

UNIVERSITE D'ALGER

5/74

# ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

## Genie Hydraulique

1Ex



### COUP DE BELIER EN PRESENCE DES POCHES D'AIR

Proposée par :

Mr. V. CHOULGHINE

Etudiée par :

A. EL - ACHACHI

JUIN 1974



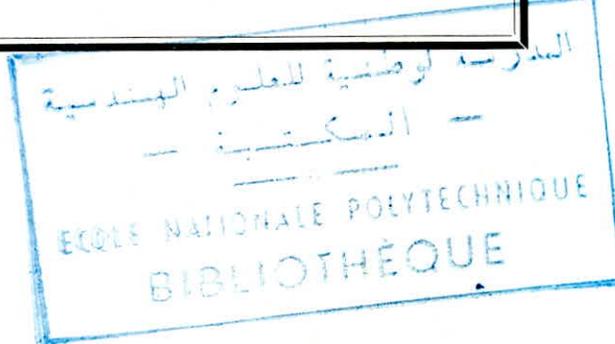
UNIVERSITE D'ALGER

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**

**Genie Hydraulique**

THESE DE FIN D'ETUDES

**COUP DE BELIER  
EN PRESENCE DES  
POCHES D'AIR**



Proposée par :

**Mr. V. CHOULGHINE**

Etudiée par :

**A. EL - ACHACHI**

JUIN 1974

J'exprime ma profonde gratitude à tous les professeurs qui ont contribué à ma formation particulièrement à Monsieur V. CHOULGUINE pour ses conseils sans cesse renouvelés et Monsieur G. LAPRAY, notre Chef de Département!

## S O M M A I R E

### Introduction :

### 1° Partie : Etude sommaire du coup de bélier.

- 1 - Définition du coup de bélier
- 2 - Etude sommaire du coup de bélier, formule d'ALLIEVI
- 3 - Représentation graphique du phénomène

### 2° Partie : Coup de bélier en présence des poches d'air dans la conduite.

- 1 - Etude du phénomène.
- 2 - Analyse physique du phénomène
- 3 - Détermination de la valeur du coup de bélier par la méthode graphique de BERGERON
- 4 - Détermination de la vitesse  $V$
- 5 - Détermination partielle du problème et solution graphique
- 6 - Influence des différents paramètres.
- 7 - Détermination complète du problème avec la solution graphique
- 8 - Protection des installations contre le coup de bélier.

### Conclusion :

## I N T R O D U C T I O N

Avant BERGERON, la complexité des phénomènes de coup de bélier avait déjà tenté les pursanalistes; mais les résultats étaient obtenus péniblement, nécessitaient souvent dans les données des simplifications que la méthode BERGERON permet d'éviter; BERGERON voulait voir et voir clair. Imaginant un observateur mobile, il réussit à visualiser les phénomènes dans tous leurs détails; dans les cas les plus compliqués il les représente par une épure sur laquelle on peut lire toute l'évolution du processus.

Aujourd'hui, suivant la même méthode, un autre problème que nous avons été amenés à résoudre depuis cette date, et qui nous paraît susceptible de présenter quelques intérêts pour la technique hydraulique, ce problème étant l'étude du coup de bélier en présence des poches d'air.

Une étude sommaire du coup de bélier fera l'objet de la première partie de ce projet la seconde partie sera consacrée à l'étude du coup de bélier en présence des poches d'air.

1ère Partie

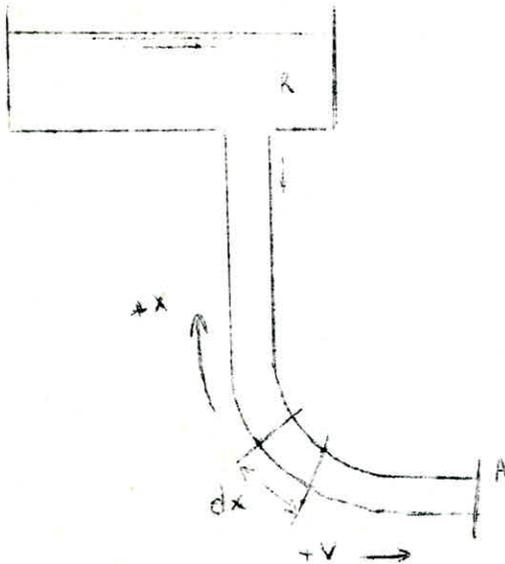
ETUDE SOMMAIRE DU COUP DE BELIER.

## 1-Définition du coup de bélier

Toute modification apportée au régime d'écoulement établi dans une conduite (par exemple manoeuvre d'une vanne, la mise en marche ou le changement de vitesse d'une pompe ou d'une turbine) entraîne une variation de pression et de vitesse avec le temps, d'un point à l'autre de la conduite.

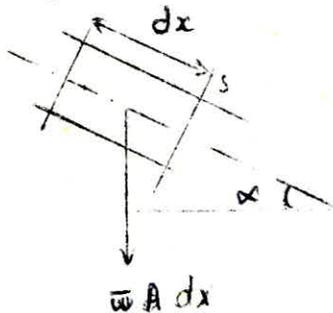
La perturbation se propage, sous forme d'ondes, de la section où elle a été produite, jusqu'à l'extrémité de la conduite, une bifurcation, un changement de section où elle est réfléchi **totalemment** ou partiellement et revient vers sa section d'origine qui la réfléchit à son tour. La conduite est ainsi parcourue par des ondes de pression et de vitesse, jusqu'à ce que les frottements les aient amorties. Ce phénomène porte le nom de coup de bélier.

## 2-Etude sommaire du coup de bélier, formule d'ALLIEVI



soit un reservoir R et une conduite sous pression issue de ce reservoir est susceptible d'être obturée en A par un robinet vanne.

L'écoulement s'effectue de R vers A. Analytiquement, appliquons le théorème, des projections sur l'axe de la conduite, des quantités de mouvement d'une tranche d'eau d'épaisseur  $dx$ . La projection sur cet axe, axe dont le sens positif est donné par  $Ax$ , des forces extérieures comprend :



- La composante du poids  
 $\bar{w} A dx \sin \alpha$
- La pression sur une face de la tranche  $dx$ .  
 $P A$
- La pression sur l'autre face  
 $-(P + \frac{Dp}{Dx} dx) A$

Supposons  $\bar{w}$  constant sur toute la longueur de la conduite (conduite à caractéristique unique) nous arrivons à l'équation suivante, si  $v$  est la vitesse de l'eau, comptée positivement dans le sens d'écoulement.

$$\frac{dv}{dt} = g \left( \sin \alpha + \frac{dz}{dx} \right)$$

avec  $\alpha$  : angle d'inclinaison de la tranche d'eau considérée

$z$  : Pression dans la conduite au point considérée.

$$z = \frac{P}{\bar{w}}$$

Si l'eau est considérée incompressible et la conduite non élastique on arrive à une solution approchée du problème, on a affaire alors à une oscillation en masse.

Mais en fait, il faut tenir compte d'une compressibilité de l'eau et de l'élasticité de la conduite. Il n'est plus question d'oscillation en masse, mais d'un régime dit transitoire, où la pression et le débit varient à la fois.

dans le temps et en chaque point de la conduite, le calcul conduit alors à des équations étudiées par ALLIEVI; d'une résolution numérique fastidieuse et pouvant se mettre sous la forme.

$$\Delta h = F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) \quad (1)$$

$$- a \frac{(v-v_0)}{g} = F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right) \quad (2)$$

où  $\Delta h$  est la valeur du coup de bélier;  $F$  et  $f$  étant des signes fonctionnels et  $a$ , la vitesse de l'onde.

ALLIEVI donne pour la vitesse  $a$  l'onde:

$$a = \frac{9900}{\sqrt{48,3 + K \frac{D}{I}}}$$

### 3- Représentation graphique du phénomène.

En additionnant et retranchant membre à membre les équations (1) et (2) ci-dessus, on obtient :

$$\Delta h - \frac{a}{g} (v - v_0) = 2 F$$

$$\Delta h + \frac{a}{g} (v - v_0) = 2 f$$

Appelons :

- $A$ , la section de la conduite
- $q_0, v_0$ , le débit et la vitesse en régime permanent
- $q, v$ , le débit et la vitesse en un instant quelconque.

Les équations ci-dessus peuvent s'écrire comme suite :

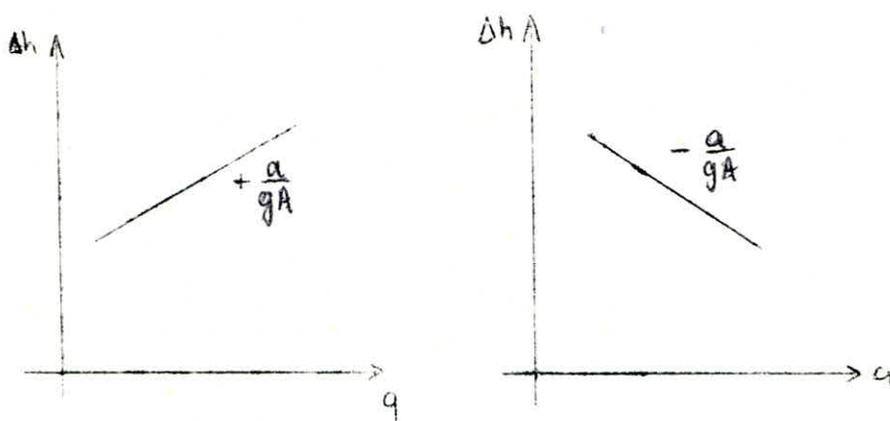
$$\Delta h = \frac{a}{gA} (q - q_0) + 2 F \quad (3)$$

$$\Delta h = \frac{a}{gA} (q - q_0) + 2 f \quad (4)$$

pour un observateur se déplaçant en sens inverse du courant à la vitesse  $a$ , la valeur  $F$  reste toujours la même!

