

D000 1/92

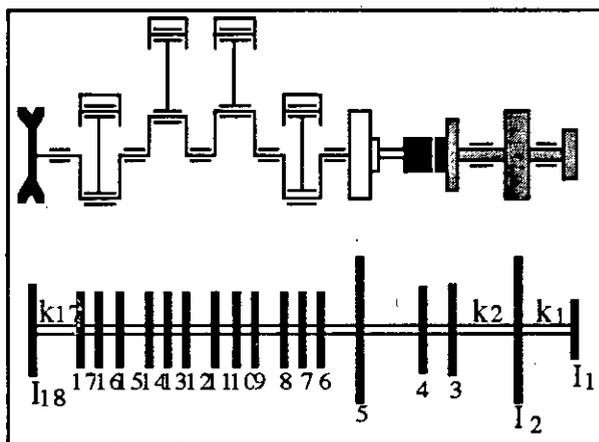
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DES UNIVERSITES

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

THESE DE DOCTORAT ES-SCIENCES



AIDE A LA CONCEPTION DES MOTEURS

*par*

**Mohamed BOUKABACHE**

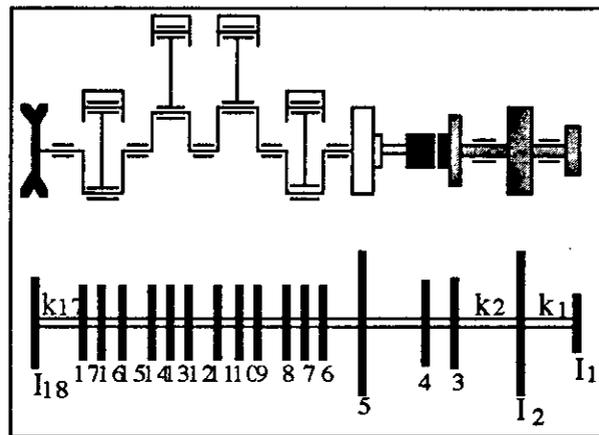
*Soutenu publiquement le 13 Juillet 1992  
devant la Commission d'Examen :*

|     |      |             |                 |            |
|-----|------|-------------|-----------------|------------|
| MM. | Pr.  | A. CHARIF   | (ENP)           | Président  |
|     | Pr.  | G.LOURADOUR | (ENSAM)         | Rapporteur |
|     | Pr.  | L. BAH      | (U.Constantine) | Examineur  |
|     | Pr.  | A. GAHMUSSE | (ENP)           | Examineur  |
|     | Pr.  | S. RECHAK   | (ENP)           | Examineur  |
|     | M.C. | B. NECIB    | (U.Constantine) | Examineur  |

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DES UNIVERSITES

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

THESE DE DOCTORAT ES-SCIENCES



AIDE A LA CONCEPTION DES MOTEURS

*par*

**Mohamed BOUKABACHE**

*Soutenu publiquement le 13 Juillet 1992  
devant la Commission d'Examen :*

|     |      |             |                 |            |
|-----|------|-------------|-----------------|------------|
| MM. | Pr.  | A. CHARIF   | (ENP)           | Président  |
|     | Pr.  | G.LOURADOUR | (ENSAM)         | Rapporteur |
|     | Pr.  | L. BAHY     | (U.Constantine) | Examineur  |
|     | Pr.  | A. GAHMUSSE | (ENP)           | Examineur  |
|     | Pr.  | S. RECHAK   | (ENP)           | Examineur  |
|     | M.C. | B. NECIB    | (U.Constantine) | Examineur  |

*A ma petite famille*

*A ma grande famille*

*Pour le sacrifice qu'ils ont consenti et les moments difficiles qu'ils ont traversé durant mon absence*

## REMERCIEMENTS

Ce travail a été développé au Bureau d'Etudes Moteur Thermique du Département d'Energétique de l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers de Paris.

Il a été dirigé par Monsieur Guy LOURADOUR, professeur à l'ENSAM.

J'exprime ma sincère et profonde gratitude à toutes les personnes qui ont contribué, sous différentes formes à la réalisation de ce travail, en particulier à :

- Monsieur LOURADOUR, qui a bien voulu accepter de diriger cette thèse, pour ses conseils et ses encouragements ;
- Monsieur G IRONNET, professeur à l'ENSAM de Paris, pour ses conseils et son assistance ;
- Monsieur CHARIF, professeur, au département de Génie Civil de l'ENP, pour avoir bien voulu accepter de présider le jury ;
- Monsieur GAHMOSSE, professeur au département de Génie Mécanique de l'ENP, pour ses conseils et ses encouragements ;
- Monsieur BAHY, professeur au département d'énergétique à l'Université de Constantine, d'avoir bien voulu accepter de participer au jury ;
- Professeur RECHAK, chef de Département de Génie Mécanique de l'ENP, pour avoir accepté de participer au jury ;
- Monsieur NECIB, Maître de Conférence à l'Institut de Mécanique de l'Université de Constantine d'avoir bien voulu accepter d'être membres du jury ;
- Monsieur BENMOUNAH, chef du Bureau d'Etudes du Complexe Moteur Tracteur de Constantine, ainsi qu'a toute son équipe pour l'aide et l'assistance qu'ils m'ont apporté pour réaliser ce travail ;
- Monsieur DEHIMI, ex Directeur Général de la SNVI, pour sa collaboration dans la réalisation de ce travail.

**Partie : 1**

**MOTEUR A COMBUSTION INTERNE**

**1. LE MOTEUR A ESSENCE ET LE MOTEUR DIESEL**

|                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------|----|
| 1.1. Principe de fonctionnement du moteur à combustion interne | 3  |
| 1.2. Rendement thermodynamique d'un cycle                      | 4  |
| 1.3. Consommation spécifique du moteur                         | 8  |
| 1.4. Masse moteur                                              | 11 |
| 1.5. Irrégularité cyclique du moteur                           | 11 |

**2. AMELIORATION DU MOTEUR DIESEL**

|                                              |    |
|----------------------------------------------|----|
| 2.1. Diminution de l'irrégularité cyclique   | 14 |
| 2.2. La suralimentation                      | 14 |
| 2.2.1. Contraintes dues à la suralimentation | 15 |
| 2.2.1. Types de suralimentation              | 15 |

**Partie : 2****PRE-DIMENSIONNEMENT DU MOTEUR****1. GENERALITES**

|                                           |    |
|-------------------------------------------|----|
| 1.1. Notations utilisées                  | 20 |
| 1.2. Formulation cinématique et dynamique | 20 |
| 1.2.1. Définitions géométriques           | 20 |
| 1.2.2. Formules de cinématiques           | 21 |
| 1.2.3. Formules de dynamiques             | 23 |

**2. CARACTERISTIQUES DU MOTEUR**

|                                                    |    |
|----------------------------------------------------|----|
| 2.1. Puissance                                     | 28 |
| 2.1.1. Puissance théorique $P_t$                   | 28 |
| 2.1.2. Puissance indiquée $P_i$                    | 28 |
| 2.1.3. Puissance effective $P_e$                   | 28 |
| 2.1.4. Puissance et vitesse de rotation            | 31 |
| 2.2. Couple                                        | 34 |
| 2.2.1. Couple à puissance maximale                 | 35 |
| 2.3. Paramètres géométriques du moteur             | 35 |
| 2.3.1. Cylindrée optimale                          | 35 |
| 2.3.2. Rapport course sur alésage                  | 36 |
| 2.3.3. Longueur de bielle et rayon de la manivelle | 37 |
| 2.3.4. Architecture du moteur                      | 37 |
| 2.4. Paramètres internes du moteur                 | 37 |
| 2.4.1. Injection directe                           | 37 |
| 2.4.2. Préchambre de combustion                    | 37 |
| 2.4.3. Pression de suralimentation                 | 38 |
| 2.4.4. Pression maximale du cycle                  | 38 |
| 2.4.5. Rapport volumétrique $\epsilon$             | 38 |
| 2.5. Facteur de similitude                         | 40 |
| 2.6. Mode de refroidissement                       | 40 |

**3. CYCLES THERMODYNAMIQUES**

|                 |    |
|-----------------|----|
| 3.1. Définition | 41 |
|-----------------|----|

|                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------|-----|
| 3.2. Cycle à quatre temps                                   | 41  |
| 3.2.1. Premier temps : admission                            | 41  |
| 3.2.2. Deuxième temps : compression                         | 42  |
| 3.2.3. Troisième temps : explosion et détente               | 42  |
| 3.2.4. Quatrième temps : échappement                        | 42  |
| 3.3. Représentation graphiques des cycles                   | 42  |
| 3.3.1. Cycle Beau de Rochas                                 | 42  |
| 3.3.2. Cycle Diesel mixte                                   | 43  |
| 3.3.3. Cycle pratique                                       | 44  |
| 3.3.4. Cycle utilisé pour les calculs                       | 44  |
| 3.4. Calcul des cycles thermodynamiques                     | 47  |
| 3.4.1. Volume des gaz dans le cylindre                      | 47  |
| 3.4.2. Calcul des différentes phases du cycle               | 50  |
| 3.4.3. Température des gaz d'échappement                    | 57  |
| 3.4.4. Consommation horaire de combustible                  | 58  |
| <br>                                                        |     |
| <b>4. CINEMATIQUE ET DYNAMIQUE DE DE L'EQUIPAGE MOBILE</b>  |     |
| 4.1. Cinématique de l'attelage mobile des moteurs en ligne  | 59  |
| 4.1.1. Mise en place des repères et définition des points   | 59  |
| 4.1.2. Formules de passage entre repères                    | 60  |
| 4.1.3. Relations cinématiques                               | 63  |
| 4.1.4. Cinématique des points A, B, Gb                      | 65  |
| 4.2. Dynamique de l'attelage mobile des moteurs en ligne    | 76  |
| 4.2.1. Etude dynamique du piston                            | 76  |
| 4.2.2. Etude dynamique de la bielle                         | 79  |
| 4.2.3. Etude dynamique d'une portion de bielle              | 84  |
| 4.3. Cinématique de l'attelage mobile des moteurs en "V"    | 88  |
| 4.3.1. Introduction                                         | 88  |
| 4.3.2. Etude de la bielle                                   | 90  |
| 4.3.3. Etude de la biellette                                | 95  |
| 4.3.4. Etude des pistons                                    | 102 |
| 4.4. Dynamique de l'attelage mobile des moteurs en "V"      | 106 |
| 4.4.1. Etude dynamique du piston 1                          | 106 |
| 4.4.2. Etude dynamique du piston 2                          | 107 |
| 4.4.3. Etude dynamique de la bielle                         | 108 |
| 4.4.4. Etude dynamique de la biellette                      | 108 |
| 4.4.5. Equations de la dynamique                            | 109 |
| 4.4.6. Solution des équations                               | 114 |
| 4.4.7. Recherche des efforts dans le cas de pistons désaxés | 114 |

**5. COUPLE MOTEUR**

|                                                         |     |
|---------------------------------------------------------|-----|
| 5.1. Couple du moteur monocylindre 4 temps              | 116 |
| 5.1.1. Couple dû aux pressions des gaz                  | 117 |
| 5.1.2. Couple dû aux inerties des pièces en mouvement   | 117 |
| 5.2. Couple du moteur multicylindres en ligne 4 temps   | 118 |
| 5.2.1. Couple du moteur 2 cylindres                     | 120 |
| 5.2.2. Couple du moteur 3 cylindres                     | 121 |
| 5.2.3. Couple du moteur 4 cylindres                     | 122 |
| 5.2.4. Couple du moteur 6 cylindres                     | 123 |
| 5.2.5. Couple du moteur à n cylindres                   | 125 |
| 5.3. Couple du moteur multicylindres en "V" 4 temps     | 126 |
| 5.3.1. Couple du moteur 6 cylindres                     | 126 |
| 5.3.2. Couple du moteur 8 cylindres                     | 128 |
| 5.3.3. Couple du moteur à n cylindres                   | 129 |
| 5.4. Etude des harmoniques du couple moteur             | 131 |
| 5.4.1. Harmoniques du couple moteur d'un monocylindre   | 131 |
| 5.4.2. Harmoniques du couple moteur d'un multicylindres | 133 |

**6. INERTIES ET RIGIDITES DU SYSTEME BIELLE-MANIVELLE**

|                                        |     |
|----------------------------------------|-----|
| 6.1. Moment d'inertie                  | 135 |
| 6.1.1. Définitions                     | 135 |
| 6.1.2. Moment d'inertie du vilebrequin | 136 |
| 6.2. Longueur équivalente d'un coude   | 146 |
| 6.2.1. Tourillons                      | 147 |
| 6.2.2. Maneton                         | 147 |
| 6.2.3. Bras                            | 147 |
| 6.3. Rigidité torsionnelle d'un coude  | 149 |

**7. PRE-DIMENSIONNEMENT DE L'EQUIPAGE MOBILE**

|                                    |     |
|------------------------------------|-----|
| 7.1. Piston                        | 150 |
| 7.1.1. Généralités                 | 150 |
| 7.1.2. Différents types de pistons | 151 |
| 7.1.3. Morphologie du piston       | 151 |
| 7.1.4. Matériaux pour piston       | 154 |
| 7.1.5. Dimensionnement du piston   | 155 |
| 7.2. Segments                      | 162 |

|                                                                |     |
|----------------------------------------------------------------|-----|
| 7.2.1. Rôle des segments                                       | 162 |
| 7.2.2. Différents types de segments                            | 162 |
| 7.2.3. Matériaux                                               | 164 |
| 7.2.4. Dimensionnement des segments                            | 164 |
| 7.3. Axe de piston                                             | 165 |
| 7.3.1. Dimensionnement de l'axe                                | 166 |
| 7.4. Bielle                                                    | 169 |
| 7.4.1. Construction                                            | 169 |
| 7.4.2. Matériaux                                               | 170 |
| 7.4.3. Dimensionnement                                         | 170 |
| 7.4.4. Fixation du chapeau tête de bielle                      | 177 |
| 7.5. Vilebrequin                                               | 180 |
| 7.5.1. Matériaux                                               | 180 |
| 7.5.2. Dimensions principales du vilebrequin                   | 180 |
| 7.5.3. Contraintes dans le coude du vilebrequin                | 181 |
| 7.5.4. Influence des facteurs de forme                         | 190 |
| 7.5.5. Calcul des efforts sur les paliers du vilebrequin       | 191 |
| <b>8. VIBRATIONS DE TORSION</b>                                |     |
| 8.1. Modélisation de la ligne d'arbres du moteur à C.I.        | 197 |
| 8.1.1. Caractéristiques du modèle                              | 197 |
| 8.1.2. Identification des paramètres du modèle                 | 198 |
| 8.1.3. Limites du modèle utilisé                               | 202 |
| 8.1.4. Adaptation de la ligne d'arbres                         | 202 |
| 8.2. Exemple d'application de ligne d'arbres                   | 210 |
| 8.2.1. Description de l'installation                           | 210 |
| 8.3. Calcul en vibration libre                                 | 211 |
| 8.3.1. Hypothèses                                              | 211 |
| 8.3.2. Fréquences propres                                      | 212 |
| 8.3.3. Déformés modales                                        | 214 |
| 8.3.4. Vitesses critiques                                      | 215 |
| 8.4. Calcul d'importance                                       | 217 |
| 8.4.1. Evolution du travail d'un couple harmonique             | 217 |
| 8.4.2. Détermination des angles $\alpha_{li}$                  | 222 |
| 8.5. Etude des vibrations forcées                              | 223 |
| 8.5.1. Equations du mouvement des disques                      | 224 |
| 8.5.2. Solution du système d'équations différentiels linéaires | 225 |
| 8.5.3. Résolution numérique                                    | 227 |

**Partie : 3****VOLANT MOTEUR****1. VOLANT MOTEUR CLASSIQUE**

|                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------|-----|
| 1.1. Généralités                                          | 229 |
| 1.2. Volant dans les moteurs à combustion interne         | 230 |
| 1.3. Calcul des volants moteur                            | 232 |
| 1.3.1. Méthode ancienne                                   | 232 |
| 1.3.2. Méthode classique                                  | 233 |
| 1.3.3. Méthode améliorée                                  | 235 |
| 1.4. Simulation de la variation de vitesse du vilebrequin | 235 |

**2. DIMENSIONNEMENT DU VOLANT MOTEUR**

|                                                      |     |
|------------------------------------------------------|-----|
| 2.1. Principe                                        | 239 |
| 2.2. Détermination de la masse du volant             | 239 |
| 2.3. Détermination de l'épaisseur minimale du volant | 240 |
| 2.4. Dimensionnement du volant                       | 241 |

**3. VOLANT MOTEUR PENDULAIRE**

|                                                                 |     |
|-----------------------------------------------------------------|-----|
| 3.1. Introduction                                               | 244 |
| 3.2. Amortisseur pendulaire                                     | 244 |
| 3.2.1. Pulsation propre du pendule                              | 244 |
| 3.2.2. Moment d'inertie équivalent                              | 246 |
| 3.2.3. Application pendule composé                              | 248 |
| 3.3. Amortisseur pendulaire à rouleaux                          | 249 |
| 3.3.1. Equation du système                                      | 250 |
| 3.3.2. Intégration numérique                                    | 252 |
| 3.3.3. Linéarisation des équations                              | 255 |
| 3.3.4. Calcul des paramètres du pendule                         | 260 |
| 3.3.5. Calcul exact du moment d'inertie équivalent ( $I_{eq}$ ) | 264 |
| 3.4. Conception du volant pendulaire                            | 265 |

|                                                        |            |
|--------------------------------------------------------|------------|
| 3.5. Variation de la vitesse angulaire                 | 267        |
| 3.5.1. Irrégularité cyclique avec volant classique     | 267        |
| 3.5.2. Irrégularité cyclique avec volant pendulaire    | 267        |
| 3.5.3. Comparaison des deux Irrégularité cyclique      | 267        |
| 3.6. Vibration de torsion du volant moteur             | 268        |
| 3.6.1. Modélisation                                    | 268        |
| 3.6.2. Fréquences et modes propres                     | 269        |
| 3.6.3. Vitesses critiques, vitesses dang., importances | 275        |
| 3.7. Fiabilité du système pendulaire                   | 277        |
| 3.7.1. Présentation du système                         | 277        |
| 3.7.2. Durée de vie                                    | 277        |
| 3.7.3. Fiabilité                                       | 279        |
| <b>CONCLUSION</b>                                      | <b>280</b> |

## INTRODUCTION

Pour produire de l'énergie mécanique ou électrique, le moteur alternatif à combustion interne est le moyen de transformer en énergie mécanique l'énergie chimique contenue dans un combustible. De nos jours, les moteurs à essence et Diesel demeurent la solution qui présente les meilleures chances économiques d'assurer la propulsion des véhicules.

C'est pourquoi il se construit chaque année dans le monde plus de 40 millions de moteurs alternatifs dont 32 dans l'industrie automobile [22].

Cela restera probablement valable au moins pour le reste de la décade à venir. Ceci est confirmé par les recherches qui se poursuivent sur l'amélioration du rendement de ces moteurs. Pour l'usager le rendement se traduit par des améliorations au niveau des caractéristiques techniques : puissance, masse, consommation spécifique, irrégularité cyclique.

A ce sujet différentes conceptions d'absorbeurs de vibrations ont été évoquées par plusieurs auteurs, dans plusieurs publications, aux USA en France et en Allemagne. Parmi ces articles celui de H. FRAHM (Brevet Américain, Avril 1911) qui a mis au point l'absorbeur dynamique de vibration.

Plus tard, des corrections dans les amortisseurs rotatifs ont été introduit .Ces corrections concernent le remplacement des ressorts mécaniques par des masses centrifuges qui permettent de donner au pendule un accord variable, proportionnel à la vitesse.

La première publication sur ce sujet a été faite par E. MEISSNER (International Congress for Applied Mechanics, Stockholm, 1930) qui donna une description des expériences montrant l'efficacité du mécanisme. Après lui, R.R. SARASIN (Brevet Anglais, Novembre 1932) à qui revient le pendule bifilaire , il révèle le principe dans plusieurs brevets.

Le pendule bifilaire a été utilisé, entre autres, sur les moteurs Diesel de même que dans les hélicoptères pour amortir les vibrations dues à la rotation du rotor supportant les ailes , ceci a fait l'objet d'une publication par Williams F.Paul " Développement and évaluation of the Main Rotor Bifilaire Absorber", ( 25 th Annual National Forum of the American Helicopter Society, Washington D.C. May, 1969 ).

SARASIN a été suivi juste après par M.B.SALOMON avec deux Brevets l'un en France, en Juillet 1933 et l'autre en Angleterre en 1934, où une brève publication sur la régulation des vitesses est faite au 4 ème Congrès International de Mécanique Appliquée à Cambridge [71].

Nous devons citer l'article très intéressant de M.B.SALOMON, sur les amortisseurs dynamiques de vibration, qui a paru dans la revue La Technique Automobile et Aérienne d'octobre 1945 [72].

Il donne une description détaillée de ces amortisseurs, qui utilisent des masses centrifuges indépendantes, lesquelles oscillent librement en roulant, sans frottements, sous la seule action de rappel des forces centrifuges. La condition d'accord est en outre réalisée; elle ne dépend que de certaines conditions géométriques réalisées par construction, et subsiste à toutes les vitesses.

les amortisseurs dynamiques sont réalisés soit à partir des systèmes à un seul étage, soit à partir des systèmes à deux étages de masses oscillantes et roulantes.

M.B.SALOMON parle aussi dans son article des Disques polyharmoniques qui agissent à la fois comme amortisseurs de vibrations et comme régulateurs de couples; utilisés en particulier dans les moteurs en lignes.

A.H. SHIET de l'université de M.I.T. en Février 1942, a fait l'étude des performances optimums d'un pendule type absorbeur de vibrations de torsion monté sur vilebrequin qui initialement possède une fréquence naturelle et n degrés de liberté, ensuite il devient avec l'absorbeur un système à deux degrés de liberté et deux fréquences naturelles. Il ressort de cette application que l'une des fréquences naturelles est insignifiante et que l'on peut déplacer l'autre fréquence loin de la résonance en ajustant le moment d'inertie du pendule.

En 1986 G.LOURADOUR donna l'idée du volant régulateur de vitesse et développa le calcul des amortisseurs pendulaires; notamment les pulsations propres d'un pendule simple entraîné en rotation, son amplitude, et son moment d'inertie équivalent.

On doit citer aussi la réalisation très récente du double volant amortisseur ( M.D. DESPRES de Valeo Embrayage, Avril 1987 ), qui permet de filtrer les oscillations de torsion des moteurs thermiques à explosion, en déplaçant la fréquence de résonance en deçà de la fréquence d'excitation fournie par le moteur en régime de ralenti [23].

Tous ces travaux ont été élaborés afin d'atténuer les vibrations de torsions, mais non pas pour régulariser les vitesses de rotation des arbres, mis à part SALOMON qui publia très brièvement son idée sur la régularisation des vitesses, sans en donner de détails.

La tâche que nous nous sommes proposés de mener dans ce travail, est la mise en place d'un outil d'aide à la conception des moteurs, permettant l'optimisation de la masse et de l'irrégularité cyclique de la ligne d'arbre.

Cette étude est divisée en trois parties :

- Le moteur à combustion interne, où l'on rappelle le principe de fonctionnement des moteurs à essence et Diesel, la comparaison des rendements et consommations spécifiques et on montre les améliorations que l'on peut apporter au moteur Diesel en vue de concurrencer le moteur à essence (réduction des masses, diminution de l'irrégularité cyclique).

- Pré-dimensionnement des moteurs : dans cette partie nous mettons en place l'outil d'aide à la conception des moteurs. Elle se compose des calculs thermodynamiques, cinématiques, et dynamiques de l'équipage mobile, ce qui permet le dimensionnement du moteur. Cette deuxième partie est terminée par une vérification aux vibrations de torsion de la ligne d'arbre.

- Le volant moteur : Nous avons rappelé la méthode de calcul classique, puis nous avons proposé une amélioration de cette dernière basée sur le calcul de la variation de vitesse permettant un calcul assisté de l'inertie du volant. Une troisième méthode utilisant l'emploi de masses pendulaires centrifuge, et qui permet une meilleure régularisation de la vitesse de vilebrequin est suggérée.

**PREMIERE PARTIE**

**MOTEUR A COMBUSTION INTERNE**

## 1 LE MOTEUR A ESSENCE ET LE MOTEUR DIESEL

### 1.1. Principe de fonctionnement du moteur à combustion interne

Le moteur à combustion interne est une machine qui reçoit l'énergie calorifique de combustible et la restitue sous forme de travail mécanique utile, occupant par ce fait une place de choix dans l'industrie et les moyens de transport.

