

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

7/87

وزارة التعليم والبحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المكتبة
BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT : GENIE HYDRAULIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention d'un diplôme d'ingénieur d'Etat

SUJET

**REVUE BIBLIOGRAPHIQUE
DES VORTEX DE VIDANGE**

Proposé par :

M. BOUACHE

Etudié par :

H. HADJADJ

N. BELBACHIR

Dirigé par :

M. BOUACHE

PROMOTION : JANVIER 1987

E.N.P. 10, Avenue Hacén Badi - EL-HARRACH — ALGER

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLICHE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم والتكوين المهني
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUES

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

الجامعة الجزائرية
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT : GENIE HYDRAULIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention d'un diplôme d'ingénieur d'Etat

SUJET

**REVUE BIBLIOGRAPHIQUE
DES VORTEX DE VIDANGE**

Matricule

Évalué par

Dirigé par

J. HADJADI

M. BOUACED

K. BELBACHER

PROMOTION : JANVIER 1987

REMERCIEMENTS

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à monsieur M. BOUACHE pour le soutien constant et ses directives fructueuses.

Nous saisissons également cette occasion pour exprimer nos remerciements, en signe de respect à monsieur D. ABDERRAHIM, chef de département d'hydraulique et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de cette thèse.

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
Symboles et unités	1
Chap I : Introduction	3
Chap II : Bases théoriques du phénomènes	5
: 1 : Analyse du m^{vt}	5
: 2 : Caractéristiques principales d'un écoulement tourbillonnaire d'un fluide	8
: 2.1 : Définition d'un tourbillon	9
: 2.1.1 : Tourbillon forcé ; tourbillon libre	9
: 2.2 : Définition de la circulation	13
: 3 : Champs des pressions dans un vortex	14
: 4 : Constitution réelle d'un vortex	16
: 5 : Fonction de Courant des écoulements plan et à symétrie axiale	20
: 5.1 : Fonction de Courant des écoulements plans	20
: 5.2 : Écoulement à trois dimensions (ou à symétrie axiale)	22

	: 6 : Ecoulements irrotationnels à trois dimensions simples	23
Chap III :	Etude théorique et expérimentale	25
	: 1 : Etude théorique	25
	* Mise en équation du problème	25
	* Remarque	34
	: 2 : Discussion des résultats	
Chap IV :	Similitude et analyse dimensionnelle du phénomène	38
	: 1 : Similitude des vortex	38
	: 1.1 : Emploi des modèles	38
	: 1.2 : Différentes similitudes similitude	39
	: 1.3 : Principaux critères	40
	: 1.4 : Impossibilité de la réalisation d'une similitude complète	41
	: 1.5 : Choix du critère	44
	: 2 : Analyse dimensionnelle du phénomène	44
	: 2.1 : Introduction	44
	: 2.2 : Grandeurs intervenant dans le phénomène	45
	: 2.3 : Nombre de produits adimensionnels	46
	: 2.4 : Calcul des produits adimensionnels	48

: 2.5: Discussion des paramètres	54
: 2.5.1: Variation de la hauteur critique en fonction du débit	54
: 2.5.2: Grandeurs dynamiques	58
: 3: Mesure de la circulation (Γ) expérimentalement	59
: 3.1: Diverses méthodes optiques	60
: 3.1.1: Photographie de l'entonnoir du vortex	60
: 3.1.2: Méthode Chronophotographique	60
: 3.1.3: Méthode des rayons réfléchis	61
: 3.1.4: Méthode des rayons réfractés	62
Chap V: Conclusion	65

المدرسة الوطنية للتقنيات
المكتبة — المكتبة
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

SYMBOLES ET UNITÉS

Symboles	Grandeurs	Dimensions
A	aire d'une section	L^2
B	largeur d'alimentation	L
D	diamètre	L
F	nombre de froude	—
g	accélération de la pesanteur	$L.T^{-2}$
H	hauteur	L
K	constante	—
m	coefficient du débit	—
P, P ₀	pression, Pression motrice	$L^{-2}.M$
Q	débit volumique	$L^3.T^{-1}$
R	Reynolds	—
r	rayon	L
t	temps	T
v _z , w	vitesse axiale	$L.T^{-1}$
v _r , u	vitesse radiale	$L.T^{-1}$
v _θ , v	" tangentielle	$L.T^{-1}$
V	volume	L^3
W	nombre de Weber	—
z ₀ , z	côtes d'un point	L
ρ	masse volumique	$M.L^{-3}$
ν	viscosité cinématique	$L^2.T^{-1}$
σ	tension superficielle	$M.L^{-1}$

Γ	circulation	$L^2 T^{-1}$
$\bar{\omega}$	poids spécifique	$M L^{-4} T^{-2}$
λ	échelle géométrique	
λ_v	échelle des viscosités	
λ_T	" " tensions superficielles	
λ_v	échelles des vitesses	
θ	angle	rd



CHAPITRE I INTRODUCTION

Le vortex de vidange est certainement l'un des phénomènes les plus familiers de l'ingénieur hydraulicien; qui peut souvent l'observer lorsqu'à un écoulement à surface libre se superpose localement un écoulement dans le sens vertical contrôlé par un orifice relativement étroit, disposé à une certaine profondeur. La surface libre forme une sorte d'entonnoir plus ou moins nettement creusé et animé d'une vitesse de rotation croissant rapidement lorsqu'on se rapproche du centre. Si l'on dispose à la surface du courant, assez loin à l'amont, un corps flottant, on le voit d'abord se déplacer assez lentement en direction de la zone tourbillonnaire, puis petit à petit, il est pris dans la ronde, tourne de plus en plus vite au fur et à mesure qu'il se rapproche du centre et brusquement il se trouve véritablement aspiré vers le fond. Le phénomène n'est pas toujours absolument permanent: le vortex apparaît, s'amplifie, puis il semble diminuer, disparaît, presque pour se reformer et ainsi de suite. Les expériences ont montré que c'est un phénomène éminemment capricieux et aussi particulièrement tenace, auquel il est très difficile de s'opposer. Cependant, dans toutes les études faites jusqu'à ce

jour, aucun calcul quantitatif précis sur l'hydrodynamique des vortex n'a été trouvé.

Le phénomène de la concentration du moment cinétique était bien connu et signalé, mais il est rare, semble-t-il que les auteurs aient été jusqu'à donner des formules simples des applications numériques à des cas concrets. Quel est l'origine du phénomène ? peut-on expliquer le caractère parfois explosif de son apparition ? existe-t-il des moyens de l'éviter ?

Dans notre thèse nous ne prétendons pas apporter à toutes ces questions une réponse satisfaisante, notre but est seulement de faire part des réflexions et des remarques que nous ont suggérées les études dans ce domaine.

CHAPITRE II

BASES THEORIQUES DU PHENOMENE DU VORTEX

II. 1. Analyse du mouvement d'une particule fluide:

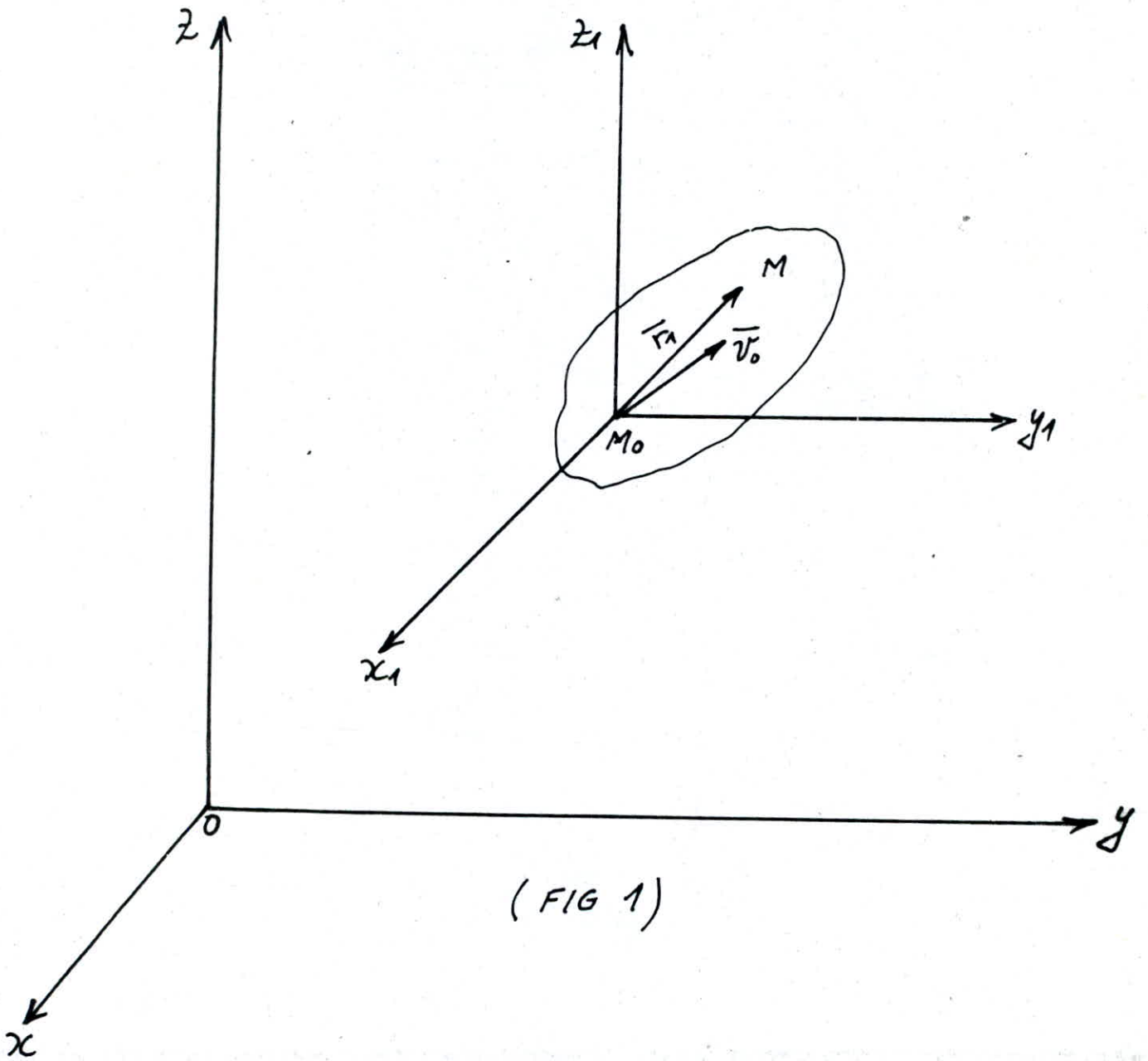
Lorsqu'on étudie un phénomène quelconque suivant la méthode rationnelle, on le compare avec un autre phénomène plus simple, en déterminant les particularités du phénomène compliqué, par rapport au phénomène simple. Faisons de même: comparons le mouvement d'une particule fluide avec le mouvement d'un corps absolument solide, connu de la mécanique générale. Le mouvement d'une particule fluide est d'un caractère plus compliqué, étant donné qu'à la différence d'un corps solide elle peut se déformer, même très sensiblement par rapport à un corps solide élastique.

Examinons une particule fluide (Fig 1), un point quelconque M_0 situé à l'intérieur de celle-ci de coordonnées x_0, y_0, z_0 sera pris pour pôle. Introduisons le système de coordonnées x_1, y_1, z_1 liés à cette particule et ayant le pôle pour origine. Les axes des systèmes de coordonnées fixe et lié sont parallèles.

Désignons par $\vec{v}_0 = \vec{v}(x_0, y_0, z_0, t)$ la vitesse du pôle. Le rayon vecteur du point M quelconque à l'intérieur de la particule $\vec{r}_1 = \vec{i}(x-x_0) + \vec{j}(y-y_0) + \vec{k}(z-z_0)$.

La vitesse du point quelconque M de la particule fluide

$$\vec{v}(x, y, z, t) = \vec{v}(x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1, t) \quad (\text{II. 1. } \textcircled{1})$$



(FIG 1)

Développons cette fonction (II.1.①) en série de Taylor dans le voisinage du pôle en nous limitant aux premiers termes de développement. Considérons le temps t comme paramètre, c'est à dire étudions la répartition des vitesses à l'instant donné, en tenant compte de ce que par suite du parallélisme des axes de coordonnées $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_1}$, etc... Nous obtenons :

$$\bar{v}(x_0+x_1, y_0+y_1, z_0+z_1, t) = \bar{v}(x_0, y_0, z_0, t) + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)_0 x_1 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)_0 y_1 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)_0 z_1 \quad (\text{II. 1. } \textcircled{2})$$

où le premier termes $\bar{v}(x_0, y_0, z_0, t) = \bar{v}_0$ représente la vitesse du pôle.

Les coefficients de développement $\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)_0$; $\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)_0$; $\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)_0$

sont déterminés au point du pôle, c'est à dire qu'on peut les considérer comme certaines grandeurs données, par la suite nous omettons l'index "0" affecté aux dérivées.

Dans le développement nous avons rejeté les grandeurs du second ordre et d'ordres supérieur (les termes du type $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2}\right) x_1^2 + \dots$); cela signifie que les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point M doivent être noitoirement petites pour qu'on puisse négliger les termes d'ordres supérieur. Pour cette raison, l'analyse exposée ci-dessous n'est valable que pour une particule fluide de petites dimensions. Ceci constitue la première différence notable entre l'analyse du mouvement d'un corps solide et d'un fluide.

Pour les transformations ultérieures, il est utile d'examiner une des projections de la vitesse. En projetant (II. 1. $\textcircled{2}$) sur l'axe des x , nous obtenons:

$$v_x = u = v_{0x} + \frac{\partial v_x}{\partial x} x_1 + \frac{\partial v_x}{\partial y} y_1 + \frac{\partial v_x}{\partial z} z_1 \quad (\text{II. 1. } \textcircled{3})$$

Effectuons dans (II. 1. $\textcircled{3}$) une transformation identique en ajoutant au second membre et en soustrayant les termes $\left(\frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial x} x_1^2 + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial x} z_1^2\right)$ et regroupons les

termes avec les coordonnées y_1 et z_1 .

Les formules pour v_y et v_z sont obtenues à partir de l'expression pour v_x par la méthode de permutation circulaire des indices.

$$(II. 1. (4)) \quad \begin{cases} w_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ w_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ w_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{cases}$$

II. 2. Caractéristiques principales d'un écoulement tourbillonnaire d'un fluide.

II. 2. 1. Définition d'un tourbillon:

Le tourbillon d'un fluide est une quantité vectorielle de même nature qu'une vitesse angulaire. Elle est définie par:

$$\text{Tourbillon } W = \text{rot } u = \nabla \cdot u. \quad (II. 2. 1. (1))$$

$$\text{avec } \text{rot } u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$\text{rot } u = w_x \cdot i + w_y \cdot j + w_z \cdot k.$$

La signification physique du tourbillon se comprend mieux en imaginant la congélation brusque d'une petite sphère du fluide, si l'élément solide qui en résulte, possède une rotation, le fluide est tourbillonnaire au point considéré. La valeur numérique du tourbillon doit être égale à la moitié du rotationnel de la sphère solide tel que:

$$\vec{W} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}$$

Une ligne tourbillon est définie comme étant une courbe tracée dans le fluide, de telle sorte que la tangente en chacun de ses points ait la même direction que le vecteur tourbillon au point considéré.