En conséquence, si l'on rapporte  $q$  et  $\Delta h$  à deux axes pour une valeur de  $F$ , (3) est l'équation d'une droite de pente  $\frac{a}{gA}$

De même pour un observateur se déplaçant dans le sens du courant à la vitesse  $-a$ , la valeur  $f$  reste constante et, dans le même système de coordonnées, (4), pour une valeur de  $f$ , est l'équation d'une droite de pente  $-\frac{a}{gA}$



Cette représentation est la base graphique de bergeron qui exprime, pour un observateur se déplaçant à la vitesse des ondes, la courbe caractéristique d'une conduite en régime varié est donc une droite dont le coefficient angulaire ne dépend que des constantes  $a$  et  $S$  de la conduite, et dont le signe dépend du sens du déplacement de l'observateur. Pour tracer cette droite il suffit de connaître l'un de ces points, par exemple le point figmatif au lieu et au temps du départ de l'observateur. Mais il est capital de remarquer qu'elle représente une véritable loi physique.

On voit qu'il n'est plus maintenant questions d'ondes  $F$  et  $f$ , elles se sont éliminées, c'est cependant le fait qu'elles existent qui conduit à cette loi linéaire, mais cette loi, une fois connue, permettra de trouver le point figmatif du régime en tout lieu et tout instant.

2ème Partie

COUP DE BELIER EN PRESENCE DES  
POCHES D'AIR DANS LA CONDUITE.

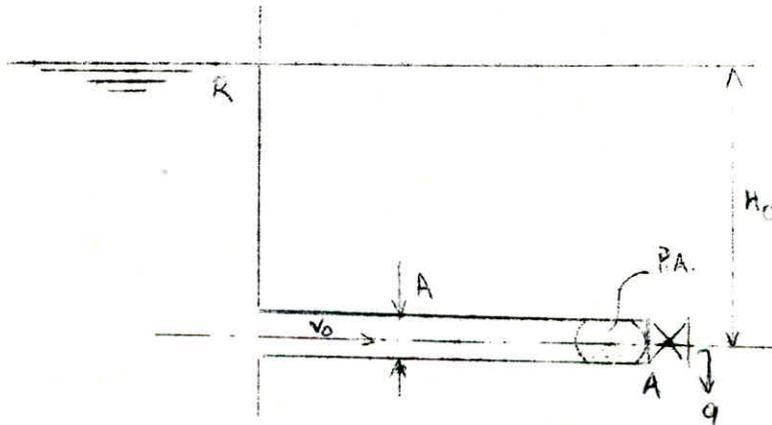
## 1 - Etude du phénomène

Dans la première partie de cet exposé la cause initiale du coup de bélier était l'intervention extérieure dans un processus établi : la manoeuvre de la vanne par exemple. Ici nous considérons l'écoulement qui est à première vue permanent, mais qui dissimule en lui la naissance possible du coup de bélier. Il s'agit des poches d'air

*celles-là lorsqu'elles sont fixes jouent un rôle favorable d'amortisseur de coup de bélier. D'autre part les poches errantes qui sont entraînées par le courant d'eau = vent cause de coup de bélier important*

## 2 - Analyse physique du phénomène

Après avoir donné une vue mathématique du phénomène qui a été traité dans la première partie de cet exposé, nous en donnerons une analyse physique en nous plaçant dans le cas d'une conduite en présence des poches d'air véhiculées par le débit  $q^0$ , débit en régime permanent.



soit une conduite avec une vanne qui débite à l'air libre sous une charge constante  $H_0$ . Le régime d'écoulement est permanent, donc la vitesse dans le tuyau.  $v_0 = \text{cts}$ . Ce régime d'écoulement permanent dure jusqu'au moment où la poche d'air atteint la vanne. Alors l'air la pression dans la poche tombe aussi rapidement. Il se produit ainsi une différence de pression agissant sur la colonne d'eau qui acquiert une vitesse  $v > v_0$  et s'abat sur la vanne. La valeur du coup de bélier qui s'obtient ainsi, est facilement déterminée si l'on connaît la vitesse  $v$  ( le débit  $q$ ) dont sera animée la colonne d'eau au moment où elle touche la vanne.

Supposons la colonne liquide constituée de tranches infiniment rapprochées. Une partie de la tranche de fluide en proximité de la vanne se heurte contre celle-ci et son énergie cinétique se transforme en travail de déformations élastiques du fluide et des parois de la conduite, en faisant monter la pression de  $\Delta p$  dans la conduite, la tranche voisine se heurtant contre cette dernière causant le même effet de surpression, et ainsi de suite. Il se forme ainsi une onde de choc qui se déplace vers le réservoir d'une vitesse, ou célérité  $a$ , laissant derrière elle la surpression  $\Delta p$ .

Quand l'onde de choc arrive au réservoir, toute la conduite se trouve soumise à une même pression  $p^0 + \Delta p$  une partie de l'énergie cinétique de la colonne liquide est alors transformée en travail de déformations élastiques.

Mais cet état n'est pas stable, la tranche de fluide adjacente au réservoir actionnée par la différence de pression  $\Delta p$  se déplace vers le réservoir. Dès qu'elle se met en mouvement, elle dégage la tranche voisine, à son tour, se trouve actionnée par la différence de pression  $\Delta p$  qui la déplace vers le réservoir et aussi de suite. Il se produit aussi, de tranche en tranche, une baisse de pression jusqu'à la valeur initiale  $p_0$ , et un écoulement de signe contraire au dépend du volume accumulé par le gonflement de la conduite et la contraction du liquide.

Quand l'onde d'abaissement atteint la vanne  $A$ , un courant inverse s'établit dans la conduite, il se produit alors un coup de bélier négatif dont la valeur est  $-\Delta p$ , car cette fois la colonne liquide, au lieu de s'abattre sur la vanne, tend à s'en détacher. Cette fois l'onde de choc négative court de la vanne vers le réservoir laissant derrière elle la dépression  $-\Delta p$ . Quand elle atteint le réservoir, il s'établit pour un instant la dépression  $-\Delta p$  dans toute la conduite. Comme cet état n'est pas stable, le nivellement de la pression entre le réservoir et la conduite commence. Il en résulte l'onde de nivellement de pression qui court vers la vanne, laissant derrière elle la pression  $p_0$ .

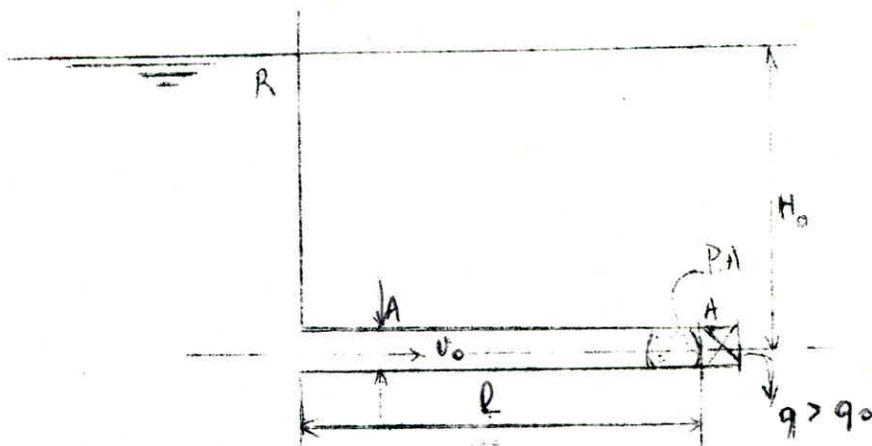
Ce phénomène de coup de bélier se répète ainsi périodiquement, l'amplitude de  $\Delta p$  diminuant peu à peu à cause des pertes d'énergie dues aux frottements et aux déformations non élastiques. Il vient un moment où elle s'annule et le régime redevient normale et l'écoulement permanent s'établit avec la vitesse  $v_0$ .

### 3 - Détermination de la valeur du coup de bélier par la méthode graphique de Bergeron.

Nous venons de dégager des notions essentielles concernant, d'une part le phénomène de coup de bélier et d'autre part sa représentation graphique qui a été étudié dans la première partie de l'exposé. Nous allons voir maintenant comment on étudie la marche du phénomène en utilisant la méthode graphique de Bergeron!