Le moteur, depuis les premières réalisations d'Etienne LENOIR, Nikolaus OTTO et Rudolff DIESEL, a connu des améliorations considérables, fruits de recherches théoriques fondamentales, corrigées par des essais, réalisés en laboratoire.

Le principe de fonctionnement des moteurs à combustion interne est de transformer un mouvement alternatif du piston, dû à la pression des gaz dans la chambre de combustion et à l'inertie de ce dernier, en un mouvement rotatif continu du vilebrequin, donnant ainsi un couple moteur. Pour fournir ce dernier, le moteur doit successivement :

- Comprimer un fluide froid ;
- Introduire de l'énergie calorifique pour augmenter la température du fluide ;
- Détendre le fluide pour extraire le travail moteur ;
- Rejeter la chaleur restante pour revenir aux conditions initiales.

Dans la pratique on rencontre deux principaux types de moteurs :

- Les moteurs à explosion ou à essence ;
- Les moteurs à combustion ou Diesel.

Ces moteurs thermiques fonctionnent suivant un cycle à 4 temps ou à 2 temps, suivant que les opérations successives d'admission, de compression, de combustion, de détente et d'échappement s'effectuent en deux tours ou un seul tour de l'arbre moteur.

Dans le moteur à essence (ou à explosion), le mélange air-essence est formé dans le carburateur à l'extérieur du cylindre ; cela vient du fait que l'essence est un produit léger qui s'évapore facilement . A partir d'une certaine valeur du taux de compression le mélange air-essence s'auto-allume avant que le piston n'atteigne le point mort haut. Pour éviter ce phénomène de "détonation", on fonctionne à des taux de compression assez faibles, et la combustion est initiée grâce à une étincelle de bougie pendant la phase de compression. Dans ces moteurs on peut mettre en évidence :

- La nécessité de limiter le taux de compression afin d'éviter des combustions anormales;
- La non instantanéité de la combustion due à la vitesse modérée de la propagation de la flamme ;
- La possibilité de brûler un mélange avec un faible excès d'air ;
- La possibilité d'obtenir des combustions satisfaisantes même à haut régime de rotation.

Dans le moteur Diesel, le combustible (gasoil) est un produit lourd, non vaporisable aux conditions ambiantes, d'où son injection sous forme pulvérisée dans la chambre de combustion. On réalise au préalable dans celle-ci, pendant la phase de compression un excès d'air à un niveau de pression et de température suffisamment élevé pour assurer la vaporisation et l'auto-inflammation. Donc, ce qui ressort du moteur Diesel :

- Un taux de compression élevé, ce qui permet d'assurer le démarrage de la combustion ;
- Une rapidité de la combustion pendant sa phase incontrôlée ;
- La nécessité de diluer la charge par un excès d'air pour limiter les températures maximales et assurer une combustion complète ;
- La difficulté d'obtenir des combustions satisfaisantes à haut régime de rotation.

Faire la comparaison entre le moteur à essence et le moteur Diesel revient à comparer certains paramètres des deux moteurs. Parmi les paramètres choisis à cet effet on note : le rendement thermodynamique, la consommation spécifique et la masse moteur .

## 1.2. Rendement thermodynamique d'un cycle

Pour faire l'étude comparative des rendements thermodynamiques on considère 1 kg d'air ou de gaz de combustion, de même on supposera que le gaz est parfait et de chaleur massique constante ; les résultats sont ainsi sensiblement différents de ceux que l'on obtient lorsque la chaleur massique varie avec la température, mais les comparaisons entre cycles théoriques restent valables. Le rendement est défini par :

$$\eta = \frac{\text{Recette}}{\text{Dépense}} = \frac{\text{Energie disponible (} W_c \text{ ou } Q_c \text{)}}{\text{Energie thermique dépensée}}$$

L'évolution du mélange gazeux qui caractérise le cycle du moteur à combustion interne peut se faire de différentes façons. La plupart des moteurs actuels fonctionnent avec les cycles de base suivants :

### – Cycle de Joule (1842)

L'apport de chaleur et la cession de chaleur au milieu extérieur se font à pression constante.

### – Cycle de Beau de Rochas (1862)

L'apport et la cession de chaleur se fait à volume constant.

### – Cycle Diesel (1897)

L'apport de chaleur se fait à pression constante, alors que la cession de chaleur au milieu extérieur est réalisée à volume constant.

Des modifications peuvent être apportées à ces cycles de base, par la suralimentation ou par la récupération partielle de la chaleur cédée au milieu extérieur. Ces modifications ont pour but soit d'augmenter le travail disponible par cycle, soit d'améliorer le rendement du cycle , donc de diminuer la consommation par kWh. Ces deux améliorations sont le plus souvent simultanées.

#### a) Cycle Beau de Rochas :

Ce cycle est utilisé dans les moteurs à essence, le diagramme pv de ce cycle est représenté par la figure 1.1.

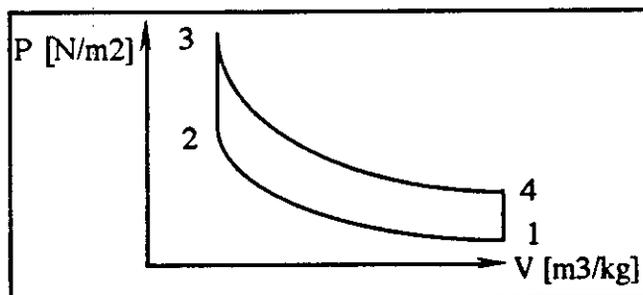


Fig. 1.1 Cycle Beau de Rochas

Soit :

$$\varepsilon = \frac{V_1}{V_2} : \text{ rapport volumique de compression}$$

$$\beta = \frac{T_1}{T_2} : \text{ rapport des températures aux points 1 et 2}$$

A partir de la relation thermodynamique qui lie le rapport des volumes au rapport des températures, on peut exprimer  $\epsilon$  en fonction de  $\beta$  :

$$\epsilon = \beta^{\left(\frac{1}{\gamma-1}\right)} \quad \text{ou} \quad \beta = \epsilon^{(\gamma-1)}$$

$$\theta = \frac{T_3}{T_2} : \text{ rapport des températures à la fin et au début de la combustion}$$

$$\delta = \frac{T_3}{T_4} : \text{ rapport des températures aux points 3 et 4}$$

$$\lambda = \frac{T_3}{T_1} : \text{ rapport des températures aux points 3 et 1}$$

$\alpha$  : est le coefficient multiplicateur entre la température initiale et la température finale du cycle.

#### - Bilan thermique :

Chaleur reçue par le kg d'air :

$$Q_{c23} = cv.T_1(\alpha - \beta)$$

Chaleur fournie par le kg d'air :

$$Q_{c41} = cv.T_1\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)$$

Le rendement thermodynamique est donné par :

$$\eta_{th} = \frac{Q_{c23} + Q_{c41}}{Q_{c23}} = \frac{\beta-1}{\beta} = 1 - \frac{1}{\epsilon^{(\gamma-1)}} \quad (1.1)$$

Le rendement thermodynamique  $\eta_{th}$  ne dépend donc que de  $\epsilon$  (rapport volumétrique de compression) ; la température maximale du cycle n'intervient pas.

#### b) Cycle Diesel :

Dans le cycle Diesel, l'apport de chaleur (combustion) se fait à pression constante tandis que la chaleur est cédée à volume constant.

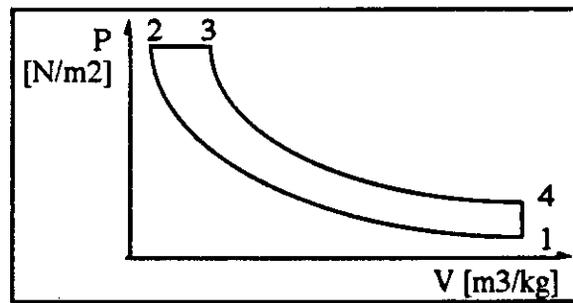


Fig. 1.2 Cycle diesel

- Bilan thermique :

Chaleur reçue par le kg d'air :

$$Q_{c23} = c_p \cdot T_1 (\alpha - \beta)$$

Chaleur fournie par le kg d'air :

$$Q_{c41} = c_v \cdot T_1 \left(1 - \frac{\alpha}{\delta}\right)$$

d'où le rendement thermodynamique :

$$\eta_{th} = \frac{Q_{c23} + Q_{c41}}{Q_{c23}} = 1 - \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\left(\frac{\alpha}{\delta} - 1\right)}{(\alpha - \beta)}$$

$$\eta_{th} = 1 - \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\theta^\gamma - 1}{\varepsilon^{\gamma-1} \cdot (\theta - 1)} \quad (1.2)$$

Au vu des équations (1.1) et (1.2), nous constatons qu'à égalité de rapport de compression  $\varepsilon$ , le rendement du cycle de Beau de Rochas est supérieur à celui du cycle Diesel. La supériorité du Diesel sur le moteur à explosion n'est donc pas due à la qualité de son cycle, mais à la possibilité d'admettre un rapport  $\varepsilon$  élevé (14 à 25), alors que le moteur à explosion supporte difficilement un  $\varepsilon = 12$  (limite imposée par la détonation).

Nous illustrons ce qui vient d'être dit, par un exemple : prenons  $\varepsilon = 10$ ,  $T_1 = 300 \text{ °K}$ ,  $p_1 = 10 \text{ N/cm}^2$ , et  $v_4/v_3 = 3$  pour les deux cycles (essence et Diesel), afin de permettre la comparaison. Ceci donne :  $\eta_{th}$  Beau de Rochas = 0,60 et  $\eta_{th}$  Diesel = 0,47.

c) Cycle mixte :

Le cycle mixte est utilisé dans les moteurs Diesel rapides. Une partie du combustible injecté est brûlé à volume constant, le reste brûlé à pression constante.

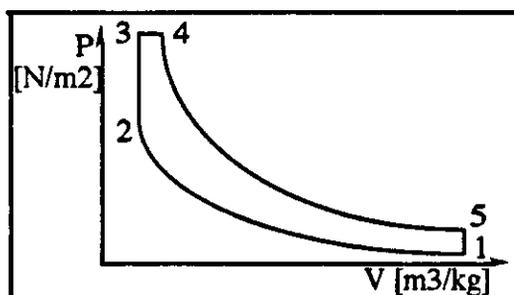


Fig. 1.3 Cycle mixte Diesel

### - Bilan thermique :

Chaleur reçue par le kg d'air :

$$Q_{c23} + Q_{c34} = c_v \cdot T_1(\lambda - \beta) + c_p \cdot T_1(\alpha - \lambda)$$

Chaleur fournie par le kg d'air :

$$Q_{c51} = c_v \cdot T_1 \left( 1 - \frac{\alpha}{\delta} \right)$$

Le rendement thermodynamique est donné par :

$$\eta_{th} = 1 - \left( \frac{\frac{\alpha}{\delta} - 1}{(\lambda - \beta) + \gamma(\alpha - \lambda)} \right)$$

Si nous calculons  $\eta_{th}$  avec les mêmes données que pour le cycle Diesel on aura :

$$\eta_{th} = 0,58$$

Dans un moteur Diesel on a donc intérêt à brûler le plus de combustible possible à volume constant, mais on est rapidement limité dans cette voie par la pression maximale du cycle qui est trop élevée.

Le cycle réel ou indiqué (tracé par un indicateur), matérialise l'évolution réelle du fluide dans le cylindre. Il est sensiblement différent du cycle théorique en raison de nombreuses causes thermodynamiques et mécaniques.

Au cycle indiqué, correspond un rendement indiqué  $\eta_i$ , qui est le rapport entre le travail mesuré par le cycle (ou travail indiqué :  $W_{i \text{ cycle}}$ ) et l'énergie thermique dépensée.

$$\eta_i = \frac{W_{i \text{ cycle}}}{\text{Energie thermique dépensée}}$$

Afin d'évaluer la qualité du cycle indiqué par rapport au cycle théorique, on fait parfois état d'un rendement de forme du cycle indiqué :

$$\eta_f = \frac{\text{Air du cycle indiqué}}{\text{Air du cycle théorique}}$$

La valeur de  $\eta_f$  varie de 0,60 à 0,85. La relation qui lie  $\eta_i$  et  $\eta_f$  est :

$$\eta_i = \eta_{th} \cdot \eta_f$$

Entre cylindre et arbre récepteur interviennent les pertes par frottements ou pertes mécaniques d'où la notion de rendement mécanique.

$$\eta_m = \frac{W_{\text{eff.cy}} (\text{Travail effectivement reçu par l'arbre moteur})}{W_{i.\text{cy}} (\text{Travail mesuré sur le cycle indiquée})}$$

$\eta_m$  varie généralement de 0,75 à 0,90, compte tenu de l'énergie dépensée pour l'entraînement des auxiliaires du moteur tel que : magnéto ou pompe d'injection, ventilateur, pompe de circulation d'eau et les pertes dans les paliers.

Le rendement effectif est défini par :

$$\eta_{\text{eff}} = \frac{W_{\text{eff.cy}} (\text{Travail effectivement reçu par l'arbre moteur})}{\text{Energie thermique dépensée}}$$

D'où le rendement thermodynamique en fonction du rendement indiqué et du rendement moteur

$$\eta_{th} = \eta_i \cdot \eta_m$$

La figure 1.4, donne le rendement thermodynamique en fonction du taux de compression.

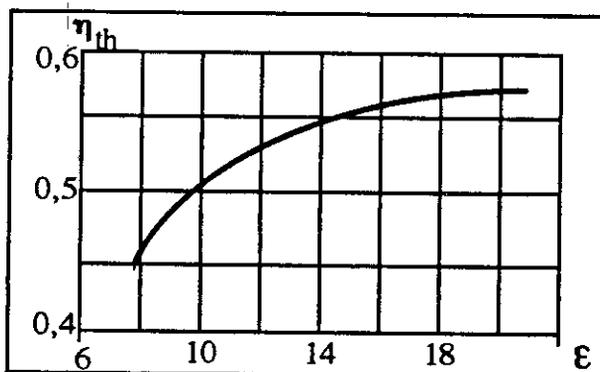


Fig. 1.4 Rendement thermodynamique en fonction du taux de compression

En conclusion, on peut dire que pour un même taux de compression  $\epsilon$  le rendement thermodynamique  $\eta_{th}$  du moteur à essence est supérieur à celui du moteur Diesel, mais le taux de compression étant plus élevé dans le moteur Diesel, le rendement de celui-ci est donc toujours supérieur à celui du moteur à essence.

### 1.3. Consommation spécifique du moteur

La faible consommation du moteur Diesel est généralement expliquée par son taux de compression élevé, étant donné que la consommation spécifique est inversement proportionnelle au rendement global du moteur, qui est à l'avantage du moteur Diesel,

pour  $\epsilon$  élevé. L'avantage du Diesel dans la consommation spécifique est montré dans les courbes consommation-puissance ou consommation-vitesse de rotation.

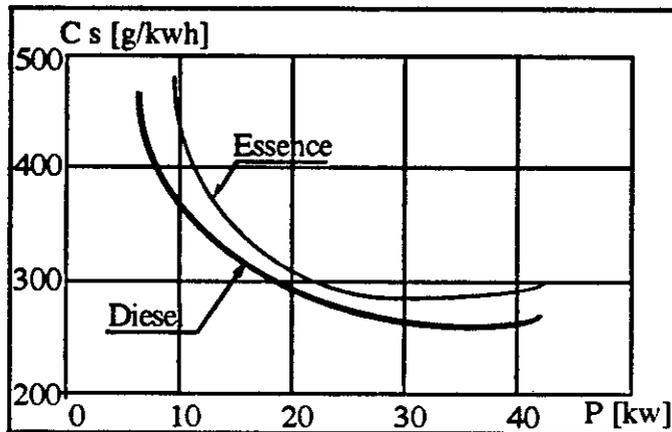


Fig. 1.5 Variation de la consommation spécifique avec la puissance

Nous remarquons sur la figure 1.5 que la consommation spécifique du Diesel est inférieure à celle de l'essence quelque soit la valeur de la puissance.

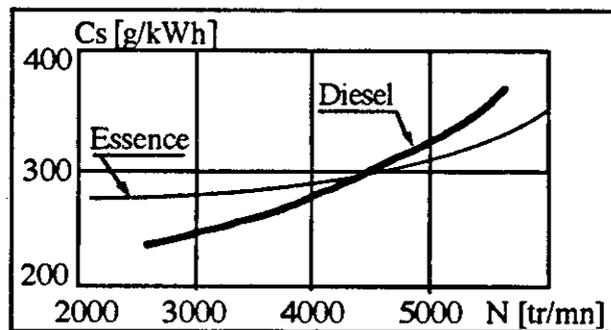


Fig. 1.6 Variation de la consommation avec la vitesse de rotation

Etant donnée l'importance des pertes par frottement qui sont plus élevées pour le Diesel, on peut constater sur la figure 1.6 que la consommation spécifique du moteur Diesel est supérieure à celle du moteur à essence, lorsque le régime de rotation est élevée (supérieure à 4500 tr/mn), pour une même puissance à l'arbre.

Etant donné que la vitesse de rotation du moteur Diesel n'excède pas en moyenne 4200 tr/mn (limitée par le phénomène de cavitation de la pompe d'injection), on reste donc toujours dans la plage où la consommation est à l'avantage du moteur Diesel.

Pour terminer, on procède à une comparaison pratique des coefficients de consommation sur des véhicules de petite cylindrée équipés de moteurs à essence et Diesel.

Sur le plan pratique, la comparaison s'avère délicate car en considérant des véhicules existants, disponibles dans le commerce, on constate que les moteurs Diesel et essence comparables sont placés dans des véhicules dont le poids, les résistances à l'air et les transmissions sont très différentes (tableau 1.1).

| MARQUE                               | PEUGEOT |         |         |          | VOLKSWAGEN |         |         |         |
|--------------------------------------|---------|---------|---------|----------|------------|---------|---------|---------|
| MODEL                                | 305 SRD | 305GT   | 305GL   | 305 BASE | GOLF D     | GOLF S  | GOLF    | GOLF L  |
| Caractérist. \ Type                  | Diesel  | Essence | Essence | Essence  | Diesel     | Essence | Essence | Essence |
| Cylindr  [cm3]                       | 1905    | 1580    | 1472    | 1290     | 1588       | 1457    | 1272    | 1093    |
| Pmx [kw]                             | 48      | 69      | 54      | 48       | 39         | 51      | 44      | 37      |
| N   Pmx [tr/mn]                      | 4600    | 6000    | 6000    | 6000     | 4800       | 5600    | 5600    | 5000    |
| Poids [kg]                           | 985     | 975     | 923     | 917      | 841        | 819     | 779     | 770     |
| Poid/Pmx [kg/kw]                     | 20,6    | 14,1    | 17,1    | 19,1     | 21,3       | 15,9    | 17,7    | 20,8    |
| Vmax [km/h]                          | 152     | 170     | 156     | 152      | 143        | 158     | 149     | 138     |
| Vma   Pm[km/h]                       | 144     | 195     | 184     | 176      | 143        | 176     | 156     | 152     |
| Conso.[1/100 km]                     |         |         |         |          |            |         |         |         |
|   90 [km/h]                          | 4,6     | 5,3     | 5,9     | 6        | 5          | 6,7     | 6,5     | 6,4     |
|   120 [km/h]                         | 6,4     | 7,1     | 7,9     | 8,2      | 7,5        | 9,4     | 8,5     | 8,8     |
|   cycle                              | 6,8     | 9       | 8,1     | 8,2      | 6,6        | 10,3    | 9,9     | 9,7     |
| Coeff. de consomma. en [1/100/kW kg] |         |         |         |          |            |         |         |         |
| en route * 10-6                      | 135     | 105     | 158     | 186      | 228        | 225     | 247     | 308     |
| en ville * 10-6                      | 143     | 133     | 162     | 186      | 201        | 246     | 288     | 340     |

Tableau 1.1 Caractéristiques techniques.

Il faut noter que pour traduire réellement en terme de dépense énergétique (E) les chiffres de consommation (C) exprimés en 1/100 km, il faut multiplier ceux-ci par la densité (d) du carburant .

$$E = \frac{C}{100} \cdot P_{ci} \cdot d$$

L' nergie E s'exprime en kJ/kg.

Le pouvoir calorifique inférieur et la densité du carburant sont données pour l'essence et le gasoil (Tableau.1.2).

| Carb.       | Essence | Gasoil |
|-------------|---------|--------|
| Pci (kJ/kg) | 44 400  | 42 700 |
| d (kg/l)    | 0,75    | 0,80   |

Tableau 1.2 Pci et densité combustible

Si on compare la 305 D (1905 cm3) et la 305 GT (1580 cm3), on note qu'à poids de véhicule quasi identique et à carrosserie semblable, le Diesel développe une puissance maximale de 48 kW tandis que l'essence développe 69 kW. Les vitesses et les accélérations sont à l'avantage de l'essence. Ceci se traduit par une consommation ( tant en vitesse stabilisée qu'en cycle) plus faible pour le Diesel, avec des gains allant jusqu'à 32 % en 1/100 km et 29 % en kJ/km (tableau 1.3).

| Type   | SRD | GT  | Base | Gain SRD / GT en % |            | Gain SRD / Base en % |            |
|--------|-----|-----|------|--------------------|------------|----------------------|------------|
| Conso. |     |     |      | en 1/100           | en kJ / km | en 1/100             | en kJ / km |
| 90     | 4,6 | 5,3 | 6    | 15                 | 12         | 30                   | 27         |
| 120    | 6,4 | 7,1 | 8,2  | 11                 | 8          | 28                   | 25         |
| cycle  | 6,8 | 9   | 8,2  | 32                 | 29         | 20                   | 17         |

Tableau 1.3 Comparaison des consommations du moteur de la 305 SRD avec ceux des 305 GT et 305 de base.

La comparaison entre la golf Diesel de 1588 cm<sup>3</sup> et la golf S essence de 1457 cm<sup>3</sup> nous indique des gains en consommation très importants (jusqu'à 56 % en 1/100 et 52 % en kJ/km). Une comparaison plus réaliste nous amène à considérer la golf L de 1093 cm<sup>3</sup> à essence de puissance maximale voisine de celle de la golf D. On observe que les gains obtenus sont encore élevés.

| Type<br>Consom. | Golf<br>D | Golf<br>L | Golf<br>S | Gain Golf D/Golf L en % |          | Gain Golf D/Golf S en % |          |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-------------------------|----------|-------------------------|----------|
|                 |           |           |           | en 1/100                | en kJ/km | en 1/100                | en kJ/km |
| 90              | 5         | 6,4       | 6,7       | 28                      | 25       | 34                      | 30       |
| 120             | 7,5       | 8,8       | 9,4       | 17                      | 14       | 24                      | 22       |
| cycle           | 6,6       | 9,7       | 10,3      | 47                      | 43       | 56                      | 52       |

Tableau 1.4 Comparaison des consommations du moteur Diesel de la golf D avec ceux des golfs L et S.

#### 1.4. Masse moteur

Bien que l'architecture d'ensemble des moteurs essence et Diesel est fort semblable (pistons, chemises, système bielle manivelle, bloc moteur, culasse, soupapes, etc.), le moteur Diesel qui doit faire face à des contraintes mécaniques et thermiques plus élevées ( $\epsilon = 14$  à 25) est plus lourd et plus robuste. En outre, sa puissance au litre de cylindrée étant faible, il sera à puissance égale plus encombrant que son homologue à essence.

Cette lourde construction du moteur Diesel engendrée par la masse en rotation, ne permet pas au moteur de tourner à des vitesses élevées ( $N_{max}$  voisine de 4500 tr/mn). Ceci entraîne une plage de fonctionnement restreinte du moteur, d'où risque d'apparition de fréquences propres dans cette plage et donc vitesses critiques (ce qui est en général le cas). Ce qui implique la nécessité de monter un amortisseur de vibration de torsion, dont la masse s'ajoute à celle des autres pièces, entraînant ainsi l'augmentation de la masse du moteur Diesel.

#### 1.5. Irrégularité cyclique du moteur

L'irrégularité cyclique  $i$  est définie comme étant la variation relative de la vitesse angulaire pour un cycle, pendant lequel le couple résistant est supposé constant et tel que le travail résistant soit égal au travail moteur.

$$i = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{moy}} \quad (1.3)$$

$\omega_{max}$ ,  $\omega_{min}$  : sont respectivement la valeur maximale et la valeur minimale de la vitesse angulaire instantanée au cours d'un cycle.