Les lignes de tourbillon passent par chacun des points d'une petite courbe fermée, forment un tube de tourbillon. On obtient l'analogie des lignes de courant et des tubes de courant.

Pour un tube de tourbillon de faible section; le produit de la grandeur du tourbillon par la section droite du tube, doit rester constant tout le long du tube. Ce produit constant est connu sous le nom de force du tourbillon.

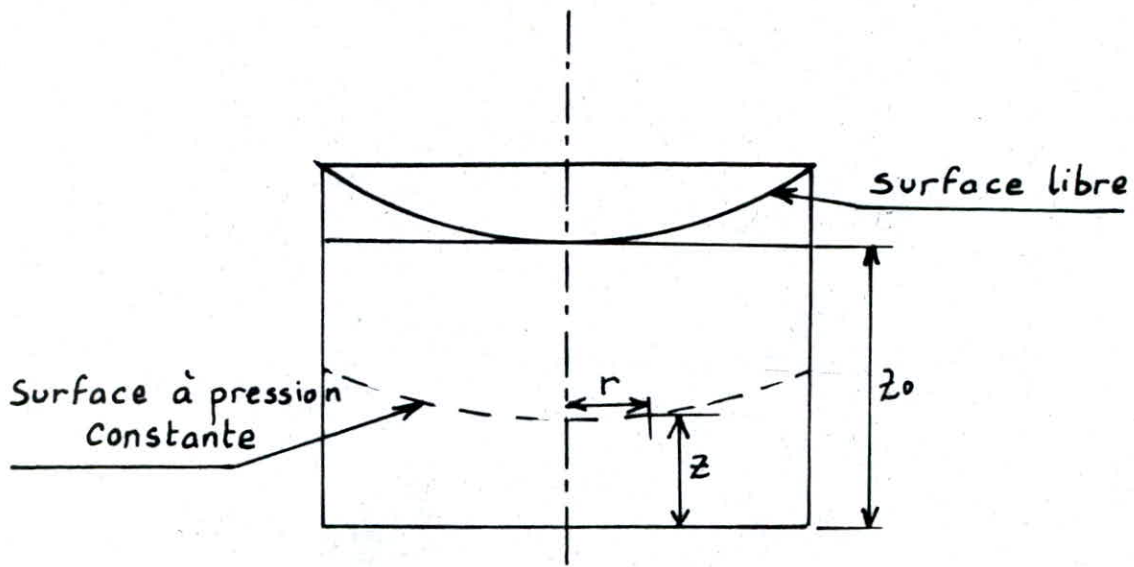
II.2.1.1. Tourbillon forcé ; tourbillon libre:

a - Tourbillon forcé:

Comme son nom l'indique, il doit être créé et entretenu artificiellement par l'action d'une aube ou d'un agitateur. Des exemples pratiques du tourbillon forcé se rencontrent fréquemment (écoulement dans l'aube d'une pompe centrifuge opérant en circuit fermé dont la vanne de sortie est obturée, ou encore le mouvement qui a lieu dans la partie centrale d'un métangeur).

Un tourbillon forcé peut être considéré comme un cas limite de l'écoulement rotationnel, ou encore de l'écoulement dont le fluide tourbillonne.

Le tourbillon est définie mathématiquement (Formule II.2.



(FIG 2)

Dans le cas particulier du tourbillon forcé, le fluide est en rotation, comme un corps solide et chaque élément possède une vitesse angulaire Ω . Le tourbillon a donc pour valeur 2Ω :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho r \Omega^2. \quad (\text{II. 2. 1. 1. } \textcircled{1})$$

En intégrant cette dernière, on obtient la répartition de pression dans un tourbillon forcé;

$$\frac{P - P_0}{\rho} = \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 - g(z - z_0). \quad (\text{II. 2. 1. 1. } \textcircled{2})$$

et l'on voit que les surfaces d'égal pression sont des paraboloides de révolution (FIG 2).

On déduit de l'équation (II. 2. 1. 1.) $\textcircled{2}$ que la pression totale (théorème de Bernoulli) d'un tourbillon forcé est égale à:

$$\frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = \frac{P_0}{\rho g} + \frac{\Omega^2 r^2}{g} + z_0. \quad (\text{II. 2. 1. 1. } \textcircled{3})$$

La pression croit, par conséquent, avec le rayon r .
Un tel écoulement ne peut ni prendre naissance, ni survivre de lui-même.

b- Tourbillon libre:

Un tourbillon libre est en effet un cas particulier du mouvement irrotationnel: une particule sphérique de fluide gelée tout d'un coup, ne sera pas animée d'un mouvement de rotation autour de son axe propre.

On a des exemples pratiques de tourbillon libre avec le remous de l'eau, il en est de même façon très approchée pour la partie extérieure de l'écoulement d'un mélangeur, ou l'écoulement dans la volute d'une pompe centrifuge, dans ces deux exemples, cependant l'écoulement est modifié par la présence de frottements sur les parois.

Les données dans le cas d'un tourbillon libre, sont totalement différentes: la pression totale y est uniforme en différenciant l'équation de Bernoulli par rapport au rayon; on obtient:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad (\text{II. 2. 1. 1. } \textcircled{4})$$

La pression totale étant constante, le long d'un rayon. Sachant que:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\rho v^2}{r}$$

d'où l'équation (II. 2. 1. 1. $\textcircled{4}$) devient:

$$\frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad (\text{II. 2. 1. 1. } \textcircled{5})$$

c'est à dire: $v \cdot r = \text{constante.} \quad (\text{II. 2. 1. 1. } \textcircled{6})$

En d'autres termes, dans un tel cas, la quantité de mouvement angulaire est constante. (voir FIG 3)

Pour avoir la distribution de pression dans un tourbillon libre, il suffit d'intégrer le gradient radial de pression $\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho c^2}{r^3}$ d'où :

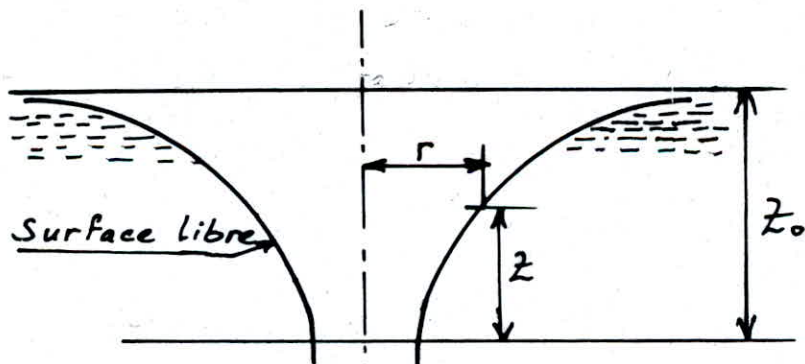
$$\frac{P - P_0}{\rho} = g(z - z_0) - \frac{c^2}{2r^2} \quad (\text{II. 2. 1. 1. } \textcircled{6})$$

et la surface libre est obtenue pour $p = p_0 =$ pression atmosphérique c'est à dire :

$$z = z_0 - \frac{c^2}{2gr^2} \quad (\text{II. 2. 1. 1. } \textcircled{7})$$

La pression totale (théorème de Bernoulli) par définition constante pour un tourbillon libre, est donnée par l'expression

$$\begin{aligned} \frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z &= \frac{P_0}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} - \frac{c^2}{2gr^2} + z_0 = \\ &= \frac{P_0}{\rho g} + z_0 \quad (\text{II. 2. 1. 1. } \textcircled{8}) \end{aligned}$$



(FIG 3)

Elle est donc égale à la pression totale de la surface libre à une grande distance du centre du tourbillon. La forme de la surface libre à l'allure indiquée à la figure 3.

II.2.2. Définition de la circulation :

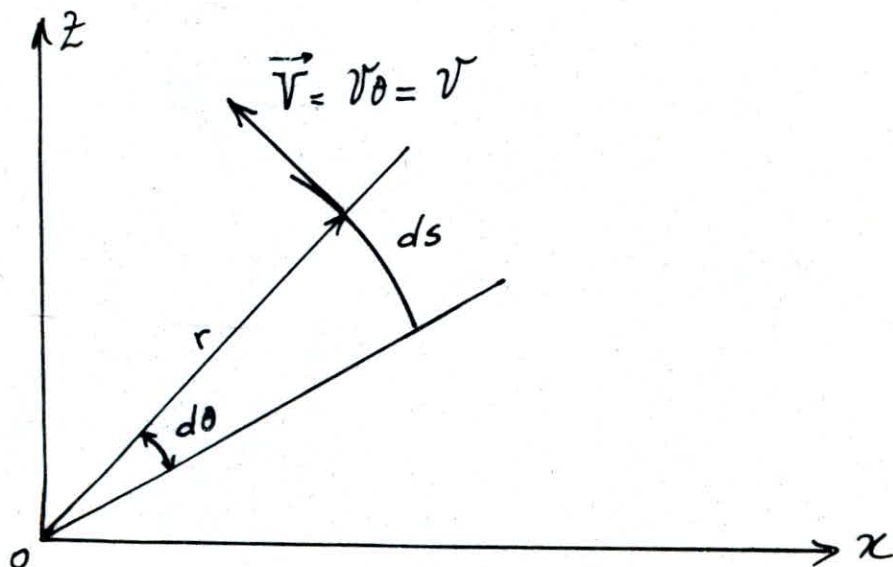
On appelle circulation (Γ) du vecteur vitesse \vec{v} le long d'un contour fermé quelconque (L) tracé dans le fluide dont l'élément d'arc est $d\vec{s}$, l'intégrale curviligne du produit scalaire $\vec{v} \cdot d\vec{s}$ tel que :

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad (\text{II.2.2.①})$$

$$\Gamma = \oint_L (u dx + v dy + w dz)$$

La circulation (Γ) varie avec le chemin suivi, mais si l'expression $u dx + v dy + w dz$ est une différentielle totale exacte, (Γ) ne dépend plus que des points extrêmes et non du chemin suivi entre ceux-ci. Dans ce cas, la circulation le long d'un contour fermé est nulle.

Supposons maintenant que dans un plan d'écoulement à deux dimensions ox et oz , les lignes de courant sont des cercles concentriques du centre O .



(FIG 4)

La vitesse en un point ne dépend que de la distance (r) de ce point au centre 0.

Considérons donc dans ce plan une particule animée de la seule vitesse circonférentielle $\vec{V} = V$ sur un élément de courbe (ds) de la circonférence considérée de rayon (r) autour de l'axe du vortex (Oz).

D'après l'équation (II.2.2.①) on a :

$$\Gamma = \oint V ds \quad \text{avec } ds = r d\theta.$$

(ds) étant un élément de courbe de la trajectoire considérée ; la circulation totale autour d'une circonférence concentrique de longueur égale à 2π est :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_0^{2\pi} V \cdot r \cdot d\theta = V \cdot r \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \cdot r \cdot V \\ &= 2\pi \cdot r \cdot V \quad (\text{II.2.2.②}) \end{aligned}$$

Comme la vitesse circonférentielle (V) reste constante le long d'une même courbe de rayon (r) entourant l'axe de rotation ; la circulation est aussi constante, et prend la forme suivante :

$$\Gamma = 2\pi \cdot r \cdot V = 2\pi k = \text{Const.}$$

$$\text{avec } k = r \cdot V \quad (\text{voir équation II.2.11.⑥})$$

II.3. Champ des pressions dans un vortex :

Le liquide considéré étant non visqueux, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$H = z + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2g} \quad (\text{II.3.①})$$

L'équation fondamentale de la statique des fluides :

$$\frac{1}{\rho} dP = X dx + Y dy + Z dz. \quad (\text{II. 3. (2)})$$

Permet d'écrire pour un fluide soumis à la seule action de la pesanteur suivant un axe Oz vertical orienté positivement vers le haut (les directions suivant les axes Ox et Oy étant nulles).

$$\frac{1}{\rho} dP = Z dz$$

Comme $Z = -g$

$$\frac{1}{\rho} dP = -g dz$$

$$\text{d'où } dP = -\rho g dz$$

si \bar{w} est le poids volumique du fluide tel que $\bar{w} = \rho g$ dans ce cas :

$$dP + \bar{w} dz = 0$$

Par intégration :

$$P + \bar{w} z = \text{const}$$

Posons :

$$P + \bar{w} z = P_0$$

P_0 est la pression motrice, elle tient compte de la pression proprement dite, et de l'influence du poids du liquide. Très loin de l'axe Oz , là où v est nulle, la pression motrice (FIG) est donnée par :

$$P_0 = P_{\infty}$$

d'où, en remplaçant dans l'équation de Lagrange avec

$$v = \frac{k}{r}$$

L'énergie mécanique totale (ou charge) devient :