#### 3 - 1 Soit le problème suivant :

On se propose de trouver la valeur maximale de la surpression et de la dépression dans une conduite résultant de la présence des poches d'air dans la conduite et de l'ouverture d'une vanne située à l'aval dans les conditions suivantes :



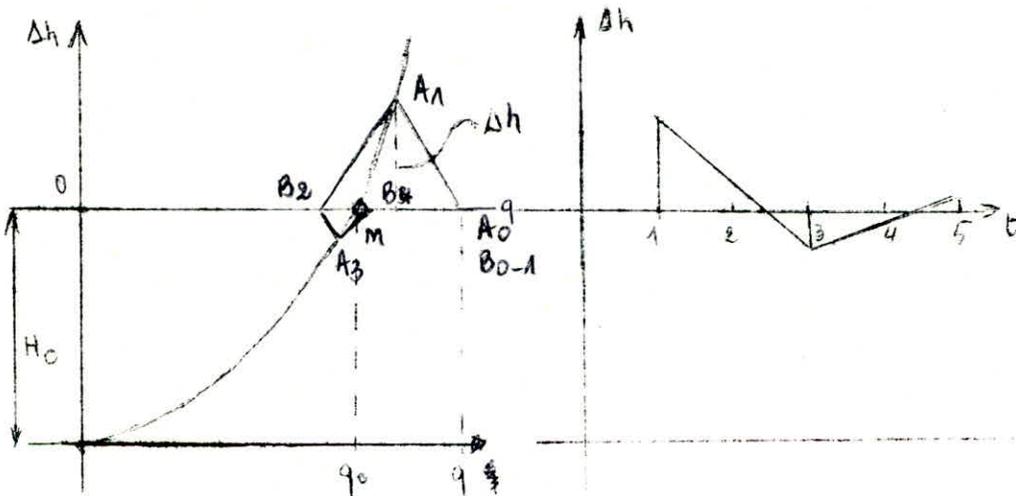
Le diamètre de la conduite  $D$ , la longueur  $l$ , ainsi que la pression statique  $H_0$ , étant connus.

### 3 - 2 Résolution par la méthode graphique :

En régime permanent, et pour la pression  $H^0$ , le débit que laisse passer la vanne, dans sa position réglée pour la marche normale est  $q_0$ .

A un moment donné (Temps 0), après la disparition de la poche d'air, le fluide attaque la vanne avec une vitesse  $v > v_0$ , ce qui en résulte un débit  $q > q_0$  qui passe à travers la vanne.

La valeur de la célérité de l'onde "a" étant connue et  $\frac{l}{a}$  sera pris comme unité de temps, qui est appelé aussi unité de temps d'ALLIEVI :



Dans un système de coordonnées  $(q ; \Delta h)$ , la caractéristique d'ouverture de la vanne étant représenté par la courbe d'équation.

$$q = \mu A_v \sqrt{2g(H_0 + \Delta h)}$$

où  $A_v$  est la section réduite;

$\mu$  le coefficient de contraction

$H^0$  la pression statique

$\Delta h$  la surpression due au coup de bélier.

La parabole passe par le point  $(q_0, H_0)$  ; puisqu'à ce moment, il n'y a aucun coup de bélier  $\Delta h = 0$ , la poche d'air n'ayant pas atteint la vanne.

Avec ces deux points  $(H_0, q_0)$  la courbe peut être tracée.

Voyons maintenant le tracé graphique du coup de bélier, selon la méthode de Bergeron.

Considérons un observateur mobile partant de B au temps 0. Sur le graphique, sa position à ce temps est  $A_0$ , sur l'axe  $Oq$  au point de débit  $q$ ; se dirigeant vers A il descend le courant, la caractéristique du régime est donc la droite de pente  $-\frac{a}{gA}$ . Arrivant en A au temps 1, l'observateur trouve la vanne en sa position initiale, on a ainsi le point  $A_1$ . Retournant vers B, l'observateur remonte le courant et la caractéristique du régime est la droite de pente  $+\frac{a}{gA}$ . Quand il arrive au B, au temps 2. La surpression étant nulle au réservoir, on a le point  $B_2$ , sur l'axe  $Oq$ .

L'observateur repart vers A (droite  $-\frac{a}{gA}$ ) et trouve la vanne dans la même position (point  $A_3$ ) il retourne vers B (droite  $+\frac{a}{gA}$ ) où il arrive au temps 4 et où la surpression est nulle au réservoir (point  $B_4$ )

Et ainsi de suite, jusqu'à ce que les oscillations s'éteignent autour du point M, et le régime redevient permanent.

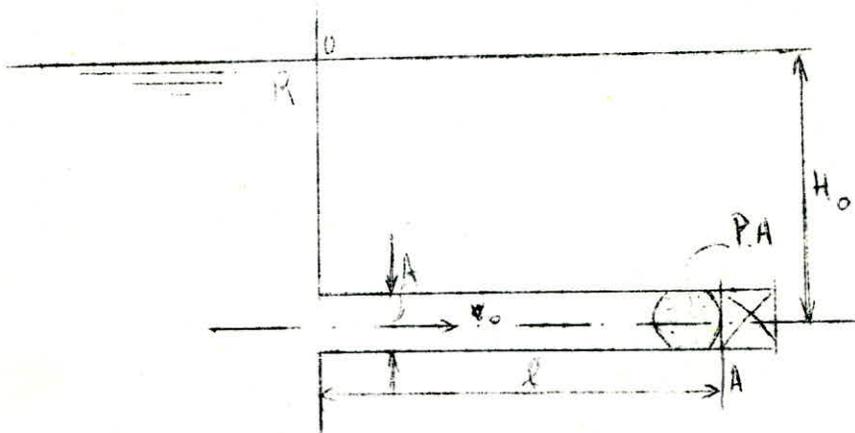
Il suffit alors de lire le graphique au dessus de la droite  $y = H_0$  la valeur maximale de la surpression ou de la dépression au dessous, de cette même droite.

Ainsi le problème se réduit à la détermination de la vitesse  $v$ , avec laquelle la colonne d'eau attaque la vanne, et ceci au moment de disparition de la poche d'air.

Remarque :

La clarté et la facilité de la construction de Bergeron nous permet de déterminer directement la surpression due au coup de bélier.

4-Détermination de la vitesse V



on considère le régime d'accélération de la colonne d'eau pendant que la poche d'air commence à disparaître.

Appliquons l'équation de Bernouilli pour le régime non permanent entre le point O et A.

soit :

$$H_0 = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\bar{w}} + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \frac{1}{g} \int_0^l \frac{dv}{dt} dx \quad (5)$$

ou bien en calculant l'intégrale l'équation devient :

$$H_0 = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\bar{w}} + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \frac{l}{d} \frac{dv}{dt} \quad (6)$$

Ici p est la pression variable qui régné dans la poche d'air.

Donc de cette équation à deux inconnues il faut éliminer p.

La pression p est reliée avec la vitesse d'écoulement de l'air

$V_a$  par la formule de SAINT-VENANT :

$$v_a = \sqrt{\frac{2x}{x-1} \frac{p}{\rho} \left[ 1 - \frac{p_0}{p} \right]^{\frac{x-1}{x}}} \quad (7)$$

où  $\rho$  est la masse volumique d'air dans la poche  $p^0$ , la pression atmosphérique,

$$x = 1,4$$

Dans cette formule  $p$  est une pression absolue.

A (6) ajoutons encore l'équation de conservation de la masse

$$VA\rho = v_a A_v \mu \rho_0 + \frac{d\rho}{dt} W \quad (8)$$

où  $W$  est le volume de la poche.

Ce système d'équations n'est intégrable, mais il se simplifie au point de la devenir, si l'on considère les faibles variations de la pression  $p$  avec  $\rho = \text{cts}$ . Alors, au lieu de (7) on aura

$$v_a \approx \sqrt{\frac{2}{\rho} p} \quad (9)$$

et au lieu de (8) on aura

$$VA = v_a A_v \mu \quad (10)$$

En éliminant  $v_a$  entre (9) et (10), on a

$$p = \frac{\rho v^2 A^2}{2 A_v^2 \mu^2}$$

et au lieu de (6) on peut écrire:

$$H_0 = \frac{v^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} \left( \frac{A}{A_v \mu} \right)^2 \frac{\rho}{\rho_{eau}} + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \frac{2l dv}{2y dt}$$

ou bien  $2gH = v^2 M^2 + 2l \frac{dv}{dt}$  (11)

avec:  $M^2 = 1 + \rho \left( \frac{A}{A_{st}} \right)^2 \frac{l}{l_{eau}}$

l'équation (11) est intégrable, soit

$$dt = \frac{2l \, dv}{2gH - M^2 v^2}$$

ou bien

(12)  $\frac{dt}{2l} = \frac{dv}{v_t^2 - M^2 v^2}$  avec  $v_t = \sqrt{2gH_0}$

calcul de l'équation (12)

Intégrons

on a  $\int \frac{dt}{2l} = \int \frac{dv}{v_t^2 - M^2 v^2} + c_5$

Soit:

$$I_1 = \int \frac{dt}{2l} = \frac{t}{2l}$$

$$I_2 = \int \frac{dv}{v_t^2 - M^2 v^2} = \frac{1}{v_t^2} \int \frac{dv}{\left(1 - \frac{M^2 v^2}{v_t^2}\right)} = \frac{1}{M v_t} \int \frac{d \frac{Mv}{v_t}}{\left(1 - \frac{M^2 v^2}{v_t^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{M v_t} \int \frac{du}{1 - u^2}$$

avec un changement de variable

$$u = \frac{Mv}{v_t}$$

on a

$$\frac{1}{1 - u^2} = \frac{1}{(1 - u)(1 + u)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(1 - u)} + \frac{1}{(1 + u)} \right]$$

$$\text{et } \frac{1}{M V_t} \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2 M V_t} \left[ \int \frac{du}{1-u} + \int \frac{du}{1+u} \right]$$

$$= \frac{1}{2 M V_t} \left[ -\ln(1-u) + \ln(1+u) \right]$$

soit  $I_2 = \frac{1}{2 M V_t} \ln \frac{1+u}{1-u}$

dont  $I_2 = \frac{1}{2 M V_t} \ln \frac{1 + \frac{M V}{V_t}}{1 - \frac{M V}{V_t}}$

on a finalement

$$\boxed{\frac{t}{2l} = \frac{1}{2 M V_t} \ln \frac{V_t + M V}{V_t - M V} + Cts}$$

