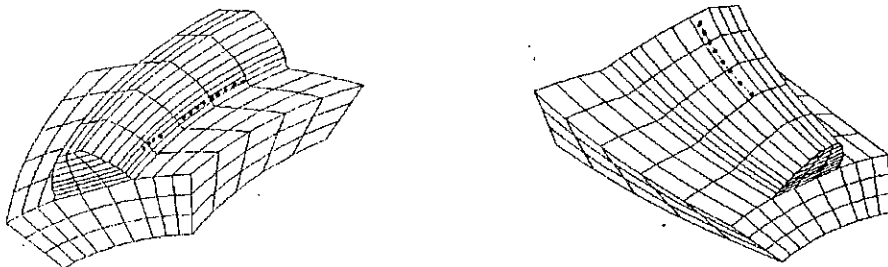


Figure 5-15. Chemin de contact pour  $E=P=0$ ,  $G=0.1$ ,  $\alpha=90^\circ$ .

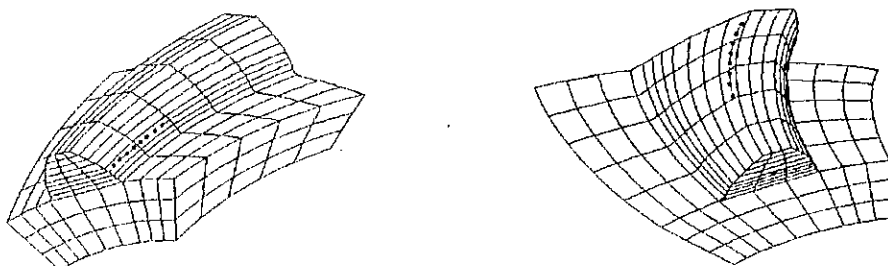


Figure 5-16. Chemin de contact pour  $E=0.1$ ;  $P=G=0$ ,  $\alpha=90^\circ$ .

Le chemin de contact sur le flanc concave est près de la racine de la dent, tandis que sur le flanc convexe est près du sommet de la dent. Les coordonnées des différents points de contact sont fonction des défauts d'alignement imposés (E, P, G et  $\alpha$ ).

Le calcul des coordonnées de ces points nécessite un bon choix du vecteur estimé initial, puisqu'un vecteur estimé initial loin de la solution exacte peut conduire à une solution erronée.

## 5-6. RESULTATS DE L'ANALYSE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Nous présentons dans cette partie les différents résultats obtenus après une étude par la méthode des éléments finis. Ces résultats concernent un certain nombre de points de contact. Pour les points considérés, nous avons calculé les déplacements et les contraintes.

Pour cette analyse, nous avons pris les divisions suivantes :  $n_s=4$ ,  $n_{c1}=3$ ,  $n_{c2}=1$ ,  $n_x=5$ ,  $n=n_1=n_2=n_r=3$ . Avec ces divisions, le maillage est généré avec 285 éléments et 1696 nœuds. La figure 5-17 représente les conditions aux limites imposées où toute la surface noircie est encastree.

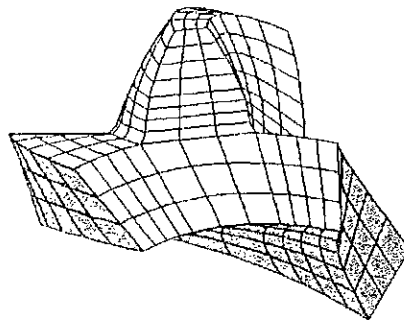


Figure 5-17 Les conditions aux limites imposées.

### 5-6-1. CONTACT ENTRE LE FLANC CONCAVE DU PIGNON ET LE FLANC CONVEXE DE LA ROUE

Les différentes figures (a), (b), (c) et (d) représentent respectivement la déformée de la structure avec amplification des déplacements résultants, le spectre du déplacement total, la contrainte équivalente de Von-Mises et la contrainte principale maximale.

Les contraintes sont exprimées en  $\text{KN}/\text{mm}^2$  et les déplacements en micron. Dans les différents spectres, la couleur bleue représente la valeur maximale et la couleur jaune représente la valeur minimale du résultat montré.

La zone de compression dans les spectres de la contrainte principale minimale (couleur jaune) de forme elliptique, c'est dans cette zone que le point de contact est situé.

Pour toutes les applications considérées, la force appliquée est égale à 20 KN.



**1<sup>er</sup> cas sans mésalignement**

La figure 5-18 montre les résultats pour un point de contact dont  $\bar{X} = 74.12$  et  $\bar{R} = 41.36$ , et la figure 5-19 les résultats pour un autre point de contact dont  $\bar{X} = 77.63$  et  $\bar{R} = 43.27$ , avec  $E=P=G=0$ ,  $\alpha=90^\circ$ .

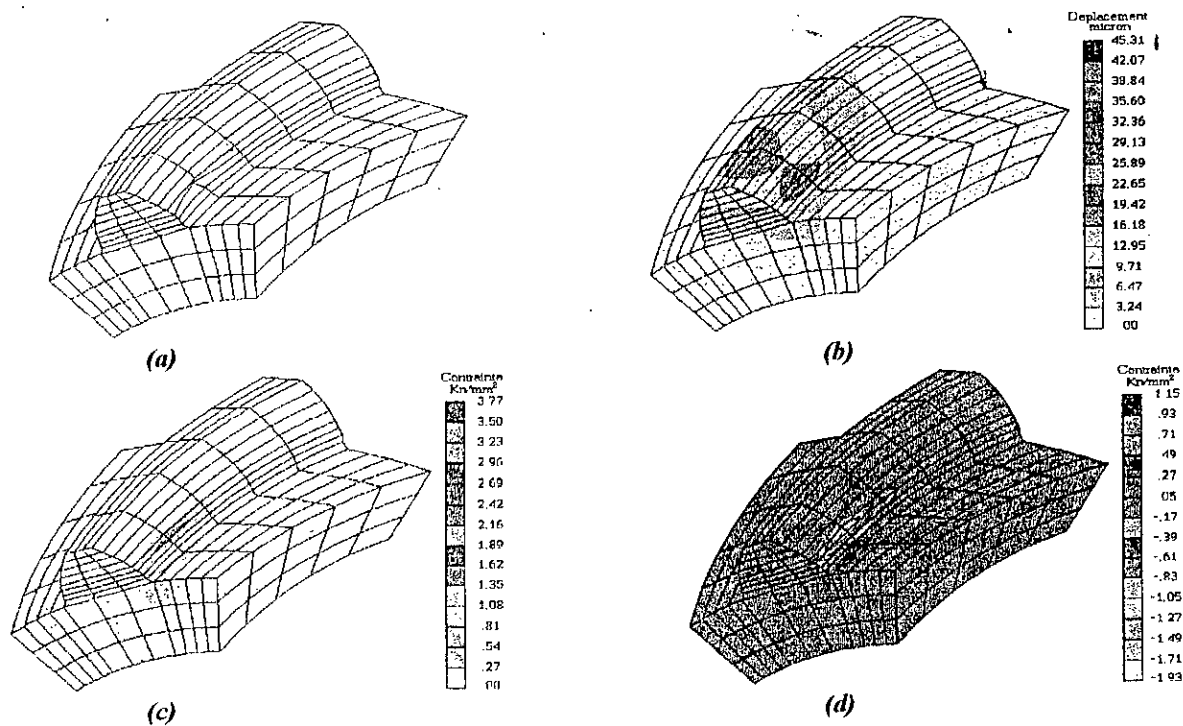


Figure 5-18 Résultats obtenus pour un premier point de contact.

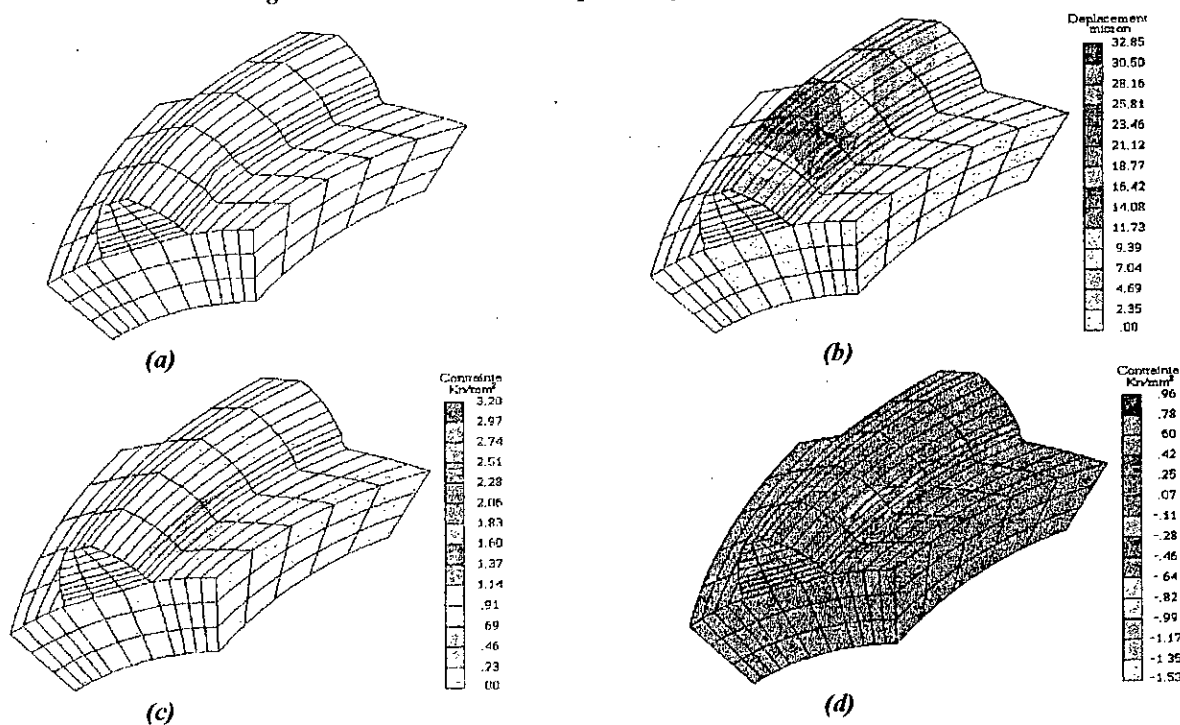


Figure 5-19 Résultats obtenus pour un deuxième point de contact

Dans la zone de contact, la contrainte de Von-Mises et la contrainte principale maximale et le déplacement total ont une distribution elliptique. Les contraintes d'extension sont proches de la racine de la dent et les contraintes de compression sont localisées dans la zone de contact. Les déformées montrent un écrasement local dans la zone de contact.

**2<sup>ème</sup> cas de mésalignement**

La figure 5-20 montre les résultats pour un point de contact dont  $\bar{X} = 74.5$  et  $\bar{R} = 40.55$ , et la figure 5-21 les résultats pour un autre point de contact dont  $\bar{X} = 83.98$  et  $\bar{R} = 45.00$ , avec  $E=P=G=0.1$ ,  $\alpha=90^\circ$ .

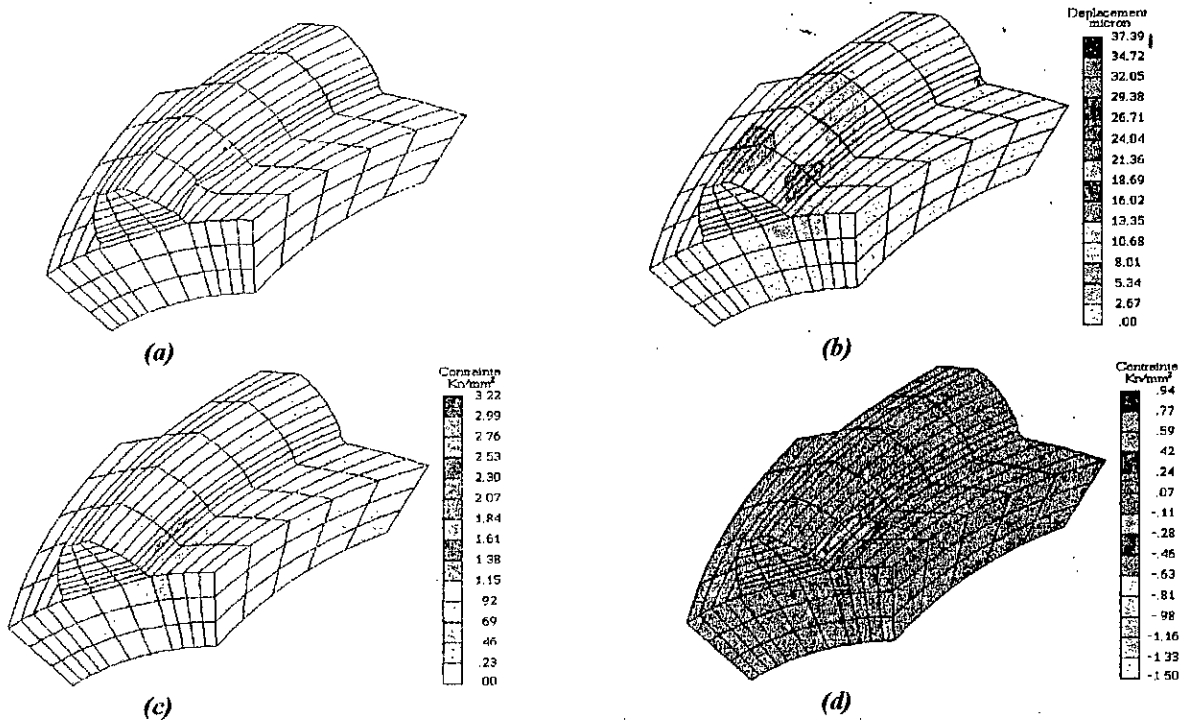


Figure 5-20 Résultats obtenus pour un premier point de contact.