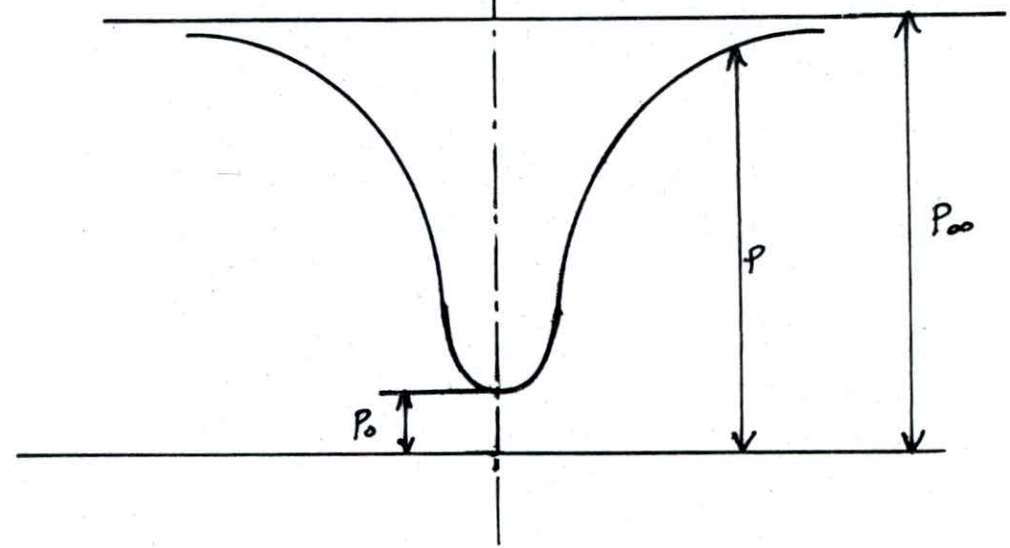
$$H = z + \frac{P_0 - \bar{w} z}{\bar{w}} + \frac{v^2}{2g}$$

d'où
$$H = \frac{P_0}{\bar{w}} + \frac{v^2}{2g} = \frac{P_{\infty}}{\bar{w}}$$

Soit :
$$P_0 = P_{\infty} - \frac{\bar{w} v^2}{2g}$$

En définitive, la relation entre la pression et la distance à l'axe r, s'établit comme suit :

$$P_0 = P_{\infty} - \frac{\rho k^2}{2r^2}$$



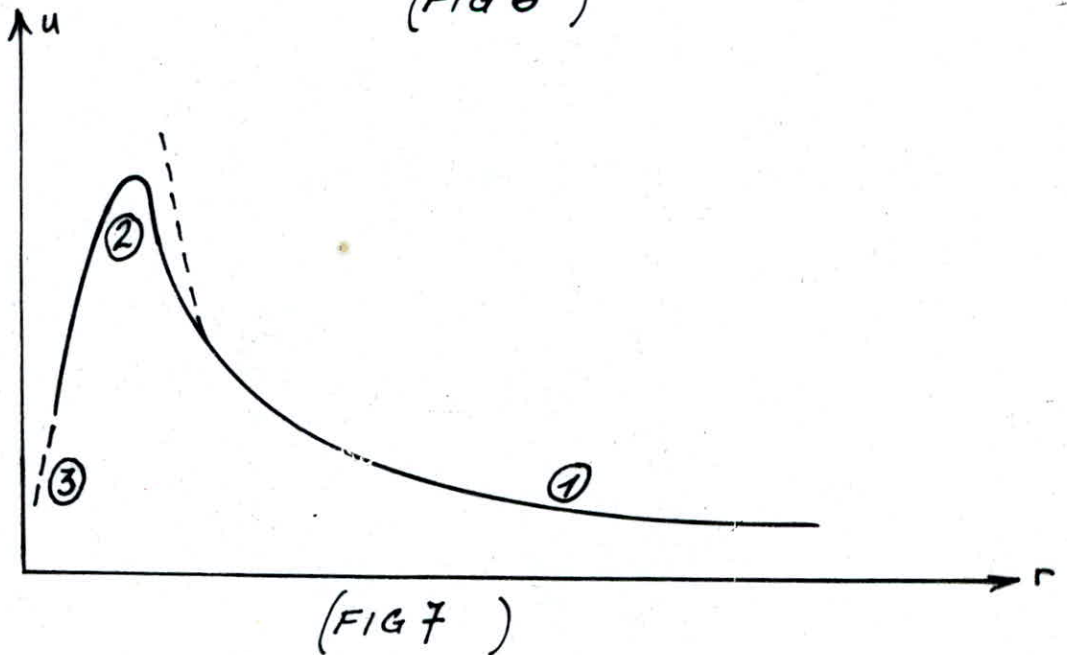
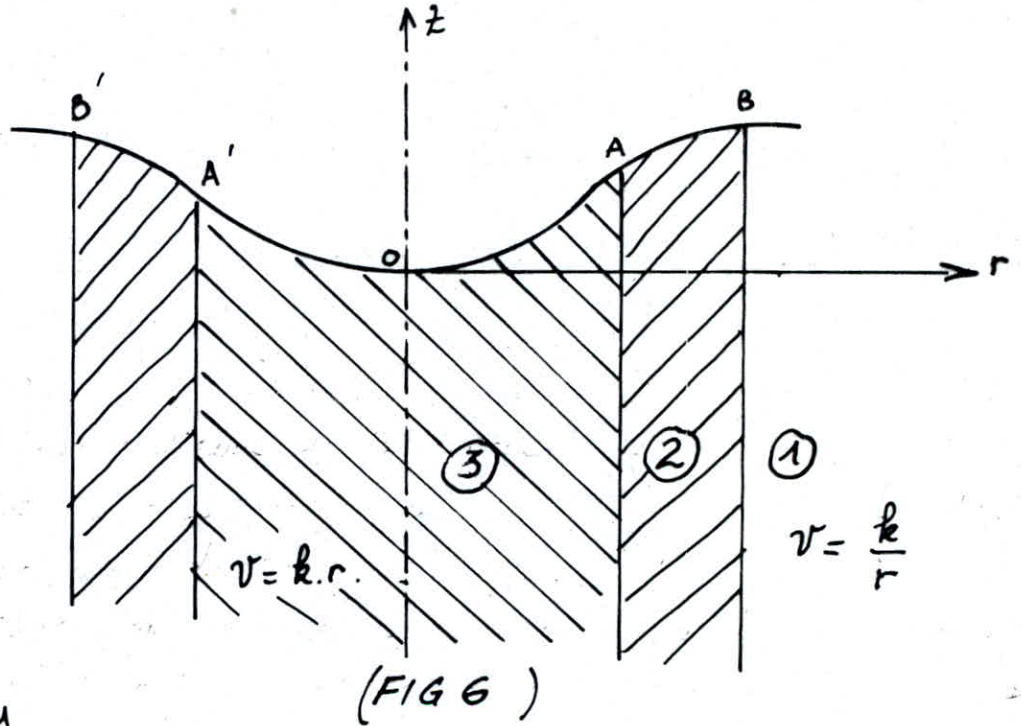
(FIG 5)

II.4. Constitution réelle d'un vortex :

Considérons un liquide dans un réservoir; la pression est constante sur la surface libre et égale à la pression atmosphérique. Soit z_0 la cote qu'aurait la surface libre en l'absence de tout mouvement; quand un vortex à axe vertical existe dans le fluide, c'est encore celle qu'elle aurait loin de l'axe du vortex.

Créons un mouvement giratoire d'axe vertical dans le réservoir qui se vide par un orifice percé dans le fond horizontal et de dimensions relativement petites à l'égard de la hauteur d'eau.

La forme de la méridienne de la surface libre (FIG 6) et l'étude de la distribution de la vitesse circumférentielle "u" en fonction de la distance "r" à l'axe (FIG 7) par la chronophotographie de particules d'aluminium en suspension dans l'eau, ont permis de mettre en évidence trois domaines distincts dans le liquide en rotation.



* Dans le domaine ①, le plus éloigné de l'axe, l'écoulement est irrotationnel; la vitesse varie en raison inverse de la distance à l'axe (FIG 7) tel que $v \cdot r = k$.
La pression totale est constante et est donnée par l'expression :

$$z + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2g} = E = \text{Const}$$

Elle indique que toutes les particules possédant la même quantité d'énergie.

Dans cette zone qui est la plus éloignée de l'axe $\text{rot } \vec{v} = 0$ ce qui signifie que le vecteur tourbillon \vec{w} est nul en tout point sauf à l'origine "0", c'est à dire en tout point de l'écoulement non situé sur l'axe "z".

* Dans le domaine ③, le plus rapproché de l'axe, le liquide tourne comme un solide, la vitesse variant proportionnellement à la distance "r" à l'axe (la forme OA de la méridienne de surface libre est un arc de parabole).

Dans cette zone qui est la plus rapprochée de l'axe $\text{rot } \vec{v} \neq 0$ ce qui implique l'existence d'un vecteur tourbillon égal à la moitié du rotationnel $\vec{w} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}$ si $\text{rot } \vec{v} \neq 0$.
Par ailleurs la viscosité du liquide provoque dans la partie axiale de l'écoulement où le gradient radial des vitesses est élevé; la production d'un noyau à axe vertical tournant en bloc, c'est à dire qu'à une distance "r" de l'axe la vitesse est :

$$v = k \cdot r.$$

Dans cette zone l'écoulement est rotationnel et non plus giratoire et le tourbillon créé dans ce domaine ③ est parfois appelé "vortex forcé" c'est un cas limite de l'écoulement rotationnel.

* Dans le domaine (2), la variation de la vitesse circumférentielle en fonction de "r" passe par un maximum et la méridienne de la surface libre est un arc qui raccorde les deux précédents et qui présente une inflexion.

II. 4. 1. Etude expérimentale:

Les profils de la surface libre et de l'entonnoir ont été déterminés expérimentalement par des chercheurs dans ce domaine et nous citons dans notre revue les résultats obtenus par "ANWAR" et "HOLTORFF", voir (FIG 8 , FIG 9 , FIG 10) .

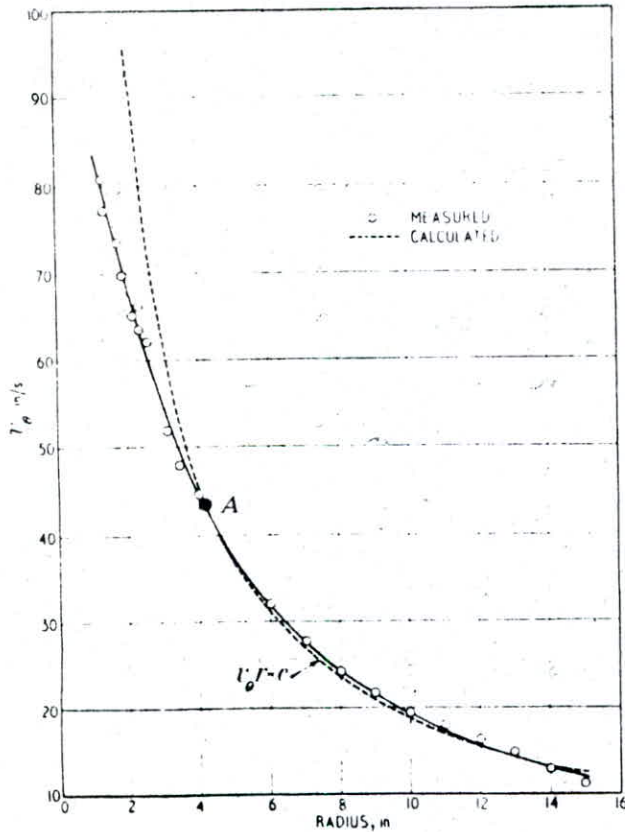
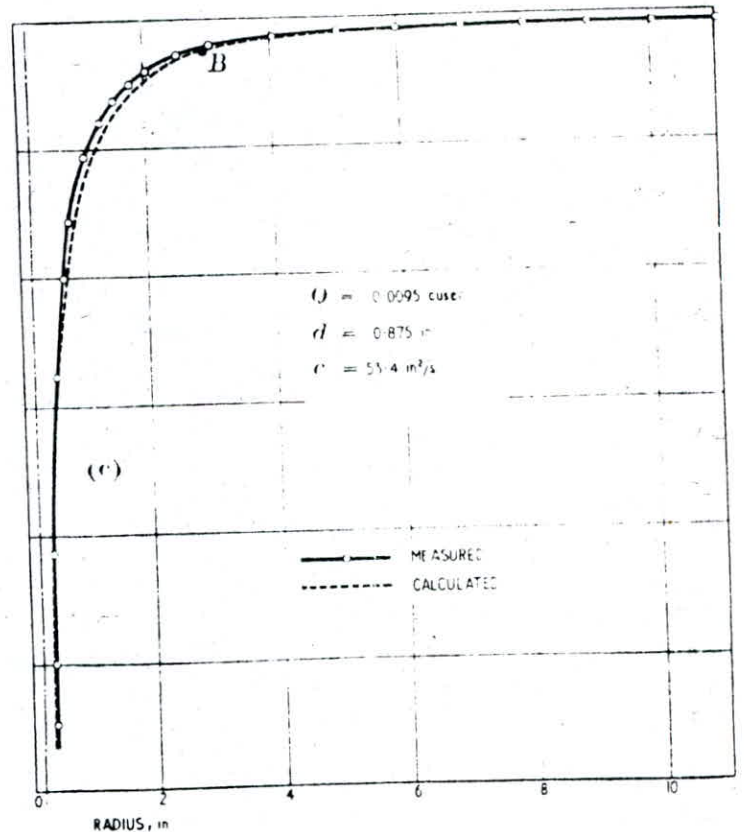


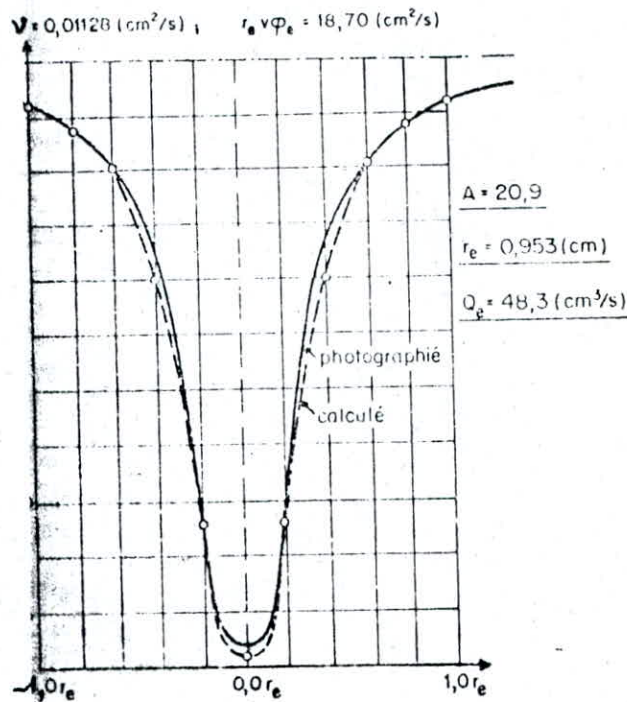
Fig. 7. Comparison between calculated and measured tangential velocities far from core

(FIG 8)



(FIG 9)

Contours d'un tourbillon calculé et photographié.



(FIG. 10)

II.5 Fonction de courant des écoulements plan et à symétrie axiale :

II.5.1. Fonction de courant des écoulements plan :

On sait que pour étudier un écoulement plan, il est indispensable de déterminer deux fonctions v_x et v_y dépendant de deux variables indépendantes x et y et du temps t si le mouvement est variable. Ces deux fonctions ne sont pas indépendantes et sont liées entre-elles par l'équation de continuité de la forme suivante :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.5.1.}\textcircled{A})$$

On peut introduire une certaine fonction $\Psi(x, y, t)$ au lieu de deux fonctions v_x et v_y dans un écoulement plan qui est analogue à une réduction du nombre d'inconnues

à déterminer. La fonction qu'on doit introduire doit obligatoirement satisfaire à l'équation de continuité :

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} ; v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (\text{II.5.1.}\textcircled{2})$$

$$[\Psi] = [v_x][\partial y] = L^2 \cdot T^{-1}$$

Portons (II.5.1.②) dans (II.5.1.①) on aura :

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$$

Donc l'équation introduite satisfait à l'équation de continuité, composons la différentielle totale de la fonction Ψ et en considérant le temps t comme un paramètre :

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = -v_y dx + v_x dy$$

et l'équation (II.5.1.①) peut être réécrite sous la forme :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

Sachant les équations des lignes de courant pour un écoulement :

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \quad (\text{II.5.1}\textcircled{3})$$

et en exprimant les valeurs v_x et v_y au moyen de la fonction Ψ :

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \quad \text{ou} \quad v_y \cdot dx + v_x \cdot dy = d\Psi = 0$$

Ainsi le long de la ligne de courant $d\Psi = 0$, et la fonction Ψ est constante :

$$\Psi = \text{const} \quad (\text{II.5.1.}\textcircled{4})$$

Elle s'appelle fonction de courant.