Avec les conditions aux limites

$t = 0$  on a  $V = V_0$ .

alors

$$Cts = - \frac{1}{2 M V_t} \ln \frac{V_t + M V_0}{V_t - M V_0}$$

et où

$$\boxed{t = \frac{l}{M V_t} \ln \frac{(V_t + M V)(V_t - M V_0)}{(V_t - M V)(V_t + M V_0)}} \quad (13)$$

$t$  étant le temp. d'épuisement de la poche d'air, si le volume initiale de la poche d'air est donné, on peut calculer le temp.  $t$  nécessaire pour son épuisement et trouver la vitesse  $V$ , que la colonne d'eau aura au moment de la collision avec la vanne

on a 
$$t = \frac{l}{M V_t} \ln \frac{(V_t + M V)(V_t - M V_0)}{(V_t - M V)(V_t + M V_0)}$$

soit en passant au exponentiel on a

$$e^{xt} = e^{\frac{Mv_t}{l}} = \frac{(v_t + Mv)(v_t - Mv_0)}{(v_t - Mv)(v_t + Mv_0)}$$

en posant  $x = \frac{Mv_t}{l}$

ce qui donne

$$e^{xt} v_t (v_t + Mv_0) - e^{xt} Mv (v_t + Mv_0) = v_t (v_t - Mv_0) + Mv (v_t - Mv_0)$$

d'où 
$$v = \frac{e^{xt} v_t (v_t + Mv_0) - v_t (v_t - Mv_0)}{e^{xt} M (v_t + Mv_0) + M (v_t - Mv_0)}$$

on peut écrire aussi

$$\frac{v}{v_t} M = \frac{e^{xt} (v_t + Mv_0) - (v_t - Mv_0)}{e^{xt} (v_t + Mv_0) + (v_t - Mv_0)} \quad (14)$$

avec  $v_t = \sqrt{2gH_0}$

et  $v_0 = \frac{v_t}{M}$  car en régime permanent, en appliquant l'équation de Bernouilli; on a.

$$H_0 = \frac{v_0^2}{2g} \left( 1 + \lambda \frac{l}{d} \right) + \frac{p_0}{\rho g}$$

et  $q^0 = v^0 A = \mu A_v \sqrt{\frac{2}{\rho} p_0} \Rightarrow \frac{p_0}{\rho} = \frac{v_0^2 A^2}{\mu^2 A_v^2}$

soit 
$$\frac{p_0}{\rho g} = \frac{v_0^2 A^2}{\mu^2 A_v^2 2g}$$

d'où 
$$H_0 = \frac{v_0^2}{2g} \left( 1 + \lambda \frac{l}{d} \right) + \frac{v_0^2 A^2}{2g A_v^2 \mu^2}$$

soit

$$2gH_0 = v_0^2 \left( 1 + \lambda \frac{l}{d} + \frac{A^2}{A_v^2 \mu^2} \right)$$

posant

$$M'^2 = 1 + \lambda \frac{l}{d} + \frac{A^2}{A_v^2 \mu^2}$$

avec

$$v_t = \sqrt{2gH_0}$$

on aura

$$v_t^2 = v_0^2 M'^2$$

donc

$$v_t = v_0 M'$$

Revenons maintenant à l'équation (14) écrite plus haut.

$$\frac{Mv}{v_t} = \frac{e^{\alpha t} (v_t + Mv_0) - (v_t - Mv_0)}{e^{\alpha t} (v_t + Mv_0) + (v_t - Mv_0)}$$

Cette équation peut s'écrire sous une autre forme.

$$\text{soit } \frac{Mv}{v_t} = \frac{\frac{M}{M'} (e^{\alpha t} - 1) + (e^{\alpha t} + 1)}{\frac{M}{M'} (e^{\alpha t} - 1) + (e^{\alpha t} + 1)} \quad (15)$$

et avec  $v_t = v_0 M'$  (15) devient

$$\left[ \frac{v}{v_0} = \frac{\frac{M}{M'} (e^{\alpha t} - 1) + (e^{\alpha t} + 1)}{\frac{M}{M'} (e^{\alpha t} - 1) + (e^{\alpha t} + 1)} \right] \quad (16)$$

avec

$$M = \sqrt{1 + \lambda \frac{l}{d} + \frac{A^2}{A_v^2 \mu^2}} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{Mv_t}{l}$$
$$M' = \sqrt{1 + \lambda \frac{l}{d} + \frac{A^2}{A_v^2 \mu^2}} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{MM'}{l} v_0$$

## 5 - Détermination partielle du problème et solution graphique

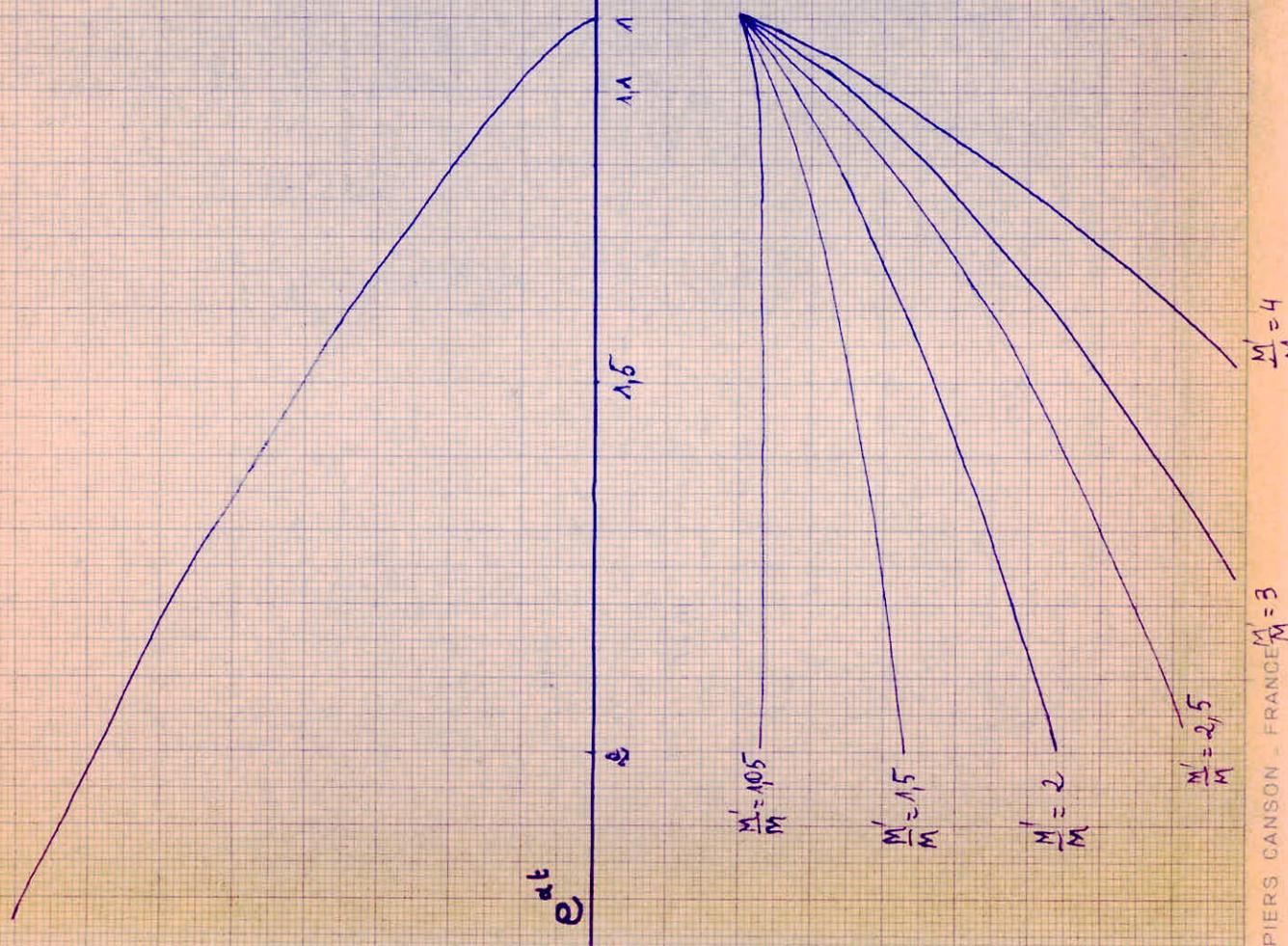
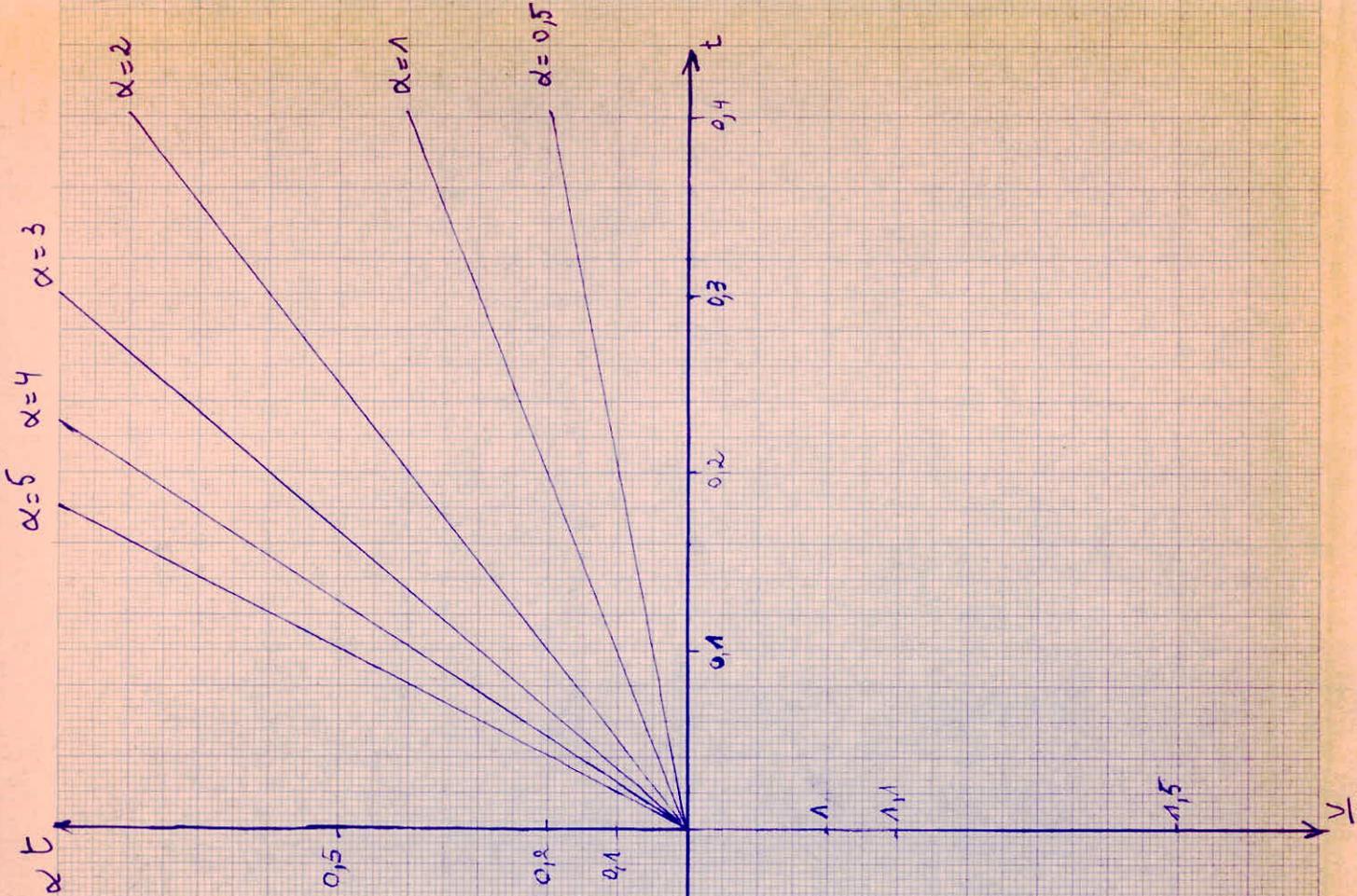
- Après avoir donné une résolution mathématique du problème on est amené à faire un abaque pour la détermination de  $V$
- En effet dans l'équation (16)