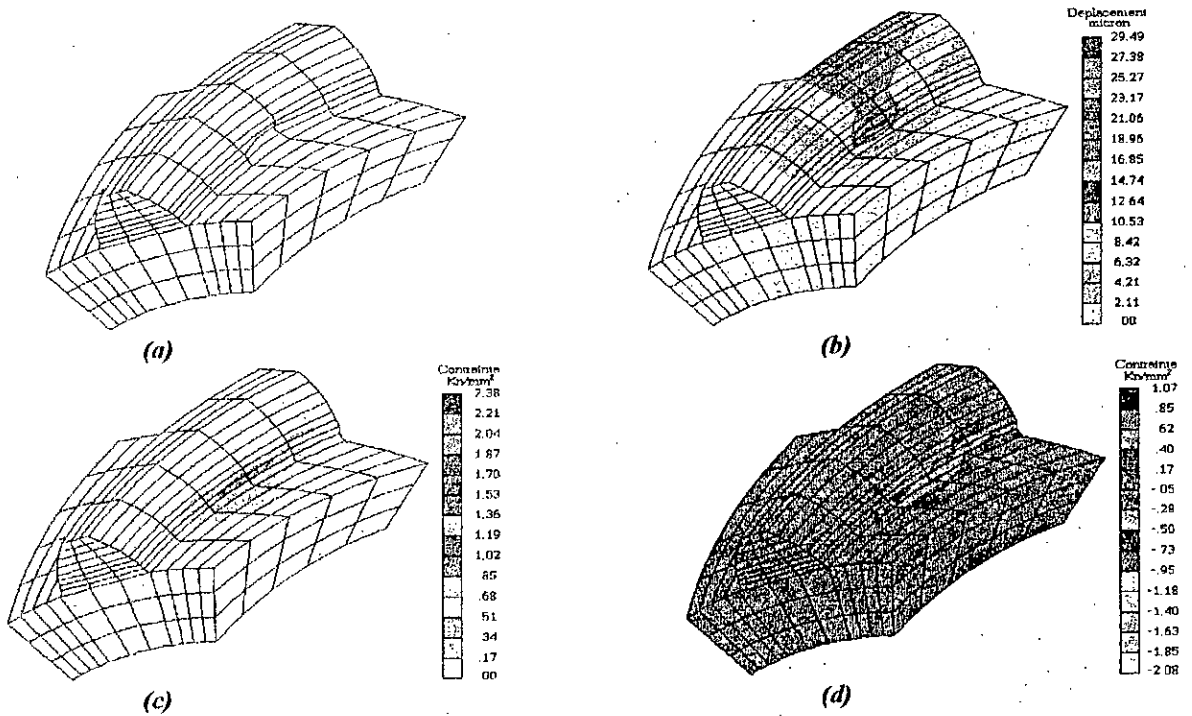


Figure 5-21 Résultats obtenus pour un deuxième point de contact.

En changeant les paramètres E, P, G et  $\alpha$ , on constate une variation globale des plages de contraintes tout en gardant l'aspect elliptique dans la zone de contact. Les contraintes d'extension restent proches de la racine de la dent.

**3<sup>ème</sup> cas de mésalignement**

La figure 5-22 montrè les résultats pour un point de contact dont  $\bar{X} = 72.92$  et  $\bar{R} = 40.71$ , et la figure 5-23 les résultats pour un autre point de contact dont  $\bar{X} = 79.96$  et  $\bar{R} = 44.53$ , avec  $E=P=G= - 0.1$ ,  $\alpha=90^\circ$ .

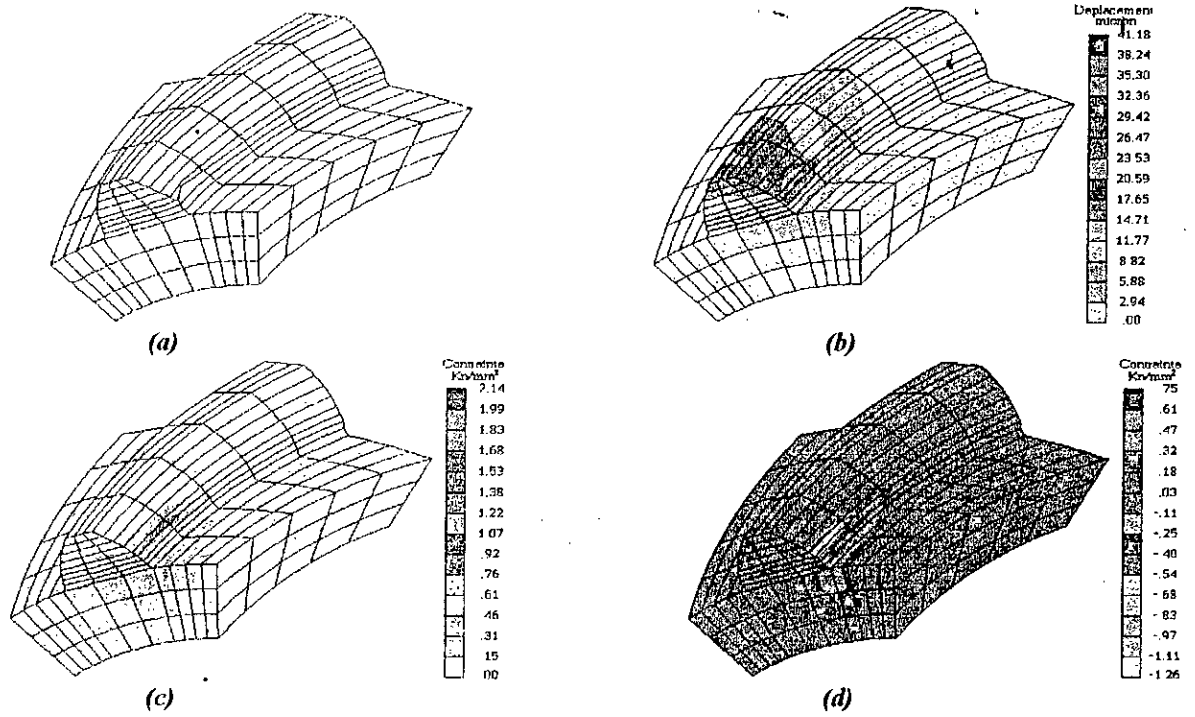


Figure 5-22 Résultats obtenus pour un premier point de contact.

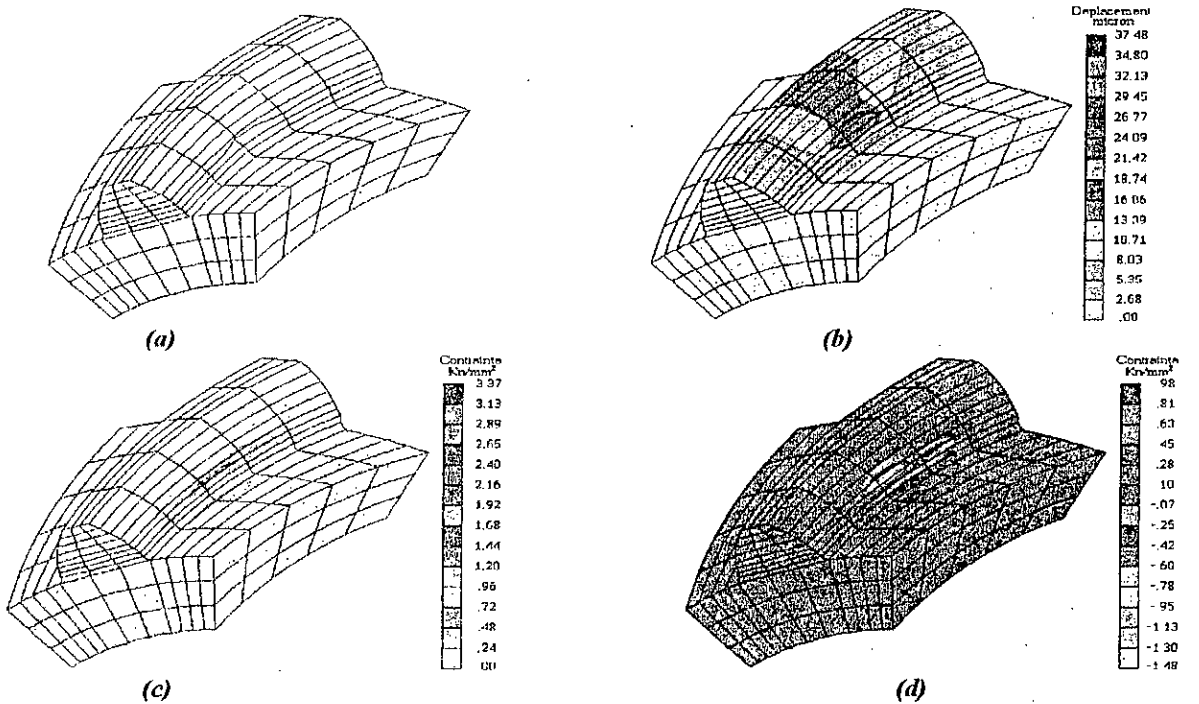


Figure 5-23 Résultats obtenus pour un deuxième point de contact.

La contrainte de Von-Mises, la contrainte principale maximale et le déplacement total gardent toujours la distribution elliptique dans la zone de contact avec une légère variation des valeurs maximales. Les déformées montrent un écrasement local dans la zone de contact.

**4<sup>ème</sup> cas de mésalignement**

La figure 5-24 montre les résultats pour un point de contact dont  $\bar{X} = 85.06$  et  $\bar{R} = 45.53$ , et la figure 5-25 les résultats pour un autre point de contact dont  $\bar{X} = 88.61$  et  $\bar{R} = 47.12$ , avec  $E=P=0$ ,  $G= 0.1$ ,  $\alpha=90^\circ$ .

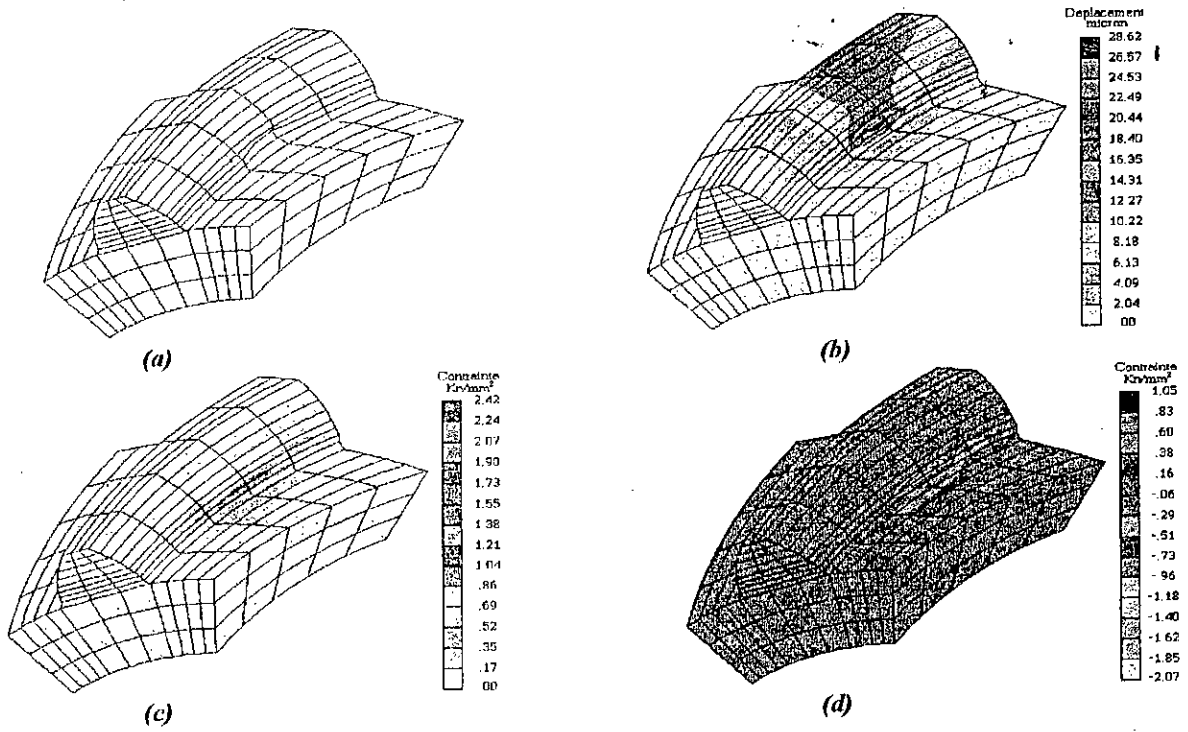


Figure 5-24 Résultats obtenus pour un premier point de contact.