Il s'ensuit que pour obtenir des équations des lignes de courant, il faut déterminer la fonction de courant de l'écoulement et l'égaliser à une valeur constante.

Finalement, on trouvera une famille de lignes de courant de l'écoulement plan du fluide.

II. 5. 2. Ecoulement à trois dimensions (ou à symétrie axiale):

Dans le cas général d'un écoulement à trois dimensions, il est impossible d'introduire la fonction de courant.

Cependant dans un cas particulier de l'écoulement tridimensionnel (écoulement à symétrie axiale), il est possible d'introduire la fonction de courant, qui est analogue par beaucoup de ses propriétés à la fonction ψ pour le mouvement plan, pour cela:

Ecrivons l'équation de continuité pour un système de coordonnées cylindriques

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_{r^*}}{\partial r^*} + \frac{v_{r^*}}{r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \quad (\text{II. 5. 2. (1)})$$

Dans le cas de l'écoulement à symétrie axiale $v_\theta = 0$ d'où l'équation de continuité devient:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_{r^*}}{\partial r^*} + \frac{v_{r^*}}{r^*} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_{r^*}) = 0 \quad (\text{II. 5. 2. (2)})$$

Multiplions (II. 5. 2. (2)) par r^* et introduisons r^* dans le premier terme de (II. 5. 2. (2)) (cela est possible car x et r^* sont des variables indépendantes) on aura:

$$\frac{\partial}{\partial x} (r^* v_x) + \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_{r^*}) = 0 \quad (\text{II. 5. 2. (3)})$$

Introduisons maintenant la fonction de Courant Ψ , liée aux projections des vitesses v_x et v_y par les égalités :

$$r^* v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial r^*} \quad ; \quad r^* v_{r^*} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (\text{II.5.2.④})$$

En substituant (II.5.2.④) dans (II.5.2.③), la fonction Ψ satisfait à l'équation de Continuité.

Déterminons la liaison de cette fonction avec les lignes de Courant :

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dr^*}{v_{r^*}} \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{r^* v_x} = \frac{dr^*}{r^* v_{r^*}}$$

d'où à la surface de Courant :

$$\begin{aligned} -r^* v_{r^*} dx + r^* v_x dr^* &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial r^*} dr^* \\ &= d\Psi = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, à la surface de Courant la fonction de Courant est constante :

$$d\Psi = 0 \quad ; \quad \Psi = \text{const}$$

Cette condition donne un moyen simple de détermination des surfaces de Courant dans un écoulement à symétrie axiale ; il faut déterminer la fonction de Courant et la rendre égale à une grandeur constante.

II.6. Ecoulements irrotationnels à trois dimensions simples :

Le cas général d'un mouvement irrotationnel, où le potentiel Ψ dépend de trois coordonnées x, y, z est

très compliqué à étudier. Il est plus simple d'étudier les écoulements tridimensionnels à symétrie axiale pour lesquels il existe une fonction de Courant Ψ .

On sait que dans un écoulement à symétrie axiale, il y'a deux projections de la vitesse v_x et v_{r^*} liées à Ψ :

$$v_x = \frac{1}{r^*} \frac{\partial \Psi}{\partial r^*} \quad ; \quad v_{r^*} = - \frac{1}{r^*} \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

En écoulement irrotationnel d'un fluide, les projections des vitesses sont exprimées en fonction du potentiel de la vitesse :

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad ; \quad v_{r^*} = \frac{\partial \varphi}{\partial r^*} \quad (\text{II. 6. (1)})$$

La fonction de Courant Ψ et le potentiel φ dépendent des coordonnées x et r^* . En comparant cette dernière expression avec la formule (II. 5. 2. (4)) On peut établir une liaison entre le potentiel et la fonction de Courant d'un écoulement à symétrie axiale :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial \Psi}{\partial r^*}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r^*} = - \frac{1}{r^*} \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

(II. 6. (2))

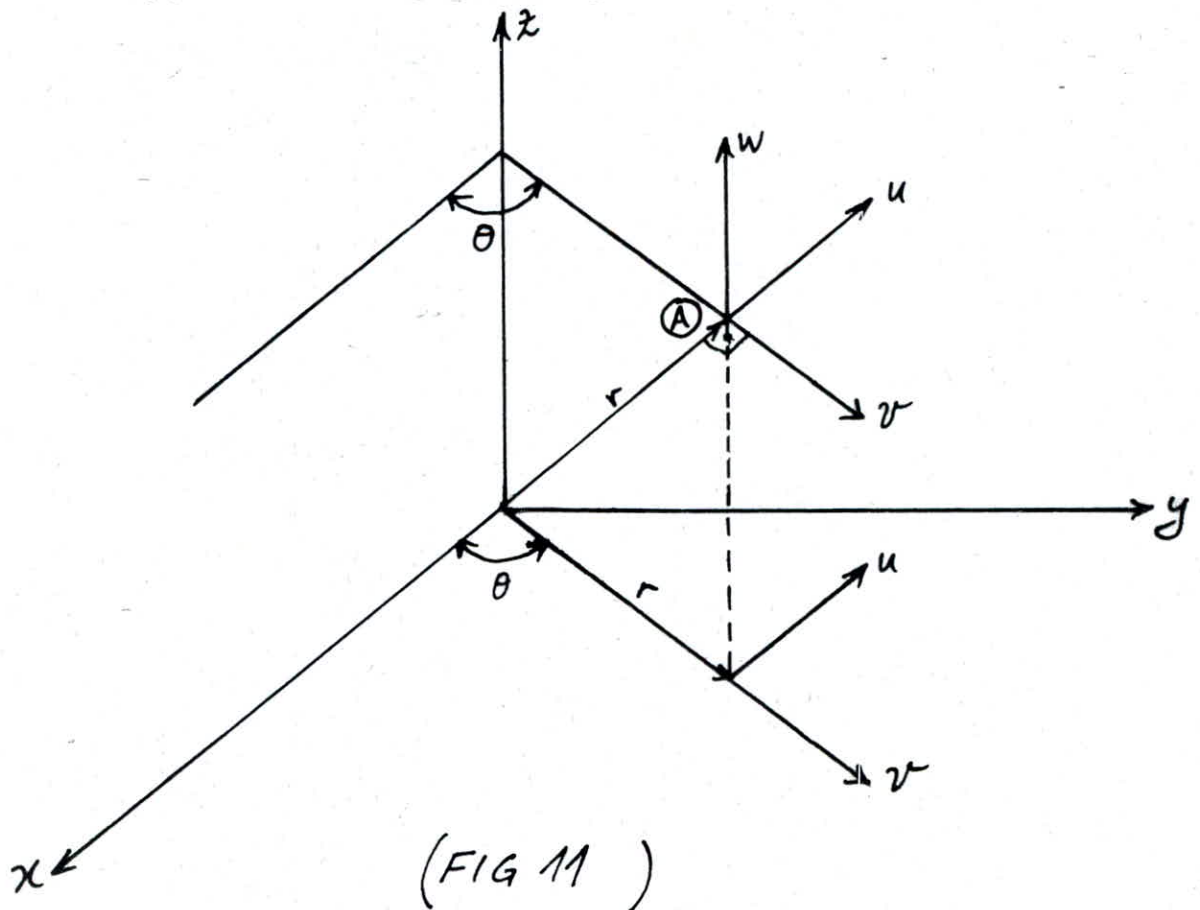
CHAPITRE III

ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE

III. 1. Etude théorique :

* Mise en équation du problème : (voir FIG 11)
Afin de résoudre le problème à trois dimensions, en réalité très complexe, on a adopté les hypothèses simplificatrices suivantes :

- 1°- L'axe du vortex est supposé coïncider avec l'axe des z d'un système de coordonnées cartésien.
- 2°- Le réseau d'écoulement est supposé symétrique par rapport à l'axe des z .
- 3°- Les composantes de la vitesse moyenne selon l'axe des z sont supposées négligeables.



(FIG 11)

z : distance parallèlement à l'axe du vortex

r : distance depuis l'axe du vortex

θ : angle de rotation autour de l'axe des z .

Les composantes de la vitesse sont les suivantes :

u - selon la direction de r

v - vitesse de rotation autour de l'axe des z .

w - vitesse dans la direction de z .

Les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\frac{D'u}{Dt} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} (p + \delta h) + \nu \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad (1)$$

$$\frac{D'v}{Dt} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (p + \delta h) + \nu \left(\nabla^2 v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{D'w}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (p + \delta h) + \nu (\nabla^2 w) \quad (3)$$

En joignant à ces équations, l'équation de continuité, on obtient le cas des fluides incompressibles et on déduit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

De ces équations, on déduit les opérateurs suivants :

$$\frac{D'}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{dérivée particulière})$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{Laplacien})$$

En ce qui concerne u , la composante radiale de la vitesse, on peut admettre l'hypothèse suivante.

4° - La variation de profondeur consécutive à l'abaissement de la surface libre, lorsque r décroît, est petite vis à vis de la profondeur totale, et peut donc être négligée dans le calcul de la composante u .

5° - Toutes les surfaces cylindriques, dont le diamètre est plus grand que celui de l'orifice de vidange, sont traversées par un débit total Q constant.

6° - Si l'on considère un cylindre ayant même axe que l'orifice de vidange et un rayon plus petit que le rayon r_0 de cet orifice, le débit radial total qui le traverse est réduit à une valeur $Q_0 (r/r_0)^2$; ceci suppose une répartition régulière de l'écoulement dans l'orifice.

Q_0 est le débit passant à travers la surface cylindrique du rayon r_0 .

premier cas: Vortex élémentaire en fluide parfait:

Ce cas est caractérisé par:

$$\begin{cases} v = 0 \\ w = 0 \\ u \text{ et } v \text{ fonction de } r \text{ seulement} \end{cases}$$

Si toutes les dérivées par rapport à t , θ et z sont nulles, ce qui correspond à un écoulement permanent défini par les hypothèses (1 à 6), l'équation (1) prend la forme suivante:

$$-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{v^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} (\rho + \gamma h) \quad (\text{III. 1. ①})$$

et l'équation devient:

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} = 0 \quad (\text{III. 1. ②})$$

En l'intégrant on obtient :

$$v \cdot r = \text{Const} \quad (\text{III. 1.3})$$

L'équation (3) devient identiquement nulle, et l'équation (4) prend la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot u) = 0 \quad (\text{III. 1.4})$$

En l'intégrant on obtient :

$$r \cdot u = \text{Const} \quad (\text{III. 1.5})$$

Cette dernière équation montre que la totalité du débit radial passe à travers toutes les surfaces cylindriques concentriques successives.

Les équations (III. 1.1) ; (III. 1.3) et (III. 1.5) permettent le calcul des conditions d'écoulement dans n'importe quel cas pratique.

Dans tous les cas où $u \neq 0$, l'équation (III. 1.3), fournit les vitesses de rotation v en fonction de r ; et l'équation (III. 1.1) peut servir à prévoir la forme de la surface libre.

$\frac{\partial}{\partial r} (p + \gamma h)$ est la pente de la surface libre en direction de r .

Dans la partie du champ d'écoulement correspondant à $r < r_0$, l'équation (III. 1.5) prend la forme :

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot u) + \frac{Q_0}{\pi \cdot l \cdot r_0^2} \cdot r = 0 \quad (\text{III. 1.6})$$

l - Longueur du vortex

Q_0 - débit à travers la surface cylindrique de longueur l

et de rayon $r \geq r_0$.

En intégrant cette équation; on obtient:

$$(r \cdot u) + \frac{Q_0}{2\pi \cdot l} \frac{r^2}{r_0^2} + C = 0 \quad (\text{III. 1. } \textcircled{7})$$

Si on introduit $Q_r = - 2\pi \cdot l \cdot r \cdot u$, on obtient ce qu'on a admis dans l'hypothèse N° 6:

$$Q_r = Q_0 \frac{r^2}{r_0^2} \quad (\text{III. 1. } \textcircled{8})$$

Deuxième cas: vortex élémentaire en fluide visqueux; Ecoulement à l'intérieur du cylindre limité par l'orifice de vidange ($r < r_0$):

Ce cas est caractérisé par: $\nu > 0$

Aucun frottement dans tous les plans normaux à l'axe des z ; u et v sont fonction de r :

$$Q = Q_0 \cdot r^2 / r_0^2$$

$$u^2 \leq v^2$$

$$w^2 \leq v^2$$

Si l'on néglige toutes les dérivées par rapport à t , θ et z et on tient compte de:

$$u = - \frac{Q_r}{2\pi \cdot r \cdot l} = - \frac{Q_0 \cdot r}{2\pi \cdot r_0^2 \cdot l} \quad (\text{III. 1. } \textcircled{9})$$

L'équation (1) devient:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(u \cdot r)}{\partial r} = - \frac{Q_0}{\pi \cdot r_0^2 \cdot l} = \text{Const.}$$

L'équation (2) prend la forme:

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{u \cdot v}{r} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (\text{III. 1. } \textcircled{10})$$

si l'on introduit u tel qu'il apparait dans l'équation (III. 1. 9) et la constante :

$$A = \frac{Q_0}{2\pi l \cdot V} \quad (\text{III. 1. 11})$$

on obtient :

$$r^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + r \left(1 + A \cdot \frac{r^2}{r_0^2} \right) \frac{\partial v}{\partial r} + \left(A \frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right) v = 0$$

Cette équation admet la solution générale: (III. 1. 12)

$$v = C_1 \cdot r^{-1} e^{-(A/2) (r/r_0)^2} + C_2 \cdot r^{-1} \quad (\text{III. 1. 13})$$

Pour que les formules soient non dimensionnelles il est commode d'introduire une vitesse de référence $v = V$; vitesse à la distance $r = R$ de l'axe des z .