$$\frac{V}{V_0} = \frac{\frac{M'}{M} (e^{\alpha t} - 1) + (e^{\alpha t} + 1)}{\frac{M}{M'} (e^{\alpha t} - 1) + (e^{\alpha t} + 1)}$$

On a d'abord la fonction  $e^{\alpha t}$  qui d'une part fonction de  $t$  et d'autre part de  $\alpha$ . on pourrait en première construction dans la région I de l'abaque faire la représentation de  $\alpha t = f(t)$ , soit  $t$  en abscisse et  $\alpha t$  en ordonnée, et ceci pour différentes valeurs de  $\alpha$  bien choisies (valeurs qui ont un sens physique); puis dans la région II la représentation de  $e^{\alpha t} = f(\alpha t)$  qui sera la même évidemment pour les différentes valeurs de  $\alpha$ ; et enfin dans la région III de l'abaque on construira les différentes courbes correspondant aux différentes valeurs du rapport  $\frac{M'}{M}$  ou bien du rapport inverse, avec des valeurs acceptables de  $M$  et  $M'$ ; et ceci nous donnera les courbes  $\frac{V}{V_0} = f\left(e^{\alpha t}, \frac{M'}{M}\right)$ .

Ainsi la représentation graphique dans le même système de coordonnées permet la détermination rapide du rapport  $\frac{V}{V_0}$

Par exemple, si pour un  $\alpha$  connu, les valeurs de  $M$  et  $M'$  calculées c'est à dire pour un rapport  $\frac{M'}{M}$  connu, alors on lit la valeur de  $\frac{V}{V_0}$  du rapport des vitesses dans l'abaque.  $V_0$  étant en général connu d'où  $V$ , par conséquent le débit  $q$



$\frac{M'}{M} = 4$

$\frac{M'}{M} = 3$

$\frac{M'}{M} = 2.5$

$\frac{M'}{M} = 2$

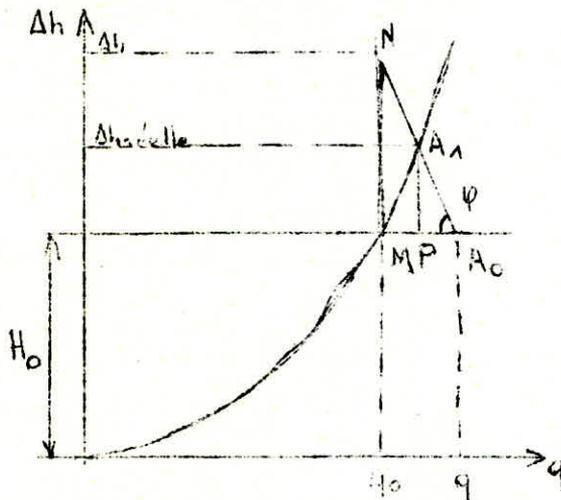
$\frac{M'}{M} = 1.5$

$\frac{M'}{M} = 1.05$

## 6 - Influence des différents facteurs sur la valeur du coup de bélier

Donnons tout d'abord l'expression de la valeur du coup de bélier.

Soit la construction suivante.



Si  $q$  est le débit au temps 0, au moment où la colonne d'eau attaque la vanne; et  $q_0$ , le débit en régime permanent, on a

$$\Delta h = MN = (q - q_0) \operatorname{tg} \varphi$$

avec

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{gA} \quad \text{La pente de la droite caractéristique}$$

alors

$$\Delta h = (q - q_0) \frac{a}{gA}$$

soit

$$\Delta h = (v - v_0) \frac{a}{g}$$

Remarque :

La valeur numérique du coup de bélier calculé précédemment n'est pas la valeur réelle du coup de bélier.

En effet

$$\Delta h_{\text{réelle}} = A_1 P$$

De toute façon on arrivera à la même expression trouvée plus haut à savoir que la valeur du coup de bélier sera toujours proportionnelle à l'augmentation de vitesse,  $\Delta V = (V - V_0)$ , c'est à dire plus  $v$  augmente, par rapport à  $v^0$ , plus la valeur du coup de bélier sera grande.

#### 6 - 1 Influence de la longueur $l$ de la conduite

Ecrivons d'abord l'équation (16)

soit

$$\frac{v}{v_0} = \frac{\frac{M'}{M} (e^{xt} - 1) + (e^{xt} + 1)}{\frac{M}{M'} (e^{xt} - 1) + (e^{xt} + 1)}$$

avec

$$M = \sqrt{1 + \lambda \frac{l}{d} + \frac{A^2}{A_v^2 M^2} \frac{\rho a l}{\rho}}$$

$$M' = \sqrt{1 + \lambda \frac{l}{d} + \frac{A^2}{A_v^2 M'^2}}$$

$$\text{soit } \alpha = \frac{M M'}{1} v_0$$

Soit

Par exemple une conduite de diamètre  $d = 0,05\text{m}$  avec un coefficient de frottement  $\lambda = 0,03$  les autres données étant :

$$H_0 = 3\text{m}$$

$$\frac{A}{A_v} = 5$$

$$l' \approx 0,2$$

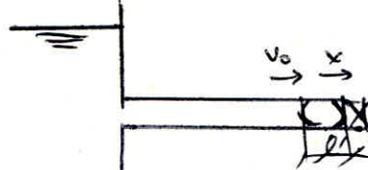
$$\mu = 1$$

$$\frac{Q_0}{Q} = \frac{1}{800}$$

on considère une poche d'air de même longueur  $l'$  soit le même volume puisque  $w = l'A$ , avec  $A$  la section de la conduite qui reste inchangée, et donnant à la longueur de la conduite différentes valeurs et voyons l'influence de ce facteur sur la valeur du coup de bélier d'où le tableau suivant:

$l$ (m)	10	100	1000
$M$	2,65	7,81	24,5
$M'$	5,66	9,27	25
$M'/M$	2,13	1,188	1,02
$v_0$ (m/s)	1,354	0,827	0,3065
$\alpha$	2,028	0,598	0,188
$t$ (s)	0,14	0,26	<del>0,00</del>
$v/v_0$	1,22	1,024	0,8035
$v$ (m/s)	1,655	0,847	0,3075
$l'$	0,216	0,216	0,215
$(v - v_0)$	0,3	0,02	0,001

avec  $l' = v_m t = \frac{v + v_0}{2} t$



De ce tableau on peut tirer les conclusions suivantes :