$\omega_{moy}$  : est la valeur moyenne de la vitesse angulaire au cours d'un cycle.

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué aux masses tournantes de moment d'inertie  $I$  entre les instants de passage de la manivelle correspondant à  $q_{max}$  et  $q_{min}$  donne :

$$\left( \frac{2}{\omega_{max}^2} - \frac{2}{\omega_{min}^2} \right) = \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} (C_m - C_r) d\theta \quad (1.4)$$

Avec :

$C_m$  : le couple moteur (correspondant au moment résultant, par rapport à l'axe de toutes les forces réellement appliquée au vilebrequin à l'instant considéré) ;

$C_r$  : le couple résistant (supposé constant) ;

$I$  : le moment d'inertie de l'ensemble des pièces tournantes (vilebrequin, volant, têtes de bielles, ...)

$\theta_M$  : l'angle de manivelle pour lequel la vitesse angulaire atteint la valeur maximale  $\omega_{max}$  ;

$\theta_m$  : l'angle de manivelle pour lequel la vitesse angulaire atteint la valeur minimale  $\omega_{min}$ .

Comme la vitesse moyenne est voisine de la moyenne arithmétique des vitesses maximales et minimales :

$$\omega_{moy} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}$$

Les équations (1.3) et (1.4) nous permettent d'écrire :

$$i = \frac{\int_{\theta_m}^{\theta_M} (C_m - C_r) d\theta}{I \cdot \omega_{moy}^2} = \frac{A}{I \cdot \omega_{moy}^2} \quad (1.5)$$

où  $A$  représente l'air sous tendue à la courbe du couple (fig.1.7)

L'équation (1.5) montre clairement que le coefficient de l'irrégularité  $i$  est d'autant plus petit que :

- Le moment d'inertie total  $I$  des masses tournantes est considérables ;
- La vitesse de rotation  $\omega_{moy}$  est plus grande ;
- La différence entre le couple moteur et le couple résistant prend une valeur plus petite et se maintient moins longtemps à un niveau supérieur à celui du couple résistant  $C_r$ .

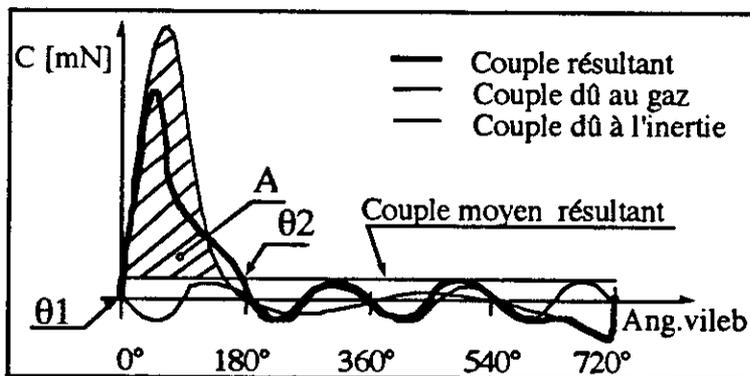


Fig. 1.7 Evolution du couple instantané d'un moteur monocylindre

De ces constatations, nous tirons les conclusions suivantes (concernant la comparaison du moteur Diesel et du moteur à essence) :

- Dans le moteur Diesel, le rapport de compression  $\epsilon$  varie entre 14 et 25, ce qui produit des pressions élevées et donc un couple moteur important ; par conséquent,  $A$  (qui est fonction du couple moteur et donc des forces de pression régnantes dans le cylindre, puisque le couple moteur est proportionnel à la pression :  $C_m = f(P(\theta))$ ) augmente et de surcroît  $i$  augmente.

Dans le moteur à essence le taux de compression  $\epsilon$  ne dépasse pas 12, ce qui implique que l'irrégularité cyclique  $i$  du moteur à essence reste moins importante que celle du moteur Diesel. Autrement dit un taux de compression faible, donne une meilleure régularité cyclique.

- L'inertie des masses tournantes  $I$  est plus importante dans les moteurs Diesel, ce qui implique une diminution de l'irrégularité cyclique par rapport aux moteurs à essence.

- L'irrégularité cyclique est inversement proportionnelle au carré de la vitesse angulaire  $\omega$  moy. Ce troisième paramètre ne favorise pas le moteur Diesel. En effet, la vitesse de rotation du moteur Diesel ne peut dépasser en moyenne 4500 tr/mn à cause du phénomène de cavitation dans la pompe d'injection. Le moteur à essence dépasse largement cette valeur de  $N$ . Suite à ces constatations, nous pouvons conclure que l'irrégularité cyclique du moteur Diesel est plus importante que celle du moteur à essence.

En résumé, nous remarquons, dans les comparaisons que nous venons de faire, que certaines caractéristiques sont à l'avantage du moteur Diesel, telles que la consommation et le rendement, alors que pour d'autres paramètres c'est le moteur à essence qui prend l'avantage sur le Diesel, et ceci pour la puissance, la masse et l'irrégularité cyclique. Nous nous proposons d'améliorer certains paramètres constructifs du moteur Diesel, en vue d'augmenter la régularité cyclique et de diminuer la masse. L'augmentation de la puissance pouvant être résolue par la suralimentation.

## 2. AMELIORATION DU MOTEUR DIESEL

Deux solutions peuvent être envisagées pour améliorer les caractéristiques du moteur Diesel : diminution de l'irrégularité cyclique et la suralimentation.

### 2.1. Diminution de l'irrégularité cyclique

Nous avons déjà vu que l'irrégularité cyclique pouvait se mettre sous la forme :

$$i = \frac{A}{I \cdot \omega_{\text{moy}}^2} \quad (1.6)$$

Il apparaît donc que pour réduire l'irrégularité  $i$  il faut soit diminuer  $A$ , c'est à dire avoir une faible différence positive entre le couple moteur et le couple résistant, soit augmenter le dénominateur. Pour augmenter le dénominateur, on peut augmenter la vitesse  $\omega_{\text{moy}}$ , mais cela ne nous rendra pas un grand service car l'irrégularité cyclique se fait sentir surtout aux bas régimes (cas du ralenti du moteur), donc il faut augmenter le moment d'inertie de la ligne d'arbre  $I$  (moment d'inertie des bielles, vilebrequin, poulie et volant).

Une augmentation importante de  $I$  peut poser un autre inconvénient, puisque plus le moment d'inertie est grand et plus le couple d'accélération moyen  $I d\omega/dt$  absorbé pendant les périodes d'accélération du moteur sera grand, ce qui peut être un inconvénient sérieux pour certains types de moteurs. D'autre part, l'augmentation de  $I$  peut entraîner un poids supplémentaire pour le moteur et donc aller à l'encontre d'une augmentation de la puissance.

Au vu de ce qui vient d'être dit, pour avoir une irrégularité acceptable, il faut trouver un compromis entre la réduction de  $i$  et l'augmentation de  $I$  (sans l'augmentation de la masse des éléments tournants), d'où l'idée du volant pendulaire ou régulateur de vitesse qui permettrait non seulement une réduction de  $i$  et une augmentation de  $I$ , mais aussi une réduction de la masse (allègement du volant, et possibilité de supprimer le damper).

### 2.2. La suralimentation

Les contraintes économiques ont poussé les constructeurs de moteurs thermiques à obtenir pour une cylindrée donnée, plus de puissance, tout en recherchant un moyen efficace pour :

- Abaisser le prix de fabrication par cheval ;
- Réduire le poids et l'encombrement par cheval.

Cette double nécessité conduit à chercher à augmenter la quantité de combustible qu'un cylindre de volume donné brûle par unité de temps. Ceci ne peut être réalisé qu'en accroissant la masse d'air comburant introduite par litre de cylindrée et par unité de temps. Pour cela on peut :

– Soit augmenter le nombre de cycles par unité de temps, c'est à dire la vitesse de rotation ; mais l'augmentation rapide des pertes de charge dans les tubulures d'admission et au passage des soupapes ne permet guère de dépasser des vitesses moyennes de piston de l'ordre de 15 [m/s]. (sauf pour les moteurs de compétition). Par ailleurs, on enregistre une augmentation des efforts dynamiques entraînant un accroissement des frottements et donc des pertes mécaniques ;

- Soit augmenter la masse spécifique de l'air introduit en lui faisant subir une compression préalable provoquant ainsi une suralimentation du moteur. De plus on essaie d'améliorer par cette suralimentation le remplissage des cylindres en jouant sur le temps d'ouverture simultané des soupapes d'admission et d'échappement réalisant ainsi le balayage des cylindres.

Un moteur suralimenté n'a donc pas de gaz chaud au moment de l'admission dans le cylindre, ce qui n'abaisse pas la densité de l'air frais introduit et augmente la quantité d'oxygène disponible.

Le taux d'augmentation de puissance au litre de cylindrée obtenu par suralimentation est limité :

.Soit par le fait que l'excès d'air nécessaire à la combustion devient insuffisant ;  
.Soit par augmentation de la valeur des contraintes mécaniques, ou des niveaux thermiques des structures.

La suralimentation d'un Diesel doit donc réaliser un compromis entre trois caractéristiques fondamentales :

- Avoir une densité d'air aussi élevée que possible, d'où l'intérêt d'un refroidissement de l'air après compression ;
- Conserver un taux de compression aussi faible que le permet le lancement du moteur à froid ;
- Assurer une température en fin de compression suffisante pour réduire le délai d'allumage.

### 2.2.1. Contraintes dues à la suralimentation

Dans un Diesel suralimenté, la température des structures est plus élevée que dans un Diesel non suralimenté. Ceci a pour effet bénéfique de diminuer la quantité de chaleur prélevée aux gaz de combustion ce qui permet d'améliorer le rendement énergétique du moteur, puisque toute quantité de chaleur prélevée aux gaz par les parois ne peut se transformer en énergie utile. Mais l'échauffement des structures ne doit pas les dégrader, par apparition de "point chaud" ou dégrader la qualité de la lubrification. Compte tenu de ces contraintes on doit donc :

- Refroidir l'air de la suralimentation pour éviter un accroissement trop important des températures du cycle ;
- Provoquer un balayage en air frais (ce qui est très efficace pour la diminution de la température des soupapes d'échappement et des ailettes de turbine ;
- Augmenter la quantité de chaleur évacuée par la source froide, du fait de l'accroissement de température de fin de combustion.

### 2.2.2. Types de suralimentations

#### a) Suralimentation par compresseur entraînée à partir du vilebrequin

- *Avantages* : bon couple à bas régime et bonne réponse à l'accélération.
- *Inconvénients* : énergie des gaz d'échappement non récupérée, rendement moteur diminué, mauvais rendement du compresseur à régime élevé, consommation accrue.

#### b) Suralimentation du type Compound

L'énergie des gaz d'échappement est récupérée sur une turbine entraînant un compresseur

basse pression, le surplus de l'énergie est récupéré par le vilebrequin. Ce dernier entraîne un compresseur haute pression, l'air frais est alors comprimé en deux étapes. On assure un refroidissement de l'air avant admission.

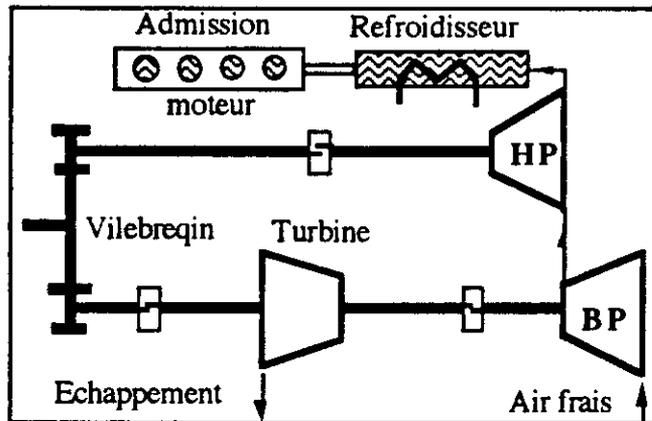


Fig.1.8. Suralimentation du type Compound

- **Avantages** : Récupération de l'énergie des gaz d'échappement ; compression étagée ; bon rendement moteur ; bon comportement aux altitudes.

- **Inconvénients** : Complexité technologique, en particulier au niveau des liaisons avec le vilebrequin.

#### c) Procédé comprex :

Ce procédé utilise les ondes de compression des gaz d'échappement pour comprimer l'air frais admis aux cylindres. Il permet d'obtenir un couple moteur très important à bas régime, ce qui favorise les accélérations .

#### d) Turbocompresseur :

Au lieu d'être expulsés à l'air libre, les gaz d'échappement chauds provenant du moteur passent dans une turbine où ils se dilatent virtuellement à la pression ambiante.

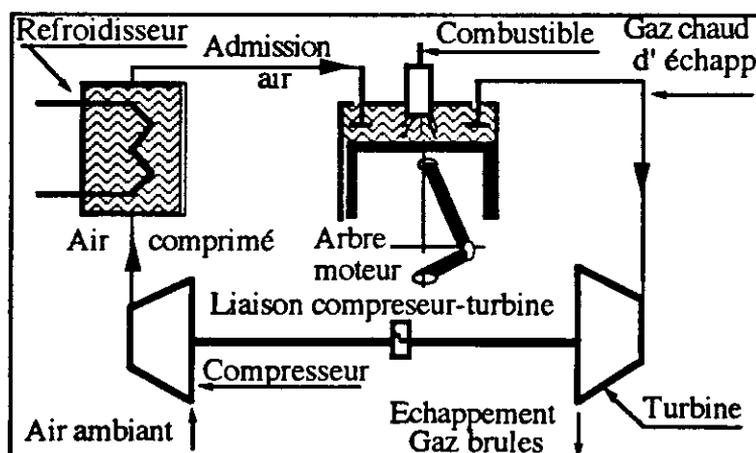


Fig. 1.9. Suralimentation par turbocompresseur.

Cette détente des gaz actionne un compresseur (monté sur le même arbre que la turbine) qui envoie de l'air comprimé au moteur. Puisque la densité diminue lorsque la température augmente, l'air comprimé est refroidi avant de pénétrer dans le collecteur d'air alimentant les cylindres.

Le procédé de suralimentation le plus utilisé sur les véhicules à moteurs Diesel est le turbocompresseur. Dans ce procédé, la puissance absorbée par le compresseur est fournie par la détente des gaz brûlés du moteur dans la turbine.

Le premier avantage recherché est évidemment l'augmentation de puissance d'un moteur donné, ce qui implique également une réduction du rapport poids / puissance.

Le gain en puissance résulte essentiellement de l'augmentation de la masse d'air et de combustible décrivant le cycle thermodynamique mais également et dans une moindre mesure du remplissage de l'espace mort par des gaz frais à la place de gaz résiduels. On observe un gain important de la puissance produite malgré une légère augmentation des pertes par frottement et un accroissement des pertes de charge à l'admission et à l'échappement.

- Le second avantage se situe au niveau de la consommation spécifique. Celle-ci peut s'écrire sous la forme :

$$c_s = \frac{1}{\eta_{th} \cdot \eta_f \cdot \eta_c \cdot \eta_m}$$

Avec :

$\eta_{th}$  : rendement thermodynamique ;

$\eta_f$  : rendement de forme ;

$\eta_c$  : rendement de combustion ;

$\eta_m$  : rendement mécanique.

Lorsqu'on suralimente un moteur, on observe une augmentation du rendement thermodynamique et du rendement de forme, une légère diminution du rendement mécanique et la constance du rendement de combustion. Il en résulte un gain en consommation spécifique.

Par rapport à l'énergie totale introduite, on perd proportionnellement moins de chaleur dans les parois lorsqu'on suralimente, ce qui ne veut pas dire que les parois sont moins chaudes.

- Le troisième avantage se situe dans la réduction de la pollution. En mélange pauvre, on peut diminuer sensiblement les oxydes d'azote en recyclant une partie des gaz brûlés et en amortissant la perte de puissance correspondante sur le surplus de puissance dû au turbocompresseur.

#### - Comparaison des moteurs suralimentés et non suralimentés

Avec l'emploi du turbocompresseur, nous remarquons sur la figure 1.10. (moteur Deutz) une faible consommation, et une élévation appréciable de la puissance et du couple.

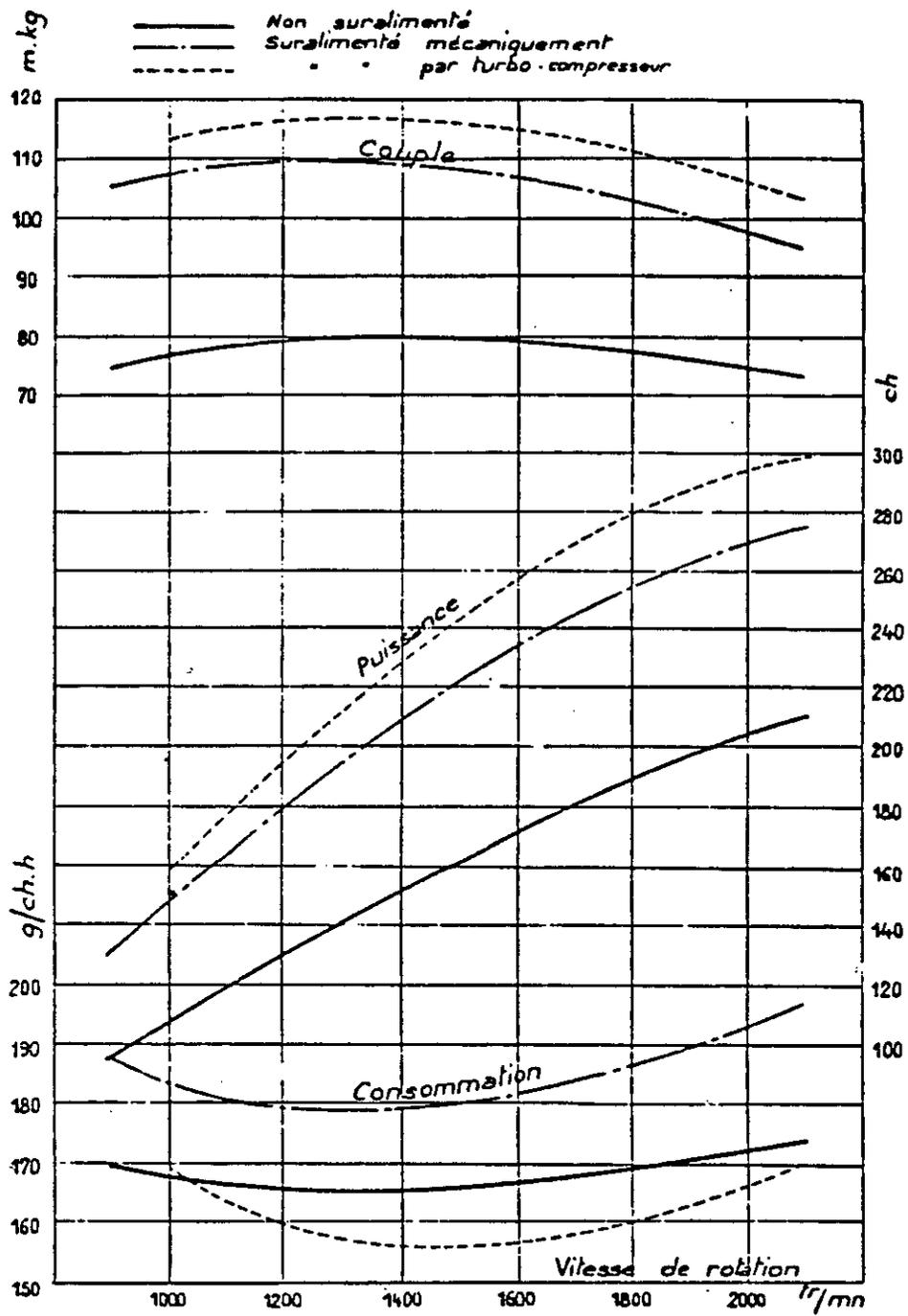


Fig. 1.10. Comparaison des moteurs suralimentés et non suralimentés

- - - : Suralimenté par turbo-compresseur
- - - : Suralimenté mécaniquement
- : Aspiré

## DEUXIEME PARTIE

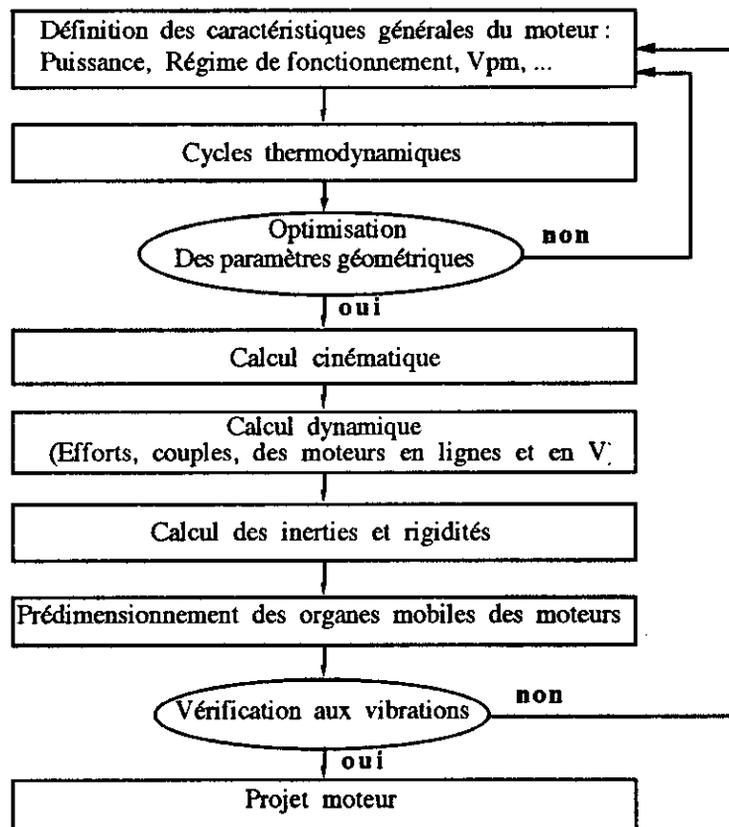
PRE-DIMENSIONNEMENT DU MOTEUR

## 1. GENERALITES

Des études statistiques montrent que la puissance des moteurs, à cylindrée égale, double pratiquement toutes les deux décades. Cette tendance à rechercher des puissances de plus en plus élevées, tout en ayant une sécurité suffisante, oblige les constructeurs à déterminer avec le plus de précision possible les efforts auxquels sont soumis les organes mobiles et /ou fixes de ces moteurs.

C'est dans cette optique que nous entreprenons "le dimensionnement du moteur à combustion interne". Après avoir défini les caractéristiques générales du moteur, nous déterminons ses paramètres géométriques qui nous permettent le calcul cinématique. La connaissance des paramètres internes nous aide au calcul des cycles thermodynamiques et donc au dimensionnement des organes mobiles (piston, bielle, vilebrequin). La dernière étape de cette deuxième partie consiste à vérifier en vibrations de torsion des organes mobiles. Le logiciel qui en découlera sera utilisé comme un outil d'aide à la conception des moteurs.

### *Outil d'aide à la conception des moteurs*



Avant d'entamer cette deuxième partie, nous proposons quelques définitions sur les notations utilisées et la formulation cinématique et dynamique d'un problème donné de mécanique.

### 1.1. Notations utilisées

- Les repères sont définis par un point et trois axes indicés ou non, notés par des lettres minuscules :  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ,  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ ,  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ .
- Les angles sont notés par des lettres grecques minuscules :  $\theta, \varphi, \lambda$ , etc.
- Si  $\theta$  est un angle en radians, on note  $\theta'$ , la dérivée première de  $\theta$  par rapport au temps ( $\theta' = d\theta/dt$  en radians par seconde) elle représente la vitesse angulaire instantanée.
- On note  $\theta''$  la dérivée seconde de  $\theta$  par rapport au temps ( $\theta'' = d^2\theta/dt^2$  en radians par seconde carrée) elle représente l'accélération angulaire instantanée.
- On définit le vecteur rotation instantanée  $\vec{\Omega}$ , par une vitesse angulaire instantanée sur un axe de rotation :  $\vec{\Omega}_{(1/0)} = \theta' \vec{z}$  ;  $\vec{\Omega}_{(1/0)}$  est le vecteur rotation instantané du repère (1) par rapport au repère (0) autour de l'axe  $\vec{z}$  de valeur  $\theta'$ .