Désignons par :

$$v_* = \frac{v}{V} ; r_* = \frac{r}{R} ; C_{1*} = \frac{C_1}{R \cdot V} ; C_{2*} = \frac{C_2}{V \cdot R}$$

C_{1*} et C_{2*} sont déterminées d'après les deux conditions aux limites pour :

$$r = r_0 \Rightarrow v = v_0 ; \text{ ensuite pour } r = 0 \Rightarrow v \cdot r = 0$$

Alors l'équation (III. 1. 13) devient alors :

$$v_* r_* = v_0 r_0 \frac{1 - e^{-(A/2) (r_*/r_{0*})^2}}{1 - e^{-A/2}} \quad (\text{III. 1. 14})$$

On peut ainsi contrôler l'équation (III. 1. 14) pour les deux cas limites correspondant, l'un à $v = 0$ et l'autre $v = \infty$. Pour le premier cas, l'équation (III. 1. 14) devient identique à l'équation (III. 1. 3) (c'est à dire pour $A = \infty$), tandis que dans le second cas, on obtient la rotation d'un cylindre solide.

L'équation (3) devient :

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left[(\rho + \delta h) + \frac{w^2}{2} \cdot \rho \right] \quad (\text{III. 1. (15)})$$

Troisième cas: Vortex élémentaire en fluide visqueux ;
Écoulement à l'intérieur du cylindre limité par l'orifice
de vidange ($r > r_0$).

Ce cas est caractérisé par les conditions suivantes :

$$v > 0$$

Aucun frottement dans tout ^{plan} perpendiculaire à l'axe des z

$$\begin{cases} w = 0 \\ u \text{ et } v \text{ sont fonction de } r \text{ seulement} \\ Q = Q_0 = \text{const} \\ u^2 \ll v^2 \end{cases}$$

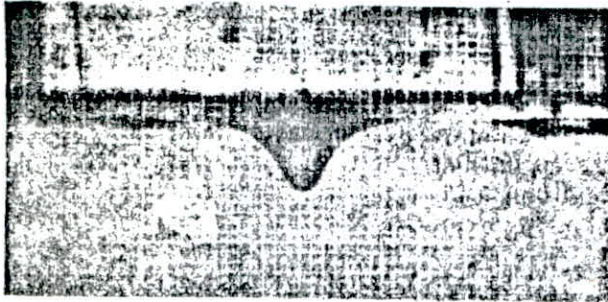
La même chose dans ce cas l'équation (1) prend la forme :

$$Q = Q_0 = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot u \cdot l = \text{const} \quad (\text{III. 1. (16)})$$

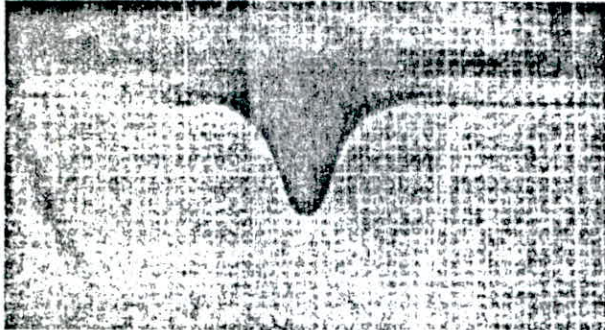
En passant par tous les processus de calcul, en intégrant, remplaçant les termes par leurs valeurs, on obtient :

$$B \begin{cases} r_* v_* = \frac{(A-2) \left(1 - e^{-A/2} (r_*/r_{0*})^2 \right)}{A \left(1 - e^{-A/2} r_{0*}^{(A-2)} \right) - 2 \left(1 - e^{-A/2} \right)} & \text{Pour } A=2 \\ r_* v_* = \frac{[A-2(1-e^{-A/2})] \left(1 - r_*^{-(A-2)} \right)}{A \left(1 - e^{-A/2} r_{0*}^{(A-2)} \right) - 2 \left(1 - e^{-A/2} \right)} + r_*^{-(A-2)} & \text{pour } A \neq 2 \end{cases}$$

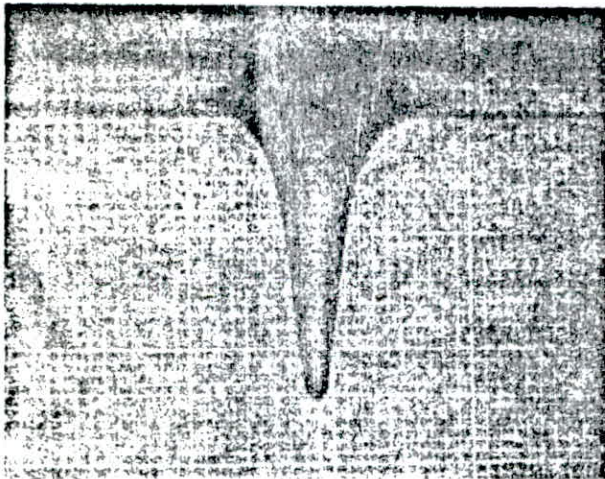
Ces deux équations constituent la solution définitive du problème du vortex en écoulement laminaire. Le paramètre A fait intervenir à la fois le débit Q_0 et la viscosité. Les formes géométriques sont définies par le paramètre r_{0*} . Les courbes caractéristiques donnant $v_* r_* / v_{0*} r_{0*}$ en fonction de r_*/r_{0*} changeront selon les valeurs de r_{0*} .



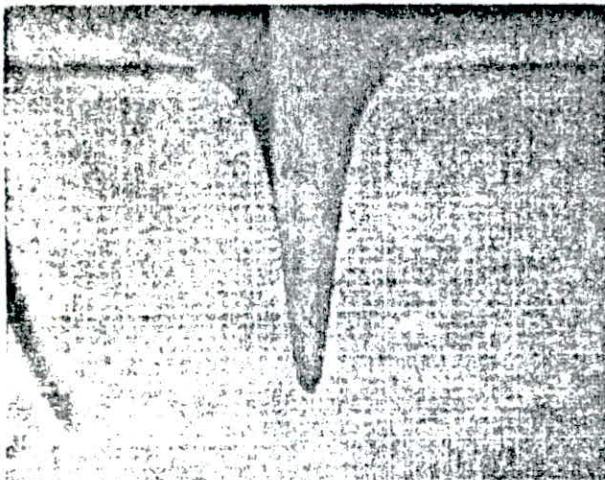
N = 4.0 RPM A = 13.3 $r_0 = 0.0587$



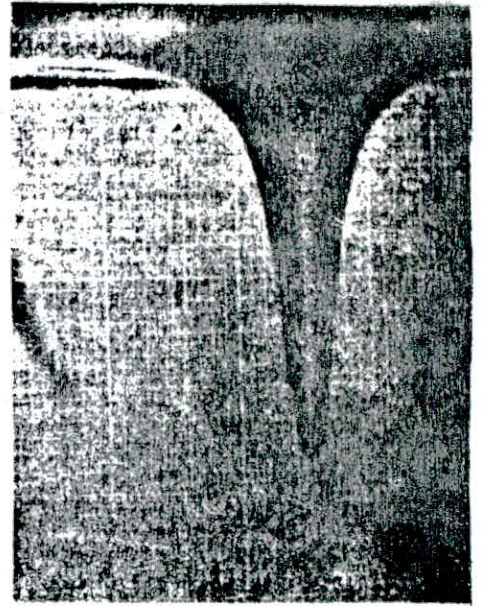
N = 8.0 RPM A = 12.3 $r_0 = 0.0587$



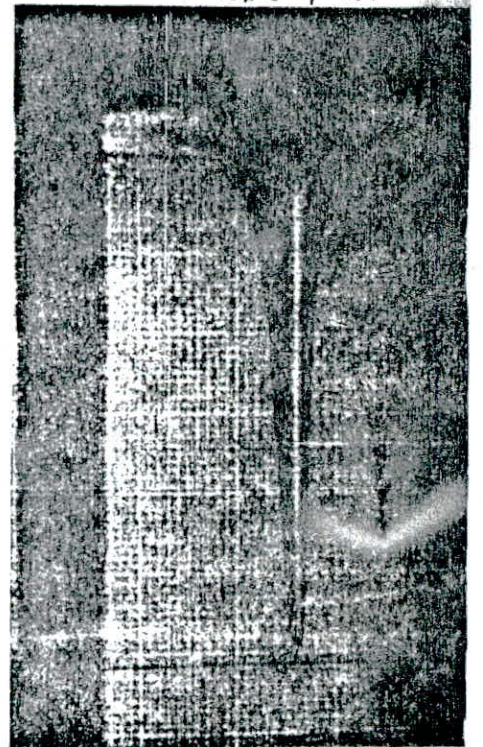
N = 4.0 RPM A = 21.1 $r_0 = 0.0587$



N = 8.5 RPM A = 15.1 $r_0 = 0.0587$



N = 8.0 RPM A = 17.1
 $r_0 = 0.0587$



N = 4.0 RPM A = 25.3
 $r_0 = 0.0587$

Quelques-uns des profils de surface libre
photographies

Quatrième cas: le vortex élémentaire en écoulement turbulent.

On introduit la turbulence comme une fluctuation des variables autour de leur valeur moyenne. Pour toutes les variables telle que par exemple la composante de vitesse $u = \bar{u} + u'$

\bar{u} - représente les valeurs moyennes

u' - représente les fluctuations dont la valeur moyenne dans le temps est nulle.

Afin de réduire le nombre excessif des termes des équations ils sont tous considérés comme des moyennes dans le temps et l'on admet l'hypothèse, bien connue selon laquelle non seulement les valeurs moyennes des termes fluctuants des variables, mais aussi les moyennes des produits entre elles de ces variables fluctuantes.

L'équation (2), par exemple prend la forme suivante, si, de plus les dérivées par rapport à t , θ et z , des composantes moyennes, sont supposées nulles.

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \frac{\bar{u} \bar{v}}{r} = \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} - \frac{\bar{v}}{r^2} \right] - \frac{\overline{u' \partial v'}}{\partial r} - \frac{\overline{v' \partial v'}}{r \partial \theta} - \frac{\overline{w' \partial v'}}{\partial z} - \frac{\overline{u' v'}}{r} \quad (\text{III. 1. } \textcircled{17})$$

L'équation de continuité (4), s'écrit en coordonnées cylindriques et dans le cas de l'écoulement turbulent:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{u}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u') + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (\text{III. 1. } \textcircled{18})$$

Suivant nos hypothèses, les trois premiers termes à eux seuls sont égaux à zéro, puisque l'écoulement est permanent.

Par conséquent, la somme des trois derniers termes doit être aussi nulle, et ceci à chaque instant et pas seulement en moyenne. Si cette somme des trois derniers termes est multipliée par v' , elle est encore nulle.

$$0 = \frac{v'}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot u') + \frac{v'}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + v' \frac{\partial w'}{\partial z} \quad (\text{III. 1. } \textcircled{19})$$

Si cette équation (III. 1. $\textcircled{19}$) est retranchée de l'équation (III. 1. $\textcircled{17}$), les termes fluctuants du membre de droite peuvent être combinés et l'équation (III. 1. $\textcircled{17}$) se lit :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \frac{\bar{u} \bar{v}}{r} = \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} - \frac{\bar{v}}{r^2} \right] - \frac{\partial}{\partial r} (\overline{u'v'}) - \frac{2\overline{u'v'}}{r} \quad (\text{III. 1. } \textcircled{20})$$

Nous reconnaissons maintenant l'expression $-\overline{u'v'}$ correspond au flux de quantité de mouvement turbulent traversant une surface cylindrique, expression qui peut être remplacée par le rapport \mathcal{C}_e/ρ ;

\mathcal{C}_e/ρ étant la force de frottement turbulente
 ρ - la masse spécifique.

La force de frottement laminaire \mathcal{C}_l/ρ a pour valeur :

$$\mathcal{C}_l/\rho = \nu \cdot r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\bar{v}}{r} \right) \quad (\text{III. 1. } \textcircled{21})$$

et les termes laminaires peuvent être écrits en fonction de \mathcal{C}_e/ρ comme suit :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \frac{\bar{u} \bar{v}}{r} = \frac{\partial}{\partial r} (\mathcal{C}_e/\rho) + \frac{2}{r} (\mathcal{C}_e/\rho) + \frac{\partial}{\partial r} (\mathcal{C}_l/\rho) + \frac{2}{r} (\mathcal{C}_l/\rho) \quad (\text{III. 1. } \textcircled{22})$$

A partir de cette équation, on peut conclure que la turbulence a un effet équivalent à celui de la viscosité

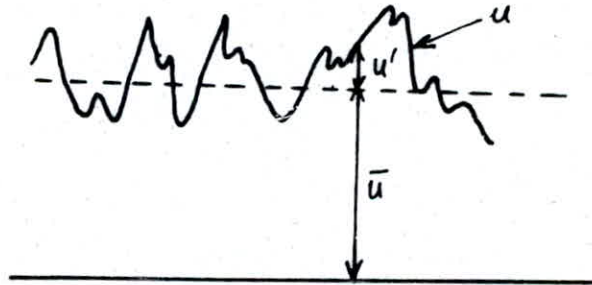
et varie proportionnellement au mouvement tangentiel ou aussi longtemps que dans l'équation:

$$\varepsilon \cdot r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) = - \overline{(u'v')} \quad (\text{III. 1. } \textcircled{23})$$

ε reste constante, ceci semble avoir vérifié dans la plupart des cas mesurés, on peut alors calculer une valeur effective de la constante A, soit A_e , qui a la forme:

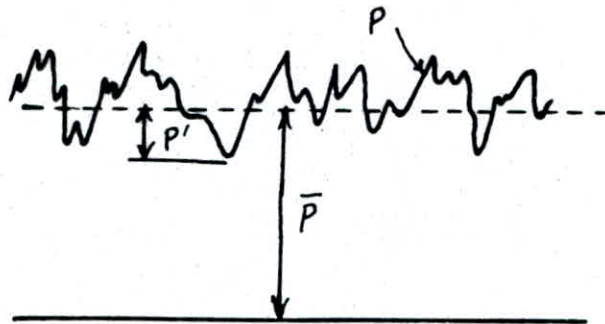
$$A_e = \frac{Q_0}{2\pi \cdot l \cdot (\varepsilon + \nu)} \quad (\text{III. 1. } \textcircled{24})$$

* Remarque: expérimentalement, on remarque que si l'écoulement est laminaire, le vortex se forme facilement mais si l'écoulement est turbulent, le vortex trouve des difficultés à se former.



$$\begin{aligned} u &= u'(x, y, z) \\ u' &= u'(x, y, z, t) \\ u &= u(x, y, z, t) \end{aligned}$$

Diagramme des vitesses en écoulement turbulent



$$\begin{aligned} \bar{p} &= \bar{p}(x, y, z) \\ p' &= p'(x, y, z, t) \\ p &= p(x, y, z, t) \end{aligned}$$

Diagramme des pressions en écoulement turbulent.