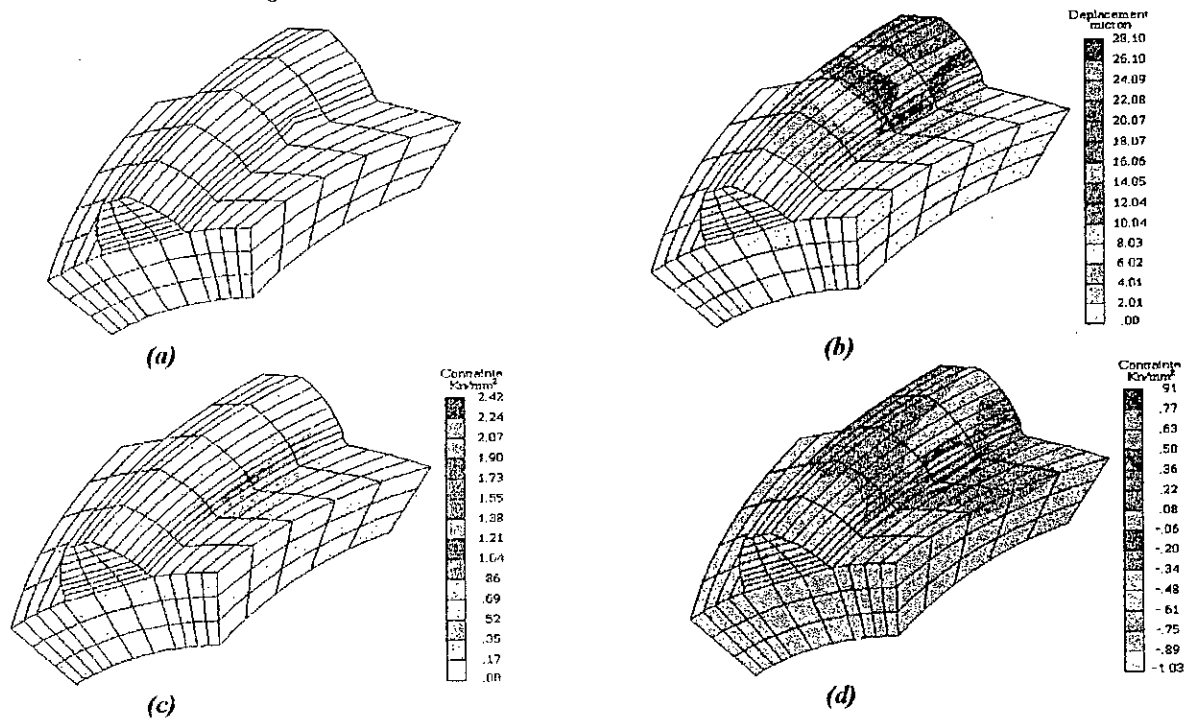


Figure 5-25 Résultats obtenus pour un deuxième point de contact.

Dans ce cas, nous constatons de plus que les contraintes d'extension sont proches de la racine de la dent et s'étendent sur une aire plus importante avec des valeurs maximales.

**5<sup>ème</sup> cas de mésalignement**

La figure 5-26 montre les résultats pour un point de contact dont  $\bar{X} = 74.16$  et  $\bar{R} = 41.38$ , et la figure 5-27 les résultats pour un autre point de contact dont  $\bar{X} = 76.49$  et  $\bar{R} = 42.64$ , avec  $E=0.1$  ;  $P=G=-0$ ,  $\alpha=90^\circ$ .

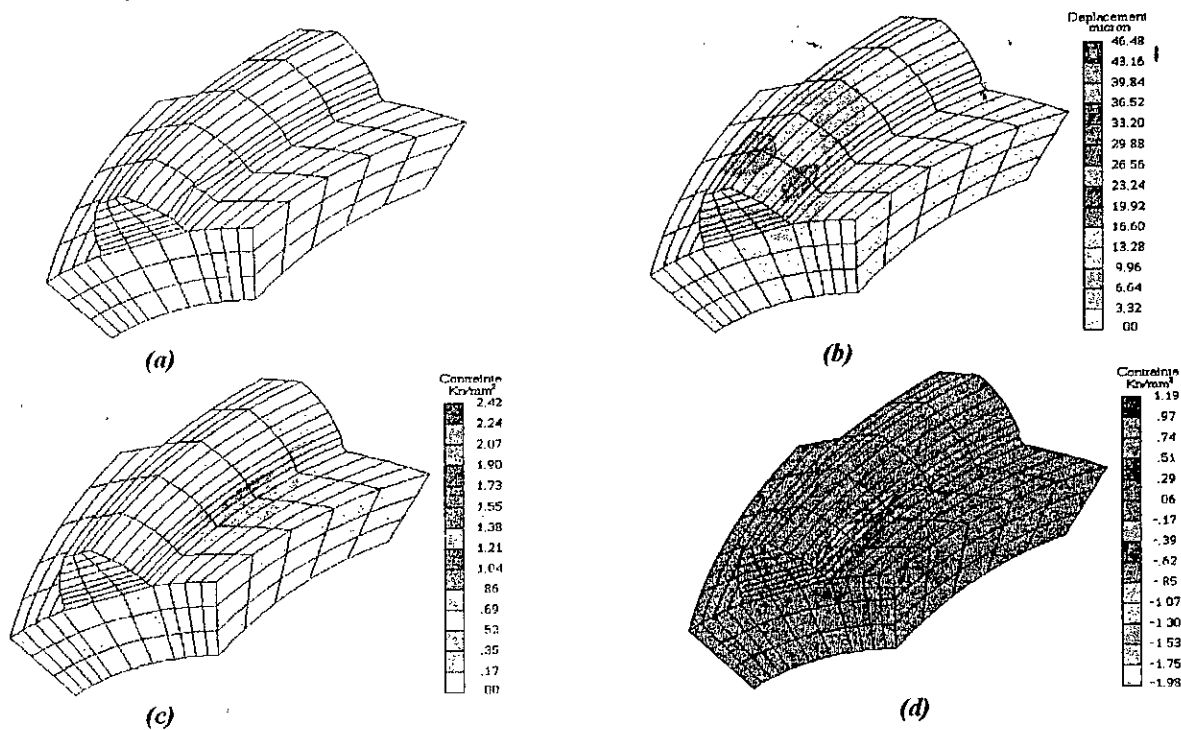


Figure 5-26 Résultats obtenus pour un premier point de contact

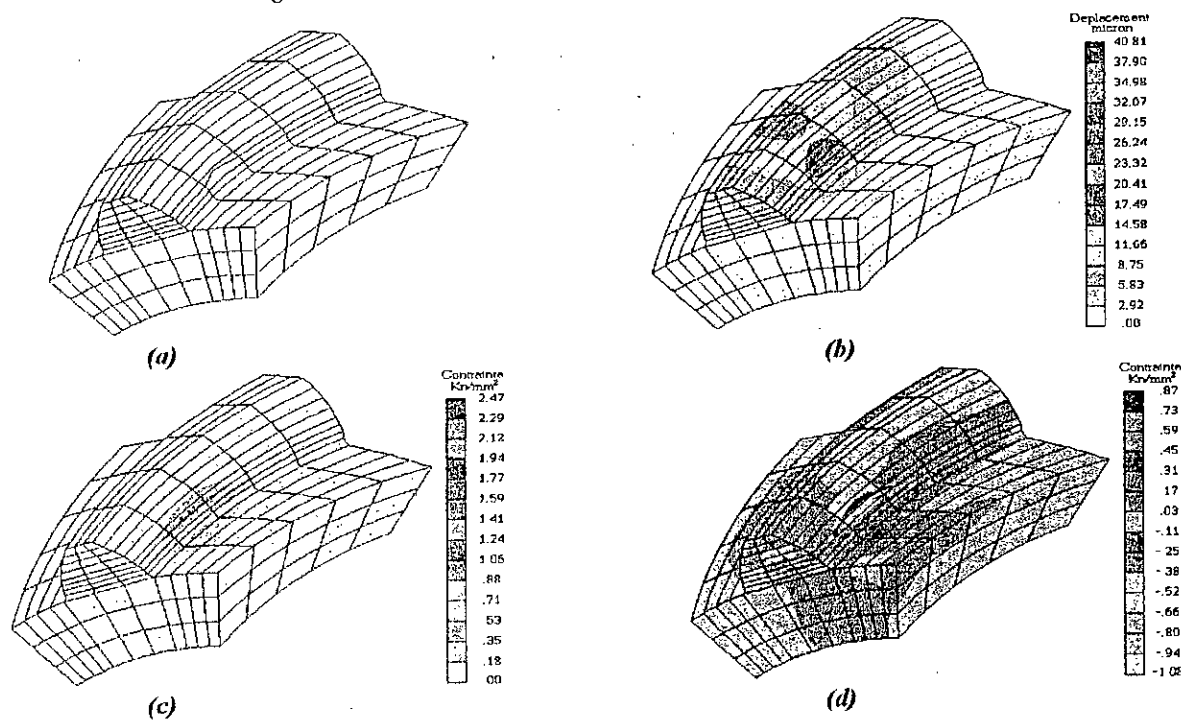


Figure 5-27 Résultats obtenus pour un deuxième point de contact

Nous constatons que la contrainte de Von-Mises, la contrainte principale maximale et le déplacement total gardent une distribution elliptique dans la zone de contact avec un écrasement local de la surface de denture.

### 5-6-2. CONTACT ENTRE LE FLANC CONVEXE DU PIGNON ET LE FLANC CONCAVE DE LA ROUE

#### 1<sup>er</sup> cas sans mésalignement

La figure 5-28 montre les résultats pour un point de contact dont  $\bar{X} = 80.97$  et  $\bar{R} = 51.05$ , et la figure 5-29 les résultats pour un autre point de contact dont  $\bar{X} = 84.98$  et  $\bar{R} = 53.53$ , avec  $E=P=G=0$ ,  $\alpha=90^\circ$ .