Si la longueur de la conduite  $l$  est très grande alors  $\underline{v}$  est presque égal à l'unité, c'est-à-dire que la vitesse  $v$  est sensiblement égale à la vitesse  $v_0$ , la vitesse en régime permanent. L'accroissement de la vitesse est faible d'où un coup de bélier faible

Si la longueur de la conduite  $l$  est petite, alors  $\underline{v}$  est un peu supérieure à l'unité, soit une vitesse  $v$  supérieure à la vitesse  $v_0$ , d'où un accroissement de vitesse, ce qui entraîne une augmentation de la valeur du coup de bélier

Ceci peut s'expliquer d'une autre façon

$$\text{soit } E_{in} = \frac{1}{g} \int_0^l \frac{dv}{dt} dx = \frac{l}{g} \frac{dv}{dt}$$

plus  $l$  augmente, alors  $\frac{dv}{dt}$  diminue, c'est à dire l'accélération de la colonne d'eau diminue au fur et à mesure qu'elle s'approche de la vanne par voie de conséquence la vitesse  $v$  qu'aura la colonne après la disparition totale de la poche d'air, diminue aussi.

Ainsi la valeur du coup de bélier étant fonction de l'accroissement de vitesse, soit proportionnelle à  $(v-v_0)$  est faible lorsque la longueur  $l$  de la conduite est grande.

En général le coup de bélier est proportionnel à la fois à la vitesse de l'eau dans la conduite et à sa longueur  $l$  donnée par la formule dite de Michaud

$$\Delta h = \frac{2lv_0}{gT}$$

avec  $T$ : temp de fermeture de la vanne dans le cas où  $T > \frac{2l}{a}$

A cet effet on peut faire les remarques suivantes.

### Remarque 1.

Nous avons trouvé précédemment, et dans le cas du coup de bélier en présence des poches d'air que celui-ci est faible lorsque la longueur de la conduite est grande.

### Remarque 2:

Lorsque  $l$  est très petit, de l'ordre de 5m par exemple, il faut tenir compte à la fois du temps que met l'onde pour parcourir la conduite soit un aller retour égal à  $\frac{2l}{a}$  et du temps  $t$  que met la poche d'air pour disparaître.

si  $t \leq \frac{2l}{a}$  on revient au cas précédent

si  $t \geq \frac{2l}{a}$  on assiste au phénomène du coup de bélier indirect en présence des poches d'air.

Ainsi la première des ondes élémentaires reflétées du réservoir arrive près de la vanne et trouve une partie du volume de la poche d'air non évacuée, une à une, les ondes élémentaires arrivent à la vanne et se trouvent dans la même situation que la précédente, et ainsi de suite jusqu'à la disparition totale de la poche d'air

### 6 - 2 Influence du rapport de section $\frac{A}{A_v}$

soit une conduite :

$$\begin{aligned} d &= 0,05 & \mu &= 1 & l' &\approx 0,2 \\ H_0 &= 3m & a &= 1 \\ \lambda &= 0,03 & l &= 10m. \end{aligned}$$

Faisons varier l'ouverture de la vanne tout en gardant toujours la même poche d'air de longueur  $l'$ , et voyons l'influence du rapport  $\frac{A}{A_v}$  ; rapport de la section de la vanne par rapport à la section de la conduite sur la valeur du coup de bélier.

On aura le tableau suivant :

$A/A_v$	2,5	5	7,5	10
$M$	2,645	2,646	2,66	2,662
$M'$	3,64	5,66	7,95	10,33
$M'/M$	1,376	2,135	2,99	3,88
$v_0$ m/s	2,105	1,354	0,964	0,742
$\Delta$	2,025	2,028	2,04	2,04
$t$	0,1	0,14	0,18	0,2
$v/v_0$	1,058	1,22	1,455	1,7
$Y$ m/s	2,225	1,65	1,4	1,26
$l'_m$	0,216	0,216	0,216	0,216
$(v - v_0)$	0,12	0,30	0,44	0,52

Dans le tableau ci-dessus on remarque que :

plus le rapport  $A/A_v$  est grand, c'est-à-dire plus la vanne se rapproche de la fermeture complète, alors la valeur du coup de bélier augmente.

Ceci s'explique par le fait que :

lorsque la vanne presque ouverte la colonne d'eau est beaucoup plus accélérée et la poche d'air s'avance rapidement en ne causant que de faible coup de bélier .

Dans le cas où la vanne est presque fermée, c'est-à-dire avec un débit très faible, la poche d'air ayant le même volume que précédemment, nous donne un accroissement de vitesse  $v$  par rapport à  $v_0$  d'où une augmentation du coup de bélier.

### 6 - 3 Influence de la pression statique $H_0$ :

soit une conduite .

$$d = 0,05$$

$$A/Av = 5$$

$$\mu = 1$$

$$l = 10m$$

$$Qa/Q = 1/800$$

$$1' \approx 0,2$$

prenons deux valeurs de  $H_0$  soit  $H_0 = 3$  m puis  $H_0 = 9$  m et voyons l'influence de ce facteur sur la valeur du coup de bélier.  
d'où le tableau suivant.

$H_0$ m	3	9
M	2,645	2,645
M'	5,66	5,66
M'/M	2,135	2,135
$V_0$	1,354	2,34
$\alpha$	2,028	3,5
t	0,14	0,08
$V/V_0$	1,22	1,216
V	1,65	2,84
$l'$	0,216	0,216
$(V - V_0)$	0,30	0,50

D'après les résultats obtenus dans le tableau ci-dessus la valeur du coup de bélier augmente avec la hauteur  $H_0$ , ceci est d'autant plus vrai, si on augmente la hauteur  $H_0$ , en gardant le même diamètre et la même longueur de la conduite, la vitesse  $V_0$  en régime permanent augmente aussi, et pour un même volume de la poche d'air, la vitesse V de la colonne d'eau qui attaque la vanne augmente, soit un accroissement

de vitesse, d'où une augmentation de la valeur du coup de bélier.

A cet effet nous rappelons que le coup de bélier ordinaire est toutefois indépendant de la pression statique  $H_0$

Il est donc nécessaire de faire la remarque suivante:

Remarque:

Dans le cas du coup de bélier en présence des poches d'air; la valeur du coup de bélier augmente avec la pression statique  $H_0$ .

6 - 5 Influence du diamètre d de la conduite :

Il n'est pas nécessaire de faire un calcul qui va nous remener au même résultat .

$$\text{on a } \Delta h = \frac{a}{g} (v-v_0) = \frac{a}{gA} (q-q_0)$$

Si la section A de la conduite augmente, la valeur du coup de bélier diminue.

6 - 6 Influence du temps t de disparition de la poche d'air

Etant donné que le temps t de disparition de la poche d'air est fonction du volume de cette dernière, on peut faire l'étude de l'influence de t sur la valeur du coup de bélier.

soit une conduite :

$$\begin{array}{llll} d = 0,05 & A/Av = 10 & v_0 = 0,74 & e^a/p = \frac{1}{800} \quad M=662 \\ l = 10m & \mu = 1 & \alpha = 2,04 & H_0 = 3m \quad M=10,33 \end{array}$$

on aura le tableau suivant :

$t$	0,05	0,1	0,2
$v/v_0$	1,183	1,316	1,69
$v$	0,878	1,006	1,25
$v-v_0$	0,136	0,25	0,51

Les résultats du tableau ci-dessus nous montrent que la valeur du coup de bélier étant fonction de l'augmentation de vitesse, augmente avec le temp  $t$  de disparition de la poche d'air, ceci d'une part.

Et d'autre part on pourrait calculer le volume  $w$  des différentes poches d'air pour les différentes valeurs de  $t$ .

on a alors

$t$	0,05	0,1	0,2
$v$	0,878	1,006	1,25
$l'$	0,04	0,08	0,2
$w_m^3$	$0,8 \cdot 10^{-4}$	$1,6 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$
$v-v_0$	0,13	0,25	0,5

on remarque maintenant que plus la poche d'air est grande, plus la valeur du coup de bélier est grande!

#### En résumé :

Nous venons de dégager les notions essentielles concernant l'influence des différents facteurs intervenant dans la détermination de la vitesse  $v$ , vitesse de la colonne d'eau qui attaque la vanne juste après la disparition totale de la poche d'air, sur la valeur du coup de bélier!

#### A savoir :

Pour une même poche d'air la valeur du coup de bélier

- augmente avec  $H_0$ , et  $A/Av$
- diminue avec  $l$  et  $d$ .

ceci d'une part

Et d'autre part

la valeur du coup de bélier augmente avec le volume de la poche d'air!

## 7 Détermination complète du problème avec la solution graphique :

Nous avons vu dans le cinquième chapitre de cette partie, la détermination de  $v$  par une solution graphique.

Nous allons voir maintenant, par des exemples, une solution graphique pour la détermination de la valeur du coup de bélier.

Ainsi nous aurons englobé les résultats trouvés dans le chapitre précédent, soit la valeur du coup de bélier en fonction d'une part du rapport de section  $A/A_v$  et d'autre part de la longueur  $l$  de la conduite.