III. 2. Discussion des résultats :

Les solutions de ces quatre cas sont données par les équations (III. 1. (15)), le système B et (III. 1. (24)) l'équation (III. 1. (15)) signifie que dans tous les cas, on a affaire à une répartition hydrostatique des pressions le long des verticales. En réalité, ceci n'est correct que dans la mesure où l'hypothèse des petites valeurs de la composante verticale des vitesses est elle même correcte. Ceci est toujours vérifié à l'intérieur d'une couche voisine de la surface libre si $Q_0/\pi r_0^2$ est petit, et dans la masse du fluide correspondant à $r > r_0$. Près de l'axe des z les composantes verticales des vitesses sont généralement appréciables, en particulier pour petites valeurs de r_0 . Il faut donc s'attendre au voisinage de l'axe dans les zones plus profondes à relever des écarts plus ou moins appréciables entre la répartition effective des pressions et la distribution hydrostatique.

Le système d'équations B donne respectivement les répartitions de la vitesse tangentielle à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre correspondant à l'orifice des vidanges, dans le cas où le paramètre A est défini par l'équation (III. 1. (24)) de manière à tenir compte de l'influence de toute turbulence possible dans le fluide. La figure montre graphiquement l'allure de ces relations pour quelques valeurs caractéristiques de A. On voit que pour les grandes valeurs de A, c'est à dire pour des débits Q_0 important et (ou) de faible viscosité, c'est le classique vortex en fluide parfait qui se trouve presque réaliser (Premier cas) avec les premiers écarts au voisinage de l'axe. Dans le cas des petites

valeurs de A , on se rapproche du cas de la rotation en masse avec la vitesse angulaire (ω) constante. Ce graphique montre clairement que dans tous les cas $d\omega/dr$, variation relative de la vitesse angulaire par rapport à r , est négatif. Cette valeur croît avec le débit Q_0 . En se basant sur ces équations on peut étudier la stabilité du vortex. Supposons que deux tranches horizontales successives présentent des débits Q_0 différents par unité de hauteur. Il en résulte, pour $d\omega/dr$, une valeur négative plus grande dans la tranche à débit Q plus élevé. Pour chaque valeur de la distance r à l'axe, il existe une répartition hydrostatique de la pression selon la verticale. Pour les grandes valeurs de r , les vitesses dans les deux tranches sont, par définition, petites et égales. Les vitesses tangentielle doivent donc être plus grandes dans la tranche à débit Q plus élevé, ce qui se traduit par des accélérations centrifuges plus élevées dans cette tranche. Ces accélérations tendront à freiner l'écoulement radial dans cette tranche et (ou) à accélérer l'écoulement radial dans la tranche à débits plus faibles, jusqu'à ce que les deux débits soient égaux, ce que démontre la stabilité du mouvement.

Cette stabilité, bien connue dans le cas du vortex en fluide parfait, entraîne plusieurs conséquences pratiques:

- 1^o - Un tel vortex ne peut pas s'éteindre à l'intérieur du fluide, mais ira en s'amplifiant jusqu'à ce qu'il atteigne une paroi;
- 2^o - Si, grâce à des palettes ou à de quelconques obstructions, le moment cinétique est diminué dans une portion du

fluide, un certain moment cinétique (et un certain débit Q) est automatiquement prélevé sur l'ensemble du vortex en faveur de cette portion. Par conséquent, le freinage obtenu dans une portion réduira effectivement l'intensité du vortex tout entier. Cette dernière conséquence est extrêmement importante dans les problèmes techniques où il convient d'éviter la naissance des vortex, par exemple dans les crépines de pompes situées dans les bassins d'aspiration peu profonds.

CHAPITRE IV

SIMILITUDE ET ANALYSE DIMENSIONNELLE DU PHENOMENE

IV. 1. Similitude des vortex :

IV. 1.1. Emploi des modèles :

Lorsqu'un ingénieur étudie le projet d'un ouvrage hydraulique, il commence par préciser l'ordre de grandeur de ses dimensions en se basant sur celles des ouvrages analogues existants et en tenant compte de l'application à l'écoulement considéré des formules théoriques ou empiriques de l'hydraulique classique. Mais généralement les résultats qu'il obtient ainsi ne peuvent le satisfaire complètement en raison d'une part, de l'approximation très grossière des formules utilisées et d'autre part, de la nécessité de schématiser le phénomène considéré, ou de négliger certains paramètres pour pouvoir lui appliquer la ou les formules utilisées. L'idée vient tout naturellement d'essayer de voir en petit comme cela se passe en grand. C'est ce qui constitue le principe des essais sur modèles réduits qui a pour but d'éviter de coûteuses erreurs et d'obtenir des informations qui seront utiles pour l'étude du prototype. Puisqu'il est relativement peu coûteux de modifier la construction d'un modèle, et d'envisager plusieurs essais alors qu'il aurait été très coûteux s'il avait fallu l'entreprendre sur le système en vraie grandeur.

IV. 1.2. Différentes lois de similitude :

Le problème de la similitude des phénomènes de vortex est très complexe. L'impossibilité de mener à bien l'étude théorique du problème pour la détermination des critères de similitude, réside dans sa double instabilité. Cette difficulté ressort également du nombre important de paramètres susceptibles d'intervenir dans leur formation. L'analyse théorique ne pouvant permettre, d'une façon générale, les conditions géométriques à imposer à une chambre pour éviter la création des vortex, il est donc nécessaire de reproduire ces phénomènes sur modèles réduits. Toutefois une difficulté apparaît immédiatement dans le choix de la similitude à respecter.

Plusieurs auteurs prétendent que l'égalité des nombres de Froude entre le modèle et le prototype est essentielle pour assurer une similitude dynamique. Par contre DENNY suggère le concept d'égalité des vitesses entre modèles et prototype. HAINDL, pour un modèle de cuve cylindrique a montré que le début d'entraînement d'air obtient la meilleure identité de courbe en se basant sur l'égalité des nombres de Reynolds pour trois modèles étudiés. D'autres chercheurs préconisent à la lumière des résultats d'expérimentation, le respect du nombre de Froude avec la réalisation partielle d'une similitude de Reynolds, c'est le cas de JAGGETT et KEULEGAN qui montrent que la viscosité ne joue aucun rôle lorsque le nombre de

Reynolds est supérieur ou égal à $2,5 \cdot 10^4$ ($\frac{Q}{\sqrt{D}} \geq 2,5 \cdot 10^4$)
Mais AMPHLETT a fixé cette condition du Reynolds
à $3 \cdot 10^4$ ($\frac{Q}{\sqrt{D}} \geq 3 \cdot 10^4$) ... etc... On voit donc à la
lumière de ces exemples, qu'aucune position n'est
prise pour une similitude quelconque.

IV. 1.3. Principaux critères :

La dépression initiale de la surface libre nécessite
l'égalité des nombres de Froude, entre le modèle
et le prototype (forces de gravités prépondérantes)
Cependant, pour des dépressions notables du centre
du vortex, l'expérience montre que les forces de la
tension superficielle ne peuvent être négligées. On
tient compte de ces forces en respectant le nombre
de Weber. De même la rotation en bloc de l'eau
vers l'axe central du vortex et les conditions de
vidange imposent, puisque les forces de viscosité
prennent des valeurs non négligeables, on doit res-
pecter le nombre de Reynolds.

Donc, les nombres de Froude, de Weber et de Reynolds
doivent intervenir dans la similitude. $F = \frac{v}{\sqrt{ge}}$;
 $R = \frac{v \cdot l}{\nu}$ et $W = \frac{\sigma}{\rho v^2 l}$.

D'autre part l'influence de la circulation " Γ " ne
peut pas être négligée. Il faut mettre en évidence
le rapport $\frac{vD}{\Gamma}$.

L'action de cette particule des forces centrifuges
peut s'écrire :

$$F_c = \rho \cdot dr \cdot d \cdot A \cdot \frac{v^2}{r}$$

avec $K = \frac{\Gamma}{2\pi} \Rightarrow F_c = \rho \cdot dr \cdot d \cdot A \cdot \frac{K^2}{r^3}$

Les forces totales d'inerties sont :

$$F_i = \rho \cdot dr \cdot dA \frac{dv}{dt}$$

et le rapport des forces centrifuges aux forces d'inerties étant :

$$\frac{K^2 ds}{r^3 v \cdot dv} \quad ; \quad [K^2] / [L^2] [v^2]$$

on déduit que le rapport vD/r est proportionnel à la racine carrée de l'inverse du rapport des forces centrifuges aux forces d'inertie.

IV. 1.4. Impossibilité de la réalisation d'une similitude Complète :

La nécessité du respect simultané de tous les nombres (R , F et W) cités précédemment paraît entraîner l'impossibilité d'une représentation en similitude complète d'un vortex sur le modèle réduit.

Pour la réalisation des essais sur le modèle réduit à une échelle géométrique donnée λ , mise à part une modification de la vitesse de l'écoulement, on peut introduire une variation des caractéristiques physiques du liquide utilisé à savoir : la viscosité dynamique, la masse spécifique, la tension superficielle (ν , ρ , σ , ...). Ces modifications peuvent être obtenues par :

- * La variation de la température qui entraîne dans des proportions assez différentes la modification des propriétés des trois caractéristiques précédentes.
- * Le changement de la nature du corps (liquide) utilisé.

* Ou ces deux paramètres simultanément.

Le respect simultané des nombres de Froude et de Reynolds peut être obtenu par modification de la viscosité cinématique du liquide utilisé (par changement de la nature du corps, ou par variation de la température).

On a dans ce cas pour un point donné du modèle :

$$F_m = \frac{g \cdot L_m}{V_m^2} \quad (\text{IV. 1. 4. } \textcircled{1})$$

et dans le point homologue du prototype :

$$F_p = \frac{g \cdot L_p}{V_p^2} \quad (\text{IV. 1. 4. } \textcircled{2})$$

L'égalité de ces deux nombres donne :

$$\lambda_g \cdot \lambda_L = \lambda_v^2. \quad (\text{IV. 1. 4. } \textcircled{3})$$

avec :

$$\lambda_L = \frac{L_m}{L_p} \quad \text{et} \quad \lambda_v = \frac{V_m}{V_p}$$

et l'accélération de la pesanteur ne pouvant être changée :

$$\lambda_g = 1.$$

D'où la relation (IV.1.4. ③) devient :

$$\lambda_L = \lambda_v^2 \quad (\text{IV. 1. 4. } \textcircled{4})$$

D'autre part l'égalité des nombres de Reynolds entre le modèle et le prototype donne :

$$\frac{V_m \cdot D_m}{\nu_m} = \frac{V_p \cdot D_p}{\nu_p} \quad (\text{IV. 1. 4. (5)})$$

on obtient :

$$\lambda_v \cdot \lambda_L = \lambda_\nu \quad (\text{IV. 1. 4. (6)})$$

on sait que :

$$\lambda_v^2 = \lambda_L$$

donc :

$$\lambda_L^{3/2} = \lambda_\nu$$

ou bien :

$$\lambda_L^3 = \lambda_\nu^2 \quad (\text{IV. 1. 4. (7)})$$

De la même manière, le respect du nombre de Weber ($W = \frac{Q^2 \rho}{D^2 \sigma \cdot H}$) conduit à la relation :

$$\lambda_v^2 \cdot \lambda_L \cdot \lambda_\rho = \lambda_\sigma \quad (\text{IV. 1. 4. (8)})$$

puisque $\lambda_v^2 = \lambda_L$, on aboutit à :

$$\lambda_L^2 = \frac{\lambda_\sigma}{\lambda_\rho} \quad (\text{IV. 1. 4. (9)})$$

Comme dans la pratique, le liquide utilisé est l'eau dans le modèle et le prototype donc :

$$\lambda_\rho = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_\sigma = 1$$

Il en résulte finalement que :

$$\lambda_L = 1$$

Ce qui nous mène à conclure que le modèle doit avoir les mêmes dimensions que le prototype, ce qui est impossible de parler de la réalisation des essais sur modèle, pouvant satisfaire en même temps l'égalité de tous les nombres considérés (effet d'échelles).

IV. 1.5. Choix du critère :

Dans l'impossibilité d'obtenir une similitude complète, il est donc nécessaire de déterminer l'ordre d'importance relatif des forces qui interviennent dans le phénomène de manière à pouvoir négliger les plus faibles. L'ordre d'importance de ces forces, dépend du but recherché, c'est à dire du critère de comparaison utilisé, on peut adopter par exemple :

- * Conditions de formation de la première dépression.
- * fréquences et durées des vortex.
- * Conditions du début d'entraînement d'air.

Il semble le plus souvent d'adopter le second critère. En effet, il présente, l'avantage de fournir le seuil de formation du vortex, qui conditionne en pratique le bon fonctionnement d'une installation

IV. 2. Analyse dimensionnelle du phénomène :

IV. 2.1. Introduction :

L'analyse dimensionnelle est constituée par le calcul des dimensions des grandeurs, de plus c'est un outil supplémentaire de grande utilité dans la mécanique des fluides. Dans une équation exprimant une relation physique entre les grandeurs, l'égalité absolue des nombres et des dimensions doit avoir lieu.

En général, toute relation physique de ce genre peut être réduite aux grandeurs fondamentales qui sont:

- * la masse ; M
- * la longueur ; L
- * le temps ; T

Les applications de cette technique comprennent le passage d'un système d'unité à un autre, l'établissement des équations, la réduction du nombre des variables nécessaire à un programme expérimental et l'établissement des principes de la conception d'un modèle.

IV. 2.2. Grandeurs intervenant dans le phénomène.

Pour conditionner la formation d'un vortex, on doit considérer trois paramètres :

- a - paramètres géométriques
- b - " hydrauliques
- c - " physiques

Grandeurs	Symboles	Dimensions
Largeur d'alimentation	B	L
Diamètre de l'orifice	D	L
Hauteur d'eau	H	L
Débit volumique	Q	$L^3 T^{-1}$
masse spécifique	ρ	$M L^{-3}$
Accélération de la pesanteur	g	$L T^{-2}$
Viscosité cinématique	ν	$L^2 T^{-1}$
Tension superficielle	σ	$M T^{-2}$
Circulation	Γ	$L^2 T^{-1}$

D'où la relation fonctionnelle :

$$f(B, D, H, \rho, Q, g, \nu, \sigma, \Gamma)$$

IV. 2.3 Nombre de produits adimensionnels:
 En disposant les dimensions et les variables suivant un tableau, on obtient une matrice appelée "matrice dimensionnelle".

\otimes	B	D	H	Q	P	g	v	σ	Γ
M	0	0	0	0	1	0	0	1	0
L	1	1	1	3	-3	1	2	0	2
T	0	0	0	-1	0	-2	-1	-2	-1

Le nombre de produits adimensionnels est égal au nombre de variables moins le rang du tableau ci-dessus.