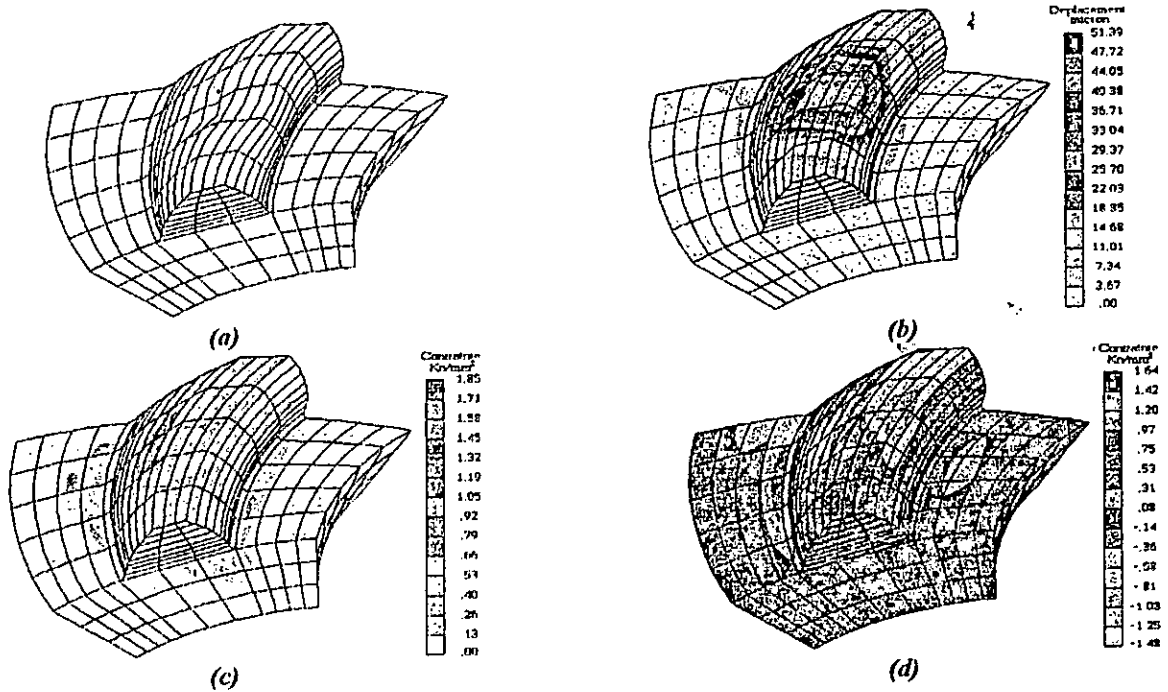


Figure 5-28 Résultats obtenus pour un premier point de contact

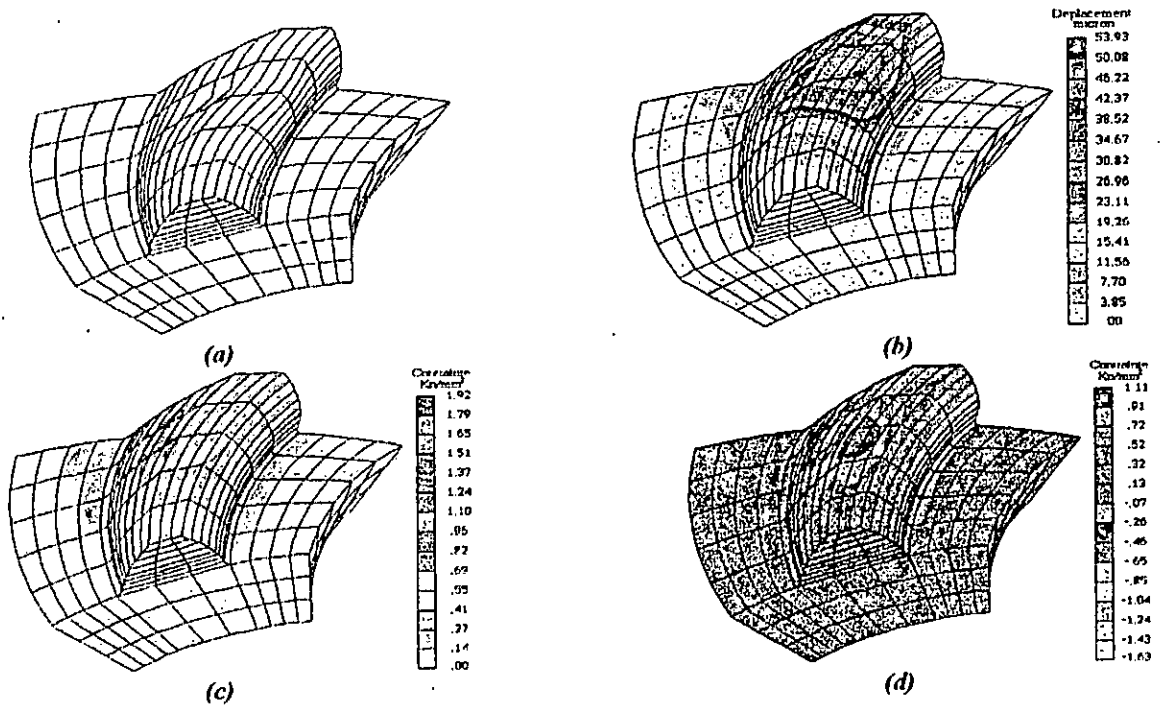


Figure 5-29 Résultats obtenus pour un deuxième point de contact

Dans la zone de contact la contrainte de Von-Mises a une distribution elliptique. Le déplacement maximal est localisé dans la zone de contact pour le premier point, alors que pour le deuxième point il s'étend jusqu'au sommet de la dent. Le spectre de la contrainte principale maximale montre une zone de compression dans la zone de contact.

**2<sup>ème</sup> cas de mésalignement**

La figure 5-30 montre les résultats pour un point de contact dont  $\bar{X} = 80.70$  et  $\bar{R} = 51.02$ , et la figure 5-31 les résultats pour un autre point de contact dont  $\bar{X} = 90.25$  et  $\bar{R} = 57.14$ , avec  $E=P=G=0.1$ ,  $\alpha=90^\circ$ .

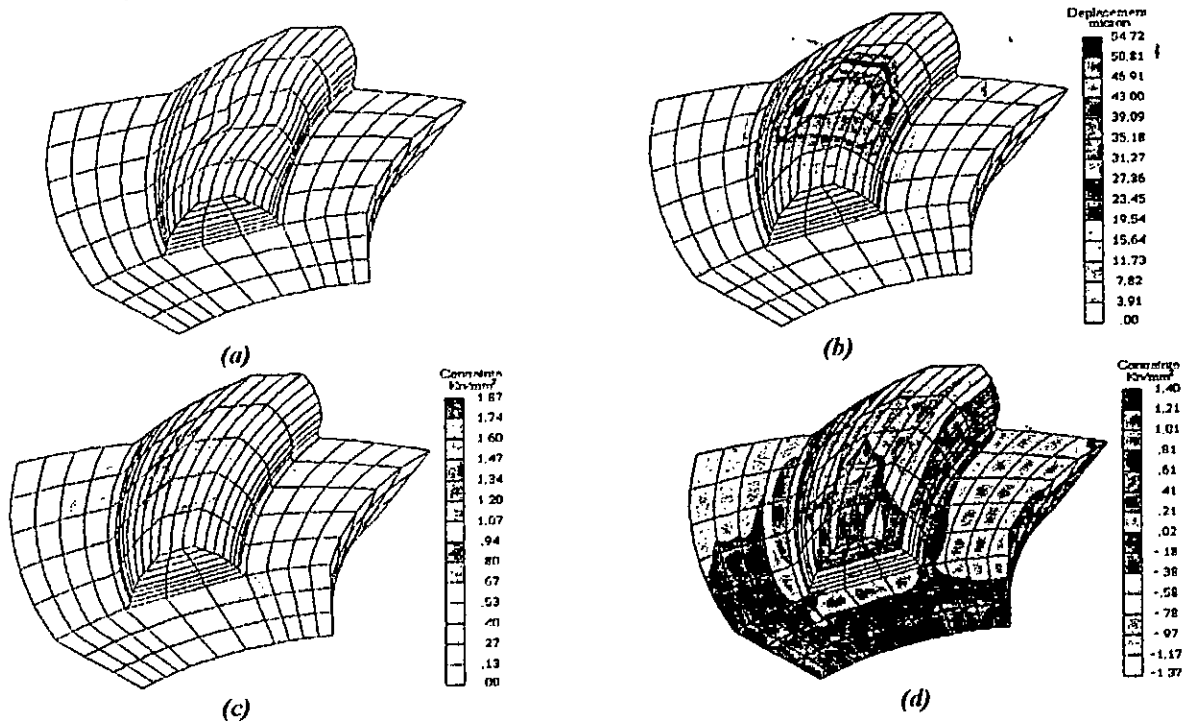


Figure 5-30 Résultats obtenus pour un premier point de contact

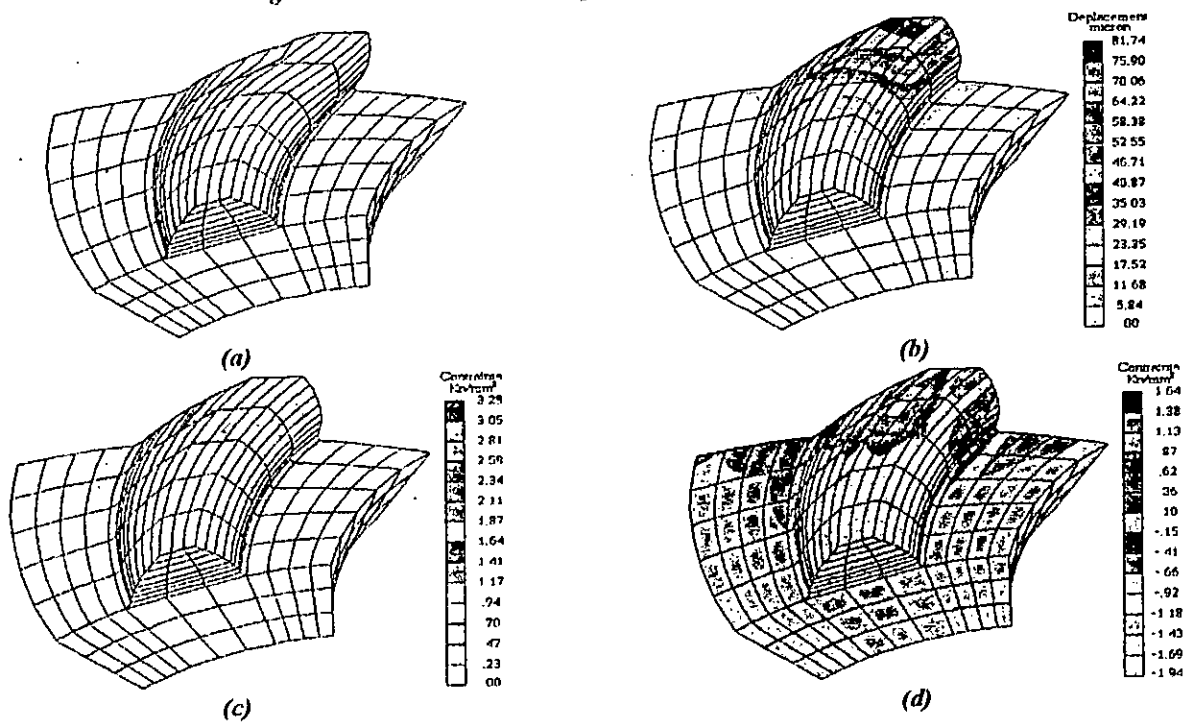


Figure 5-31 Résultats obtenus pour un deuxième point de contact

Dans le cas où  $E=P=G=0.1$ , nous constatons de plus que le déplacement maximal est localisé dans la zone de contact pour le premier point, alors que pour le deuxième point il s'étend jusqu'au sommet de la dent sur une aire plus importante.

**3<sup>ème</sup> cas de mésalignement**

La figure 5-32 montre les résultats pour un point de contact dont  $\bar{X} = 81.23$  et  $\bar{R} = 51.09$ , et la figure 5-33 les résultats pour un autre point de contact dont  $\bar{X} = 88.93$  et  $\bar{R} = 55.99$ , avec  $E=P=G=-0.1$ ,  $\alpha=90^\circ$ .

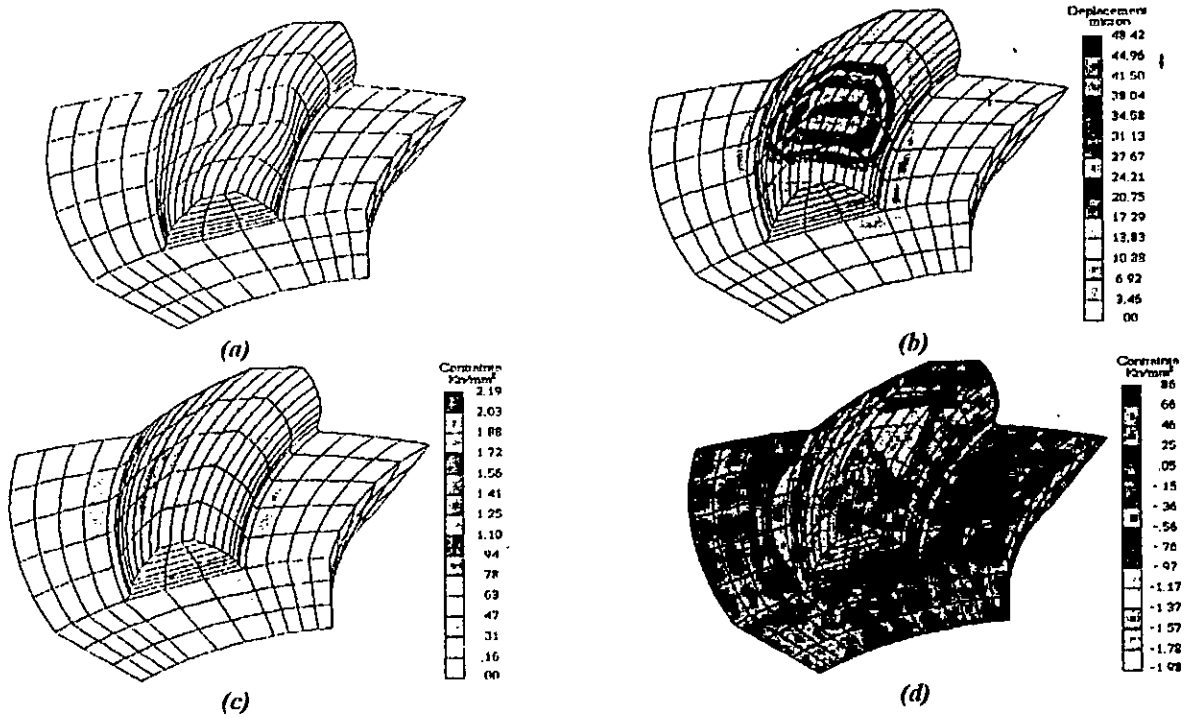


Figure 5-32 Résultats obtenus pour un premier point de contact

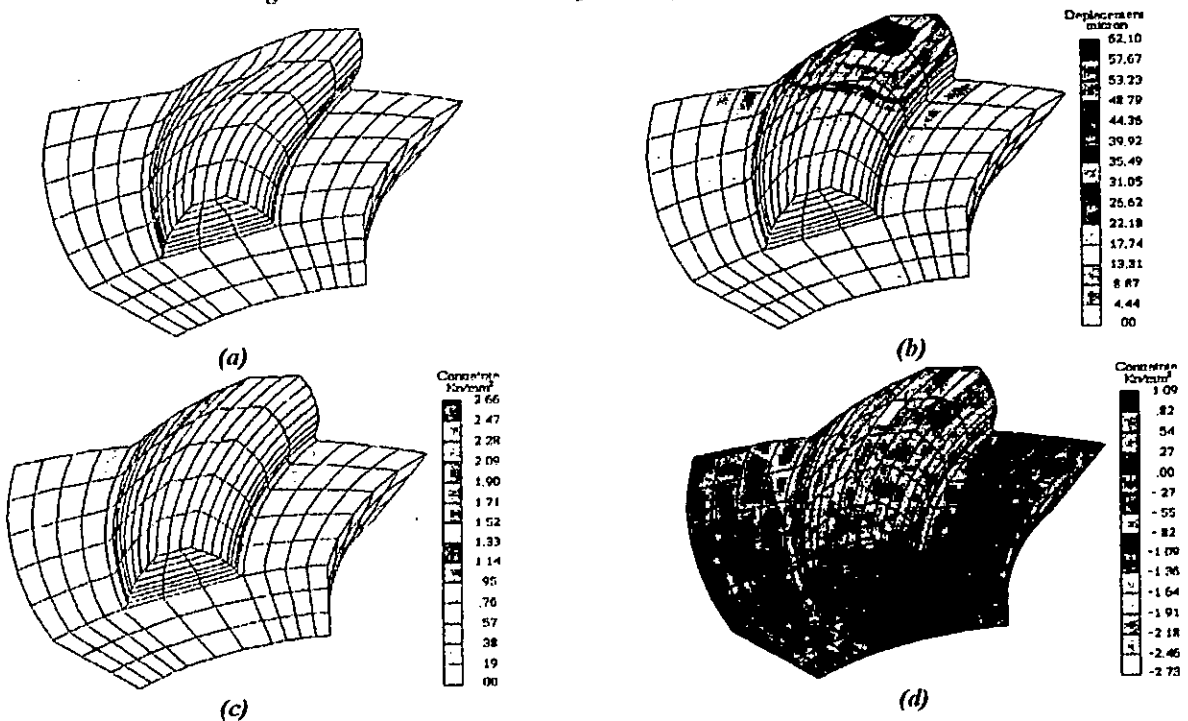


Figure 5-33 Résultats obtenus pour un deuxième point de contact

Avec ces défauts d'alignement, le spectre du déplacement total montre que le déplacement maximal s'étend sur une aire plus importante au sommet de la dent en plus de la zone de contact. Le spectre de la contrainte principale maximale montre une zone de compression dans la zone de contact et des contraintes d'extension près de la racine de la dent.