$\frac{d\vec{x}}{dt}$  est la dérivée dans le repère (0) du vecteur  $\vec{x}$  par rapport au temps.

$\vec{V}_{(A, 1/0)}$  est la vitesse instantanée du point A appartenant au repère (1) par rapport au repère (0).

$\vec{\Gamma}_{(A, 1/0)}$  est l'accélération instantanée du point A appartenant au repère (1) par rapport au repère (0).

$\overset{o}{\delta}_{(solide S/G)}$  est le moment dynamique du solide S par rapport à son centre de gravité G, exprimé dans le repère (0).

$\left( \begin{matrix} \vec{F} \\ \vec{M} \end{matrix} \right)_A$  est le torseur des actions mécaniques appliquées au point A, il est défini par une force et un moment au point A.

$\overline{I}_{(solide S/G), (G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$  est le tenseur d'inertie du solide S par rapport à son centre de gravité G, exprimé dans le repère  $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

## 1.2. Formulation cinématique et dynamique

### 1.2.1. Définitions géométriques

- On définit un axe par une direction, une orientation et un vecteur unité.
- On définit un repère par un point et trois axes orthogonaux.

Lorsqu'on veut aborder un problème de cinématique on doit assurer :

- . La mise en place des repères : on prend toujours des angles positifs du repère fixe vers le repère mobile ;
- . La définition des vecteurs rotation ou translation ;
- . L'écriture des formules de passage entre les différents repères ;
- . L'écriture des dérivées des vecteurs mobiles par rapport au temps ;
- . L'écriture des relations cinématiques.

## 1.2.2. Formules de cinématiques

### 1.2.2.1. Définition de la vitesse et de l'accélération

Soit un point M appartenant au solide (S) lié au repère (1) en mouvement par rapport au repère (0) (fig.2.1). On peut écrire :

$$\vec{V}_{(M,1/0)} = \frac{d^{\circ} \vec{OM}}{dt} \quad (2.1)$$

$$\vec{\Gamma}_{(M,1/0)} = \frac{d^{\circ} \vec{V}_{(M,1/0)}}{dt} \quad (2.2)$$

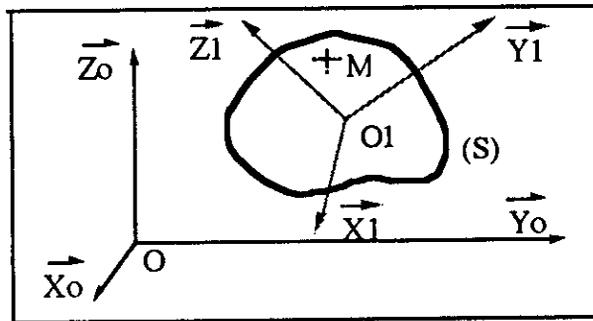


Fig. 2.1 Définition de la vitesse et de l'accélération

### 1.2.2.2. Champ des vitesses et des accélérations d'un solide indéformable

Soient deux points M1 et M2 appartenant au solide (S) lié au repère (1) en mouvement par rapport au repère (0) (fig.2.2). On peut écrire :

$$\vec{V}_{(M1,1/0)} = \vec{V}_{(M2,1/0)} + \vec{\Omega}_{(1/0)} \wedge \vec{M_2M_1} \quad (2.3)$$

$$\vec{\Gamma}_{(M1,1/0)} = \vec{\Gamma}_{(M2,1/0)} + \frac{d^{\circ} \vec{\Omega}_{(1/0)}}{dt} \wedge \vec{M_2M_1} + \vec{\Omega}_{(1/0)} \wedge \left[ \vec{\Omega}_{(1/0)} \wedge \vec{M_2M_1} \right] \quad (2.4)$$

Ces deux expressions sont utiles pour la détermination de la vitesse et de l'accélération d'un point géométrique M1 de (S) lié au repère (1) par rapport au repère (0), connaissant celle d'un autre point géométrique M2 de (S).

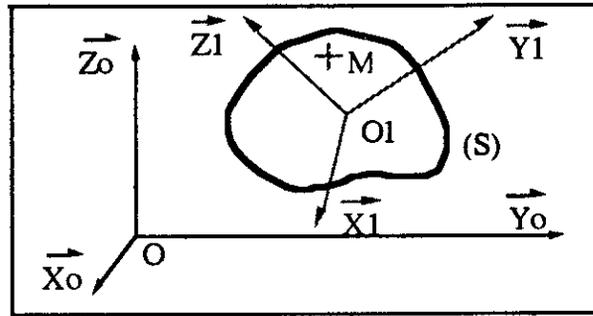


Fig. 2.2 Champ des vitesses et des accélérations du solide (S)

$\vec{\Omega}_{(1/0)}$  est le vecteur rotation instantanée du repère (1) par rapport au repère (0).

**1.2.2.3. composition des vitesses et des accélérations**

Soit un point M appartenant au solide (S) lié au repère (2) en mouvement par rapport au repère (1), lui-même en mouvement par rapport au repère (0) (fig.2.3). On peut écrire :

$$\vec{\Omega}_{(2/0)} = \vec{\Omega}_{(2/1)} + \vec{\Omega}_{(1/0)}$$

$$\vec{V}_{(M, 2/0)} = \vec{V}_{(M, 2/1)} + \vec{V}_{(M, 1/0)}$$

$$\vec{\Gamma}_{(M, 2/0)} = \vec{\Gamma}_{(M, 2/1)} + \vec{\Gamma}_{(M, 1/0)} + \frac{d^0 \vec{\Omega}_{(1/0)}}{dt} \wedge \vec{O_1 M} + \vec{\Omega}_{(1/0)} \wedge [\vec{\Omega}_{(1/0)} \wedge \vec{O_1 M}] + 2\vec{\Omega}_{(1/0)} \wedge \vec{V}_{(M, 2/1)}$$

Le dernier terme étant l'accélération de Coriolis.

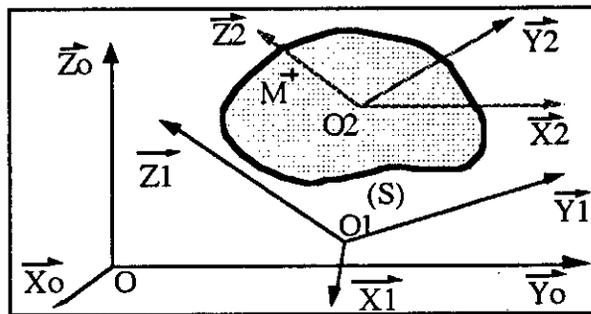


Fig. 2.3 Composition des vitesses et des accélérations

**1.2.2.4. Dérivée d'un vecteur, formule de Bour**

Soit le repère (1) en mouvement par rapport au repère (0),  $\vec{U}$  un vecteur en mouvement par rapport au repère (1) (fig.2.4). La relation de Bour définissant la dérivée du vecteur  $\vec{U}$  dans le repère (0) par rapport au temps s'écrit :

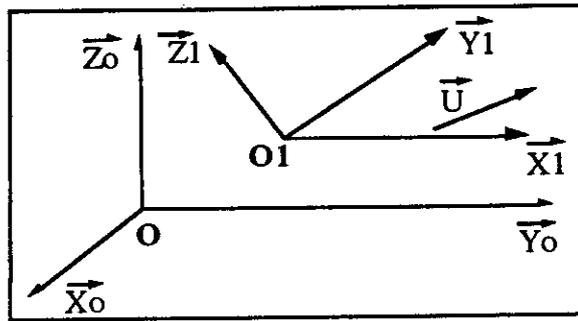


Fig. 2.4 Dérivée d'un vecteur

$$\frac{d^0 \vec{U}}{dt} = \frac{d^1 \vec{U}}{dt} + \vec{\Omega}_{(1/0)} \wedge \vec{U} \quad (2.5)$$

Cas particulier :

Si  $\vec{U}$  est de direction fixe dans le repère (1) et si son module est constant, c'est à dire :

$$\frac{d^1 \vec{U}}{dt} = 0$$

alors :

$$\frac{d^0 \vec{U}}{dt} = \vec{\Omega}_{(1/0)} \wedge \vec{U}$$

### 1.2.3. Formules de dynamiques

#### 1.2.3.1. Tenseur d'inertie

Soit un solide (S) de centre de gravité G et un repère  $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  lié à ce solide (fig.2.5). On définit le tenseur d'inertie du solide (S) par rapport à son centre de gravité G, exprimé dans le repère  $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  par :

$$\overline{I_{(\text{solide S/G})}}_{(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

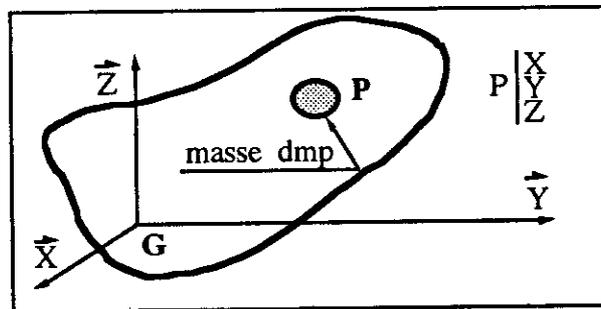


Fig. 2.5 Définition du tenseur d'inertie

A, B et C sont les moments d'inertie du solide (S) par rapport aux axes  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  passant par G  
D, E et F sont les produits d'inertie du solide (S) par rapport aux plans yz, xz, xy passant par G

**Remarque :** Si un solide possède un plan de symétrie alors ses deux produits d'inertie sont nuls (Par exemple, si  $(\vec{x}, \vec{y})$  est un plan de symétrie alors  $D = E = 0$  et  $F \neq 0$ ).  
Si un solide possède deux plans de symétrie alors les trois produits d'inertie sont nuls.

### 1.2.3.2. Moment dynamique

#### . Moment cinétique

Soient un repère fixe  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  et un repère mobile  $(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  lié au solide (S) (fig.2.6). On définit le moment cinétique du solide (S) par rapport à son centre de gravité G dans le repère (1) par :

$$\vec{\sigma}_{(S/G)}^1 = \underline{I}_{(\text{solide } S/G)} \cdot \vec{\Omega}_{(1/0)} \quad (2.7)$$

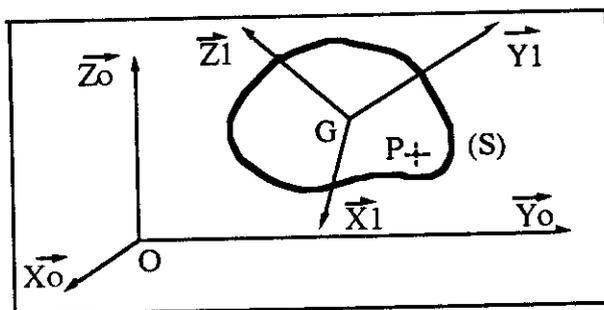


Fig. 2.6 Définition du moment dynamique

Le tenseur d'inertie  $I$  et le vecteur de rotation instantanée  $\Omega$  doivent être exprimés dans le même repère.

#### . Moment dynamique

Le moment dynamique est égal à la dérivée dans le repère fixe du moment cinétique par rapport au temps.

$$\vec{\delta}_{(S/G)}^1 = \frac{d^0 \left( \vec{\sigma}_{(S/G)}^1 \right)}{dt} \quad (2.8)$$

### 1.2.3.3. Torseur des actions mécaniques

Soient deux solides (S1) et (S2). Le solide (S1) applique des efforts et des moments au solide (S2). Le torseur des actions mécaniques du solide (S1) sur le solide (S2) en un point A est défini par :

- L'effort de (S1) sur (S2) au point A : donc trois composantes.
- Le moment de (S1) sur (S2) au point A : donc trois composantes.

Connaissant le moment d'une force au point A, on peut calculer le moment de cette force en un point B, en appliquant la formule suivante :

$$\vec{M}_{(\vec{F}_{1/2}/B)} = \vec{M}_{(\vec{F}_{1/2}/A)} + \vec{BA} \wedge \vec{F}_{1/2} \quad (2.9)$$

### 1.2.3.4. Analyse des actions mécaniques

#### - Actions à distance

Dans les moteurs thermiques, les actions à distance telles que pesanteur, champ magnétique, etc. sont négligées face aux actions de liaison.

#### - Actions de liaison

Les actions de liaison peuvent être classées selon les quatres types suivants :

##### a) Liaison de type rotoïde ou pivot (fig.2.7)

Le torseur d'actions de liaison de S1/S2 au point O est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{1/2} \\ \vec{M}_{1/2} \end{array} \right\}_O \text{ avec } \vec{M}_{1/2} \cdot \vec{x} = 0 ; (\vec{x} : \text{axe de liaison})$$

d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{1/2} = X_x^* + Y_y^* + Z_z^* \\ \vec{M}_{1/2} = 0 + M_y^* + N_z^* \end{array} \right\}$$

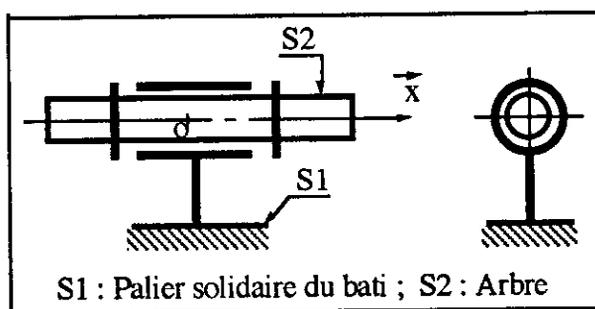


Fig. 2.7 Liaison rotoïde

##### b) Liaison de type glissière ou prismatique (fig.2.8)

Le torseur d'actions de liaison de S1/S2 au point O est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{1/2} \\ \vec{M}_{1/2} \end{array} \right\}_O \text{ avec } \vec{F}_{1/2} \cdot \vec{x} = 0 ; (\vec{x} : \text{axe de liaison})$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{1/2} = 0 + Y_y^* + Z_z^* \\ \vec{M}_{1/2} = L_x^* + M_y^* + N_z^* \end{array} \right\}$$

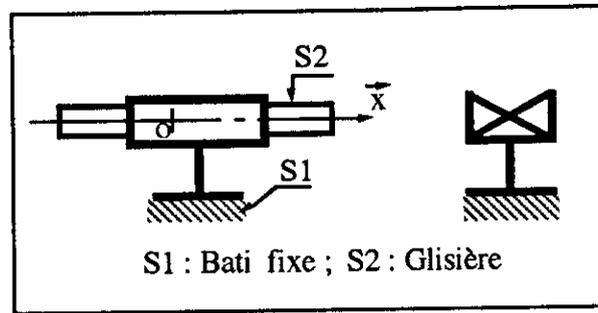


Fig. 2.8 Liaison glissière.

c) Liaison verrou ou pivot glissant (fig.2.9)

Le torseur d'actions de liaison de S1/S2 au point O est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{1/2} \\ \vec{M}_{1/2} \end{array} \right\}_O \text{ avec } \vec{F}_{1/2} \cdot \vec{x} = 0 \text{ et } \vec{M}_{1/2} \cdot \vec{x} = 0 ; (\vec{x} : \text{axe de liaison})$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{1/2} = 0 + Y_y^* + Z_z^* \\ \vec{M}_{1/2} = 0 + M_y^* + N_z^* \end{array} \right\}_O$$

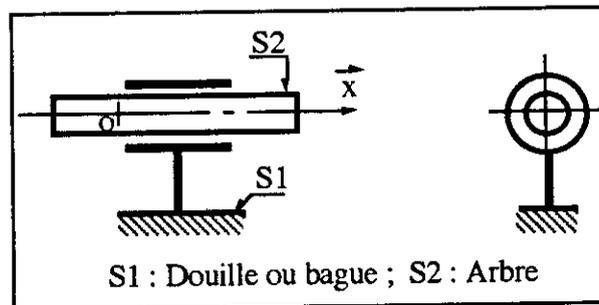


Fig. 2.9 Liaison Verrou

d) Liaison de type rotule ou sphérique (fig.2.10)

Le torseur d'actions de liaison de S1/S2 au point O est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{1/2} \\ \vec{M}_{1/2} \end{array} \right\}_O \text{ avec } \vec{M}_{1/2} = \vec{0}$$

d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{1/2} = X_x^* + Y_y^* + Z_z^* \\ \vec{M}_{1/2} = \vec{0} \end{array} \right\}$$

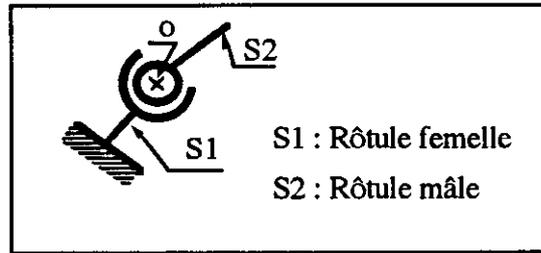


Fig. 2.10 Liaison type rotule

### - Action de contact ponctuel

Une action de contact ponctuel peut être avec ou sans frottement, selon le cas on distingue

$$\begin{array}{l}
 \cdot \text{ Avec frottement : } \left\{ \begin{array}{l} \text{avec glissement} \\ \text{sans glissement} \end{array} \right\} \\
 \cdot \text{ Sans frottement : } \left\{ \begin{array}{l} \text{avec glissement} \\ \text{sans glissement} \end{array} \right\}
 \end{array}$$

### 1.2.3.5. Equations vectorielles fondamentales

#### - Théorème de la résultante dynamique

L'accélération du centre de gravité du solide (S), dans son mouvement par rapport au repère (O), multipliée par la masse du solide (S), est égale à la somme des forces extérieures des torseurs des actions mécaniques appliquées au solide (S).

$$m_{\text{solide}} \cdot \overrightarrow{\Gamma_{(G, S/O)}} = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}/s}} \quad (2.10)$$

#### - Théorème du moment dynamique

Le moment dynamique du solide (S) par rapport à son centre de gravité est égal à la somme des moments des forces extérieures par rapport au centre de gravité des torseurs des actions mécaniques appliquées au solide (S).

$$\overrightarrow{\delta_{S/G}} = \sum \overrightarrow{M_{(\vec{F}_{\text{ext}}/G)}} \quad (2.11)$$

### 1.2.3.6. Equations scalaires

Les équations scalaires sont obtenues en projetant les équations vectorielles (résultante dynamique et moment dynamique) sur les trois axes du repère dans lequel sont exprimées

les grandeurs :  $\vec{\Gamma}$ ,  $\vec{F}$ ,  $\delta$ ,  $\vec{M}$ . On obtient ainsi six équations scalaires.

On remarque que pour des systèmes simples, géométriquement parfaits (moteurs en ligne, moteurs en V), souvent, la projection des deux équations vectorielles ne donne que trois ou quatre équations scalaires utilisables, les autres ont tous leurs coefficients nuls et sont de la forme :  $0 = 0$ .

## 2. CARACTERISTIQUES DU MOTEUR

Parmi les paramètres nécessaires à l'établissement des caractéristiques des moteurs envisagés on note les paramètres suivants :

- Type de moteur :

- . Essence, Diesel ;
- . En ligne (3, 4, 5 ou 6 cylindres), en "V" (6, 8, 10, ou 12 cylindres) ;
- . Aspiré, suralimenté, suralimenté refroidi.

- Puissance maximale : P (puissance comprise entre 30 et 300 kW) ;
- Vitesse de rotation à la puissance maximale : N (comprise entre 1000 et 8000 tr/mn) ;
- Vitesse moyenne du piston : vmp (comprise entre 8 et 15 m/s) ;
- Rapport longueur de bielle sur rayon manivelle :  $\lambda = L/R$  (compris entre 3,1 et 4,5) ;

Le nombre de points désirés pour le calcul de l'aire du cycle est également demandé. Ce nombre influe sur la précision et le temps de calcul.

Pour déterminer le type de moteur répondant à des performances données, nous sommes conduits à analyser ces différents paramètres.

### 2.1. Puissance

#### 2.1.1. Puissance théorique $P_t$

C'est la puissance que l'on obtiendrait en supposant que toute la chaleur dégagée par la combustion du carburant soit transformée en énergie mécanique : c'est à dire en admettant qu'il n'y ait pas de perte de chaleur.

#### 2.1.2. Puissance indiquée $P_i$

C'est la puissance que l'on peut déterminer à l'aide du diagramme établi lors de l'étude du cycle.

#### 2.1.3. Puissance effective $P_e$

C'est la puissance réelle du moteur compte tenu de la perte que subit la puissance indiquée par suite des frottements et de l'énergie absorbée par les appareils auxiliaires nécessaires au fonctionnement du moteur. C'est la puissance disponible sur l'arbre.

Ces trois puissances sont les puissances les plus souvent citées dans la technique automobile. Mais il existe d'autres et notamment :

La puissance spécifique ou puissance au litre et la puissance administrative qui est dite aussi puissance fiscale. La puissance effective en [w] s'exprime par la relation fondamentale :

$$P_{\text{eff}} = p_{\text{me}} \cdot V_u \cdot x \cdot n_c \quad (2.12)$$

avec :

- pme : pression moyenne effective [Pa] ;
- $V_u$  : cylindrée unitaire [m<sup>3</sup>] ;
- x : nombre de cycles par secondes ;
- $n_c$  : nombre de cylindres.

*- Moteur de véhicule industriel :*

Le moteur doit permettre un bon comportement routier à pleine charge ; c'est à dire, le meilleur moteur est celui qui développe la plus grande puissance pour une charge donnée. Les rapports actuels sont de l'ordre de 12 ch/t d'où pour un camion de 10 tonnes, le moteur doit avoir une puissance de :  $P = 10 \cdot 12 = 120$  ch ou 88 kw.

*- Moteur pour véhicule de tourisme :*

Ce qui est recherché dans les moteurs pour véhicules de tourisme est plutôt une faible masse par kw et une puissance élevée par groupement de cylindres. Par exemple la 305 Peugeot donne une masse de 16,5 kg/kw pour une cylindrée moyenne de 1500 cm<sup>3</sup>.

En conclusion, pour obtenir une puissance imposée, le constructeur est amené à grouper plusieurs cylindres tout en recherchant un faible encombrement et une masse minimale. Nous nous proposons d'étudier les différents facteurs qui composent la puissance effective.

### 2.1.3.1. Pression moyenne effective

Comment augmenter la valeur de la pme (pour avoir une augmentation de la puissance) si les facteurs  $V_u$  et x restent constants dans la relation (2.12) :

#### 1. Problèmes thermodynamiques :

- a) Pour une même dépense de combustible on cherche à augmenter l'aire du cycle théorique, donc  $\eta_{th}$  ; pour cela on fait croître le rapport volumétrique  $\epsilon$ .
- b) La suralimentation permet d'augmenter l'aire du cycle réel, donc la pmi. Le but est d'introduire par cycle une masse d'air plus élevée qui permet de brûler plus de combustible.
- c) L'amélioration de la combustion permet de brûler plus de combustible dans une masse d'air donnée. Un moteur parfait devrait être capable de brûler complètement un mélange combustible théorique (sans formation de co et de c), soit environ 1 kg d'essence ou de gasoil dans 15 kg d'air.
- d) On cherche à réduire les pertes de chaleur par les parois durant les différentes phases du cycle, pertes importantes pendant la combustion et la détente.

#### 2. Problèmes mécaniques :

- a) Résoudre le problème de résistance des organes fixes et mobiles aux efforts répétés et aux températures de plus en plus élevées, par un choix convenable des matériaux et de leurs traitements thermiques.
- b) Limiter les pertes mécaniques par un graissage convenable, puisqu'ils influent directement sur la pme ( $pme = pmi \cdot \eta_m$ ).

### 2.1.3.2. Cylindrée unitaire $V_u$

Les facteurs  $p_{me}$  et  $x$  restent constants : le choix de la cylindrée unitaire du moteur dans un projet moteur est étroitement lié au problème de l'évacuation de la chaleur par les parois.

Dans un moteur d'automobile la chaleur emportée par l'eau atteint couramment 30% de la chaleur dépensée.

La température de la paroi interne d'un cylindre ne doit pas dépasser 200 à 250°C, car le problème du graissage devient difficile sinon impossible. De même la paroi interne non lubrifiée d'une culasse ne doit pas être portée à une température trop élevée, de l'ordre de 400°C, car le risque de détonation croît ; la présence de points chauds est à craindre, avec comme conséquence le pré-allumage.

Ainsi la puissance fournie par un cylindre de dimensions données est limitée par la surface d'échange de chaleur de la paroi et par la transmission de chaleur au fluide réfrigérant.