Le tableau contient au moins un déterminant d'ordre trois (3) non nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - (-4) = +3 \neq 0$$

Donc le rang est $r=3$ et le nombre de produits adimensionnels est :

$$N_{\pi} = 9 - 3 = 6$$

Donc, on doit calculer six (6) produits, reliés par la relation :

$$f(\pi_1; \pi_2; \pi_3; \pi_4; \pi_5; \pi_6) = 0$$

IV. 2.4. Calcul des produits adimensionnels:

• Vu que "D" est la grandeur caractéristique de la vidange, donc elle sera choisie comme paramètre de base. Tandis que "Q" et "f", décrivent respectivement la dynamique du système et la nature du fluide utilisé.

$$\pi_1 = Q^{x_1} D^{y_1} \rho^{z_1} B = (L^3 T^{-1})^{x_1} (L)^{y_1} (M L^{-3})^{z_1} L = M^0 L^0 T^0$$

$$\pi_2 = Q^{x_2} D^{y_2} \rho^{z_2} H = (L^3 T^{-1})^{x_2} (L)^{y_2} (M L^{-3})^{z_2} L = M^0 L^0 T^0$$

$$\pi_3 = Q^{x_3} D^{y_3} \rho^{z_3} g = (L^3 T^{-1})^{x_3} (L)^{y_3} (M L^{-3})^{z_3} L T^{-2} = M^0 L^0 T^0$$

$$\pi_4 = Q^{x_4} D^{y_4} \rho^{z_4} V = (L^3 T^{-1})^{x_4} (L)^{y_4} (M L^{-3})^{z_4} L^2 T^{-1} = M^0 L^0 T^0$$

$$\pi_5 = Q^{x_5} D^{y_5} \rho^{z_5} \sigma = (L^3 T^{-1})^{x_5} (L)^{y_5} (M L^{-3})^{z_5} M T^{-2} = M^0 L^0 T^0$$

$$\pi_6 = Q^{x_6} D^{y_6} \rho^{z_6} \Gamma = (L^3 T^{-1})^{x_6} (L)^{y_6} (M L^{-3})^{z_6} L^2 T^{-1} = M^0 L^0 T^0$$

$$\begin{aligned} 1^{\circ} \quad & L = 3x_1 + y_1 - 3z_1 + 1 = 0 \\ & M = z_1 = 0 \\ & T = -x_1 = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} L = 3x_1 + y_1 - 3z_1 + 1 = 0 \\ M = z_1 = 0 \\ T = -x_1 = 0 \end{aligned}} \right\} \Rightarrow y_1 = -1$$

$$\text{d'où : } \pi_1 = \frac{B}{D}$$

$$\begin{aligned} 2^{\circ} \quad & L = 3x_2 + y_2 - 3z_2 + 1 = 0 \\ & M = z_2 = 0 \\ & T = -x_2 = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} L = 3x_2 + y_2 - 3z_2 + 1 = 0 \\ M = z_2 = 0 \\ T = -x_2 = 0 \end{aligned}} \right\} \Rightarrow y_2 = -1$$

$$\text{d'où : } \pi_2 = \frac{H}{D}$$

$$\begin{cases} 3^\circ - \\ L = 3x_3 + y_3 - 3z_3 + 1 = 0 \\ M = z_3 = 0 \\ T = -x_3 - 2 = 0 \Rightarrow x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow y_3 = 5$$

$$\text{d'où : } \pi_3 = \frac{D^5 B}{Q^2}$$

$$\begin{cases} 4^\circ - \\ L = 3x_4 + y_4 - 3z_4 + 2 = 0 \\ M = z_4 = 0 \\ T = -x_4 - 1 = 0 \Rightarrow x_4 = -1 \end{cases} \Rightarrow y_4 = 1$$

$$\text{d'où : } \pi_4 = \frac{D}{Q}$$

$$\begin{cases} 5^\circ - \\ L = 3x_5 + y_5 - 3z_5 = 0 \\ M = z_5 + 1 = 0 \Rightarrow z_5 = -1 \\ T = -x_5 - 2 = 0 \Rightarrow x_5 = -2 \end{cases} \Rightarrow y_5 = 3$$

$$\text{d'où : } \pi_5 = \frac{D^3 \sigma}{Q^2 \cdot p}$$

$$\begin{cases} 6^\circ - \\ L = 3x_6 + y_6 - 3z_6 + 2 = 0 \\ M = z_6 = 0 \\ T = -x_6 - 1 = 0 \Rightarrow x_6 = -1 \end{cases} \Rightarrow y_6 = 1$$

$$\text{d'où : } \pi_6 = \frac{\Gamma \cdot D}{Q}$$

d'où la relation fonctionnelle :

$$f\left(\frac{B}{D}; \frac{H}{D}; \frac{BD^5}{Q^2}; \frac{D}{Q}; \frac{\Gamma \cdot D^3}{p \cdot Q^2}; \frac{D\Gamma}{Q}\right) = 0$$

Et conformément à l'usage, il convient de prendre l'inverse de certains éléments; soit:

$$f\left(\frac{B}{D}; \frac{H}{D}; \frac{Q^2}{\rho \cdot D^5}; \frac{Q}{D \cdot D}; \frac{Q^2 \rho}{\sigma \cdot D^3}; \frac{D \Gamma}{Q}\right) = 0$$

Mais la présence du diamètre "D" dans les entités dynamiques, ne décrit pas les conditions au niveau de la chambre, où les observations et modifications sont plus faciles à réaliser. Pour nous ramener à ce point de mire, on introduit "H" dans les quatre derniers paramètres $\left(\frac{Q^2}{D^5}; \frac{Q}{D}; \frac{Q^2 \rho}{\sigma \cdot D^3}\right)$ et $\frac{\Gamma \cdot D}{Q}$ de façon à mettre en évidence, les forces d'inertie de la masse. De plus les paramètres sont arrangés de manière à avoir des valeurs standard.

Ainsi, la relation devient:

$$f\left(\frac{B}{D}; \frac{H}{D}; \frac{Q}{D^2 \sqrt{\rho H}}; \frac{Q}{D \cdot H}; \frac{Q^2 \rho}{\sigma \cdot D^2 \cdot H}; \frac{H \cdot \Gamma}{Q}\right)$$

Yu que la loi d'étude est basé sur le paramètre H/D qui met en évidence à la fois l'effet de l'inertie et l'influence du diamètre qui conditionne la vidange:

$$\frac{H}{D} = f\left(\frac{B}{D}; \frac{Q}{D^2 \sqrt{\rho H}}; \frac{Q}{D \cdot H}; \frac{Q^2 \rho}{\sigma \cdot D^2 \cdot H}; \frac{\Gamma H}{Q}\right)$$

Sachant que: les nombres de:

$$\ast \text{ Froude: } F = \frac{Q}{D^2 \sqrt{\rho H}}$$

* Reynolds : $R = \frac{Q}{V.H}$

* Weber : $W = \frac{Q^2 \rho}{D^2 \sigma H}$

La relation devient :

$$\frac{H}{D} = f \left(\frac{B}{D} ; F ; R ; W , \frac{\Gamma H}{Q} \right)$$

Comme le vortex aéré entraîne une diminution du débit, il est donc nécessaire d'utiliser le coefficient de débit "m" au lieu du nombre de Froude qui, ce dernier intervient d'une façon permanente, et de plus "m" et "F" expriment le même rapport des forces :

on a : $Q = m \cdot A \sqrt{2gH} \Rightarrow m = \frac{Q}{A \sqrt{2gH}}$

Soit : $m = \frac{Q}{D^2 \sqrt{2gH}} \sim \frac{Q}{D^2 \sqrt{gH}}$

En définitive, les nombres sans dimensions qui régissent le phénomène de vortex sont :

$$\frac{H}{D} = f \left(\frac{B}{D} ; R , W , m , \frac{\Gamma H}{Q} \right)$$

- Autre méthode de recherche du critère de similitude : "Méthode directe"

Désignons par :

r - coordonnée radiale (u)
 θ - " tangentielle (v)
 z - " axiale (w)

Les équations de Navier-Stokes d'un fluide incompressible suivant la direction de " θ ".

$$\frac{u \partial v}{\partial r} + \frac{w \partial v}{\partial z} + \frac{u \cdot v}{r} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

(IV. 2. 4. ①)

Posons :

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z}$$

$$w = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r}$$

L'équation (IV. 2. 4. ①) devient :

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial r} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial z} = \nu \left(r \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial r^2} - \frac{\partial \Gamma_1}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial z^2} \right)$$

(IV. 2. 4. ②)

où $\Gamma_1 = v \cdot r$.

L'équation (IV. 2. 4. ②) devient dimensionnelle, en introduisant les coefficients suivants :

$$\Psi = \frac{\Psi_1}{Q} ; \quad \eta = \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 ; \quad \xi = \frac{z}{h} ; \quad \Gamma = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_\infty}$$

avec :

Q = débit évacué par l'orifice.

r_0 = rayon de l'orifice où la vitesse tangentielle est au maximum.

h = hauteur de la cuve

Γ_∞ = Circulation dans la région où elle est constante ($r \geq r_0$).

On peut écrire:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} = \frac{\nu h}{Q} \left[2\eta \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{h} \right)^2 \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \xi^2} \right]$$

(IV. 2. 4. ③)

L'équation (IV. 2. 4. ③) a deux (2) paramètres adimensionnels, $\frac{Q}{\nu h}$ et $\frac{r_0}{h}$ qui gouvernent la

formation du vortex, et aussi on sait que $\frac{Q}{\nu h} = \text{Reynolds}$

IV.2.5 Discussion des paramètres:

Cette discussion est basée sur des résultats expérimentaux, et nous allons donner quelques cas d'incidence des paramètres en fonction du rapport H/D , c'est à dire suivant les dimensions et la disposition de l'orifice par rapport à la surface libre.

On remarque que pour un même débit, le rapport H/D augmente, lorsque le diamètre diminue, (voir thèse de fin d'études de Mesbah et Djellouli. janv. 86), et cette augmentation est beaucoup plus prononcée, lorsque l'alimentation de la chambre est dissymétrique.

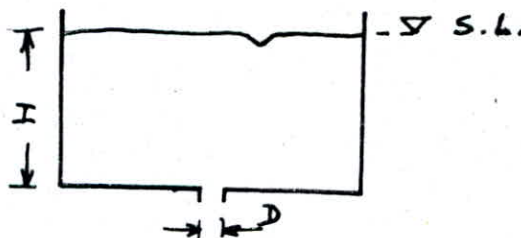
En effet, la modification de la largeur d'alimentation "B", influe sur la circulation initiale du fluide et sur le régime. L'augmentation du diamètre de l'orifice tend à augmenter les vitesses axiales et l'écoulement tend à devenir radial.

IV.2.5.1. Variation de la hauteur critique en fonction du débit:

Dans un modèle réduit à parois transparentes, on peut suivre l'évolution du vortex depuis sa naissance (légère dépression), jusqu'à son aération complète.

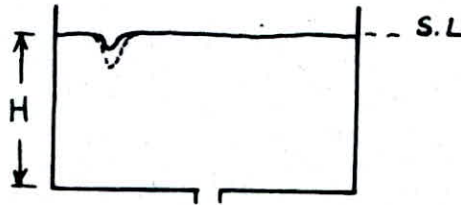
On distingue six (6) étapes préalablement choisies et déterminées après plusieurs observations et mesures:

1^{ère} étape:



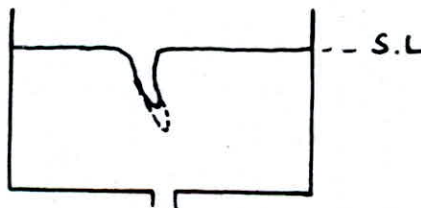
Dans cette étape, on assiste à la formation de la première dépression qui est intermittente et très instable (elle apparaît, puis disparaît juste aussitôt pour réapparaître à un autre endroit de la surface libre).

2^{ème} étape:



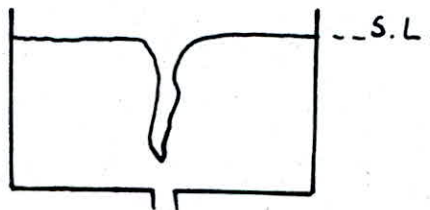
Dans cette étape, les déformations deviennent plus prononcées, elles sont aussi très instables, mais moins intermittentes, on remarque de temps à autre que le cône de dépression a tendance à s'étirer.

3^{ème} étape:



A ce stade, un filament tourbillonnaire très fin apparaît, il s'étire presque jusqu'à l'entrée de l'orifice, et rejoint très vite la surface libre, pour reprendre la deuxième étape. Le phénomène est instable.

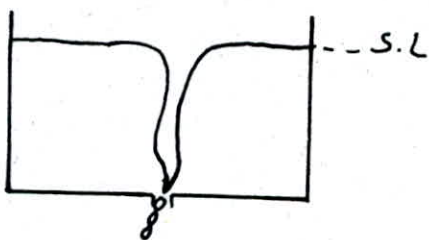
4^{ème} étape:



Ici, le phénomène devient moins intermittent, il disparaît

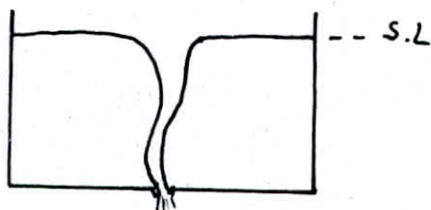
puis réapparaît quelques secondes après. Il est toujours instable.

5^{ème} étape:



A ce stade, le filament tourbillonnaire atteint par moment l'orifice de vidange, ceci provoque un entrainement intermittent d'air (aspiration de quelques bulles qui se détachent du cône).