**4<sup>ème</sup> cas de mésalignement**

La figure 5-34 montre les résultats pour un point de contact dont  $\bar{X} = 84.77$  et  $\bar{R} = 53.51$ , et la figure 5-35 les résultats pour un autre point de contact dont  $\bar{X} = 88.52$  et  $\bar{R} = 55.95$ , avec  $E=P=0$ ,  $G=0.1$ ,  $\alpha=90^\circ$ .

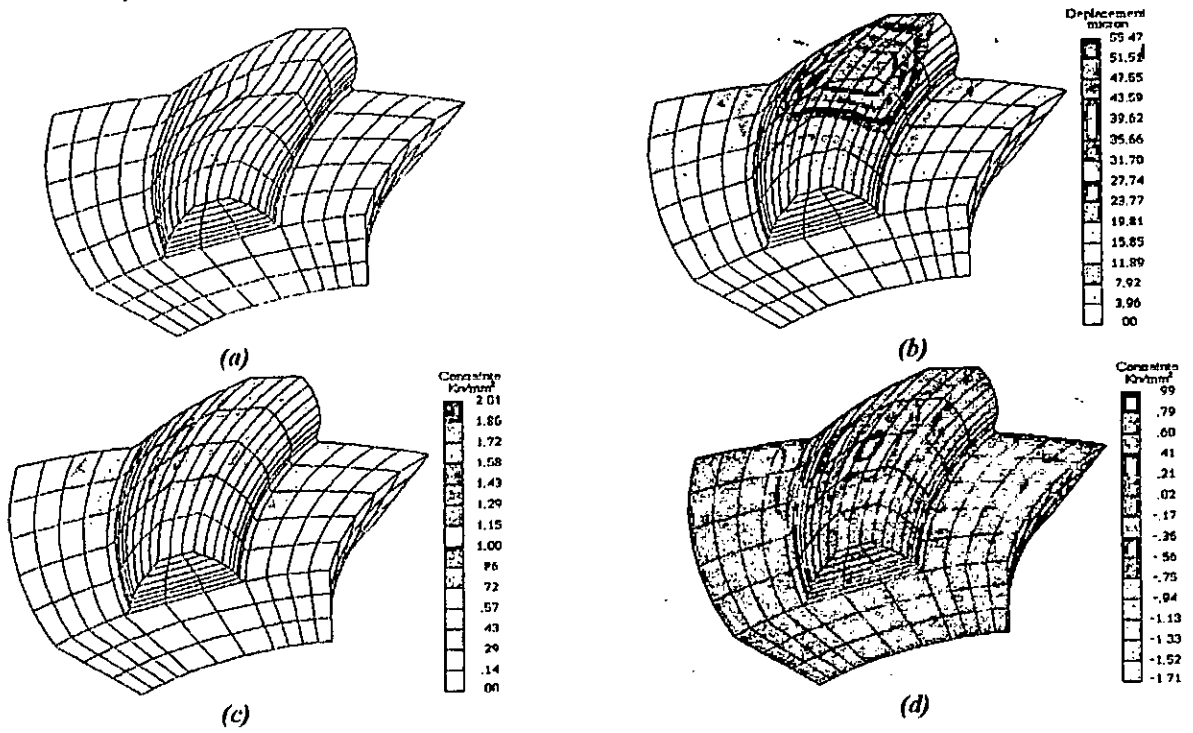


Figure 5-34 Résultats obtenus pour un premier point de contact

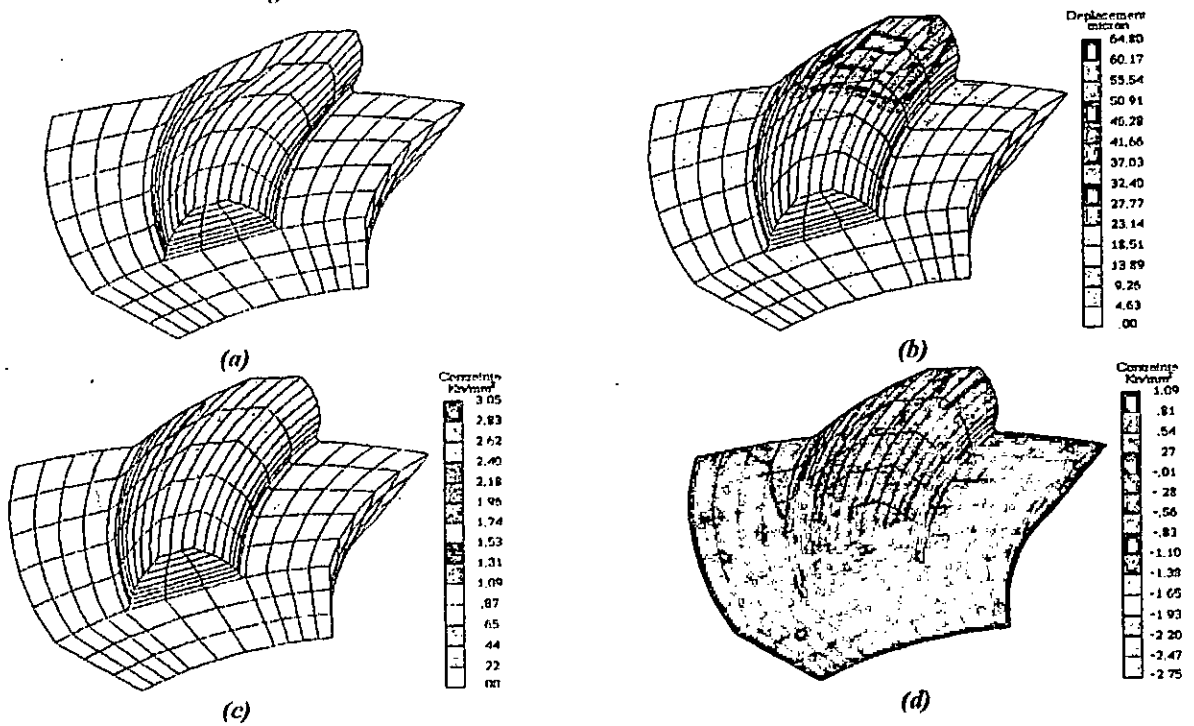


Figure 5-35 Résultats obtenus pour un deuxième point de contact

Pour le quatrième cas, il a été remarqué que les contraintes d'extension sont proches de la racine de la dent et s'étendent sur une aire plus importante, et que les contraintes de compression sont localisées dans la zone de contact. Par contre, le déplacement maximal pour le deuxième point de contact s'étend jusqu'au sommet de la dent.

**5<sup>ème</sup> cas de mésalignement**

La figure 5-36 montre les résultats pour un point de contact dont  $\bar{X} = 81.28$  et  $\bar{R} = 51.10$ , et la figure 5-37 les résultats pour un autre point de contact dont  $\bar{X} = 92.42$  et  $\bar{R} = 58.37$ , avec  $E=0.1$ ,  $P=G=0$ ,  $\alpha=90$ .

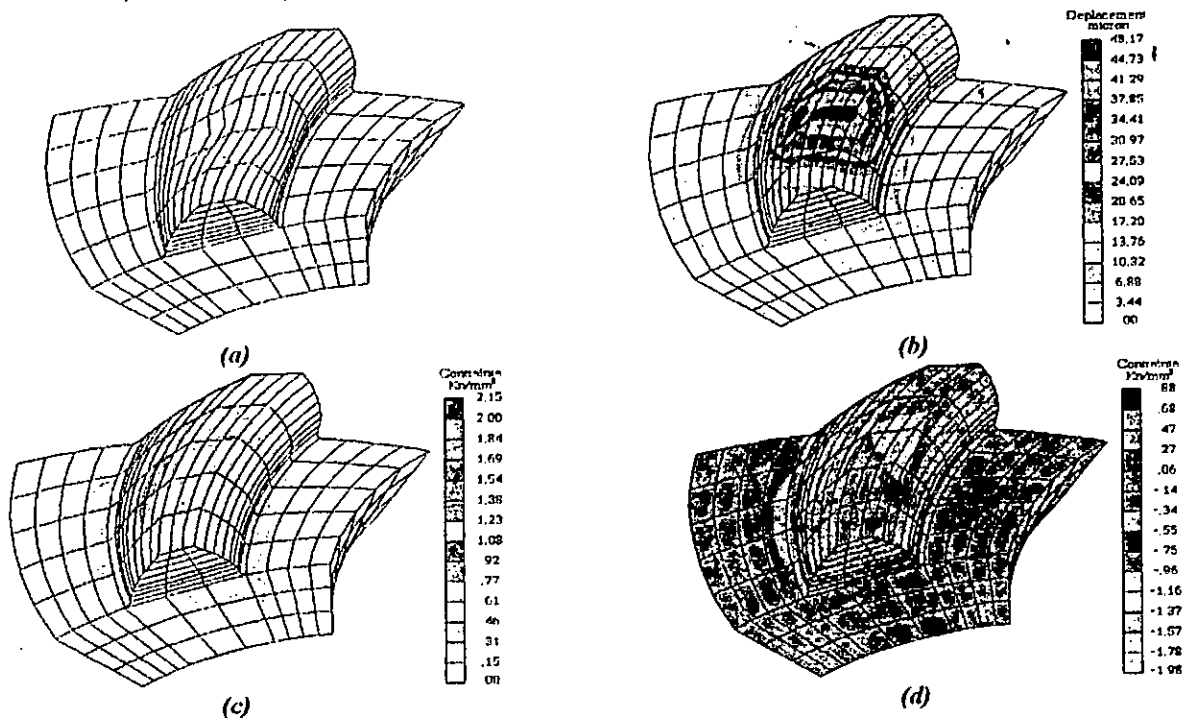


Figure 5-36 Résultats obtenus pour un premier point de contact

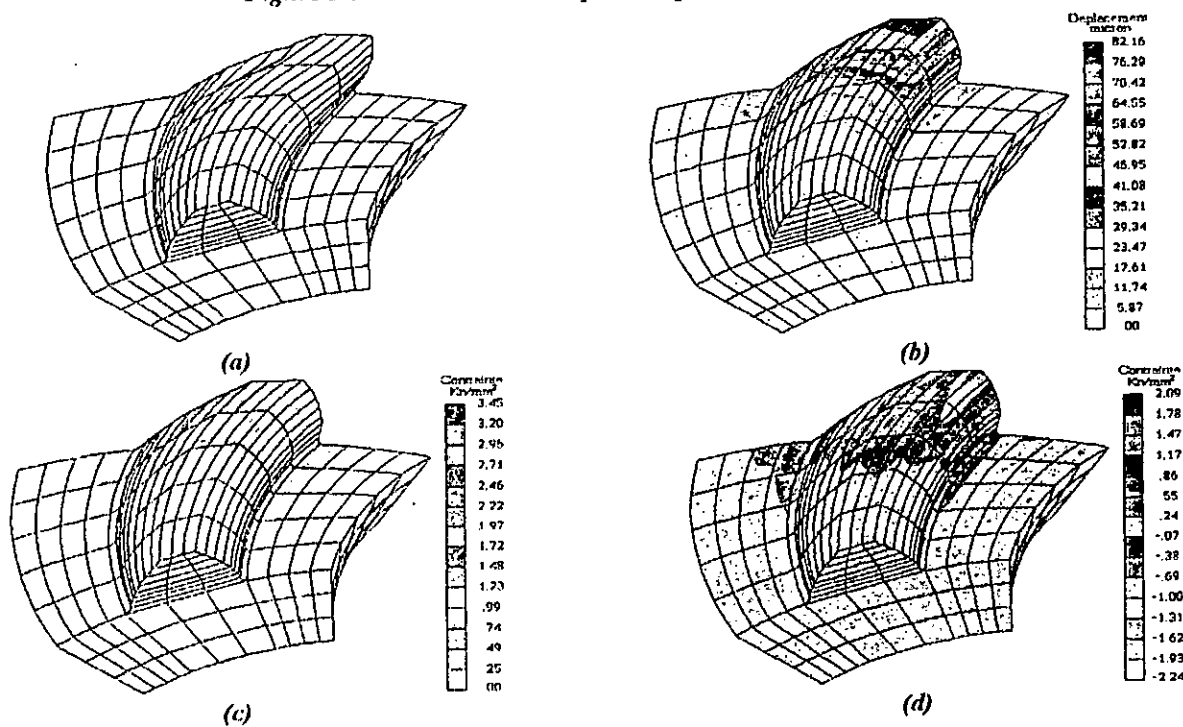


Figure 5-37 Résultats obtenus pour un deuxième point de contact.