Le rapport  $S/V$ , surface d'échange sur volume de la cylindrée décroît lorsque  $V$  croît. Or la qualité de chaleur évacuée par la paroi, est proportionnelle à  $V$  ; un petit cylindre est plus facilement refroidi qu'un grand cylindre.

### 2.1.3.3. Facteur $x$ [cycles/secondes]

Les paramètres  $p_{me}$  et  $V_u$  restent constants. Augmenter  $x$  revient à augmenter la vitesse de rotation  $N$  tr/mn, mais le constructeur est limité dans cette voie par la vitesse moyenne du piston ( $v_{mp}$ ) et les forces d'inertie qui en résultent ; celles-ci rendent délicats les problèmes de la fatigue et de l'équilibrage des organes mobiles.

Ainsi  $v_{mp}$  est imposée, donc augmenter  $N$  revient à diminuer la course  $C$  ; comme la cylindrée  $V_u$  est fixe, cela revient à augmenter la section du piston. On arrive au moteur rapide dans lequel la course est égale et même inférieure à l'alésage (moteur carré et super carré).

Si l'on augmente  $N$  sans modifier les tuyauteries et les soupapes, les pertes de charge croissent, il en résultent un mauvais remplissage des cylindres. Cela correspond en définitive à une réduction du volume de la cylindrée, facteur que nous avons supposé constant. Au problème de l'augmentation de  $x$  est donc lié le problème de la respiration du moteur.

### 2.1.3.4. La vitesse moyenne du piston

$$v_{mp} = \frac{C.N}{30} \quad (2.13)$$

La vitesse moyenne du piston  $v_{mp}$  est considérée comme un critère de sollicitation mécanique du moteur. En effet :

- Les contraintes dynamiques dues aux inerties des masses alternatives sont proportionnelles au carré de la vitesse moyenne de piston ;
- L'usure est une fonction croissante de la vitesse moyenne du piston ;

- Les pertes par frottement sont proportionnelles à  $v_{mp}^3$  (l'expérience montre qu'une  $v_{mp}$  de 24 m/s, utilisée dans les moteurs de formule 1, donne 27 % de pertes et une  $v_{mp}$  de 13 m/s donne 12 % de pertes) ;
- Le chargement thermique du moteur est proportionnel au produit de la pme par la  $v_{mp}$  (homogène à une puissance par unité de surface de piston  $kw/m^2$ ) ;
- La valeur de la pme se justifie par l'obtention d'un moteur de dimension réduite, et celle de la  $v_{mp}$  par la limite d'usure des matériaux des chemises, pistons et segments ;
- L'expérience montre que pour conserver un rendement mécanique correct et une fiabilité suffisante, la  $v_{mp}$  ne doit pas dépasser 15 m/s ;
- Les pertes par frottement dans le moteur dépendent peu de la puissance, d'où une amélioration du rendement mécanique de l'ensemble (le rendement mécanique varie entre 0,7 et 0,9) ;
- Les moteurs turbocompressés permettent une réduction de leur dimension et de leur poids pour une puissance donnée, ce qui est d'un intérêt très important pour les véhicules de transport.

Afin d'orienter notre choix pour la détermination de la pme et de la  $v_{mp}$ , nous avons réalisé une étude statistique sur plus de 100 véhicules, de petite cylindrée et de cylindrée moyenne (4 cylindres en ligne, 6 cylindres en ligne et 8 cylindres en V), fabriqués entre 1985 et 1990. Compte tenu de cette étude nous proposons les valeurs de la pme et  $v_{mp}$  suivantes :

*Moteur de véhicule industriel :*

- Pour les moteurs à aspiration naturelle :  $pme = 8 \text{ bar}$   
 $v_{mp} \leq 12 \text{ m/s}$
- Pour les moteurs turbocompressé + Air refroidi :  $pme = 11 \text{ bar}$   
 $v_{mp} \leq 12 \text{ m/s}$

*Moteur pour véhicule de tourisme :*

- Pour les moteurs à aspiration naturelle :  $pme = 7 \text{ bar}$   
 $v_{mp} \leq 15 \text{ m/s}$
- Pour les moteurs turbocompressé :  $pme = 10 \text{ bar}$   
 $v_{mp} \leq 15 \text{ m/s}$

#### 2.1.4. Puissance et vitesse de rotation

La courbe reliant puissance et vitesse de rotation a l'allure générale de la fig. 2.11. Cette courbe est obtenue par des essais réalisées directement sur le moteur (courbe caractéristique du moteur), nous avons cependant voulu trouver un modèle mathématique général donnant une bonne idée du phénomène réel.

Connaissant la puissance maximale  $P_{max}[w]$  du moteur et la vitesse de rotation correspondante  $N_p[tr/mn]$ , on peut estimer cette courbe par interpolation polynomiale du second ordre.

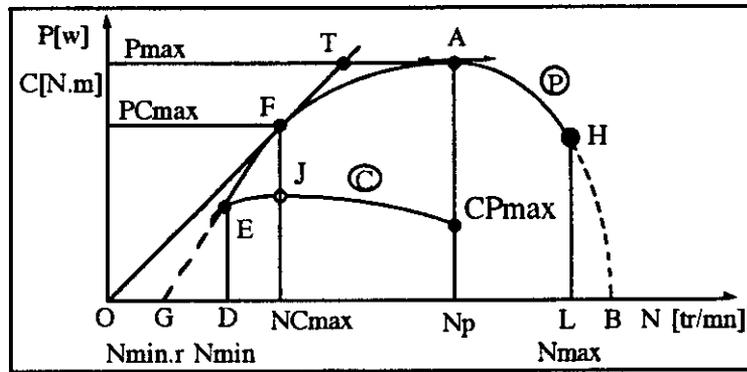


Fig. 2.11 Courbes caractéristiques d'un moteur

### Description des courbes de couples (C) et de puissances (P)

On y voit que le couple commence par croître, passe par un maximum, puis décroît. En effet, aux faibles vitesses la dépression croît avec l'augmentation de vitesse et le remplissage s'améliore progressivement.

Puis, ce remplissage décroît en raison de l'inertie des gaz et des frottements sur les parois.

Le couple moteur sera donc d'autant plus important et gardera une valeur importante que le remplissage sera plus complet, c'est-à-dire qu'il y aura moins de résistance au passage des gaz. Ceci implique des tuyauteries sans coudes brusques et des soupapes de grande surface.

La courbe de puissance qui est liée à la courbe de couple par la relation :

$$P = C \cdot \omega \quad (2.14)$$

croîtra évidemment avec le couple et la vitesse, mais lorsque le couple commencera à décroître progressivement mais légèrement, la vitesse continuant à augmenter, le produit :  $C \cdot \omega$  continuera à croître et le maximum de la courbe de puissance sera atteint après le maximum de la courbe de couple.

A une certaine vitesse, le couple décroissant rapidement, l'augmentation de vitesse ne compensant pas cette diminution, la puissance du moteur décroîtra également.

Si l'on prolonge à ses deux extrémités la courbe de puissance jusqu'à la ligne des abscisses [tr/mn], on obtient les points G et B.

En G, la puissance disponible, c'est-à-dire la puissance effective est nulle parce qu'entre O et G le moteur mal alimenté fournit une puissance indiquée juste suffisante pour vaincre les frottements du moteur et faire fonctionner les appareils auxiliaires indispensables.

Pour que le moteur puisse fournir une puissance utilisable capable de vaincre l'inertie du véhicule et le frottement des différents organes, il faudra lui donner une vitesse supérieure à la vitesse correspondant au point G qui représente la limite inférieure extrême du ralenti à vide  $N_{\min.r}$ .

La courbe de puissance commencera donc en E, quand la vitesse du moteur aura atteint le point D.

Au voisinage de F, la courbe de puissance se rapprochant de la ligne OT, la puissance variera à peu près proportionnellement à la vitesse : c'est à cette vitesse ( $N_{cmax}$ ) que le couple atteint sa valeur maximale en J. Puis, la puissance tout en augmentant varie moins vite que la vitesse pour atteindre sa valeur maximale en A, puis décroît jusqu'en H.

A la vitesse correspondant au point B la puissance serait redevenue nulle, mais pratiquement bien avant cette vitesse les organes du moteur auraient cédé. L'abscisse L correspondant au point H indique la vitesse critique  $N_{max}$  à ne pas dépasser.

Les points E et H représentent les limites de la zone d'utilisation du moteur et les points D et L les vitesses minimale et maximale d'utilisation.

*Hypothèse adoptée pour nos calculs :*

Le couple maximum ( $C_{max}$ ) est directement proportionnel au couple à puissance maximale ( $C_{pmax}$ ) :

$$C_{max} = k \cdot C_{pmax}$$

avec  $k$  variant avec le nombre de cylindres (voir fig. 2.12 et 2.13). On a la relation (2.14) :

$$P = C \cdot \omega$$

d'où

$$\frac{dP}{d\omega} = \frac{dC}{d\omega} + c$$

Au couple maximum on a :

$$\frac{dC}{d\omega} = 0 \quad \text{ce qui implique que} \quad \frac{dP}{d\omega} = c$$

On connaît les coordonnées  $X_A$  et  $Y_A$  du point où la puissance est maximale :

$$\begin{aligned} X_A &= N_p \text{ [rd/s]} \\ Y_A &= P_{max} \text{ [w]} \end{aligned}$$

Donc on peut exprimer le couple à puissance maximale  $C_{pmax}$  [N.m] par :

$$C_{pmax} = Y_A / X_A$$

On sait d'autre part que la tangente en A est horizontale donc  $Y'A = 0$  ; et en F nous avons d'après ce qui précède :

$$Y'F = YF / XF.$$

avec :

$$\begin{aligned} YF &= P_{Cmax} \text{ [w]} ; \\ XF &= N_{Cmax} \text{ [rd/s]} \end{aligned}$$

d'où :

$$Y'F = C_{max} = k \cdot C_{pmax}$$

**Interpolation polynomiale :**

On réalise une interpolation polynomiale de degré 2. La fonction cherchée est donc de la forme :

$$Y = a + b \cdot X + c \cdot X^2$$

et

$$Y' = b + 2c \cdot X$$

On a 5 inconnues : a, b, c, X<sub>a</sub> et Y<sub>a</sub>, pour les déterminer nous avons 5 équations :

$$\begin{aligned} Y_a &= a + b \cdot X_a + c \cdot X_a^2 \\ Y_b &= a + b \cdot X_b + c \cdot X_b^2 \\ Y'_a &= b + 2c \cdot X_a = 0 \\ Y'_b &= b + 2c \cdot X_b \\ Y'_b &= Y'_b / X_b \end{aligned}$$

La résolution de système nous donne :

$$\begin{aligned} a &= Y_a + c \cdot X_a^2 \\ b &= -2c \cdot X_a \\ c &= Y'_b / 4(X_a - X_b) \\ X_b &= X_a + Y'_b / 2c \\ Y_b &= X_a \cdot Y'_b + Y'_b^2 / 2c \end{aligned}$$

Les valeurs limites de N sont : N<sub>min</sub> définie au ralenti à vide et correspond à la valeur arrondie supérieure de l'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses, alors que la valeur N<sub>max</sub> est définie par N<sub>max</sub> = 1,25 N<sub>p</sub>.

La puissance P vaut alors en fonction de N :

$$P = a + b \cdot N + c \cdot N^2 \quad (2.15)$$

avec :

$$\begin{aligned} a &= P_{\max} + c (N_p \cdot \pi / 30)^2 \\ b &= -(\pi \cdot c \cdot N_p) / 15 \\ c &= 0,25 C_{\max}^2 / (P_{\max} - C_{\max} \cdot N_p \cdot \pi / 30) \end{aligned}$$

Pour les véhicules industriels, les vitesses de rotation (selon l'étude statistique) sont comprises entre 1800 et 3200 [tr/mn] tandis que pour les véhicules de tourisme, les vitesses sont de l'ordre de 4000 à 6000 [tr/mn].

**2.2. Couple**

La notion de couple est plus caractéristique des performances du moteur que celle de la puissance. En effet, un moteur idéal pour une puissance donnée est celui qui donnerait cette puissance à tous les régimes, ce qui permettrait d'utiliser pleinement ce moteur dans sa plage d'utilisation.

Pour un tel moteur, la courbe de couple serait une courbe d'isopuissance. Ce moteur est irréalisable ; cependant, si la courbe de couple du moteur se rapproche de la courbe d'isopuissance, il est aisé de concevoir une boîte de vitesse qui donne une puissance de

sortie voisine de la puissance nominale pour tous les régimes de rotation de l'arbre de sortie.

### 2.2.1. Couple à puissance maximale

De l'étude statistique on peut déterminer le coefficient  $k$  reliant le couple maximum et le couple à puissance maximale suivant le nombre de cylindres du moteur (4, 6 ou 8 cylindres).

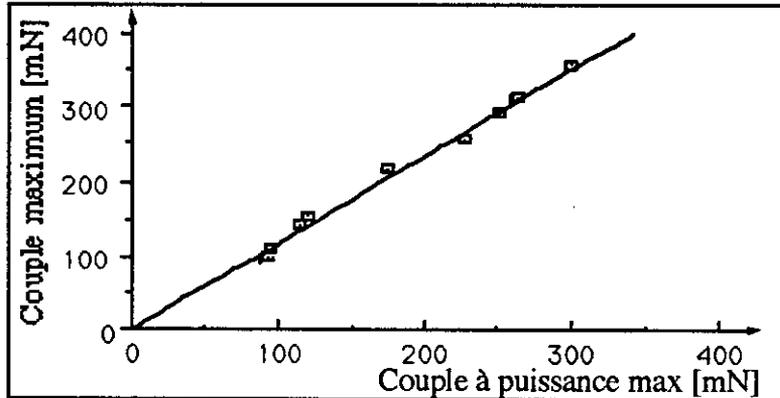


Fig. 2.12 Couple max. en fonction du couple à puissance max. pour moteur 4 cylindres

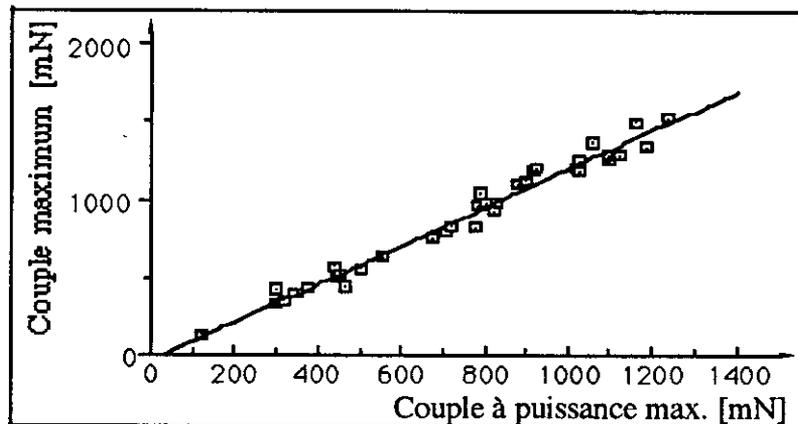


Fig. 2.13 Couple max. en fonction du couple à puissance max. pour moteur 6 et 8 cylindres

## 2.3. Paramètres géométriques du moteur

### 2.3.1. Cylindrée optimale

Lorsque la cylindrée unitaire est faible ( $100$  à  $500 \text{ cm}^3$ ), le moteur peut tourner vite ( $N \geq 6000$  [tr / mn]), son refroidissement est faible et sa construction est simple. Par contre, la perte de chaleur par les parois est importante, le remplissage est mauvais, le rendement est bas et la consommation est élevée

Le moteur de cylindrée élevée (jusqu'à 3000 cm<sup>3</sup>) doit tourner plus lentement, le remplissage est bon, le problème délicat du refroidissement par air rend la construction compliquée. Par contre la perte de chaleur par les parois est faible, la pme est élevée, le rendement est bon et la consommation est faible.

Si l'on veut une masse faible par kw et une puissance élevée par groupement de cylindres, avec un bon rendement, la cylindrée unitaire optimale se situe aux environs de 1500 cm<sup>3</sup> avec N voisin de 3000 tr/mn.

Par contre, pour un moteur de compétition, il doit avoir une puissance volumique élevée, sans souci du rendement, donc de consommation. La cylindrée unitaire descend jusqu'à 100 cm<sup>3</sup>, avec une vitesse de rotation voisine de 10 000 tr/mn .

Avec les données et les hypothèses définies précédemment, on peut calculer le diamètre et la course. En effet, l'équation (2.12) nous permet de calculer la cylindrée en se fixant la pression moyenne effective, la vitesse de rotation et la puissance.

$$V_u = \frac{P_{\text{eff}}}{p_{\text{me}} \cdot x \cdot n_c}$$

avec :

$$x = \frac{N}{2 \cdot 60}$$

d'autre part cette même cylindrée est donnée en fonction de la course et du diamètre de l'alésage

$$V_u = C \cdot \frac{\pi D^2}{4} \quad (2.16)$$

Avec :

- C : La course [m] ;
- D : Le diamètre de l'alésage [m].

### 2.3.2. Rapport course sur alésage

Si la vitesse de rotation est généralement imposée, la course l'est en fonction de la vitesse moyenne de piston. Il arrive cependant que la course soit limitée pour d'autres raisons comme l'encombrement.

L'expérience montre que le rapport course sur alésage (C/D), sauf cas particulier est compris dans la plage de valeurs 1,6 et 0,6.

Lorsque le diamètre du piston D est trop grand par rapport à la course C (moteur super carré), les échanges thermiques entre la chambre de combustion et la chemise sont trop faibles, provoquant ainsi un échauffement de la tête du piston soumise à des efforts de pression énormes (efforts proportionnels au carré de l'alésage D), l'optimum se situant à C/D = 1,35.

D'autre part, un tel moteur donne trop de pression dans les rapports volumétriques ; en effet, plus l'alésage est grand, plus l'imprécision du volume mort est grande. L'intérêt de réduire la course (par rapport à l'alésage) est de :

- Diminuer la vmp ;

- D'utiliser un vilebrequin ayant une excentricité plus faible et d'augmenter ainsi le recouvrement maneton-tourillon d'où une plus grande rigidité torsionnelle.

L'équation (2.13) nous permet d'écrire la relation donnant la course C :

$$C = \frac{30 \cdot v_{mp}}{N}$$

L'équation (2.14) nous permet d'écrire la relation donnant le diamètre D, en exprimant C par sa valeur :

$$D = \sqrt{\frac{4V_u \cdot N}{30 \pi \cdot v_{mp}}} \quad (2.17)$$

### 2.3.3. Longueur de bielle et rayon de la manivelle

Le rapport longueur de la bielle sur le rayon de manivelle, appelé lambda, doit être en général, compris entre 3,1 et 4,5 pour éviter des efforts latéraux importants entre la chemise et le piston, dus à l'inclinaison de la bielle.

### 2.3.4. Architecture du moteur

Afin de définir complètement les caractéristiques du moteur, nous devons indiquer le type de moteur à retenir (moteur en ligne ou moteur en "V"), ainsi que l'architecture du vilebrequin correspondant (vilebrequin à plat, en croix ou en quadrature). La disposition des cylindres et le type de vilebrequin sont le plus souvent imposées par l'application.

## 2.4. Paramètres internes du moteur

### 2.4.1. Injection directe

L'injection directe possède les avantages suivants :

- L'allumage du combustible à lieu autour des gouttelettes au lieu d'attendre qu'il soit vaporisé par une paroi chaude, il en résulte une réduction du retard à l'inflammation, c'est à dire un meilleur contrôle de la combustion.
- Elle permet de démarrer avec un taux de compression modéré, ce qui compense en grande partie l'excès de pression maximale de combustion sur le piston par rapport à la préchambre.

L'injection directe améliore la consommation spécifique par rapport à l'injection indirecte d'environ 15%.

### 2.4.2. Préchambre de combustion

La préchambre (cas de l'injection indirect) permet de diminuer la pression maximale du cycle, solution appréciable dans le cas de cycle suralimenté où la pression maximale est importante.

La perte de pression sur le piston des moteurs à préchambre est obtenue par la perte d'énergie des gaz de combustion au cours de leur passage à travers le col de communication avec la chambre principal. L'injection indirecte permet aussi de donner

des moteurs moins bruyants car les variations de pression sont moins brutales. Le volume de la préchambre est environ de 3/10 du volume mort total.

#### 2.4.3. Pression de suralimentation

L'expérience montre que les moteurs équipant les véhicules de tourisme, admettent une pression de suralimentation variant entre 1,2 et 3 bar. Pour les moteurs de véhicules industriels, la pression de suralimentation peut varier de 1,5 à 14 bar. Pour les pressions de suralimentation importantes, on utilise des turbocompresseurs avec chambre de combustion.

#### 2.4.4. Pression maximale du cycle

- La pression maximale du cycle pour moteur de véhicule industriel suralimenté se situe entre: 130 et 150 bars. Cette pression maximale dépend de la quantité de mélange admis, c'est à dire de la pression de suralimentation et de la qualité de l'injection.

- La pression maximale du cycle pour moteur de véhicule industriel à aspiration naturelle se situe entre 50 et 100 bar selon le type de moteur.

#### 2.4.5. Rapport volumétrique $\epsilon$

Le rendement est une fonction croissante du taux de compression. Toutefois, le taux de compression est limité par l'auto-inflammation du carburant : cliquetis ou détonation.

Le moteur à essence, supporte difficilement un rapport volumétrique égal à 12. Cette limite est imposée au moteur à explosion par la détonation.

Pour que le moteur Diesel puisse démarrer, la température doit être suffisante en fin de compression pour assurer la combustion au point mort haut.

Dans les conditions atmosphériques européennes, l'expérience montre qu'un moteur sans préchauffage, démarre mal si le rapport volumétrique  $\epsilon$  est inférieur à 14. Nous ne connaissons pas une expérience propre aux conditions atmosphériques algériennes, bien qu'il existe une différence appréciable entre les deux climats. Généralement, on admet que :  $14 \leq \epsilon \leq 25$ .

La connaissance de la puissance maximale  $P_{max}$  nous permet de déterminer une valeur approchée du rapport volumétrique  $\epsilon$ . Une étude statistique sur 25 moteurs Diesel ayant des caractéristiques différentes, tous types confondus, nous a conduit établir une loi reliant le rapport volumétrique  $\epsilon$  à la puissance  $P$ .

Cette loi est de la forme :

$$\epsilon = a + 1 / (b \cdot P + c) \quad (2.18)$$

Quand  $P$  tend vers l'infini  $\epsilon$  tend vers 14 d'où  $a = 14$ . De plus on se fixe 2 points :

$$\epsilon_1 = 15 \text{ pour } P_1 = 300 \text{ kW}$$

$$\epsilon_2 = 23 \text{ pour } P_2 = 30 \text{ kW}$$

On a alors à résoudre le système suivant :

$$\begin{aligned} 15 &= a + 1 / (300b + c) \\ 23 &= a + 1 / (30b + c) \end{aligned}$$

Ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} b &= 3,29 \cdot 10^{-3} \\ c &= 0,01234 \end{aligned}$$

Finalement on obtient :

$$\epsilon(P) = 14 + 1000 / (3,29 \cdot P - 12,34) \quad (2.19)$$

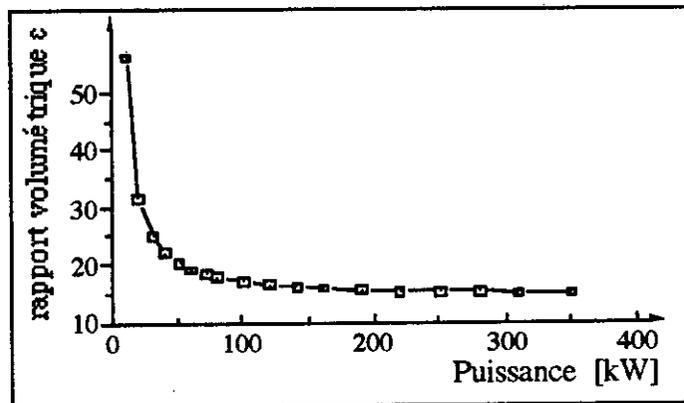


Fig. 2.14 Rapport volumétrique en fonction de la puissance

On définit le volume mort (ou le volume au point mort haut) par :

$$V_0 = \frac{1}{\epsilon - 1} V_u$$

avec :

$$V_u = \frac{\pi D^2}{4} C ; \text{ volume de la cylindrée unitaire}$$

où :

- C : La course du piston ;
- D : le diamètre de l'alésage du piston.