6^{ème} étape:



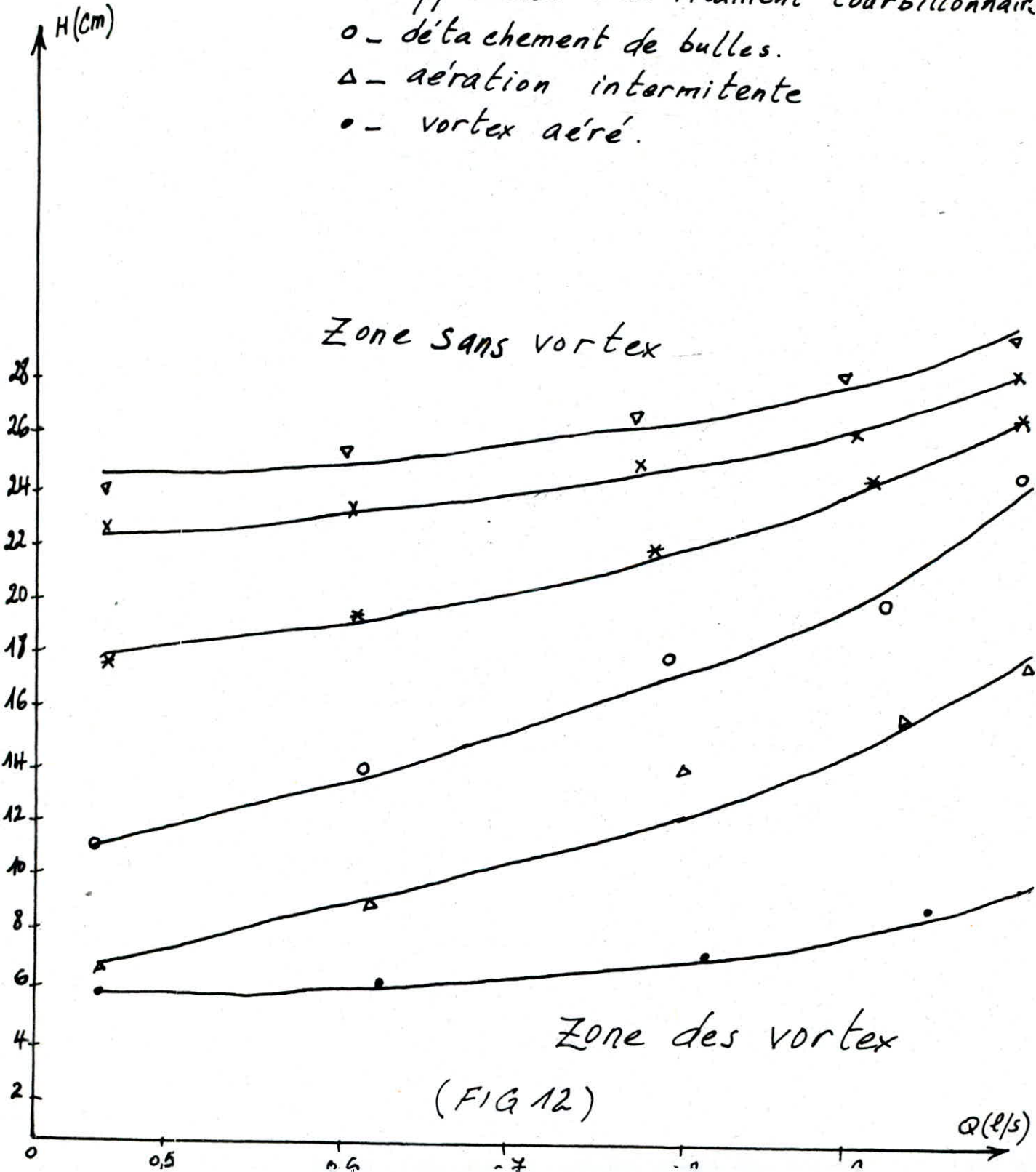
C'est l'étape critique, début d'une aération continue du vortex. L'entonnoir est très ouvert et le cône de dépression est enfoncé dans l'orifice.

Dans chaque étape, on mesure la hauteur correspondant à son début d'apparition jusqu'à l'aération totale, et on peut tracer une courbe caractérisant la hauteur H en fonction du débit Q pour un diamètre D et une largeur d'alimentation B .

Pour $B = 36 \text{ cm}$ et $D = 4,2 \text{ cm}$. (voir fig 12)

Hauteur en fonction du débit Q

- ▽ - apparition de la première dépression
- x - dépression prononcée
- * - apparition d'un filament tourbillonnaire
- o - détachement de bulles.
- △ - aération intermittente
- - vortex aéré.



(FIG 12)

IV.2.5.2. Grandeurs dynamiques :

Les paramètres concernés sont des propriétés physiques du liquide. Nous allons donner quelques cas du comportement du vortex vis à vis du nombre de Reynolds qui relève le concept de la viscosité de l'eau, du nombre de Weber qui caractérise la tension superficielle et enfin le nombre de Froude qui met en évidence les forces d'inertie.

a- Le nombre de Froude :

D'après les résultats obtenus expérimentalement en variant le débit, le diamètre de l'orifice et la largeur d'alimentation, ont permis de mettre en évidence, le rôle joué par les forces gravitaires dans le processus de formation du vortex, par le biais du rapport $Q/d^2 \sqrt{gH}$; qui caractérise le nombre de Froude. On remarque que les courbes possèdent des gradients fort élevés tout au long de leur trajectoire, il est alors difficile de définir clairement une limite du nombre de Froude, de ce fait, il découle le respect du nombre de Froude entre un modèle et un prototype.

b- Le nombre de Reynolds :

On remarque ici qu'à chaque fois ; les courbes divergent légèrement pour des valeurs élevées du rapport H/d , et convergent dans le cas contraire. Le gradient des hyperboles est très élevé pour les faibles Reynolds, et il diminue lorsque la largeur d'alimentation diminue. Un débit faible améliore

done les conditions d'opération, et tend à subsister un vortex facile à contrôler.

Lorsque, le faisceau des courbes est asymptotique à l'axe des ordonnées (R), l'effet de la viscosité devient négligeable; ainsi, on peut relever les limites à partir desquelles le nombre de Reynolds est sensiblement constant.

exemple: pour $D = 4,2 \text{ cm}$
 $B = 36 \text{ cm}$ } $\Rightarrow R = 10^4$.

C. Le nombre de Weber.

Le cône du vortex met en jeu des forces de capillarité et celle d'inertie. Cette interaction est traduite par le nombre de Weber, dont l'expression prend la forme: $W = Q^2 \rho / D^2 H \sigma$. Ici aussi on peut relever les limites à partir desquelles le nombre de Weber est sensiblement constant.

exemple: pour $D = 4,2 \text{ cm}$
 $B = 36 \text{ cm}$ } $\Rightarrow W = 80$.

Il s'agit là du seuil, où les effets de la tension superficielle deviennent négligeables.

IV. 3. Mesure de la circulation " Γ " expérimentalement
Les méthodes directes de relevé de profil de l'entonnoir et des valeurs des vitesses (point limnimétriques, prises de pression, micromoulinets etc...) ne peuvent être retenues, en raison du déplacement incessant du vortex sur la surface libre dans la majorité des installations. Pour ces raisons, seules

les méthodes optiques peuvent être envisagées.

IV.3.1. Diverses méthodes optiques :

IV.3.1.1. Photographie de l'entonnoir du vortex :

Cette méthode consiste à prendre des épreuves photographiques du profil de l'entonnoir du vortex (si la chambre d'expérimentation possède de des parois transparentes), mais elle est peu précise en raison du grand rapport d'agrandissement que doit posséder le cliché, elle devient inacceptable dans le cas de petits entonnoirs, en raison de l'erreur importante introduite lorsqu'on désire déterminer la forme et la longueur du vortex.

IV.3.1.2 Méthode chronophotographique :

Cette méthode semble a priori plus séduisante. A partir de la visualisation des lignes de courant par la mise en suspension de petites particules (confettis, poudre d'aluminium, poudre de balsa, ou polystyrène), il paraît en effet possible de déterminer la vitesse du courant par mesure chronophotographique du déplacement des particules. En toute réalité, cette méthode n'est pas une méthode optique, mais nous la citerons ici, car elle fait appel à des procédés optiques pour la détermination finale de la vitesse. Notons que ces procédés deviennent assez complexes dans le cas de déplacement tridimensionnels des particules. Il est nécessaire en outre de rappeler que cette méthode nécessite d'admettre les deux hypothèses

Suivantes :

* l'écoulement n'est pas modifié par la mise en suspension des particules.

* les trajectoires des particules sont confondues avec les lignes de courant.

Or, l'expérience et le calcul montrent que ces hypothèses ne sont en pratique jamais vérifiées.

Les particules attirés vers le centre du mouvement tourbillonnaire gênent ou modifient les possibilités de formation de l'entonnoir du vortex.

En définitive, cette méthode ne pourrait être retenue.

IV. 3. 1. 3. Méthodes des rayons réfléchis :

Le principe de cette méthode consiste à disposer au dessus de la surface libre où se forme le vortex un réseau de points lumineux dont on photographie l'image dans le plan d'eau.

En l'absence de dépression sur la surface libre, l'image de chaque point lumineux est un point fixe. Dès qu'une dépression commence à se former et au fur et à mesure de l'augmentation de profondeur de l'entonnoir, on peut noter la formation de différentes figures géométriques dans le déplacement des images d'un certain nombre de points lumineux. A chaque forme différente d'entonnoir du vortex, correspond une figure différente dont il est possible d'obtenir un enregistrement par des méthodes photographiques ou cinématographiques. De ce fait et à chaque instant, un vortex peut être

Caractérisé par un réseau de points lumineux dont la disposition dépend du profil de son entonnoir et on obtient par cette méthode l'expression de la circulation :

$$\Gamma = 2 \cdot \pi \cdot r \sqrt{n \cdot g \left[\frac{r(H-h) \pm xh}{2h \cdot H} \right]}$$

avec :

- r - coordonné cylindrique d'un point de la surface libre du vortex par rapport à l'axe du vortex et au plan de la surface libre. (Plan en l'absence du vortex).
- H - distance du réseau de sources lumineuses à la surface libre
- h - distance de l'appareil photographique à la surface libre.
- x - distance d'une source lumineuse quelconque à la surface de référence.

Le signe (\pm) traduit ici le fait qu'une même source lumineuse peut donner lieu à deux réflexions pour lesquelles les valeurs du rayon "r" du point de réflexion sont différentes.

Précisons que le signe positif correspond à la réflexion située du côté opposé ; et le signe négatif correspond à la réflexion du même côté de la source lumineuse.

IV. 3.1.4 Méthodes des rayons réfractés :

Le principe de cette méthode est basé sur l'utilisation du phénomène optique de formation d'

une surface caustique lors de la déviation de rayons lumineux au passage de la surface dioptrique de séparation air-eau de la partie hyperbolique de l'entonnoir du vortex.

Dans un but de simplification, la lumière incidente, située au dessus de la surface libre est dirigée suivant la normale à cette surface, de façon à obtenir une surface caustique, possédant un axe de révolution vertical. Ici la surface caustique est réelle et présente une zone centrale sombre à l'intérieur d'une zone d'accumulation de lumière.

L'intersection de la surface caustique par un plan normal à la direction de la lumière incidente se présente sous la forme d'une tache circulaire sombre. En pratique, le plan normal d'intersection est le radier de la chambre où les graduations permettent d'évaluer le diamètre de la tache. De telles méthodes peuvent être effectuées à partir des méthodes cinématographiques d'enregistrement.

Établissons l'expression de la circulation dans ce cas :

Seuls des enregistrements (cinématographiques et d'impulsion de vitesse) répondant simultanément à ces différentes conditions ont été retenus pour le calcul de la vitesse.

À partir de son expression théorique :

$$v_{\theta} = \frac{3}{8} \frac{R^2}{r} \sqrt{\frac{3g}{H}}$$

avec $\Gamma = 2\pi r v_{\theta}$

- r- distance séparant l'axe du vortex au micromoulinet (déterminé à partir de l'enregistrement cinématographique).
- R- rayon de la tache sur le radier
- H- hauteur d'eau au dessus du radier.

CONCLUSION

Pour toute installations, on constate toujours une double instabilité spatiale et temporelle du vortex. Lieu et fréquence de formation; durée d'existence et d'aération; chemin parcouru sur la surface libre par le vortex sont excéssivement variables et les hypothèses simplificatrices des études théoriques ne peuvent permettre d'en tenir compte.

En l'absence d'une théorie générale satisfaisante, l'étude expérimentale des vortex reste donc le seul moyen possible permettant de déterminer leurs conditions de formation et de similitude suivant les caractéristiques géométriques et hydrauliques de l'installation.

Nous souhaitons que notre travail porte intérêt aux promotions futures.

BIBLIOGRAPHIE

- * Brun. E.A - A. Martinot Lagarde - J. Mathieu :
Mécanique des fluides - Tome II - Chap II
Edition Dunod - 1968.
- * Carlier. M.
Hydraulique générale et appliquée.
Edition Eyrolles - 1980
- * Fediavski. C - VOITKOVSKI. I - Faddeev. Y
Mécanique des fluides
Edition Moscou.
- * Hug. M.
Mécanique des fluides appliquée
Edition Eyrolles - Paris - 1975
- * Kay. J. M.
Introduction à la mécanique des fluides
transmission de la chaleur. (Page 24-28).
- * Anwar. H.O.
"Formation of a weak vortex"
Journal of hydraulic research
Vol 4 - (pages 1 - 16) - 1966
- * Anwar. H.O.
"Flow in a free vortex"
Water power - 1965 - Vol 17 - (page 153-161)
- * Anwar. H.O.
"Prévention of vortices at intakes"
Water power - 1968, vol 20 - (pages 393-401)

* Berge. J.P.

"Etude des phénomènes de vortex dans un liquide à surface libre."

Méthodes optiques expérimentales d'études - vol 13, Bulletin du C.R.E.C (pages 3-23) - 1965.

* BIESEL (F).

"Reflexion sur les vortex de vidange"
La houille blanche, N° 4, (pages 497-505)
Aout/Sept 1955

* Donaldson. C.D - Sullivan. R.D

"Behaviour of solutions of the Navier-Stokes equations for a complete class of three-dimensional viscous vortices"
journal of hydraulic research
vol 4, part 1, (pages 16-25), june 1960.

* Einstein, H.A - Huon-Li

"Le vortex permanent dans un fluide réel"
Houille blanche ; N° 4 ; 1955.

* Holtorff. G.

"La surface libre et les conditions de similitude des vortex"
Houille blanche - N° 3 - 1964

* Jain. A.K and Al.

"Vortex formation at vertical pipe intakes"
Proc. ASCE - journal of the hydraulics division - vol 104 Hy10 - OCT 1978 (pages 1429-1445).

* Jain. A.K and Al

"Air entrainment in radial flow towards intakes"

Canadian journal of civil engineering
A.S.C.E - Vol 104. Hy. 9 - 1978 - (pages
1323-1329). journal of the hydraulics
division.

* Julien. P.Y.

"Concentration of very fine silts in a steady vortex"

journal of hydraulic research - Vol 24
N° 4 - 1986

* Stevens. J.C and Kolf R.C

"Vortex flows through horizontal orifices - vol 83- (pages 1-22)
Décembre 1957

* Zielinski P.B and Villemonste J.R.

"Effect of viscosity on vortex orifices flow"

Journal of the hydraulics division
vol 94 N° Hy.3 P.R.O.C paper 5956
(pages 745-752) - Mai 1968.

* Djellouli - Mesbah

"Etude expérimentale des vortex de vidange dans une chambre rectangulaire"

Thèse de fin d'études. E.N.P. 1986 13/86

* Nasri. K - Ould hama douche.

" Etude expérimentale de la formation de vortex dans une chambre d'aspiration d'une station de pompage".

Thèse de fin d'études. E.N.P. 86 38/86

* Serradj. A.

" Méthode optique expérimental de calcul de la circulation autour d'un vortex".

thèse de fin d'études. E.N.P. 86.