En changeant les valeurs des paramètres E, P et G, le spectre du déplacement total présente une zone dont le déplacement maximal s'étend sur une aire plus importante de la zone de contact jusqu'au sommet de la dent.

A travers les applications que nous avons faites, nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

- Cette analyse nous a permis de quantifier les déplacements et les contraintes en tout point de la structure et a permis également de localiser rapidement les zones dangereuses ( zones présentant des contraintes importantes) et les zones présentant des déplacements importants.
- L'état de contraintes et des déplacements dépend du type de conditions aux limites choisies, des composantes du vecteur position et du vecteur normal unitaire au point de contact et des défauts d'alignement ( $E$ ,  $P$ ,  $G$  et  $\alpha$ ).
- La distribution de la contrainte équivalente de Von-Mises est toujours elliptique dans la zone de contact, dont la forme, la dimension et l'orientation dépendent de la charge transmise et des composantes du vecteur position et du vecteur normal unitaire au point de contact. Cette zone est la plus critique, puisque des déformations permanentes peuvent prendre naissance si la charge à transmettre dépasse un certain seuil. Ces déformations permanentes doivent être évitées en limitant la puissance à transmettre ou en choisissant un matériau plus résistant.
- Les déplacements maximums sont localisés dans la zone de contact (les déformées montrent l'écrasement de la surface de denture en cette zone). Ils sont petits si le point de contact est près de la racine de la dent du fait qu'en cette zone la dent est plus rigide, et sont plus importants et peuvent s'étendre sur une plus grande surface quand le point de contact est près du sommet de la dent puisqu'en cette zone la dent est moins rigide.
- Si le point de contact sur un membre est près de la racine, il sera près du sommet de la dent pour l'autre membre. Par conséquent, des déplacements plus importants peuvent apparaître sur l'un d'eux si la puissance à transmettre est importante. Afin d'éviter cette situation, le chemin de contact doit être centré sur la surface de denture sans s'étendre aux extrémités de la dent. Cette position optimale ne peut être obtenue qu'en étudiant la sensibilité des engrenages spiro-coniques aux réglages machine et aux distances de montage.
- La valeur maximale et l'étendue de la zone d'extension près de la racine de la dent dépendent de la charge appliquée, de la position du point de contact, des composantes du vecteur normal unitaire et des conditions aux limites imposées.
- La zone de contact est la zone où la contrainte principale maximale est une contrainte de compression, dont la valeur maximale et l'étendue de cette zone dépendent de la position du point de contact, des composantes du vecteur normal unitaire et de la charge appliquée.
- Les déformées montrent la grande capacité de charge de ces engrenages sans causer des déplacements très importants. Cela est dû à la grande rigidité donnée par la forme géométrique de la denture en spirale, ce qui justifie leur emploi dans les systèmes de transmission de haute performance.
- Après l'analyse par la méthode des éléments finis, nous pouvons voir si le couple résiste aux efforts appliqués ou non. Si la résistance est très grande, nous pouvons réduire les dimensions du couple d'engrenages en choisissant un module plus petit, ce qui conduit à minimiser le poids total de la transmission. Par contre, si la résistance du couple n'est pas suffisante, nous devons choisir un module plus grand ou choisir un matériau plus résistant.
- Des gradients importants entre les valeurs nodales des contraintes en certains endroits, nécessitent de raffiner le maillage dans ces zones afin de réduire ces gradients et obtenir des résultats meilleurs.

## 5-7. CONCLUSION

En considérant un couple d'engrenage donné, nous avons présenté les différentes possibilités du mailleur tridimensionnel. La validité des résultats de la simulation de taillage est confirmée par comparaison à ceux obtenus par Fong et Tsay [14]. Afin de montrer la généralité de ce mailleur, nous avons maillé un engrenage cylindrique à denture droite et un autre à denture hélicoïdale. En prenant différents défauts d'alignement, le chemin de contact sur la surface de denture est déterminé. Pour certains points de contact et en utilisant la méthode des éléments finis, l'état des contraintes et des déplacement est déterminé.

# **CONCLUSION GENERALE**

## CONCLUSION GENERALE

L'analyse des performances (cinématique et de comportement) des engrenages spiro-coniques ne peut être faite que numériquement, par simulation des méthodes de taillage et d'engrènement du pignon et de la roue. Compte tenu de la complexité de la surface de denture et des difficultés de trouver des solutions analytiques pour les décrire.

L'analyse statique des engrenages spiro-coniques, taillés par le procédé GLEASON, en utilisant la méthode des éléments finis a été étudiée et, à cet effet, nous avons développé des programmes de calcul permettant de réduire le temps de traitement de façon considérable.

Ces programmes sont constitués :

1. D'une simulation de différentes méthodes de taillage développées par GLEASON (*Formate, Duplex, Helical Duplex, Fixed Setting*). Cette simulation nous a permis de déterminer toute la surface de denture, y compris le raccordement entre la partie active de la dent et le cône de pied.
2. D'une génération automatique du maillage en utilisant des éléments hexaédriques à 20 nœuds selon deux possibilités (génération uniforme du maillage ou génération non uniforme). La génération non uniforme du maillage est très importante du fait qu'elle permet de raffiner le maillage dans les zones à gradients importants et de choisir un maillage grossier loin des zones de concentration de contraintes, ce qui permet de réduire la taille du problème et le temps de résolution. Le mailleur développé n'est pas spécifique aux engrenages spiro-coniques, mais permet également de mailler tous les types d'engrenages couramment utilisés dans l'industrie. Ce mailleur permet de réduire les temps de préparation des données nécessaires à la méthode des éléments finis.
3. D'une simulation d'engrènement du pignon et de la roue en considérant différents défauts d'alignement (E, P, G et  $\alpha$ ). Cette simulation permet de déterminer les différents points de contact entre les surfaces de denture constituant la ligne d'action.
4. Du programme de calcul des contraintes et des déplacements en utilisant la méthode des éléments finis conjointement à la technique de stockage en ligne de ciel et segmentation sur disque.
5. D'un post-processeur pour la vérification et la visualisation du maillage généré et le dépouillement graphique des résultats. Le post-processeur a permis d'interpréter les résultats obtenus et de localiser rapidement les zones dangereuses. Ce post-processeur est général et pourra être utilisé pour toute structure modélisée avec des éléments hexaédriques à 20 nœuds.

Le logiciel que nous avons développé permet :

- de prédire l'état de contraintes et de déplacements avant le lancement de la production,
- de vérifier la résistance du couple d'engrenage aux efforts appliqués,
- de minimiser le poids du couple d'engrenage.

Le travail effectué pourra faire partie d'un système expert d'analyse des engrenages spiro-coniques et d'autres types d'engrenages.

Pour mieux comprendre le comportement des engrenages spiro-coniques, nous recommandons pour la continuité de ce travail :

- L'analyse non linéaire et la détermination du nombre de dents en contact,
- L'analyse du comportement thermique,
- L'analyse dynamique du fonctionnement,
- La minimisation des déviations de la surface réelle de la denture,
- L'étude de l'effet des réglages machine sur les caractéristiques géométriques de la surface de denture.

# ANNEXES



## Annexe 1

### Engrenages coniques à denture spirale

#### 1. Types de spirales

Il existe plusieurs types de spirales [2,3,4,5,6] :

- Spirale logarithmique : c'est la forme théorique de ce type d'engrenage, ayant l'avantage d'assurer un angle constant entre la ligne médiane et la ligne radiale (figure 1-a). L'inconvénient de la dent en spirale logarithmique est qu'elle est difficile à fabriquer.

- Spiral Circular-cut : les fabricants d'engrenages ont approximé la spirale logarithmique par un cercle. Cette méthode utilise un outil circulaire de rayon  $R_c$  dont la position est définie par deux paramètres  $H$  et  $V$  (figure 1-b).

- Spirale en développante : c'est une méthode de taillage développée par KLINGELBERG. Elle utilise une fraise mère conique et elle est basée sur une méthode de développante (figure 1-c).

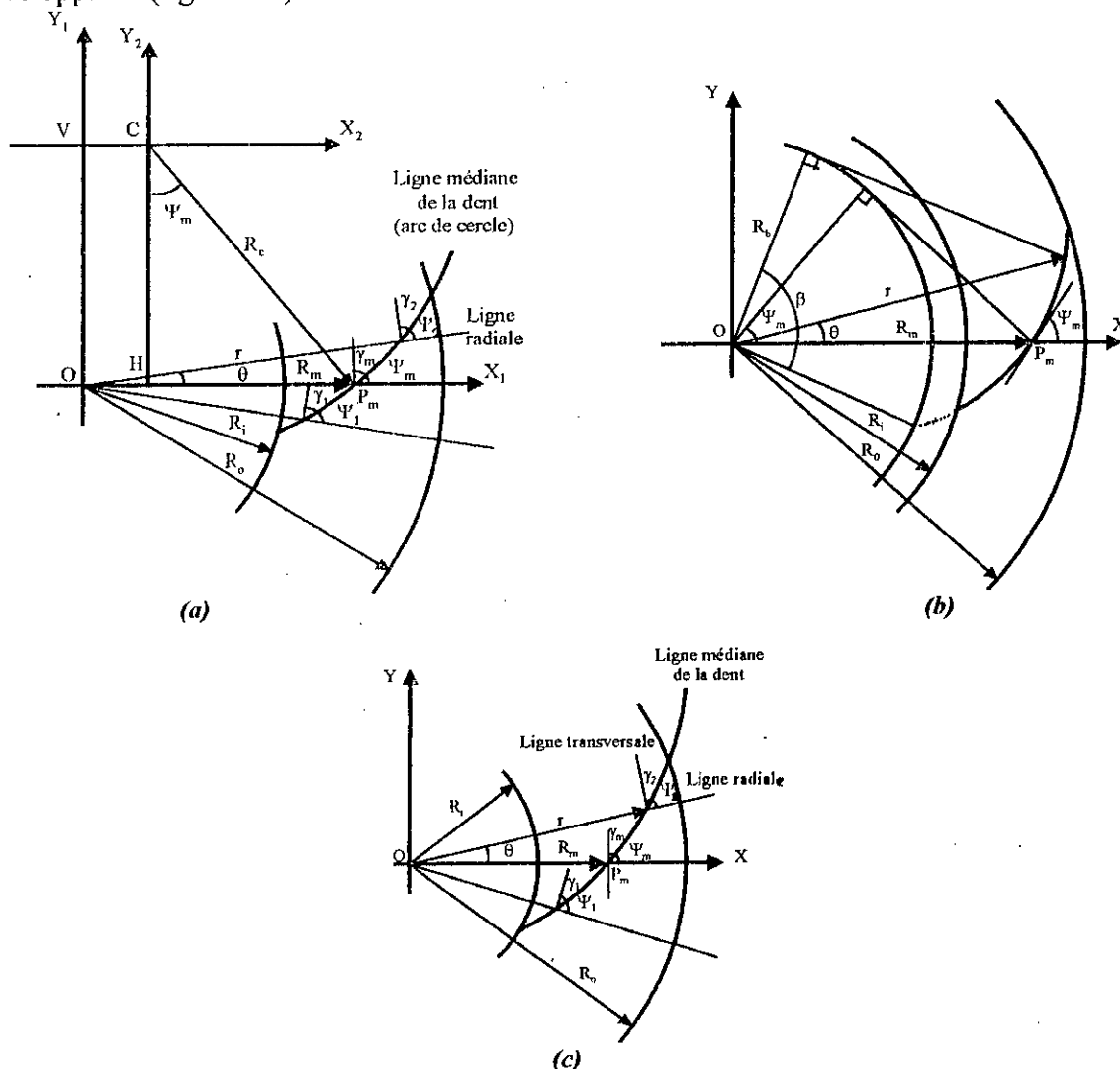


Figure 1. Différents types de spirales  
 a- Spirale logarithmique. b- Spirale "Circular-Cut". c- Spirale en développante.

## 2. Types de hauteur de dentures

Nous pouvons distinguer deux types de hauteur de dentures [7,8,9] :

- La denture à hauteur constante : c'est une denture développée par les firmes OERLIKON et KLINGELBERG. Récemment GLEASON permet le taillage des engrenages spiro-coniques avec une hauteur de dent constante. Pour cette denture, la génératrice de pied est parallèle à la génératrice primitive (figure 2-a).

- La denture à hauteur variable : la hauteur de la dent diminue à partir du gros bout jusqu'au petit bout de la dent (figure 2-b). Cette denture est développée par GLEASON.