Le volume au point mort bas est désigné par  $V_1$ , tel que :

$$V_1 = V_0 + V_u = V_0 \cdot \epsilon$$

## 2.5. Facteurs de similitude

L'étude des lois de similitude des moteurs alternatifs à combustion interne montre que toutes les contraintes mécaniques sont proportionnelles au carré de la vitesse moyenne de piston, c'est à dire au produit de la vitesse de rotation par la course. La longévité et la fiabilité d'un moteur dépendent donc de cette grandeur. Il a été vérifié que le coût du service après vente et celui de la maintenance sont proportionnels au cube de ce facteur. On sait ainsi que, pour un moteur devant tourner en continu, il faut rester entre 9 et 10 m/s, pour un véhicule industriel la vitesse du piston est de l'ordre de 12 à 13 [m/s].

La pression moyenne effective, est le deuxième facteur de similitude des moteurs alternatifs à combustion interne. Elle est proportionnelle au taux de suralimentation (pour un taux de 3,5 par exemple, la pme est voisine de 2000 kPa).

## 2.6: Mode de refroidissement

Les moteurs très chargés théoriquement ne peuvent être refroidis que par l'eau dont le coefficient d'échange avec les parois est 40 fois supérieur à celui de l'air. Le liquide reste de nos jours, de loin, le meilleur mode de refroidissement. En mettant le circuit sous pression, sa température peut monter jusqu'à la limite de ce qu'acceptent les joints actuellement sur le marché, d'où un gain notable à la fois sur la surface des raideurs et sur le rendement du moteur.

La chemise d'eau peut entourer chaque cylindre indépendant, ce qui lui confère les avantages du moteur à refroidissement par air mais avec un encombrement et un poids moindres. Il reste néanmoins que pour certaines applications particulières, on préfère le refroidissement à l'air, au refroidissement à l'eau.

### 3. CYCLES THERMODYNAMIQUES

L'étude thermique du moteur à essence et du moteur Diesel est une phase préliminaire au dimensionnement des différents organes de ces derniers. Cette étude permet de déterminer la loi d'évolution de la pression et de la température des gaz dans les différentes phases du cycle thermodynamique en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin.

L'étude des cycles thermodynamiques a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs, dont les améliorations successives ont aboutit aux cycles utilisés de nos jours.

#### 3.1. Définition

On appelle cycle thermodynamique une série de transformations que subit une masse de gaz depuis son entrée dans le cylindre jusqu'à sa sortie dans l'atmosphère, avec variation de pression, de volume, de température et de composition chimique.

#### 3.2. Cycle à quatre temps

Soit le schéma (fig.2.15) représentant un cylindre muni de deux orifices AD et EC ; le piston P relié à un arbre moteur O par une bielle BA articulée sur une manivelle OA. Le piston se déplace entre deux positions extrêmes dites : point mort haut (PMH) et point mort bas (PMB), partant du point mort haut.

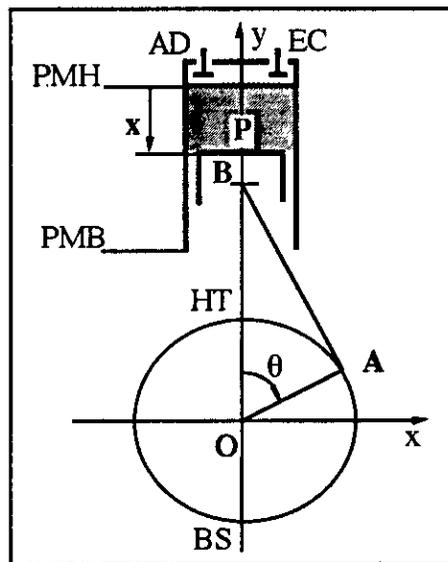


Fig. 2.15 Schéma du cycle à quatre temps

##### 3.2.1. Premier temps : Admission

L'orifice AD est ouvert, mettant en communication le cylindre avec le mélange gazeux préparé pour y être introduit ; l'orifice EC est fermé. Le piston se déplace de haut en bas. L'extrémité A de la manivelle partant de la position HT correspondant au PMH, tourne en restant à droite de l'arbre O. Cette descente provoque une dépression et par conséquent une aspiration des gaz. Lorsque la bielle atteint la position BS correspondant au PMB, on ferme l'orifice AD.

### 3.2.2. Deuxième temps : Compression

Les orifices AD et EC sont fermés, le piston se déplace de bas en haut. La manivelle remonte à gauche de l'arbre O et les gaz admis au premier temps sont comprimés.

### 3.2.3. Troisième temps : Explosion et détente

Les orifices AD et EC restent fermés ; au moment où le piston arrive au PMH on fait jaillir une étincelle électrique qui provoque l'explosion du mélange gazeux comprimé (cycle essence). Les gaz chassent le piston vers le bas c'est la détente. L'extrémité de la manivelle s'est déplacée comme dans le premier temps.

### 3.2.4. Quatrième temps : Echappement

L'orifice EC est ouvert mettant en communication le cylindre avec l'atmosphère, l'orifice AD est fermé. Les gaz s'échappent dans l'atmosphère chassés par le mouvement du piston de bas en haut. Quand le piston est revenu au PMH on ferme l'orifice EC, l'extrémité de la manivelle pendant ce quatrième temps s'est déplacée comme durant le deuxième temps.

Le moteur ainsi réalisé fonctionne selon un cycle correspondant à quatre courses du piston, deux ascendantes et deux descendantes ; la manivelle fait deux révolutions autour de l'arbre moteur, soit un angle de 720 degrés.

L'examen de ce cycle montre que le moteur produit l'effort pendant un temps sur quatre (troisième temps du cycle). IL est donc nécessaire d'adjoindre un volant à l'extrémité de l'arbre pour assurer la continuité du cycle moteur et réaliser des moteurs à plusieurs cylindres pour régulariser le couple sur l'arbre.

## 3.3. Représentation graphique des cycles

Les cycles théoriques ou idéaux sont difficilement réalisables et encore plus difficile est la construction d'une machine qui opère selon les cycles théoriques. Bien que basés sur des considérations théoriques et empiriques, les cycles quasi-réels permettent une approche meilleure de la réalité et ceci en l'absence de cycles réels.

Le cycle est la courbe représentant la variation des pressions dans le cylindre en fonction des déplacements du piston.

### 3.3.1. Cycle Beau de Rochas

**Cycle théorique : (0-1-2-3t-7t-1-0)**

Si on considère le cycle à essence (fig. 2.16) nous avons :

– *Premier temps* (admission) : il y a communication entre l'atmosphère et le cylindre, la pression est donc sensiblement égale à la pression atmosphérique, droite Ae ;

– *Deuxième temps* (compression et combustion) : la pression croît suivant une adiabatique, courbe Be ; au PMH, l'explosion provoque une brusque augmentation de pression sans modification de volume, droite Ce ;



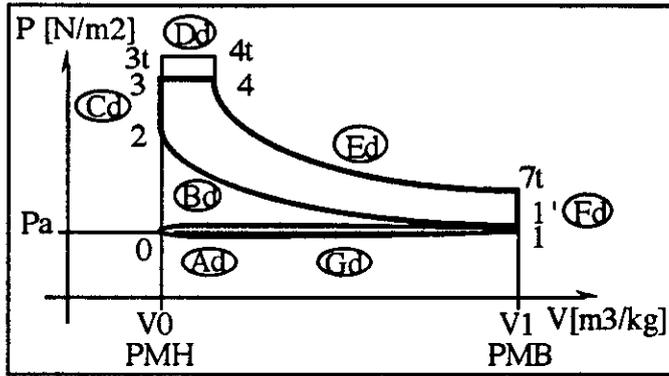


Fig. 2.17. Allure du cycle Diesel utilisé

– *Quatrième temps* (échappement) : la soupape d'échappement étant ouverte, le piston refoule les gaz à la pression atmosphérique, à volume constant droite Fd, puis à pression pratiquement constante, droite Gd.

- Ad : Admission, augmentation de volume à pression constante ;
- Bd : Compression polytropique ;
- Cd : Combustion à volume constant ;
- Dd : Combustion à pression constante ;
- Ed : Détente polytropique ;
- Fd : Echappement, diminution de pression à volume constant ;
- Gd : Echappement, diminution de volume à pression constante.

### 3.3.3. Cycle pratique

- *Premier temps* : la pression se maintient à la pression atmosphérique ;
- *Deuxième temps* : la pression finale est inférieure à la pression théorique (point 3 au lieu de 3t) car le volume du gaz admis est moindre que précédemment (étrépage du mélange, inertie) et il y a échange de température avec le cylindre ;
- *Troisième temps* : la combustion n'étant pas instantanée, le piston a eu le temps de se déplacer, la masse gazeuse aura cédé un peu de chaleur aux parois d'où la détente 4–7t ;
- *Quatrième temps* : l'équilibre des pressions ne se fait pas instantanément, la courbe (1'– 0) est au dessus de la pression atmosphérique. Le travail effectué par le moteur est inférieur à celui obtenu avec le cycle théorique. [ce qui donne le diagramme en trait fort de la fig. 2.16 pour le cycle à essence et celui de la figure 2.17 pour le cycle Diesel].

### 3.3.4. Cycle utilisé pour les calculs

Pour rendre possibles les différents calculs relatifs à ces cycles, nous devons faire les approximations suivantes :

- L'admission suit une évolution isobare à pression inférieure à la pression ambiante ;
- Toutes les soupapes sont ouvertes ou fermées au PMH et au PMB ;
- Les gaz résiduels se détendent au commencement de l'admission ;
- L'échappement est isobare à pression supérieure à la pression ambiante ;
- Le fluide en évolution est assimilé à un gaz parfait inerte ;



## Allure du cycle Diesel utilisé pour les calculs: (0-1-5-2-3-4-6t-6-7-1)

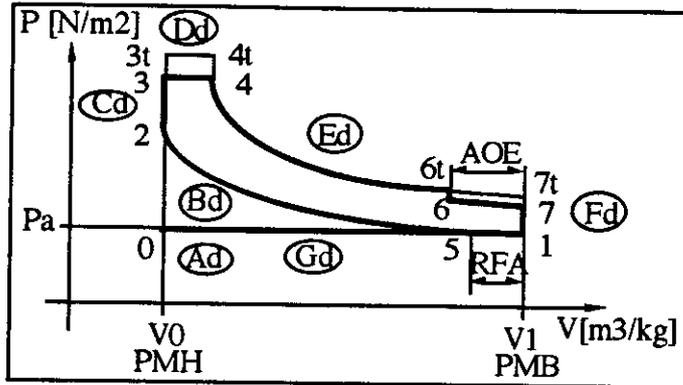


Fig. 2.19 Allure du cycle Diesel utilisé pour les calculs

Finalement on obtient le diagramme représenté par la figure 2.18 pour l'essence et la figure 2.19 pour le Diesel, dans lequel la surface (travail résistant) de la petite boucle est réduite, et la surface (travail moteur) de la grande boucle est augmentée par rapport à celle du diagramme pratique.

L'examen du diagramme réel (par appareils enregistreurs) permet de faire le réglage et la mise au point d'un moteur en fournissant une image exacte des phénomènes du cycle.

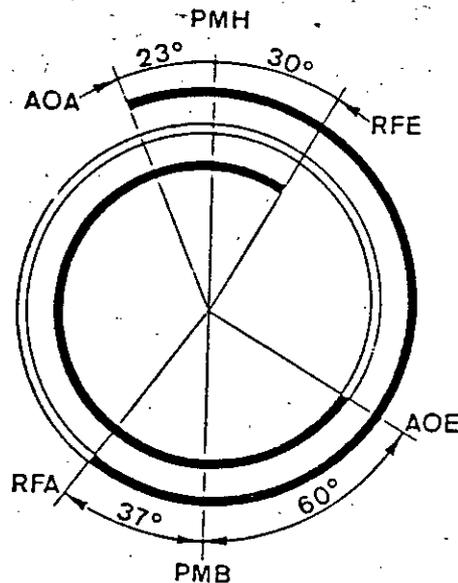


Fig. 2.20 Diagramme de distribution

Le diagramme de la distribution dépend de plusieurs paramètres, tels que : La puissance, le régime, la cylindrée, la tuyauterie en aval et en amont, etc.

L'étude statistique fournie en annexe 1 donne les valeurs de RFA et AOE [en degré] sur le tableau suivants :

| Types de moteurs      | Valeurs maximales |     | Valeurs minimales |     | Valeurs moyennes |     |
|-----------------------|-------------------|-----|-------------------|-----|------------------|-----|
|                       | AOE               | RFA | AOE               | RFA | AOE              | RFA |
| 4 cyl. aspirés        | 67                | 60  | 27                | 13  | 47               | 36  |
| 4 cyl. suralimentés   | 56                | 55  | 20                | 13  | 41               | 33  |
| 6 cyl. aspirés        | 67                | 52  | 48                | 32  | 57               | 42  |
| 6 cyl. suralimentés   | 72                | 49  | 40                | 26  | 55               | 33  |
| 6 cyl. sural. refroid | 68                | 49  | 46                | 25  | 58               | 36  |
| 8 cyl. suralimentés   | 71                | 38  | 42                | 29  | 54               | 35  |

Dans le programme, le choix de ces valeurs est donné à l'utilisateur .

### 3.4. Calcul des cycles thermodynamiques

Nous nous proposons de calculer les différentes phases du cycle thermodynamique se rapportant au cycle Beau de Rochas (fig. 2.18) et au cycle Diesel mixte (fig. 2.19).

#### 3.4.1. Volume des gaz dans le cylindre

L'expression du volume des gaz dans le cylindre est donnée en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin selon le type d'attelage mobile du moteur considéré. Le volume des gaz pour une position  $x$  quelconque du piston à partir du point mort haut (PMH) est donné par la relation :

$$V_{(x)} = \frac{\pi D^2}{4} \cdot x + V_0 \quad (2.20)$$

Avec :

$V_0$  : volume de la chambre de combustion ou volume mort ;

$D$  : diamètre de l'alésage.

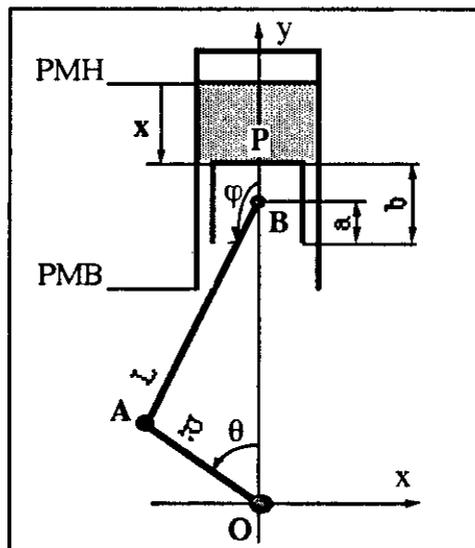


Fig. 2.21 Variation du volume en fonction de l'angle  $\theta$

Le déplacement  $x$  du piston est déterminé en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin, il est dépendant de l'attelage mobile du moteur considéré.

### 3.4.1.1. Attelage mobile du moteur en ligne (fig.2.21)

Calculons le déplacement  $x$  du piston à partir du PMH ; soit  $P$ , un point appartenant au piston, sa position est donnée par :

$$\vec{OP} = \vec{OB} + \vec{BP} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \cdot \cos\theta - L \cdot \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b - a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur déplacement du piston est donné par :

$$\begin{aligned} \vec{x} &= -\left( (R + L + b - a)\vec{y}_0 - \vec{OP} \right) \\ \vec{x} &= -\left( (R + L + b - a)\vec{y}_0 - (R \cdot \cos\theta - L \cdot \cos\varphi + b - a)\vec{y}_0 \right) \\ \vec{x} &= -\left( R(1 - \cos\theta) + L(1 + \cos\varphi) \right)\vec{y}_0 \end{aligned}$$

donc :

$$x = \left( R(1 - \cos\theta) + L(1 + \cos\varphi) \right)$$

d'où le volume des gaz en fonction de l'angle du vilebrequin :

$$V(\theta) = \frac{\pi D^2}{4} \left( R(1 - \cos\theta) + L(1 + \cos\varphi) \right) + V_0 \quad (2.21)$$

avec :

$$\cos\varphi = -\sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2} \sin^2\theta}$$

### 3.4.1.2. Attelage mobile du moteur en "V" (système bielle-biellette fig.2.22)

Calculons le déplacement  $x_1$  du piston 1 à partir du PMH ; soit  $P_1$ , un point appartenant au piston 1, sa position est donnée par :

$$\vec{OP}_1 = \vec{OB}_1 + \vec{B}_1P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ R \cos\theta - L_1 \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 - a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

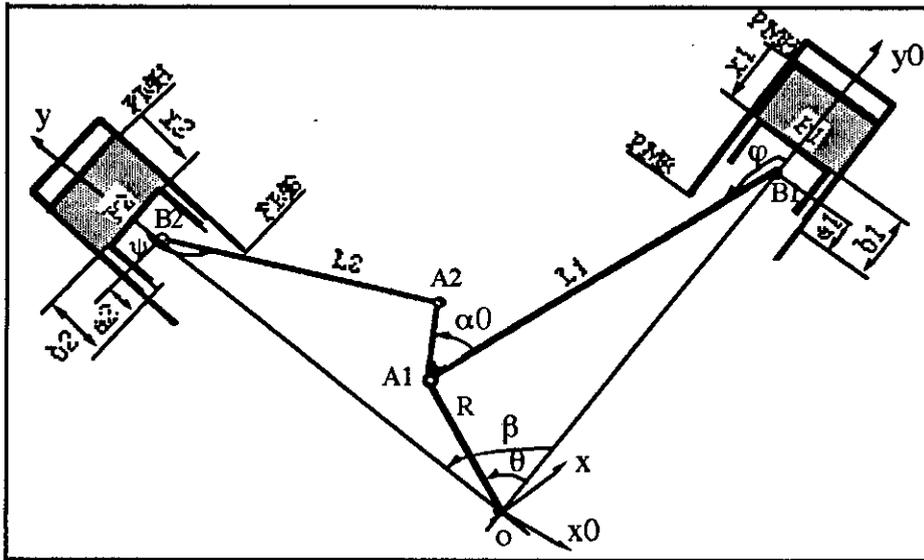


Fig 2.22 Variation du volume dû au piston 1 et 2

Le vecteur déplacement du piston 1 est donné par :

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= - \left( (R + L_1 + b_1 - a_1) \vec{y}_0 - \vec{OP}_1 \right) \\ \vec{x}_1 &= - \left( R (1 - \cos\theta) + L_1 (1 + \cos\varphi) \right) \vec{y}_0 \end{aligned}$$

donc :

$$x_1 = \left( R (1 - \cos\theta) + L_1 (1 + \cos\varphi) \right)$$

d'où le volume des gaz en fonction de l'angle du vilebrequin :

$$V_1(\theta) = \frac{\pi D^2}{4} \left( R (1 - \cos\theta) + L_1 (1 + \cos\varphi) \right) + V_0 \quad (2.22)$$

avec :

$$\cos\varphi = - \sqrt{1 - \frac{R^2}{L_1^2} \sin^2\theta}$$

Soit  $x_2$  le déplacement du piston 2 à partir de PMH,  $P_2$  est un point appartenant au piston 2, sa position est donnée par :

$$\vec{OP}_2 = \vec{OB}_2 + \vec{B}_2\vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ R \cos(\theta - \alpha_0) - r \cos(\varphi + \beta + \alpha_0) - L_2 \cos\psi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 - a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix}$$

Le vecteur déplacement du piston 2 est donné par :

$$\begin{aligned} \vec{x}_2 &= -\left( (R + r + L_2 + b_2 - a_2) \vec{y} - \overrightarrow{OP_2} \right) \\ \vec{x}_2 &= -\left( R(1 - \cos(\theta - \alpha_0)) + r(1 + \cos(\varphi + \beta - \alpha_0)) + L_2(1 + \cos\psi) \right) \vec{y} \end{aligned}$$

donc :

$$x_2 = -\left( R(1 - \cos(\theta - \alpha_0)) + r(1 + \cos(\varphi + \beta - \alpha_0)) + L_2(1 + \cos\psi) \right)$$

d'où le volume des gaz en fonction de l'angle du vilebrequin :

$$V_2(\theta) = \frac{\pi D^2}{4} \left( R(1 - \cos(\theta - \alpha_0)) + r(1 + \cos(\varphi + \beta - \alpha_0)) + L_2(1 + \cos\psi) \right) + V_0 \quad (2.23)$$

avec :

$$\cos\varphi = -\sqrt{1 - \frac{R^2}{L_1^2} \sin^2\theta} \quad \text{et} \quad \cos\psi = -\sqrt{1 - \sin^2\psi}$$

### 3.4.1.3. Attelage mobile du moteur en V (système : bielle-bielle à fourche)

#### a) Volume des gaz relatif au déplacement du piston 1 :

L'expression du vecteur déplacement est la même que celle relative au système (bielle-bielle) en prenant  $L_1 = L$ , d'où :

$$V_1(\theta) = \frac{\pi D^2}{4} \left( R(1 - \cos\theta) + L(1 + \cos\varphi) \right) + V_0 \quad (2.24)$$

#### b) Volume des gaz relatif au déplacement du piston 2 :

L'expression du vecteur déplacement est la même que celle relative au système (bielle-bielle) en prenant  $L_2 = L$  et  $r = 0$ , d'où :

$$V_2(\theta) = \frac{\pi D^2}{4} \left( R(1 - \cos(\theta - \alpha_0)) + L(1 + \cos\psi) \right) + V_0 \quad (2.25)$$

avec :

$$\cos\varphi = -\sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2} \sin^2(\theta - \alpha_0)}$$

### 3.4.2. Calcul des différentes phases du cycle

- Loi des gaz parfaits :

$$pv = rT \quad (2.26)$$

$p$  : pression du fluide [Pa] ;

v : volume massique du fluide [m<sup>3</sup>/kg] ;  
 r : constante des gaz parfaits [J/kg°K] ;  
 T : température absolue [°K].

– Relation de MAYER

$$c_p(T) = c_v(T) + r \quad (2.27)$$

– Coefficient de POISSON

$$\gamma(T) = c_p(T) / c_v(T) \quad (2.28)$$

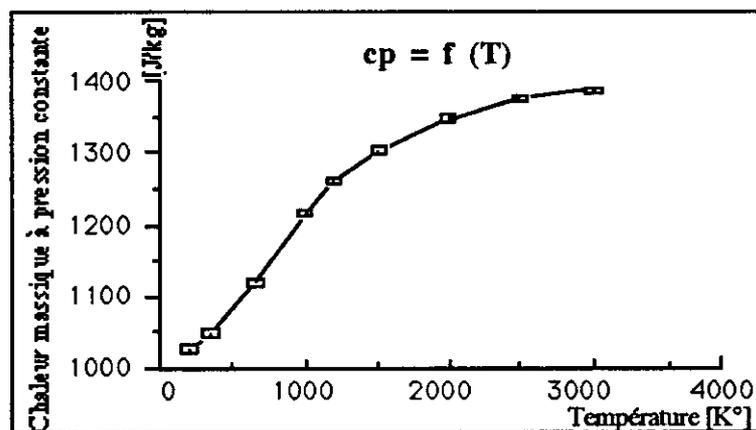
**a) Modélisation de  $c_p$ ,  $c_v$ ,  $r$  et  $\gamma$  en fonction de la température T**

On cherche à approximer de façon la plus réaliste possible les courbes de  $c_p$ ,  $c_v$  et  $\gamma$  établies par Keenan et Kaye pour un excès d'air voisin de 2 [56]. Pour cela on utilise une interpolation à l'aide des Splines Cubiques.