Cet abaque sera déterminé en utilisant la méthode **graphique de Bergeron**.

On prendra comme pente géométrique de la droite caractéristique.

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{a}{gA} \times \frac{\theta}{\beta}$$

avec  $\theta$  et  $\beta$  les échelles prises pour l'abscisse et l'ordonnée pour la construction de Bergeron

Ainsi  $\Delta h = \Delta q \frac{a}{gA}$

$$\begin{aligned} \Delta h &= y \beta \\ \Delta q &= x \theta \end{aligned} \Rightarrow \operatorname{tg} \psi = \frac{y}{x} = \frac{\Delta h}{\beta} \frac{\theta}{\Delta q} = \frac{a}{gA} \times \frac{\theta}{\beta}$$

Nous traiterons deux exemples

### 1er Exemple :

On considère une conduite de diamètre  $d=0,05$

avec une pression statique  $H^0 = 3\text{m}$

### 2ème Exemple :

Une conduite de même diamètre  $d=0,05$  et une pression statique  $H^0=9\text{m}$  pour les 2 exemples on gardera la même longueur  $l'$  de la poche d'air soit le même volume; puisque le diamètre reste inchangé.

Les autres données étant:

$$\mu = 1$$

$$\frac{\rho a}{\rho} = 1/800$$

On aura alors les tableaux ci-prés!

$$l = 10 \text{ m}$$

$$d = 0,05 \text{ m}$$

$$H_0 = 3 \text{ m}$$

$A/A_v$	2,5	5	7,5	10
$M$	2,645	2,646	2,66	2,662
$M'$	3,64	5,66	7,95	10,33
$M'/M$	1,376	2,135	2,99	3,88
$v_0$	2,105	1,354	0,964	0,742
$\alpha$	2,025	2,028	2,04	2,04
$t$	0,1	0,14	0,18	0,21
$v/v_0$	1,058	1,22	1,45	1,725
$v$	2,225	1,655	1,4	1,28
$q_0$	4,21	2,78	1,93	1,48
$q$	4,45	3,31	2,8	2,56

$$H_0 = 9 \text{ m}$$

$v_0$	3,62	2,34	1,67	1,283
$\alpha$	3,485	3,5	3,52	3,54
$t$	0,058	0,085	0,105	0,123
$v/v_0$	1,06	1,2	1,45	1,74
$v$	3,84	2,8	2,43	2,24
$q_0$	7,24	4,68	3,34	2,57
$q$	7,68	5,6	4,86	4,48

$$l = 20 \text{ m}$$

$$d = 0,05$$

$$H_0 = 3 \text{ m}$$

$A/A_v$	2,5	5	7,5	10
M	3,6	3,61	3,615	3,62
M'	4,38	6,16	8,325	10,62
M'/M	1,217	1,707	2,305	2,94
$v_0$	1,75	1,243	0,92	0,722
$\alpha$	1,382	1,382	1,384	1,385
t	0,12	0,16	0,21	0,25
$v/v_0$	1,03	1,163	1,25	1,38
v	1,8	1,39	1,15	1
$q_0$	3,5	2,49	1,84	1,44
q	3,6	2,78	2,3	2

$$H_0 = 9 \text{ m}$$

$v_0$	3,025	2,152	1,595	1,25
*	2,39	2,394	2,4	2,405
t	0,07	0,098	0,12	0,145
$v/v_0$	1,03	1,12	1,25	1,4
v	3,14	2,41	2	1,75
$q_0$	6,04	4,31	3,19	2,5
q	6,28	4,82	4	3,5

$$l = 30 \text{ m}$$

$$d = 0,05$$

$$H_0 = 3 \text{ m}$$

$A/A_v$	2,5	5	7,5	10
$M$	4,36	4,365	4,365	4,37
$M'$	5,025	6,63	8,67	10,91
$M'/M$	1,154	1,52	1,99	2,5
$v_0$	1,525	1,155	0,884	0,702
$\alpha$	1,113	1,113	1,114	1,116
$t$	0,14	0,18	0,225	0,27
$v/v_0$	1,02	1,02	1,18	1,29
$v$	1,56	1,25	1,04	0,905
$q_0$	3,05	2,31	1,77	1,4
$q$	3,12	2,60	2,08	1,81

$$H_0 = 9 \text{ m}$$

$v_0$	2,64	2,01	1,54	1,22
$\alpha$	1,925	1,93	1,94	1,94
$t$	0,081	0,103	0,128	0,15
$v/v_0$	1,02	1,09	1,2	1,3
$v$	2,7	2,18	1,84	1,59
$q_0$	5,28	4,02	3,08	2,44
$q$	5,4	4,36	3,68	3,18

$$l = 50 \text{ m}$$

$$d = 0,05 \text{ m}$$

$$H_0 = 3 \text{ m}$$

$A/A_v$	2,5	5	7,5	10
M	5,565	5,565	5,57	5,58
M'	6,1	7,48	9,34	11,44
M'/M	1,096	1,345	1,676	2,05
$v_0$	1,254	1,025	0,821	0,67
$\alpha$	0,852	0,852	0,853	0,855
t	0,17	0,205	0,25	0,295
$\gamma/v_0$	1,012	1,05	1,09	1,18
v	1,27	1,076	0,894	0,79
$q_0$	2,51	2,05	1,64	1,34
q	2,54	2,14	1,78	1,58

$$H_0 = 9 \text{ m}$$

$v_0$	2,175	1,773	1,42	1,16
$\alpha$	1,477	1,477	1,478	1,48
t	0,1	0,12	0,145	0,17
$\gamma/v_0$	1,01	1,02	1,04	1,18
v	2,19	1,81	1,6	1,37
$q_0$	4,35	3,54	2,84	2,32
q	4,38	3,62	3,2	2,74

$$l = 100 \text{ m}$$

$$d = 0,05 \text{ m}$$

$$H_0 = 3 \text{ m}$$

A/A <sub>v</sub>	2,5	5	7,5	10
M	7,81	7,81	7,815	7,82
M'	8,2	9,27	10,82	12,68
M'/M	1,05	1,188	1,39	1,622
v <sub>0</sub>	0,935	0,827	0,708	0,604
$\alpha$	0,598	0,598	0,6	0,6
t	0,23	0,26	0,3	0,34
v/v <sub>0</sub>	1,007	1,024	1,05	1,1
v	0,942	0,847	0,74	0,663
q <sub>0</sub>	1,87	1,65	1,4	1,2
q	1,88	1,68	1,48	1,32

$$H_0 = 9 \text{ m}$$

v <sub>0</sub>	1,62	1,43	1,225	1,048
$\alpha$	1,034	1,034	1,036	1,037
t	0,132	0,15	0,172	0,2
v/v <sub>0</sub>	1,007	1,03	1,07	1,08
v	1,63	1,47	1,3	1,13
q <sub>0</sub>	3,24	2,86	2,45	2,08
q	3,26	2,94	2,6	2,26