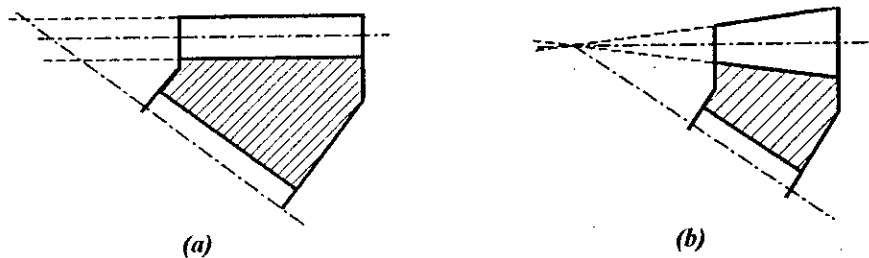


Figure 2 Hauteur de dent.  
a. Denture à hauteur constante. b- Denture à hauteur variable.

## 3. Types d'engrenages coniques à denture spirale

La firme GLEASON a développé trois types d'engrenages coniques à denture spirale :

- *Engrenage Zerol* : les axes du pignon et de la roue sont concourants, et l'angle de spirale moyen est nul pour le pignon et la roue (figure 3-a).

- *Engrenage Spiro-conique* : les axes du pignon et de la roue sont concourants. Préférable pour les faibles rapports ( $1\div 1$  à  $3\div 1$ ) (figure 3-b).

- *Engrenage Hypoïde* : les axes du pignon et de la roue ne sont pas concourants et sont décalés d'une distance E. Préférable pour rapports élevés ( $3\div 1$  et dessus) (figure 3-c).

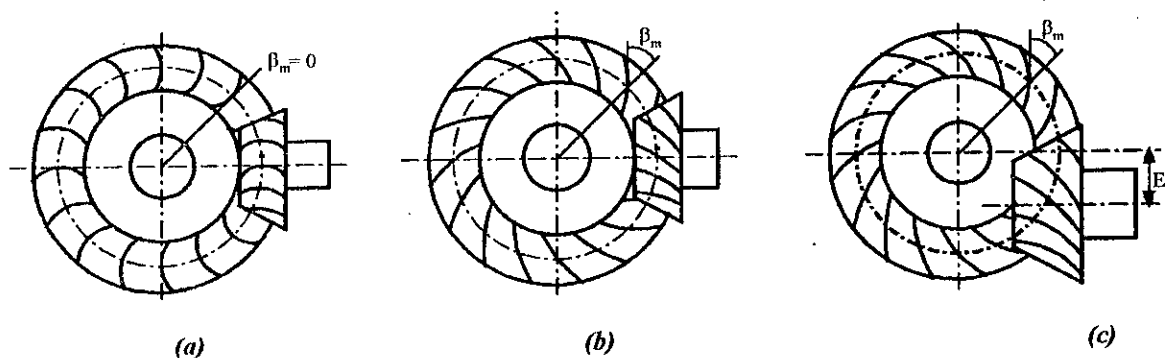


Figure 3 Différents types d'engrenages à denture spirale.  
a- Engrenage Zerol. b- Engrenage Spiro-conique. c- Engrenage Hypoïde.

Annexe 2**Coordonnées des points de contact****1. Coordonnées des points de contact sur le flanc concave du pignon :**

$$E=P=G=0.$$

X	Y	Z
70.7102155888251787	-7.80995965347440180	-38.7533946714658057
71.8385124744239079	-7.109562888963412320	-39.5023644901438615
72.9779311788283849	-6.46384201790209900	-40.2338862884633102
74.1278944760169907	-5.73369133348694682	-40.9711389790696927
75.2878500986870449	-4.98810376784452636	-41.7010858630613370
76.4572866637937523	-4.15306494387762815	-42.4304359131069901
77.6357485384171468	-3.37542717416394655	-43.1425547338865769
78.8228538132975700	-2.50582423147660061	-43.8498090293678047

$$E=P=G=0.1$$

X	Y	Z
74.5001009286953035	-5.34066688381706989	-40.2019134380259189
75.4856787641393794	-4.71765591441199827	-40.7487946649481643
76.4883348486105774	-4.01383247354026729	-41.3011324239274487
79.5980786148582524	-1.98646686241623538	-42.9221499892762708
80.6686444144765460	-1.16401001911946955	-43.4572826720317664
81.7564368938486155	-0.327771049785410828	-43.9821344461683239
82.8617655415658305	0.444990935798337206	-44.4963745665302213
83.9850903989085964	1.30921422384375385	-44.9984502779726085
85.1270551583365318	2.18874211987969192	-45.4861115603624455
86.2885254156194037	3.16451825499247619	-45.9520069076326010
87.4706318331681700	4.07781052188083670	-46.4032067672308983
88.6748184176638006	5.09080038788723499	-46.8243545248983111
89.9028947127627589	6.04199802705961364	-47.2282824274023341
91.1570914087628239	7.09694772298994980	-47.5917885856866079

$$E=P=G=-0.1$$

X	Y	Z
72.9202283569953806	-6.47603118372208009	-40.2005228043921221
74.0701414197129679	-5.74552063048034611	-40.9380838618699840
75.2300796939024963	-4.99955703297543241	-41.6683239170308752
77.5780237750253150	-3.38615241327991789	-43.1103617642515857
78.7651796078741313	-2.59268095183947489	-43.8134381528516172
79.9607005270053151	-1.70598666422460998	-44.5094525549298439
81.1644129282678364	-0.801184028516958247	-45.1914352310836236

$$E=P=0, G=-0.1$$

X	Y	Z
74.4485571347366317	-5.35170529955863650	-40.1951836642129550
75.4335585828187618	-4.72850763398321838	-40.7418969972662310
76.4356146209263443	-4.09661122840192782	-41.2870308976106557
77.4546272819802084	-3.38282553590183399	-41.8360782358263634
81.7000732837199166	-0.41525435185487130	-43.9747654809218460
82.8044430315156887	0.434030527000573096	-44.4900067279509202
83.9266852879467820	1.29790373604261045	-44.9925901477591665
85.0674165822384794	2.17695130645823420	-45.4809356876178086
86.2274709477800343	3.07188764722991303	-45.9531815089366162
87.4079428697534695	4.06456766636829592	-46.4001045903695299
88.6102350323158134	4.99480654414426883	-46.8315266885352131
89.8361108563813104	6.02647618047649569	-47.2284912745177294
91.0877496952775232	7.07989770172176591	-47.5942802303809671

$$E=0.1, P=G=0.$$

X	Y	Z
70.7506528534012205	-7.75543198273914047	-38.7814440843590162
71.8784802376483185	-7.12392930272233027	-39.5171497243705048
73.0174927919606489	-6.40909606716985270	-40.2602955629452381
74.1670511793235505	-5.67876385515340143	-40.9966997222428873
75.3266084942696921	-4.93298781653088092	-41.7257910199295239
76.4956599376318422	-4.17179714361320553	-42.4469612916738868
77.6737574606438557	-3.31985220460775787	-43.1654129178764876
78.8605283417742839	-2.52653581383642267	-43.8673194554641768

## 2. Coordonnées des points de contact sur le flanc convexe du pignon :

$$E=P=G=0.$$

X	Y	Z
78.8393023734690530	-8.26578166347109544	-49.1156372398806695
80.9735688940191949	-6.68264567110951990	-50.6279336572960403
83.0195630634825932	-5.03857339897076617	-52.0681565502890891
84.9861274609655908	-3.33492211354486212	-53.4380444085756992
86.8805731048457375	-1.57288653057818073	-54.7386167352477599
88.7089407361177393	0.246398191420369311	-55.9702991784058952
90.4762933740043138	2.12182171228487748	-57.1330362547453205
92.1869315358563597	4.05227084241756863	-58.2263751496344426

E=P=G=0.1

X	Y	Z
78.5563921452547902	-8.37950768415290348	-49.0534600355180430
80.7058342094836121	-6.79523340247635588	-50.5752086802152760
82.7645821298307567	-5.15004969968137072	-52.0239782391327452
84.7422632273711542	-3.44517458152605816	-53.4017359382757135
86.6464829705262076	-1.68181377989778569	-54.7096128166373816
88.4835082505812380	0.138889613897171971	-55.9481208002125285
90.2585789013217834	2.01581945158523235	-57.1172723281187018
91.9761356268288637	3.94785812793294166	-58.2166688699654813

E=P=G=-0.1

X	Y	Z
79.1164171112782384	-8.15348425202504146	-49.1763110249601354
81.2367279509815887	-6.57118116439483035	-50.6795096954848248
83.2703959670234894	-4.92818906987846805	-52.1113614394900253
85.2261965726928565	-3.22573080184202921	-53.4735280218676223
87.1111632087407628	-1.46499032446788924	-54.7669234160215623
88.9311226152197207	0.352904982507859399	-55.9918913564336762
90.6909701460735391	2.22685060180488748	-57.1483117084664443
92.3948729289270716	4.15573776039740128	-58.2356798436065120

E=P=0, G=0.1

X	Y	Z
78.5629685766537165	-8.37572999770228144	-49.0567357016762244
80.7201917003691563	-6.78793549587333001	-50.5799093250737357
82.7861668504007184	-5.13922963716503212	-52.0296115531366610
84.7705891893154444	-3.43086745942445859	-53.4078459238416556
86.6811438917488033	-1.66407515015204588	-54.7157788678629871
88.5241621391255222	0.159986438079420562	-55.9539519097456690
90.3049365184322426	2.04018540593059283	-57.1224026520880059
92.0279519316307244	3.97539003558859827	-58.2207542721155775

E=0.1, P=G=0.

X	Y	Z
79.1644155591908003	-8.13706341360280661	-49.1818311236166323
81.2823421460857105	-6.55536468236746561	-50.6832176170228053
83.3136154824969424	-4.91317271845803205	-52.1133601656053571
85.2670625097358936	-3.21167040773679302	-53.4739389291432445
87.1497301075331450	-1.45201794213890234	-54.7658757943039021
88.9674533940801666	0.364677885928251899	-55.9895193868400867
90.7251324465964188	2.23733041540991140	-57.1447522723389625
92.4269367030683213	4.16484650525725186	-58.2310709620481717

**REFERENCES**  
**BIBLIOGRAPHIQUES**

**REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

- [1]. Haas. L.L .- Latest developments in the manufacture of large spiral bevel and hypoid gears -. Presented at the Century 2 International Power Transmissions and Gearing Conference, San Francisco, California, U.S.A, August 18-21, 1980.
- [2]. Huston. R.L and Coy. J.J .- A basis for the analysis of surface geometry of spiral bevel gears -. Advanced Power Transmission Technology, NASA CP 2210, AVRADCOM TR 82-C-16, G.K. Fisher, ed., 1981, pp. 317-334.
- [3]. Huston. R.L and Coy. J.J .- Ideal spiral bevel gears- A new approach to surface geometry -. ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 103, January 1981, pp. 127-133.
- [4]. Huston. R.L and Coy. J.J .- Surface geometry of circular cut spiral bevel gears -. ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 104, October 1982, pp. 743-748.
- [5]. Huston. R.L, Lin. Y and Coy. J.J .- Tooth profile analysis of circular-cut spiral bevel gears -. ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 105, March 1983, pp. 132-137.
- [6]. Tsai. Y.C and Chin. P.C .- Surface geometry of straight and spiral bevel gears -. ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 109, December 1987, pp. 443-449.
- [7]. Hotchkiss. R.G .- Design and manufacture of face hobbed bevel and hypoid gears -. Gleason Works, Publication ETI 3500 A, Rochester, N.Y, U.S.A.
- [8]. Hotchkiss. R.G .- The application of face milling and face hobbing processes on the Gleason Phoenix Universal Generators -. Gleason Works, Publication ETI3494/ January 1990, Rochester, N.Y, U.S.A.
- [9]. Stadtfeld. H.J .- Handbook of bevel and hypoid gears -. Edition Rochester Institute Technology, 1<sup>st</sup> Edition, 1993.
- [10]. Baxter. M.L .- Exact determination of tooth surfaces for spiral bevel and hypoid gears -. AGMA 139.02, October 1966.
- [11]. Chaniac. J .- Comment augmenter les performances des engrenages spiro-coniques et hypoïdes -. Congrès Mondial des Engrenages, Paris, 22-24 Juin 1977, pp. 1277-1290.
- [12]. Cloutier. L and Gosselin. C .- Kinematic analysis of bevel gears -. ASME Paper 84-DET-177, October 1984.
- [13]. Colbourne. J.R .- Compensation for spindle tilt in the cutting of spiral bevel gears -. ASME Proceedings of the 1989 International Power Transmission and Gearing Conference, Chicago, April 25-28, 1989, vol.2, pp. 727-743.
- [14]. Fong. Z.H and Tsay. C. B .- A study on the tooth geometry and cutting machine mechanisms of spiral bevel gears -. ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 113, September 1991, pp. 346-352.