**Coordonnées des points charnières :**

| T [°K] | $c_p$ [J/kg°K] | $c_v$ [J/kg°K] | r [J/kg°K] | $\gamma$ |
|--------|----------------|----------------|------------|----------|
| 200    | 1025           | 737            | 288        | 1,390    |
| 350    | 1046           | 758            | 288        | 1,379    |
| 650    | 1120           | 831            | 289        | 1,347    |
| 1000   | 1215           | 926            | 289        | 1,312    |
| 1200   | 1260           | 971            | 289        | 1,298    |
| 1500   | 1304           | 1015           | 289        | 1,285    |
| 2000   | 1348           | 1059           | 289        | 1,273    |
| 2500   | 1375           | 1068           | 289        | 1,266    |
| 3000   | 1390           | 1101           | 289        | 1,262    |

La représentation des courbes obtenues est donnée dans les figures qui suivent :



*Fig. 2.23 Chaleur massique à pression constante en fonction de la température*

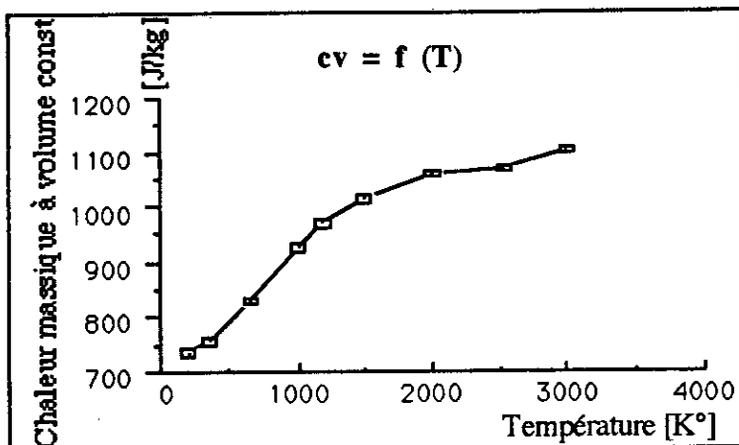


Fig. 2.24 Chaleur massique à volume constant en fonction de la température

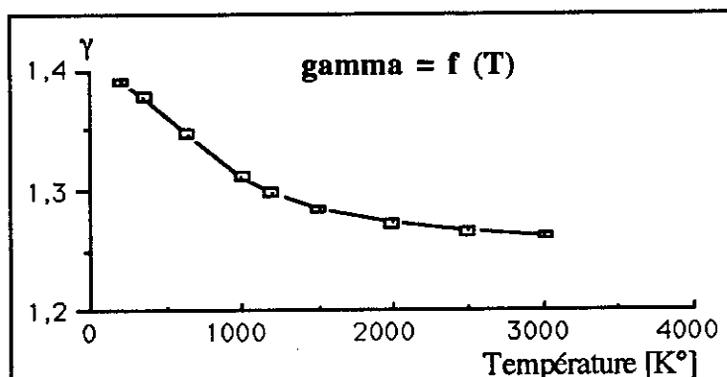


Fig. 2.25 Gamma en fonction de la température

### 3.4.2.1. Admission (0-1)

La soupape d'admission étant ouverte, le mélange air-combustible (cas du moteur à essence) est aspiré du carburateur à travers le collecteur d'admission sous l'effet de la course descendante du piston et occupe avec les produits de fumés non balayés, la totalité de la chambre de combustion.

La pression d'admission est généralement prise égale à 1 bar et la température d'admission est au voisinage de  $300 \text{ }^\circ\text{K}$ .

### 3.4.2.2. Compression (1-2)

#### A. Evolution 1-5 :

La position du point 5 correspond au retard de la fermeture des soupapes d'admission. Pour  $RFA = \alpha$ , cela veut dire que la soupape d'admission est fermée pour  $\theta = (180 + \alpha)$ .

Le volume du cylindre au moment de la fermeture des soupapes d'admission  $V_5$  est donnée par les relations ( 2.21) à (2.25) selon le type de moteur employé, en précisant bien la valeur de l'angle  $\theta$ .

**a) Cycle à aspiration naturelle :**

Pour les moteurs à aspiration naturelle l'évolution 1-5 se fait à pression constante.

**b) Cycle suralimenté :**

$P_5$  est la pression de suralimentation, elle varie de 1,2 à 14 bar selon le type de moteur.  $T_5$  correspond à la température de l'air à la sortie du turbocompresseur. Deux cas peuvent se présenter pour le calcul de  $T_5$  :

1 - L'air sortant du turbocompresseur traverse un réfrigérant qui le ramène à la température d'admission  $T_1$ , donc  $T_5 = T_1$ .

2 - Le turbocompresseur n'est pas suivi d'un réfrigérant d'air et donc  $T_1$  varie.

*Calcul de  $T_5$  :*

Le compresseur est supposé isentropique, c'est à dire :

$$\frac{T_{5is}}{T_1} = \left( \frac{P_5}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

d'où :

$$T_{5is} = T_1 \left( \frac{P_5}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (2.29)$$

Le rendement isentropique du compresseur est donné par :

$$\eta_{is} = \frac{\Delta T_{is}}{\Delta T_{réel}} = \frac{T'_5 - T_1}{T_5 - T_1} \quad (2.30)$$

d'où :

$$T_5 = T_1 + \frac{\Delta T_{is}}{\eta_{is}}$$

**B. Evolution 5-2 :**

La compression a lieu pendant la course ascendante du piston, après fermeture de la soupape d'admission. C'est une évolution polytropique réversible sans transvasement, de coefficient  $\gamma$ , on a alors :

$$PV^\gamma = \text{const.}$$

d'où l'expression de la pression en fonction de l'angle du vilebrequin :

$$P(\theta) = P_5 \cdot \left( \frac{V_5}{V(\theta)} \right)^\gamma$$

Avec l'hypothèse des gaz parfaits, on déduit l'expression de la température en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin :

$$T_{(\theta)} = T_5 \cdot \left( \frac{V_5}{V_{(\theta)}} \right)^{(\gamma-1)}$$

Le point 2 est au point mort haut, c'est à dire on a  $V_2 = V_0$ .

### 3.4.2.3. Combustion (2-4)

#### A. Evolution 2-3 :

Nous rappelons que la combustion s'effectue à volume constant entre les points 2 et 3 et à pression constante entre 3 et 4. La répartition du combustible pendant la combustion est  $z$  (pourcentage de combustible) à volume constant et  $(1-z)$  à pression constante. Si  $Q$  est l'énergie représentée par la masse du combustible entre le point 2 et 3t alors on a :

$$Q_{23t} = m_c \cdot P_{ci} \quad (2.31)$$

Cette énergie peut aussi se représenter comme le produit de la masse du mélange, contenu dans le cylindre, par la capacité calorifique de l'air à volume constant et par l'augmentation de la température au cours de la combustion. L'évolution du point 2 au point 3t se traduit par la relation :

$$m \cdot \int_{T_2}^{T_{3t}} cv dt = P_{ci} \cdot m_c \cdot z \cdot \eta_c \quad (2.32)$$

avec :

- $P_{ci}$  : pouvoir calorifique inférieur ;
- $m_c$  : masse de combustible injecté pendant le cycle ;
- $z$  : pourcentage de combustible injecté pendant la phase 2-3t, pour le moteur à essence  $z = 1$  puisque tout le combustible est brûlé pendant cette phase ;
- $\eta_c$  : rendement de la combustion ( $\eta_c = 0.92$ ) ;
- $m$  : masse d'air au point 2 + masse de combustible injecté entre 2 et 3t, ( $m = m_a + m_c \cdot z$ ) ;
- $cv$  : chaleur massique du mélange à volume constant .

Connaissant la fonction  $cv = f(T)$ , on peut alors calculer l'intégrale défini par (2.32) en fonction de  $T_{3t}$ , température théorique de fin de combustion à volume constant. Il faut noter que ce calcul ne tient pas compte de la variation du nombre de moles du gaz due à la réaction chimique.

La pression en fonction de l'angle du vilebrequin au point 3t est donnée par :

$$P_{3t} = P_2 \cdot \frac{T_{3t}}{T_2} \quad (2.33)$$

et

$$V_3 = V_2$$

Dans la réalité, la combustion n'est pas instantanée, donc on limite la pression maximale théorique  $P_{3t}$  à  $P_3$  telle que  $P_3 \leq P_{3t} \cdot KL$ . Le coefficient limite de la pression qui se rapproche le plus de la réalité vaut :  $KL = 0.75$ .

## B. Evolution 3 - 4 :

### a) Moteur Diesel

Durant la phase 3-4, il y a achèvement de la combustion de la masse de combustible restée de la phase 2-3. Cette évolution se fait à pression constante. Elle se traduit par l'équation :

$$m_t \cdot \int_{T_3}^{T_4} c_p dT = P_{ci} \cdot m_c \cdot (1 - z) \quad (2.34)$$

avec :

$m_t$  : masse d'air plus masse totale du combustible injecté ;

$c_p$  : chaleur massique du mélange à pression constante.

La fonction  $c_p = f(T)$  nous permet de calculer l'intégrale (2.34) en fonction de  $T_4$ , température de fin de combustion à pression constante. Le volume au point 4 est donné par :

$$V_4 = V_3 \cdot \frac{T_4}{T_3}$$

La combustion, entre le point 3 et 4, évolue à pression constante, donc :

$$P_4 = P_3$$

### b) Moteur essence

Dans le moteur à essence, la combustion s'effectue à volume constant donc le volume au point 4 est déterminé par :

$$V_4 = V_{3t} \cdot \left( \frac{P_{3t}}{P_4} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (2.35)$$

La température en ce point est donnée par :

$$T_4 = T_{3t} \cdot \left( \frac{P_4}{P_{3t}} \right) \cdot \left( \frac{V_4}{V_0} \right) \quad (2.36)$$

#### 3.4.2.4. Détente (4-7t)

On passe du point 4 au point 6t par une détente polytropique.

$$P_{(6t)} = P_4 \cdot \left( \frac{V_4}{V_{(6t)}} \right)^{\gamma} \quad (2.37)$$

La température en fonction l'angle du vilebrequin est donnée par :

$$T_{(\theta)} = T_4 \cdot \left( \frac{V_4}{V_{(\theta)}} \right)^{(\gamma-1)} \quad (2.38)$$

L'avance à l'ouverture d'échappement étant  $\alpha_1$ , ce qui veut dire que la soupape d'échappement s'ouvre pour  $\theta = (540 - \alpha_1)$ , à cet instant nous avons :

$$V_{\alpha} = x(540 - \alpha_1) \frac{\pi D^2}{4} + V_0$$

$x$  dépend de l'embellage du moteur considéré. L'avance à l'ouverture d'échappement fait subir au point 6t un décrochage. Ceci est modélisé par une homothétie de rapport  $k = 0,75$  sur les pressions des points appartenant au segment 6t - 7t. Le segment image est alors le segment 6-7 tel que :

$$P_6 = P_{6t} \cdot k$$

et

$$T_6 = P_6 \cdot \frac{T_{6t}}{P_{6t}}$$

Le point 7t correspond au prolongement de l'isentropique 4-6t, aussi il se trouve sur la même isochoire que le point 1, c'est à dire  $V_{7t} = V_1$ , donc la pression et la température en ce point sont exprimées par :

#### a) Cycle Diesel

$$P_{7t} = P_4 \cdot \left( \frac{V_4}{V_{7t}} \right)^{\gamma} = P_4 \cdot \left( \frac{V_4}{V_1} \right)^{\gamma}$$

$$T_{7t} = T_4 \cdot \left( \frac{P_{7t}}{P_4} \right) \cdot \left( \frac{V_{7t}}{V_4} \right) = T_4 \cdot \left( \frac{V_4}{V_1} \right)^{(\gamma-1)}$$

#### b) Cycle essence

Comme pour le cycle diesel la pression et la température aux points 7t et 7 sont donnés par :

$$P_{7t} = P_4 \cdot \left( \frac{V_4}{V_{7t}} \right)^{\gamma} = P_4 \cdot \left( \frac{V_4}{V_1} \right)^{\gamma}$$

$$T_{7t} = T_4 \cdot \left( \frac{P_{7t}}{P_4} \right) \cdot \left( \frac{V_{7t}}{V_4} \right) = T_4 \cdot \left( \frac{V_4}{V_1} \right)^{(\gamma-1)}$$

d'où la pression et la température au point 7 (dévaluation due à l'AOE) :

$$P_7 = k \cdot P_{7t}$$

$$T_7 = P_7 \cdot \frac{T_{71}}{P_{71}}$$

Les différentes phases du cycle que nous venons de calculer, nous permettent de tracer l'évolution du cycle moteur, pression des gaz en fonction de l'angle vilebrequin :  $P = f(\text{teta})$  et pression des gaz en fonction du volume :  $P = f(v)$ .

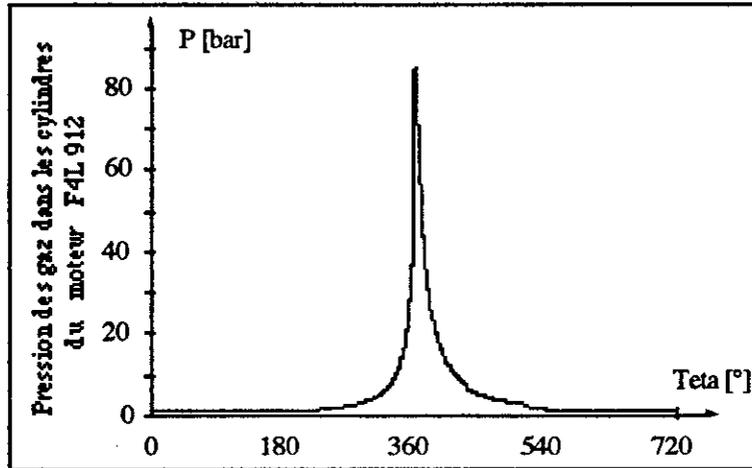


Fig. 2.26 Evolution du cycle moteur  $P = f(\text{teta})$

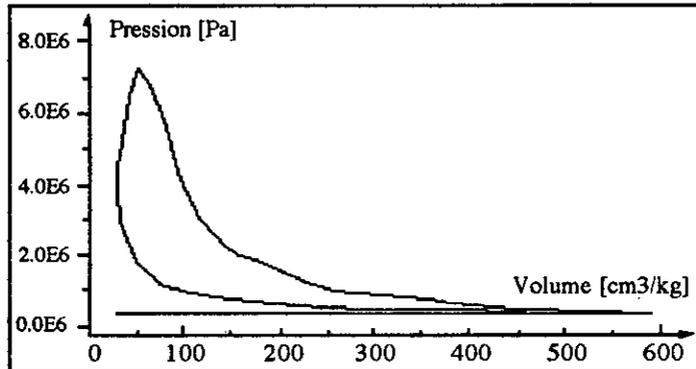


Fig. 2.27 Evolution du cycle moteur  $P = f(v)$

### 3.4.3. Température des gaz d'échappement

On fait l'hypothèse d'une détente polytropique entre le point 6t et l'atmosphère. On cherche alors la température des gaz à la pression atmosphérique. On peut écrire :

$$P_6 \cdot v_6^\gamma = P_{\text{éch}} \cdot v_{\text{éch}}^\gamma$$

D'autre part la loi des gaz parfait nous permet d'écrire :

$$P_{\text{éch}} \cdot v_{\text{éch}} = r_{\text{éch}} \cdot T_{\text{éch}}$$

d'où la température d'échappement, en considérant que  $r(\text{éch}) = r(\text{atm})$  et  $P(\text{éch}) = P(\text{atm})$

$$T_{\text{éch}} = \frac{(p_6 \cdot v_6^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}}{r_{\text{atm}}}$$

#### 3.4.4. Consommation horaire de combustible

La masse de mélange en [kg] introduite à chaque cycle pour le moteur est :

$$m_t = k_r \cdot \frac{v_t}{v}$$

avec :

$k_r$  : coefficient de remplissage = 0,75 ;

$v_t$  : cylindrée [ $\text{m}^3$ ] ;

$v$  : volume massique [ $\text{m}^3/\text{kg}$ ].

Si l'on se donne  $\xi$  le rapport masse de combustible sur masse de mélange ( $m_c/m_t$ ), on pourra calculer la masse de combustible injectée par cycle.

$$m_c = m_t \cdot \xi$$

En supposant que le moteur tourne à  $N$  tr/mn, si l'admission se fait tous les deux tours on a la consommation horaire en [kg].

$$C_h = m_c \cdot \frac{N}{2} \cdot 60$$

## 4. CINEMATIQUE ET DYNAMIQUE DE L'EQUIPAGE MOBILE

### 4.1. Cinématique de l'attelage mobile des moteurs en ligne

La conception d'un nouveau type de moteur impose l'étude mécanique de tous les organes même si ces derniers sont directement dérivés de modèles similaires déjà éprouvés industriellement. Les nouvelles conditions de fonctionnement créent de nouvelles répartitions de charges et donc un comportement différent. Si, du point de vue du motoriste, la partie "thermodynamique" est primordiale, on ne peut négliger les sollicitations aux quelles sont soumises les pièces constitutives du moteur, et dont les sollicitations proviennent principalement du cycle thermodynamique. Les deux études sont donc liées.

Cette partie concerne l'étude cinématique de l'ensemble formé par la bielle, le piston, axe de piston et la manivelle des moteurs en ligne. On suppose que la vitesse de rotation du moteur est constante.

#### 4.1.1. Mise en place des repères et définition des points :

L'étude du système bielle-manivelle nécessite la mise en place de trois repères (fig.2.28), un fixe et deux mobiles.

##### a) Repère fixe lié au cylindre : $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$O$  : Centre du vilebrequin ;

$\vec{y}_0$  : Axe du cylindre ;

$\vec{z}_0$  : Axe du vilebrequin, le volant est placé sur les  $\vec{z}_0$  positifs.

##### b) Repère mobile lié au vilebrequin : $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

$\vec{y}_1$  : porte la manivelle.

On pose :  $\theta = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$  et  $\theta' = \frac{d\theta}{dt} = \omega$ .

$\theta, \theta'$  sont respectivement l'angle de rotation du vilebrequin et la vitesse angulaire de rotation du vilebrequin considérée constante, d'où  $\theta'' = 0$ . Notons par :

$$\vec{\Omega}_{(1,0)} = \dot{\theta} \vec{z}_0$$

le vecteur rotation instantanée du repère (1) lié à la manivelle par rapport au repère (0) autour de  $\vec{z}_c$  A : est le centre de tête de bielle et R le rayon de la manivelle, donc :

$$\vec{OA} = R\vec{y}_1$$

##### c) Repère mobile lié à la bielle : $(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

$B$  : est le centre de pied de bielle ;

$\vec{y}_2$  : est lié à la bielle

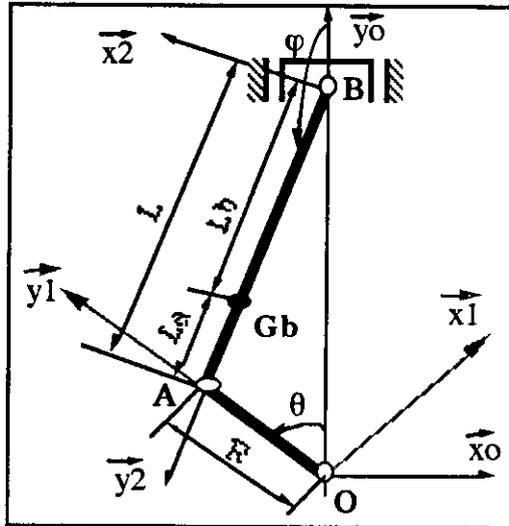


Fig. 2.28 Ensemble bielle manivelle.

On note :  $\varphi = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$  l'angle de rotation de la bielle. Le vecteur rotation instantanée de la bielle sera :

$$\vec{\Omega}_{(2/0)} = \dot{\varphi} \vec{z}_0$$

Si L est l'entr'axe de bielle :

$$\vec{BA} = L\vec{y}_2$$

On note Gb le centre de gravité de la bielle tel que :

$$\vec{BGb} = Lb\vec{y}_2$$

#### 4.1.2. Formules de passage entre repères

a) passage du repère  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  au repère  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  (fig. 2.29)

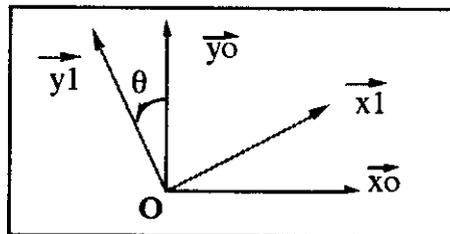


Fig. 2.29 Passage du repère (0) au repère (1)

Ce passage est fait par la projection des axes :  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$  sur  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$

$$\vec{\Omega}_{(1/0)} = \dot{\theta} \vec{z}$$

- Vecteurs position :

$$\begin{cases} \vec{x}_1 = \cos\theta \vec{x}_0 + \sin\theta \vec{y}_0 \\ \vec{y}_1 = -\sin\theta \vec{x}_0 + \cos\theta \vec{y}_0 \\ \vec{z}_1 = \vec{z}_0 \end{cases}$$

- Vecteurs vitesse :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}_1^0}{dt} = \vec{\Omega}_{(1/0)} \wedge \vec{x}_1 + \frac{d\vec{x}_1^1}{dt} = \theta' \vec{z}_0 \wedge \vec{x}_1 + \vec{0} = \theta' \vec{y}_1 \\ \frac{d\vec{y}_1^0}{dt} = \vec{\Omega}_{(1/0)} \wedge \vec{y}_1 + \frac{d\vec{y}_1^1}{dt} = \theta' \vec{z}_0 \wedge \vec{y}_1 + \vec{0} = -\theta' \vec{x}_1 \\ \frac{d\vec{z}_1^0}{dt} = \vec{0} \end{cases}$$

b) Passage du repère (O,  $\vec{x}_0$ ,  $\vec{y}_0$ ,  $\vec{z}_0$ ) au repère (B,  $\vec{x}_2$ ,  $\vec{y}_2$ ,  $\vec{z}_2$ ) (fig. 2.30)

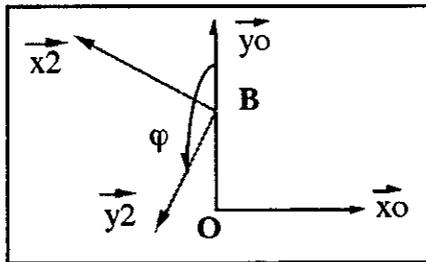


Fig.2.30 Passage du repère (0) au repère (2)

$$\vec{\Omega}_{(2/0)} = \dot{\varphi} \vec{z}$$

- Vecteur position :

$$\begin{cases} \vec{x}_2 = \cos\varphi \vec{x}_0 + \sin\varphi \vec{y}_0 \\ \vec{y}_2 = -\sin\varphi \vec{x}_0 + \cos\varphi \vec{y}_0 \\ \vec{z}_2 = \vec{z}_0 \end{cases}$$

- Vecteur vitesse :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^{\circ} \vec{x}_2}{dt} &= \vec{\Omega}_{(2/0)} \wedge \vec{x}_2 + \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt} = \varphi' \vec{z}_0 \wedge \vec{x}_2 + \vec{0} = \varphi' \vec{y}_1 \\ \frac{d^{\circ} \vec{y}_2}{dt} &= \vec{\Omega}_{(2/0)} \wedge \vec{y}_2 + \frac{d^2 \vec{y}_2}{dt} = \varphi' \vec{z}_0 \wedge \vec{y}_2 + \vec{0} = -\varphi' \vec{x}_1 \\ \frac{d^{\circ} \vec{z}_2}{dt} &= \vec{0} \end{aligned} \right.$$

c) Passage du repère (O,  $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$ ) au repère (B,  $\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2$ ) (fig.2.31)

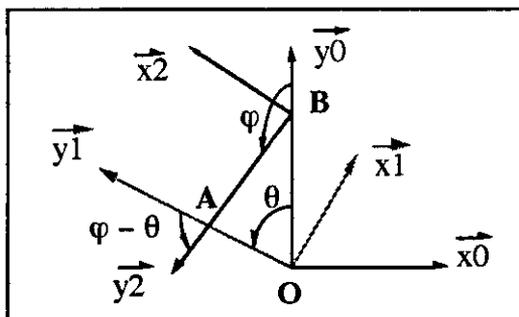


Fig.2.31 Passage du repère (1) au repère (2)

$$\vec{\Omega}_{(2/1)} = (\dot{\varphi} - \dot{\theta})$$

- Vecteur position :

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{x}_2 &= \cos(\varphi - \theta) \vec{x}_1 + \sin(\varphi - \theta) \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 &= -\sin(\varphi - \theta) \vec{x}_1 + \cos(\varphi - \theta) \vec{y}_1 \\ \vec{z}_2 &= \vec{z}_1 \end{aligned} \right.$$

- Vecteur vitesse :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^1 \vec{x}_2}{dt} &= \vec{\Omega}_{(2/1)} \wedge \vec{x}_2 + \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt} = (\varphi' - \theta') \vec{z}_0 \wedge \vec{x}_2 + \vec{0} = (\varphi' - \theta') \vec{y}_2 \\ \frac{d^1 \vec{y}_2}{dt} &= \vec{\Omega}_{(2/1)} \wedge \vec{y}_2 + \frac{d^2 \vec{y}_2}{dt} = (\varphi' - \theta') \vec{z}_0 \wedge \vec{y}_2 + \vec{0} = -(\varphi' - \theta') \vec{x}_2 \\ \frac{d^1 \vec{z}_2}{dt} &= \vec{0} \end{aligned} \right.$$