$\Delta H / H_0$

2

1

0.5

$l' \approx 0,2 \text{ m}$   
 $H_0 = 3 \text{ m}$

$l = 10 \text{ m}$

$l = 20 \text{ m}$

$l = 50 \text{ m}$

$l = 50 \text{ m}$

$l = 100 \text{ m}$

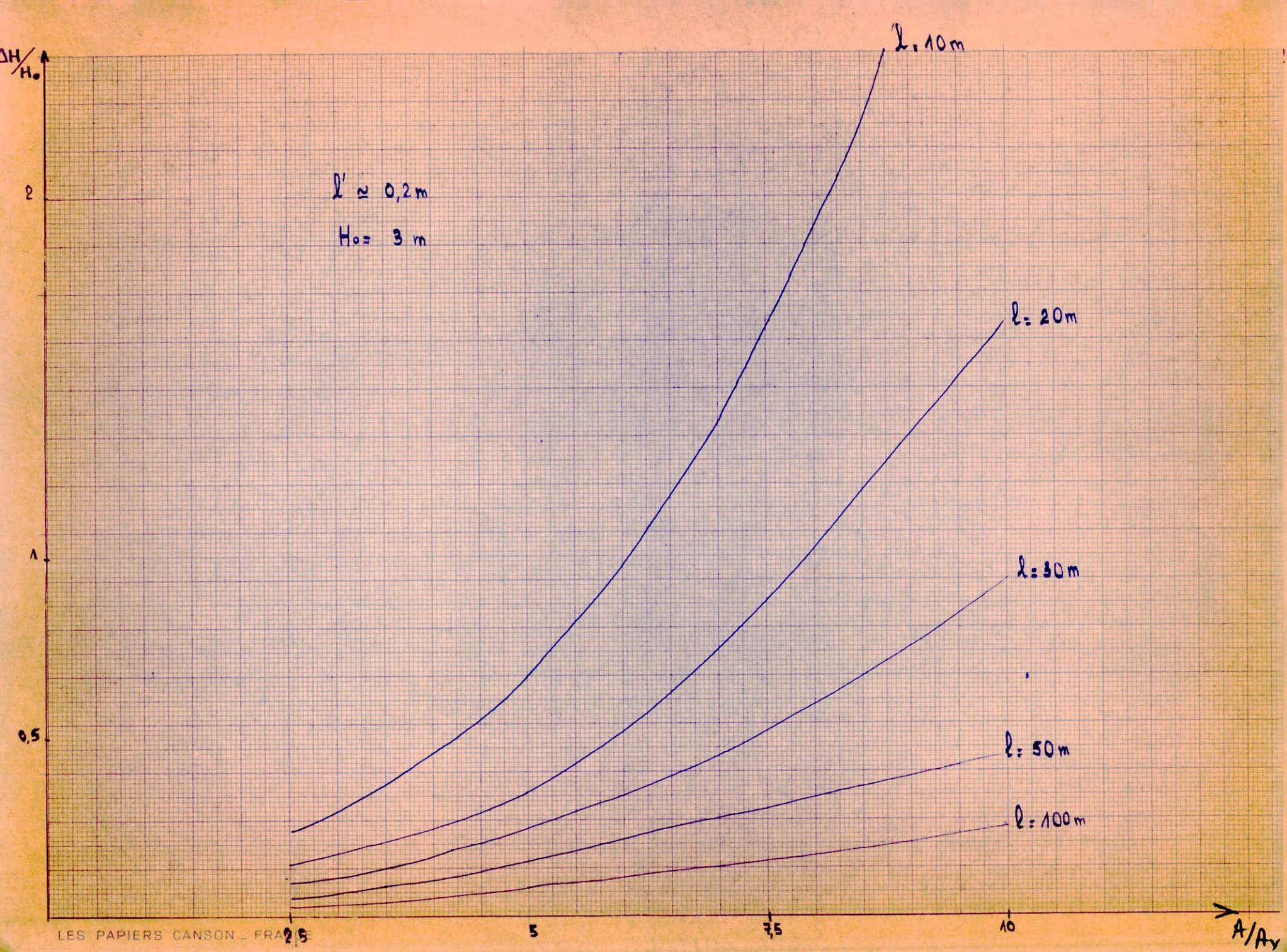
2,5

5

7,5

10

$A / A_0$



$\frac{\Delta H}{H_0}$

$l' \approx 0.2 \text{ m}$   
 $H_0 = 9.0 \text{ m}$

$l = 10 \text{ m}$

$l = 20 \text{ m}$

$l = 30 \text{ m}$

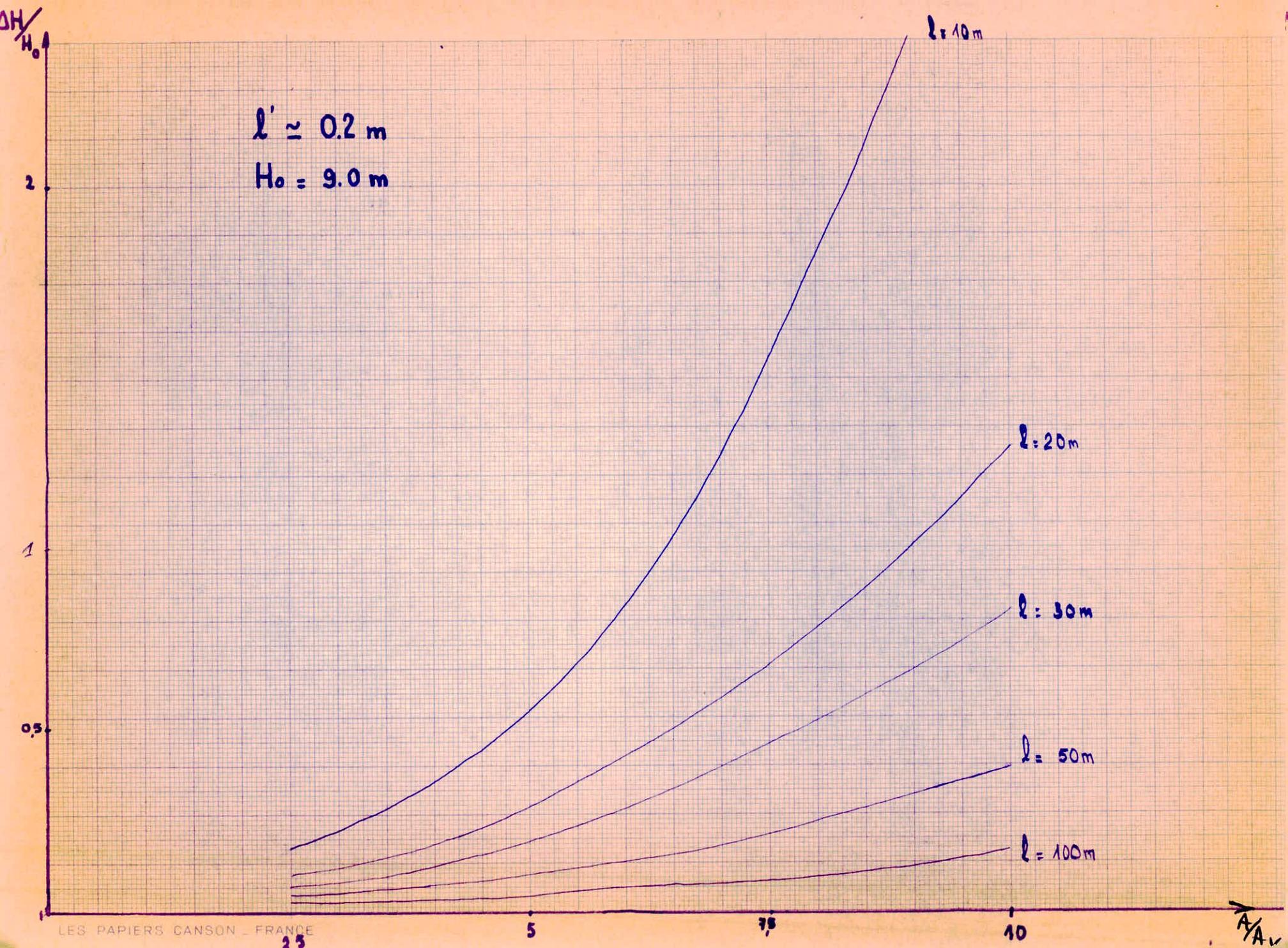
$l = 50 \text{ m}$

$l = 100 \text{ m}$

2

1

0.5



8 - Moyen de protection des installations contre le coup de bélier en présence des poches d'air.

Le coup de bélier, dont la brutalité est à l'origine de nombreux éclatement de conduites, peut atteindre, nous l'avons vu, des valeurs très élevées pouvant être égales à plusieurs fois la pression de service sur les réseaux à basse pression.

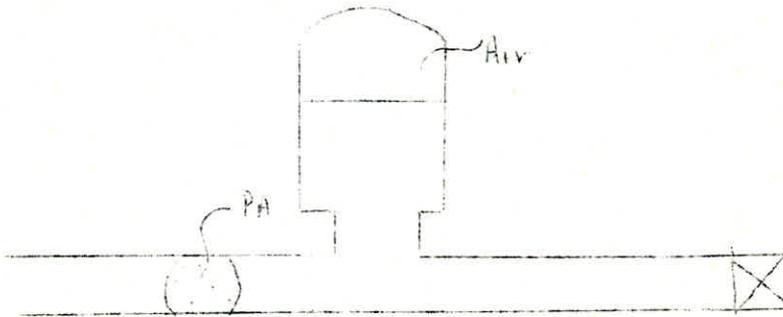
Il est donc de toute première importance d'étudier un moyen propre à limiter ses effets.

Or, il'est pas possible de supprimer totalement les effets de coup de bélier mais il convient de rechercher leur limitation à une valeur compatible avec la résistance des installations.

Ainsi l'appareil anti-bélier devra donc avoir pour effet :

- de limiter la pression (ou dépression)
- d'accumuler les poches d'air.

l'appareil le plus apte à jouer ces deux derniers rôles est le réservoir d'air qui sera disposé près de la vanne.



En effet, en marche normale, la pression de l'air contenu dans la cloche équilibre la pression dans la conduite au point considéré.

Les poches d'air qui sont entraînées par le courant peuvent pénétrer dans la cloche avant d'arriver à la vanne, elles viennent augmenter le volume d'air contenu dans la cloche, la pression de l'air,

dans celle ci devient supérieure à celle qui s'exerce à l'autre extrémité de la conduite, au réservoir.

on aura alors une augmentation du volume d'air dans la cloche, ce qui entraîne un amortissement du coup de bélier dû à l'accumulation de l'air dans la cloche.

Le niveau de l'eau dans la cloche sera calculé de telle façon à avoir d'une part, une cote minimum dont il sera tenu compte à la fois de l'effet du coup de bélier et de l'augmentation du volume d'air dans la cloche, et d'autre part, une cote maximum due à la remonter de l'eau lors du phénomène du coup de bélier.

## CONCLUSION :

- 1 - Les poches d'air qui se déplacent dans les conduites peuvent entraîner des coup de bélier dans les écoulements qui semblent à première vue permanent.
- 2 - Les calculs faits pour le régime d'écoulement supposés incompressible, ont permis d'établir l'influence des différents facteurs sur le coup de bélier dû à la présence des poches d'air, pour un même volume de la poche d'air.
  - a - plus grande est la longueur de la conduite, plus faible est le coup de bélier; dû à l'inertie plus grande de la colonne d'eau d'une conduite longue!
  - b - plus grande est l'ouverture de la vanne, plus faible est le coup de bélier!
  - c - plus grand est le diamètre, plus faible est le coup de bélier.
  - d - plus grande est la pression statique, plus grand est le coup de bélier!
- 3 - Pour des valeurs de la pression statique plus grandes, la compressibilité de l'air doit être prise en considération pour étudier le problème de façon plus précise.