- [15]. Fong. Z.H and Tsay. C.B .- A mathematical model for the tooth geometry of circular-cut spiral bevel gears -. ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 113, June 1991, pp. 174-181.
- [16]. Fong. Z.H and Tsay. C.B .- Kinematical optimization of spiral bevel gears -. ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 114, September 1992, pp. 498-506.
- [17]. Fong. Z.H and Tsay. C.B .- Kinematical optimization of spiral bevel gears -. ASME International Power Transmission and Gearing conference, 1992, vol.1, pp. 221-228.
- [18]. Fong. Z.H and Tsay. C.B .- The undercutting of circular-cut spiral bevel gears -. ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 114, June 1992, pp. 317-325.
- [19]. Fong. Z.H and Tsay. C.B .- Tooth contact analysis of spiral bevel gears -. Journal of Chinese Society of Mechanical Engineers (CSME), vol.11, No.6, December 1990, pp. 538-544.
- [20]. Gosselin. C and Cloutier. L .- The generating space for parabolic motion error spiral bevel gears cut by the Gleason method -. ASME International Power Transmission and Gearing conference, 1992, vol.1, pp. 229-235.
- [21]. Gosselin. C, Cloutier. L and Brousseau. J .- Tooth contact analysis of high conformity spiral bevel gears -. Proceedings of the International Conference on Motion and Power Transmissions, MPT'91, Hiroshima, Japan, November 23-26, 1991, JSME, pp. 725-730.
- [22]. Gosselin. C, Cloutier. L and Sankar. S .- Effects of the machine settings on the transmission error of spiral bevel gears cut by the Gleason method -. ASME Proceedings of the 1989 International Power Transmission and Gearing Conference, Chicago, April 25-28, 1989, vol.2, pp. 713-718.
- [23]. Gosselin. C, Cloutier. L and Sankar. S .- On the control of profile kinematical transmissions error in spiral bevel gears cut by the Gleason method -. ASME, Proceedings of the 1989 International Power Transmission and Gearing Conference, Chicago, April 25-28, 1989, vol.2, pp. 713-718.
- [24]. Krenzer. T.J .- Tooth contact analysis of spiral bevel and hypoid gears under load -. SAE 810688, April 1981.
- [25]. Litvin. F. L and Zhang. Y .- Local synthesis and tooth contact analysis of face-milled spiral bevel gears -. NASA CR-4342 ( AVSCOM TR-90-C-028), January 1991.
- [26]. Litvin. F. L and Coy. J.J .- Spiral bevel geometry and gear train precision -. Advanced Power Transmission Technology, NASA CP 2210, AVRADCOM TR 82-C-16, G.K. Fisher, ed., 1981, pp. 335-344.
- [27]. Litvin. F. L and Gutman. Y .- Methods of synthesis and analysis for Hypoid gear drives of "Formate" and "Helixform" -. Parts 1-3 . ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 103, January 1981, pp. 83-113.
- [28]. Litvin. F.L .- New developments on theory of gearing -. Eight World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Prague, Czechslovakia, August 26-31, 1991, pp. 593-596.
- [29]. Litvin. F.L, Tsung. W.J, Coy. J.J and Heine. C .- generated spiral bevel gears: optimal machine-tool settings and tooth contact analysis -. SAE 851573, September 1985.
- [30]. Litvin. F.L, Tsung. W.J, Coy. J.J and Heine. C .- Generation of spiral bevel gears with zero kinematical errors and computer aided tooth contact analysis -. NASA TM-87273, USAAVSCOM-TR-86-C-2, March 1986.



- [31]. Litvin. F.L, Tsung. W.J, Coy. J.J and Heine. C .- Method for generation of spiral bevel gears with conjugate gear tooth surfaces -. ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 109, June 1987, pp. 163-170.
- [32]. Litvin. F.L, Zhang. Y and Handschuh. R.F .- Local synthesis and tooth contact analysis of faced-milled spiral bevel gears -. Proceedings of the International Conference on Motion and Power Transmissions, MPT'91, Hiroshima, Japan, November 23-26,1991,JSME, pp. 721-724 ( NASA TM-105182, AVSCOM TR-91-C-39, November 1991).
- [33]. Madroskey. D .- Conception des engrenages spiro-coniques, géométrie et simulation du comportement -. Thèse de Doctorat soutenue le 3 Juillet 1987 à L INSA de Lyon, France.
- [34]. Sugimoto. M, Maruyama. N and Hitomi. N .- Tooth fillet profile of hypoid pinion generated with toprem blade cutter -. Proceedings of the International Conference on Motion and Power Transmissions, MPT'91, Hiroshima, Japan, November 23-26,1991,JSME, pp. 711-716.
- [35]. Sugimoto. M, Maruyama. N, Nakayama. A and Hitomi. N .- Effect of tooth contact and gear dimensions on transmission errors of loaded hypoid gears -. ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 113, June 1991, pp. 182-187.
- [36]. Szente. D .- A method to determine the tooth contact pattern of spiral bevel gears -. Proceedings of the International Conference on Motion and Power Transmissions, MPT'91, Hiroshima, Japan, November 23-26,1991,JSME, pp. 731-735.
- [37]. Tamura. H .- A method of cutting point-contact spiral bevel gears with tapered tooth height -. Second World Congress on Gearing, Paris 3-5 March, 1986, pp. 173-178.
- [38]. Chambers. R.O and Brown. R.E .- Coordinate measurement of bevel gear teeth -. SAE 871645, September 1987.
- [39]. Kato. S and Akamatsu. T .- Measuring method of hypoid gear tooth profiles -. SAE 810105, 1981.
- [40]. Krenzer. T.J .- Tooth contact analysis of spiral bevel and hypoid gears under load -. SAE 810688, April 1981.
- [41]. Lemanski. A.J .- Production measurement technique for in-process control of spiral bevel gearing -. SAE 851572, September 1985.
- [42]. Litvin. F.L, Kuan. C, Wang. J.C, Handschuh. R.F, Masseth. J and Maruyama. N .- Minimization of deviations of gear real tooth surfaces determined by coordinate measurements -. ASME International Power Transmission and Gearing conference, 1992, vol.1, pp. 193-200.
- [43]. Litvin. F.L, Zhang. Y, Kieffer. J and Handschuh. R.F .- Identification and minimization of deviations of real gear tooth surfaces -. ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 113, March 1991, pp. 55-62.
- [44]. Litvin. F.L, Zhang. Y, Kuan. C and Handschuh. R.F .- Computerized inspection of real surfaces and minimization of their deviations -. Int. J. Mach. Tools Manufact, vol.32, No.1/2, 1992, pp. 141.145.
- [45]. Hohn. B.R, Winter. H, Michaelis. K and Vollhüter. F .- Pitting resistance and bending strength of bevel and Hypoid gear teeth -. ASME International Power Transmission and Gearing conference, 1992, vol.1, pp. 201-208.

- [46]. Savage. M, Altidis. P.C, Lewicki. D.G, coy. J.J and Litvin. F.L .- Tooth contact shift in loaded spiral bevel gears -. ASME, Proceedings of the 1989 International Power Transmission and Gearing Conference, Chicago, April 25-28, 1989, vol.2, pp. 203-212.
- [47]. Savage. M, Prasanna. M.G and Coe. H.H .- Maximum life spiral bevel reduction design -. NASA TM-105790, AVSCOM TR-92-C-004, July 1992.
- [48]. Bibel. G.D, Kumar. A, Reddy. S and Handschuh. R .- Contact stress analysis of spiral bevel gears using nonlinear finite element analysis -. NASA TM-106176, ARL-TR-158, AIAA-93-2296, May 1993.
- [49]. Bibel. G.D, Reddy. S and Kumar. A .- Manual for automatic generation of finite element models of spiral bevel gears in mesh -. NASA CR-191009, ARL-CR-121, April 1994.
- [50]. Bibel. G.D, Tiku. K and Kumar. A .- Prediction of contact path and load sharing in spiral bevel gears -. NASA CR-195305, ARL-CR-146, April 1994.
- [51]. Chao. H.C, Baxter. M and Cheng. H.S .- A computer solution for the dynamic load, lubricant film thickens, and surface temperatures in spiral bevel gears -. -. Advanced Power Transmission Technology, NASA CP 2210, AVRADCOM TR 82-C-16, G.K. Fisher, ed., 1981, pp. 345-364.
- [52]. Handschuh. R.F and Litvin. F.L .- A method for determining spiral bevel gear tooth geometry for finite element analysis -. NASA TP-3096, AVSCOM-TR-91-C-020, August 1991.
- [53]. Handschuh. R.F and Litvin. F.L .- How to determine spiral bevel gear tooth geometry for finite element analysis -. NASA TM-105150, AVSCOM-TR-91-C-018, 1991.
- [54]. Kumar. A and Bibel. G .- A procedure for 3-D contact analysis of spiral bevel gears -. NASA CR-194472, ARL-CR-72, March 1994.
- [55]. Henriot. G .- Traité théorique et pratique des engrenages .- Tome1, Tome 2, Ed Dunod, Paris. (Tome1: 6<sup>ème</sup> édition, 1979; Tome2: 5<sup>ème</sup> édition, 1983).
- [56]. Gleason Works .- Calculating instructions, Formate spiral bevel gears, SFT -. Publication SD3095B, Rochester, N.Y, U.S.A.
- [57]. Gleason Works .- Calculating instructions, generated Hypoid gears for the N0.116 Hypoid Generator using modified roll, HGM-116 -. Publication SD3102/November 1962, Rochester, N.Y, U.S.A.
- [58]. Gleason Works .- Calculating methods for spiral bevel, zerol bevel and hypoid gears on Gleason machines -. Publication SD3054B/September 1967, Rochester, N.Y, U.S.A.
- [59]. Gleason Works .- Formate spiral bevel gears, SFM -. , Publication SD3118/March 1965, Rochester, N.Y, U.S.A.
- [60]. Hotchkiss. R.G .- Développements récents sur le taillage duplex helical des couples coniques spiraux et hypoïdes -. Mécaniques matériaux électricité, Avril 1979, No.352, pp. 149-153.
- [61]. Gleason Works .- Testing and inspecting bevel and hypoid gears -. Publication SD3444B, 1986, Publication SD3444B/1986, Rochester, N.Y, U.S.A.
- [62]. Gleason Machine Division .- Conception des engrenages de pont moteur sur les véhicules de tourisme -. Paris, Fenwick service engrenages.

- [63]. Gleason Works .- Gleason method for designing Hypoid gear blanks -. 1971, Rochester, N.Y, U.S.A.
- [64]. Litvin. F. L, Zhang. Y, Lundy. M and Heine. C .- Determination of settings of a tilted head cutter for generation of Hypoid and spiral bevel gears -. ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 110, December 1988, pp. 495-500.
- [65]. Gleason Works .- Theory of 6-axis CNC generation of spiral bevel and hypoid gears -. Publication ET1 4208/8- 89, Rochester, N.Y, U.S.A.
- [66]. Handschuh. R.F and Bibel. R.C .- Recent manufacturing advances for spiral bevel gears -. SAE 912229, September 1991.
- [67]. Gleason Works .- Gleason helixact system ( GD- generated duplex) -. Publication SD3156/June 1978, Rochester, N.Y, U.S.A.
- [68]. Handschuh. R.F .- Thermal behavior of spiral bevel gears -. NASA TM 106518, ARL-TR-403, January 1995.
- [69]. Baxter. M.L .- Second-order surface generation -. The Journal of the Industrial Mathematics Society, vol.23, part 2, 1973, pp. 85-106.
- [70]. Chaniac. J .- Comment augmenter les performances des engrenages spiro-coniques et hypoïdes -. Congrès Mondial des Engrenages, Paris, 22-24 Juin 1977, pp. 1277-1290.
- [71]. Schewizer. P .- Infographie -. Tome 2, Ed., Presse Polytechnique Romandes, Lausanne, 1987.
- [72]. Sheth. P.N and Uicker. J.J .- A generalized symbolic notation for mechanisms -. ASME Journal of Engineering for Industry, vol.93, February 1971.
- [73]. Doneddu. A .- Nouveau cours de mathématiques, Tome 6 : géométrie différentielle, intégrales multiples -. Ed., Vuibert, Paris, 1981, 2<sup>ème</sup> édition.
- [74]. Gleason Works .- Spiral bevel gear system -. Publication SD3006/April 1982, Rochester, N.Y, U.S.A.
- [75]. Bey. M, Belhanèche. H, Larbi. S .- Analyse statique des engrenages spiro-coniques par éléments finis -. Accepté pour les 4<sup>ème</sup> journées maghrébines sur la mécanique JMM'98, du 25 au 26 Octobre 1998, Sidi Bel Abbès, Algérie.
- [76]. Burden. R.L and Faires. J.D .- Numerical analysis -. 3<sup>rd</sup> edition, Prindle Weber & Schmidt, 1981.
- [77]. Gourdin. A and Boumahrat. M .- Méthodes numériques appliquées -. Ed., O.P.U, Algérie, 1991.
- [78]. Vignes. J .- Algorithmes numériques, analyse et mise en œuvre -. Tome 2, Ed., Technip, Paris, 1980.
- [79]. Gleason Works .- Understanding tooth contact analysis -. , Publication SD 3139B, March 1981, Rochester, N.Y, U.S.A.
- [80]. Gleason Works .- Tooth contact analysis, formulas and calculation procedures -. Publication SD 3155/April 1964 , Rochester, N.Y, U.S.A.
- [81]. Bey. M, Belhanèche. H, Larbi. S .- Modélisation statique des engrenages spiro-coniques par éléments finis -. Accepté pour le 4<sup>ème</sup> congrès mondial des engrenages et des transmissions de puissance. Du 16 au 18 Mars 1999, Paris, France.