### 4.1.3. Relations cinématiques

#### a) Définition de l'angle $\varphi$ (angle de rotation de la bielle)

L'examen du système bielle-manivelle (fig.2.28) nous montre qu'en projection sur l'axe  $x_0$ , le rayon de la manivelle est égal à l'entr'axe de la bielle ; ceci nous permet de tirer une relation cinématique entre  $\theta$  et  $\varphi$ .

$$\begin{aligned}\vec{OA} &= R \vec{y}_1 = -R \sin\theta \vec{x}_0 + R \sin\theta \vec{y}_0 && \text{(La projection de } \vec{OA} \text{ sur } \vec{x}_0 \text{ est } -R \sin\theta) \\ \vec{BA} &= L \vec{y}_2 = -L \sin\varphi \vec{x}_0 + L \cos\varphi \vec{y}_0 && \text{(La projection de } \vec{BA} \text{ sur } \vec{x}_0 \text{ est } -L \sin\varphi)\end{aligned}$$

d'où la relation cinématique fondamentale :

$$R \sin\theta = L \sin\varphi \quad (2.39)$$

On en tire la valeur de l'angle  $\varphi$ , défini par son sinus et son cosinus :

$$\sin\varphi = \frac{R \sin\theta}{L} = \frac{\sin\theta}{\lambda}$$

Comme :

$$\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi = \frac{R^2 \sin^2\theta}{L^2}$$

Alors :

$$\cos\varphi = \pm \sqrt{1 - \frac{R^2 \sin^2\theta}{L^2}}$$

L'angle  $\varphi$  est positif et varie au voisinage de  $\pi$  ( $\varphi \in (\pi/2, 3\pi/2)$ ), son cosinus est donc toujours négatif:

$$\cos\varphi = -\sqrt{1 - \left[\frac{R^2 \sin^2\theta}{L^2}\right]} = -\sqrt{1 - \left[\frac{\sin^2\theta}{\lambda^2}\right]} \quad (2.40)$$

$$\varphi = \arcsin \left[ \frac{\sin\theta}{\lambda} \right] \quad (2.41)$$

Le calcul sur ordinateur ne donnant l'arc sinus que dans l'intervalle  $(-\pi/2, \pi/2)$ , on doit écrire :

$$\varphi = \pi - \arcsin \left[ \frac{\sin\theta}{\lambda} \right]$$

#### b) Définition de $\varphi'$ (vitesse angulaire de la bielle)

Pour faire apparaître  $\varphi'$ , il suffit de dériver la relation cinématique fondamentale par rapport au temps.

$$\frac{d(R \sin\theta)}{dt} = \frac{d(L \sin\varphi)}{dt}$$

d'où :

$$\varphi' = \frac{R\theta' \cos\theta}{L \cos\varphi} = \frac{\theta' \cos\theta}{\lambda \cos\varphi} \quad (2.42)$$

**c) Définition de  $\varphi''$**

On dérive une deuxième fois la relation cinématique fondamentale par rapport au temps :

$$\frac{d(R\theta' \cos\theta)}{dt} = \frac{d(L\varphi' \cos\varphi)}{dt}$$

$$R\theta'' \cos\theta - R\theta'^2 \sin\theta = L\varphi'' \cos\varphi - L\varphi'^2 \cos\varphi$$

$$\varphi'' = \frac{R\theta'' \cos\theta}{L \cos\varphi} - \frac{R\theta'^2 \sin\theta}{L \cos\varphi} + \varphi'^2 \operatorname{tg}\varphi$$

$\theta'$  étant considérée comme constante, donc  $\theta'' = 0$ . D'où :

$$\begin{aligned} \varphi'' &= - \frac{R\theta'^2 \sin\theta}{L \cos\varphi} + \varphi'^2 \operatorname{tg}\varphi = - \theta'^2 \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} + \varphi'^2 \operatorname{tg}\varphi \\ \varphi'' &= \operatorname{tg}\varphi [\varphi'^2 - \theta'^2] \end{aligned} \quad (2.43)$$

RECAPITULATIF DES FORMULES DE PASSAGE ENTRE REPERES

Passage du repère  $(o, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  au repère  $(o, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \quad \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \quad \vec{z}_1 = \vec{z}_0$$

Passage du repère  $(o, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  au repère  $(o, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \quad \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \quad \vec{z}_2 = \vec{z}_0$$

Passage du repère  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  au repère  $(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi-\theta) \\ \sin(\varphi-\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} \quad \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi-\theta) \\ \cos(\varphi-\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} \quad \vec{z}_2 = \vec{z}_1$$

#### 4.1.4. Cinématique des points : A, B, Gb

##### a) Cinématique du point A

##### a.1. Position du point A

Le point A est le centre de tête de bielle, il appartient aussi à la manivelle, donc :

$$\begin{aligned} \vec{OA} &= R \vec{y}_1 \\ \vec{OA} &= -R \sin\theta \vec{x}_0 + R \cos\theta \vec{y}_0 \end{aligned}$$

On peut écrire :

$$R^2 = (-R \sin\theta)^2 + (R \cos\theta)^2$$

Donc, le point A se déplace sur un cercle de centre O et de rayon R.

##### a.2. Vitesse du point A

Par définition, la vitesse du point A est donnée par :

$$\vec{V}_{(A,1/0)} = \frac{d^0 \vec{OA}}{dt} = \frac{d^0 (R \vec{y}_1)}{dt} = -R\theta' \vec{x}_1$$

La vitesse du point A est constante, elle est portée par une tangente au cercle

##### a.3. Accélération du point A

L'accélération du point A est constante ; elle est portée par un rayon du cercle ; elle est centripète.

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_{(A,1/0)} &= \frac{d^0 \vec{V}_{(A,1/0)}}{dt} = -R\theta'' \vec{x}_1 - R\theta'^2 \vec{y}_1 \\ \vec{\Gamma}_{(A,1/0)} &= -R\theta'^2 \vec{y}_1 \end{aligned}$$

Pour une meilleure utilisation de la cinématique des différents points, on écrit les positions, les vitesses et les accélérations sous forme matricielle. La cinématique de tous les points est donnée dans le repère fixe  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

Reprenons la cinématique du point A dans le repère fixe :

**Position de A :**

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R \sin\theta \\ R \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

**Vitesse de A :**

$$\vec{V}_{(A)} = \begin{pmatrix} X'_A \\ Y'_A \\ Z'_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R \theta' \cos\theta \\ -R \theta' \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

**Accélération de A :**

$$\vec{\Gamma}_{(A)} = \begin{pmatrix} X''_A \\ Y''_A \\ Z''_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \theta'^2 \sin\theta \\ -R \theta'^2 \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

## b) Cinématique du point B

### b.1. Position de B

Le point B est le centre de pied de bielle, il appartient aussi au piston.

$$\begin{aligned} \vec{OB} &= \vec{OA} + \vec{AB} = R \vec{y}_1 - L \vec{y}_2 \\ \vec{OB} &= -R \sin\theta \vec{x}_0 + R \cos\theta \vec{y}_0 + L \sin\varphi \vec{x}_0 - L \cos\varphi \vec{y}_0 \end{aligned}$$

Tenons compte de la relation (2.39), entre  $\theta$  et  $\varphi$ , on aura :

$$\vec{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \cos\theta - L \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

On note "d" l'ordonnée du point B :  $d = R \cos\theta - L \cos\varphi$

. Pour  $\theta = 0$ , B est au PMH :  $\cos\theta = 1$  et  $\cos\varphi = -1$  ;  
alors d prend sa valeur maximale :  $d_{\max} = R + L$

. Pour  $\theta = \pi$ , B est au PMB :  $\cos\theta = -1$  et  $\cos\varphi = -1$   
alors d prend sa valeur minimale :  $d_{\min} = -R + L$

Le point B se déplace sur  $\vec{y}_0$  entre  $d_{\max}$  et  $d_{\min}$  ; sa course est :  
 $c = d_{\max} - d_{\min} = 2R$

Le point B est à mi-course si  $d = (d_{\max} + d_{\min})/2 = L$

$$R \cos\theta - L \cos\varphi = L$$

En remplaçant  $\cos\varphi$  par sa valeur dans (2.40), on aura :

$$R \cos\theta + L \sqrt{1 - \frac{R^2 \sin^2\theta}{L^2}} = L$$

$$1 - \frac{R^2 \sin^2\theta}{L^2} = 1 - \frac{2 \cos\theta}{\lambda} + \frac{R^2 \cos^2\theta}{L^2}$$

$$\frac{R^2}{L^2} = \frac{2R \cos\theta}{L}$$

Le piston est à mi-course pour :  $\cos\theta = 1/2\lambda$  où  $\theta = \arccos(1/2\lambda)$

**Cas limite :** Pour  $\lambda \rightarrow \infty$ , on a :  $L \gg R$  et donc :

$$\cos\varphi \rightarrow -1 \text{ et } d \rightarrow L + R \cos\theta$$

C'est une sinusoïde pure, le piston est à demi-course pour  $\cos\theta \rightarrow 0$  ; ce qui donne :

$$\theta = \pi/2 + k\pi$$

### b.2. Vitesse de B

En dérivant le vecteur position  $\vec{OB}$  :

$$\vec{V}_{(B,2/0)} = \frac{d^0 \vec{OB}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R\theta' \sin\theta + L\varphi' \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad (2.48)$$

En utilisant la définition de la vitesse :

$$\vec{V}_{(B,2/0)} = \frac{d^0 \vec{OB}}{dt} = R \frac{d^0 \vec{y}_1}{dt} + L \frac{d^0 \vec{y}_2}{dt}$$

$$\vec{V}_{(B,2/0)} = -R\theta' \vec{x}_1 + L\varphi' \vec{x}_2$$

$$\vec{V}_{(B,2/0)} = -R\theta' \cos\theta \vec{x}_0 - R\theta' \sin\theta \vec{y}_0 + L\varphi' \cos\varphi \vec{x}_0 + L\varphi' \sin\varphi \vec{y}_0$$

Comme  $R\theta' \cos\theta = L\varphi' \cos\varphi$ , le vecteur vitesse de **B** devient :

$$\vec{V}_{(B,2/0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R\theta' \sin\theta + L\varphi' \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

Pour étudier les cas limites de la vitesse, donnons une autre expression à la vitesse :

$$\vec{V}_{(B,2/0)} = R(\varphi' - \theta') \sin\theta \vec{y}_0 = R\theta' \left( \frac{\cos\theta}{\lambda \cos\varphi} - 1 \right) \sin\theta \vec{y}_0$$

. Pour  $\theta = k\pi$ , **B** est au PMH ou au PMB d'où :  $\vec{V}_{(B,2\theta)} = 0$

. Pour  $\theta = (2k + 1)\pi/2$ , on aura :  $\vec{V}_{(B,2\theta)} = -(-1)^k \cdot R\theta' \vec{y}_0$

**b.3. Accélération du point B**

$$\vec{\Gamma}_{(B,2\theta)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R\ddot{\theta} \cos\theta + L(\ddot{\varphi} \sin\varphi + \dot{\varphi}^2 \cos\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_O \\ \vec{y}_O \\ \vec{z}_O \end{pmatrix}$$

Comme  $\sin\varphi = R \sin\theta/L$  et  $\cos\varphi = R\theta' \cos\theta/L\varphi'$ , le vecteur accélération de **B** devient :

$$\vec{\Gamma}_{(B,2\theta)} = \begin{pmatrix} 0 \\ R\theta'(\dot{\varphi} - \dot{\theta})\cos\theta + R\ddot{\varphi}\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_O \\ \vec{y}_O \\ \vec{z}_O \end{pmatrix} \tag{2.49}$$

. Pour  $\theta = 0$ , **B** est au PMH, d'où :  
 $\cos\theta = 1$   
 $\cos\varphi = -1$   
 $\varphi' = -\theta'/\lambda$   
 $\varphi'' = 0$

L'accélération est maximale et a pour valeur :

$$\vec{\Gamma}_{(B,2\theta)} = R\dot{\theta} \left( -\frac{\dot{\theta}}{\lambda} - \dot{\theta} \right) \vec{y}_0 = -R\dot{\theta}^2 \left( 1 + \frac{1}{\lambda} \right) \vec{y}_0$$

. Pour  $\theta = \pi$ , **B** est au PMB, d'où :  
 $\cos\theta = -1$   
 $\cos\varphi = -1$   
 $\varphi' = \theta'/\lambda$   
 $\varphi'' = 0$

Angle  $\theta$  pour lequel l'accélération est nulle :

$$\begin{aligned} R\theta'(\varphi' - \dot{\theta}) \cos\theta + R\varphi'' \sin\theta &= 0 \\ R\theta'(\varphi' - \dot{\theta}) \cos\theta + R(\varphi'^2 - \dot{\theta}^2) \text{tg}\varphi \sin\theta &= 0 \\ R\theta'(\varphi' - \dot{\theta}) \{ \theta' \cos\theta + (\varphi' + \dot{\theta}') \text{tg}\varphi \sin\theta \} &= 0 \end{aligned}$$

Première solution :  $\varphi' = 0$

$$\frac{\theta' \cos \theta}{\lambda \cos \varphi} = \theta'$$

$$\frac{\cos \theta}{\lambda} = - \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{\lambda^2}}$$

$$\frac{\cos^2 \theta}{\lambda^2} = \frac{\lambda^2 - \sin^2 \theta}{\lambda^2}$$

$\Rightarrow \lambda^2 = 1$ , ce qui est impossible puisque  $R \neq L$

Deuxième solution :

$$\theta' \cos \theta + (\varphi' + \theta') \operatorname{tg} \varphi \sin \theta = 0$$

$$\theta' \cos \theta + \theta' \left( \frac{\cos \theta}{\lambda \cos \varphi} + 1 \right) \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \theta = 0$$

$$1 + \left( \frac{\cos \theta}{\lambda \cos \varphi} + 1 \right) \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \theta = 0$$

$$\lambda \cos \varphi + \frac{\sin \varphi \sin \theta}{\cos \varphi} + \frac{\lambda \sin \varphi \sin \theta}{\cos \theta} = 0$$

$$\lambda \left( 1 - \frac{\sin^2 \theta}{\lambda^2} \right) + \frac{\sin^2 \theta}{\lambda} + \frac{\sin^2 \theta \cos \varphi}{\cos \theta} = 0$$

$$\lambda^2 - \sin^2 \theta + \sin^2 \theta + \frac{\lambda \sin^2 \theta \cos \varphi}{\cos \theta} = 0$$

$$\lambda = \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{\lambda^2}}$$

$$\frac{\lambda^2 \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} = 1 - \frac{\sin^2 \theta}{\lambda^2}$$

$$\lambda^4 (1 - \sin^2 \theta) = \lambda^2 \sin^4 \theta - \sin^6 \theta$$

L'accélération est nulle si  $\theta$  vérifie l'équation :

$$\sin^6 \theta - \lambda^2 \sin^4 \theta - \lambda^4 \sin^2 \theta + \lambda^4 = 0$$

**Remarque :**

L'allure de l'accélération du piston varie suivant la valeur de  $\lambda$  (fig. 2.32 ; 2.33 ; 2.34)

**$\lambda < 4$  :** Il y a trois extremums positifs (fig. 2.32) ; les deux maximums positifs ont lieu pour :  $\theta = \arccos(-4\lambda)$ , ils sont symétriques par rapport à  $\theta = \pi$ . La valeur de l'accélération au troisième extremum ( $\theta = \pi$ ) est :  $R\theta^2 (1-1/\lambda)$ .

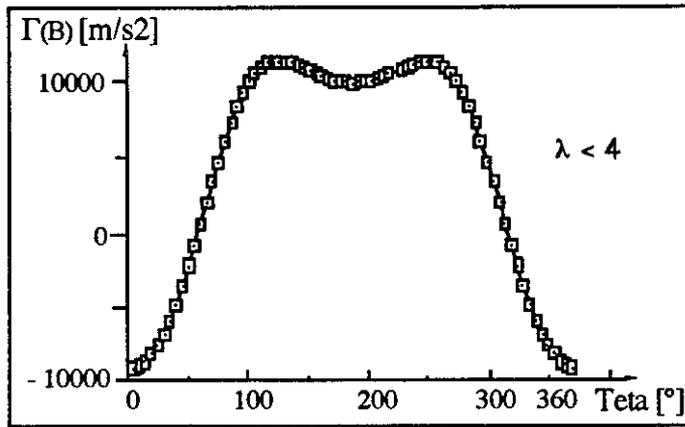


Fig. 2.32 Allure de l'accélération du piston pour  $\lambda < 4$

**$\lambda \geq 4$  :** A partir de  $\lambda = 4$ , il n'y a plus qu'un seul extremum positif (Fig. 2.33) ; il a lieu pour  $\theta = \pi$ . La valeur de l'accélération est :  $R\theta^2 (1-1/\lambda)$ .

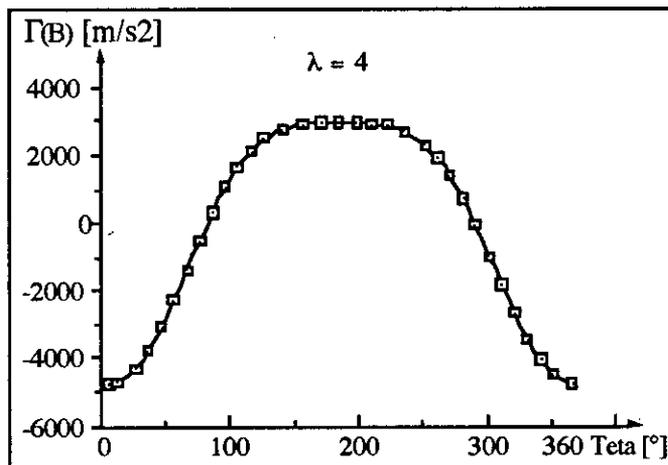


Fig. 2.33 Allure de l'accélération du piston pour  $\lambda \geq 4$

**$\lambda \rightarrow \infty$  :** A la limite, Pour  $\lambda \rightarrow \infty$ , c'est à dire  $L \gg R$ , on a :  $\sin\varphi \rightarrow 0$ ,  $\cos\varphi \rightarrow -1$ ,  $\varphi' \rightarrow 0$  et  $\varphi'' \rightarrow 0$  donc :

$$\vec{\Gamma}_{(B,2/0)} = -R\theta^2 \cos\theta \vec{y}_0$$

L'accélération du piston est une sinusoïde pure (fig. 2.34).

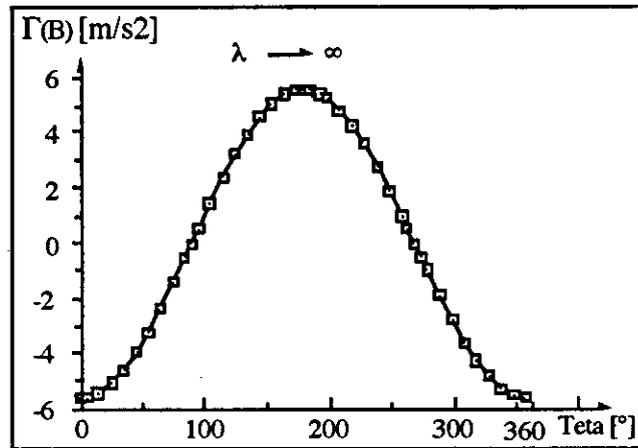


Fig. 2.34 Allure de l'accélération du piston pour  $\lambda \rightarrow \infty$

### c) Cinématique du point Gb

#### c.1. Position du point Gb

Le point Gb est le centre d'inertie de la bielle.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OGb} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AGb} \\ \overrightarrow{OGb} &= R \vec{y}_1 - L_a \vec{y}_2 = R (-\sin\theta \vec{x}_0 + \cos\theta \vec{y}_0) + L_a (\sin\varphi \vec{x}_0 - \cos\varphi \vec{y}_0) \\ \overrightarrow{OGb} &= \begin{pmatrix} -R \sin\theta + L_a \sin\varphi \\ R \cos\theta - L_a \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \end{aligned} \quad (2.51)$$

. Pour  $\theta = 0$ , le piston est au PMH,  $\cos\theta = 1$  et  $\cos\varphi = -1$ , l'ordonnée de Gb est maximale. par rapport à  $\vec{y}_0$

$$\overrightarrow{OGb} = (R + L_a) \vec{y}_0$$

. Si  $\theta = \pi$ , le piston est au PMB,  $\cos\theta = -1$  et  $\cos\varphi = -1$ , l'ordonnée de Gb est minimale par rapport à  $\vec{y}_0$

$$\overrightarrow{OGb} = (-R + L_a) \vec{y}_0$$

Le point Gb se déplace sur  $\vec{y}_0$  entre son ordonnée maximale et son ordonnée minimale, sa course est donc la différence entre les deux ordonnées :

$$\text{course} / \vec{y}_0 = 2R$$

. Si  $\theta = \pi/2$ , l'abscisse de Gb est minimale :  $R(L_a/L - 1)$  sur  $\vec{x}_0$

. Si  $\theta = 3\pi/2$ , l'abscisse de Gb est maximale :  $R(1 - L_a/L)$  sur  $\vec{x}_0$

La course de Gb sur  $\vec{x}_0$  est la différence entre l'abscisse maximale et l'abscisse minimale:

$$\text{course} / \vec{x}_0 = 2R \left( 1 - \frac{L_a}{L} \right)$$

**Cas limite :** Si  $\lambda \rightarrow \infty$ , alors  $\cos\varphi \rightarrow -1$  et  $\sin\varphi \rightarrow 0$  donc la position de Gb devient :

$$\vec{OG}_b = \begin{pmatrix} -R \sin\theta \\ R \cos\theta + L_a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

Un changement de repère tel que :  $\vec{OO}' = L_a \vec{y}_0$  permet à l'équation du lieu du centre de gravité de la bielle de devenir un cercle de centre O' et de rayon R.

**c.2. Vitesse du point Gb**

$$\vec{V}_{(Gb,2/0)} = \begin{pmatrix} -R\theta'\cos\theta + L_a \varphi'\cos\varphi \\ -R\theta'\sin\theta + L_a \varphi'\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad (2.52)$$

. Pour  $\theta = 0$ , le piston est au PMH ; la vitesse a une valeur maximale négative sur  $\vec{x}_0$  :

$$\vec{V}_{(Gb,2/0)} = R\theta' \left( \frac{L_a}{L} - 1 \right) \vec{x}_0$$

. Pour  $\theta = \pi$ , le piston est au PMB ; la vitesse a une valeur maximale positive sur  $\vec{x}_0$

$$\vec{V}_{(Gb,2/0)} = R\theta' \left( 1 - \frac{L_a}{L} \right) \vec{x}_0$$

. Pour  $\theta = \pi/2$  et  $3\pi/2$ , la valeur de la vitesse est maximale sur  $\vec{y}_0$  :

$$\vec{V}_{(Gb,2/0)} = \pm R\theta' \vec{y}_0$$

La vitesse du centre de gravité de la bielle est minimale pour  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$  ; elle est maximale lorsque le piston est à mi-course, c'est à dire :  $\cos\theta = 1/2\lambda$ .

**Cas limite :** Si  $\lambda \rightarrow \infty$ , alors  $\varphi' \rightarrow 0$

$$\vec{V}_{(Gb,2/0)} = \begin{pmatrix} -R\theta'\cos\theta \\ -R\theta'\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

La vitesse décrit un cercle de centre O et de rayon  $R\theta'$ .

**c.3. Accélération du point Gb.**

$$\vec{\Gamma}_{(Gb, 2/0)} = \begin{pmatrix} R \theta'^2 \sin\theta + L_a \varphi'' \cos\varphi - L_a \varphi'^2 \sin\varphi \\ -R \theta'^2 \cos\theta + L_a \varphi'' \sin\varphi + L_a \varphi'^2 \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_O \\ \vec{y}_O \\ \vec{z}_O \end{matrix} \quad (2.53)$$

Pour  $\theta = 0$ , le piston est au PMH; l'accélération a une valeur maximale négative sur  $\vec{y}_O$  :

$$\vec{\Gamma}_{(Gb, 2/0)} = -R \theta'^2 \left(1 + \frac{L_a}{L}\right) \vec{y}_O$$

Pour  $\theta = \pi$ , le piston est au PMB; l'accélération a une valeur maximale positive sur  $\vec{y}_O$  :

$$\vec{\Gamma}_{(Gb, 2/0)} = R \theta'^2 \left(1 - \frac{L_a}{L}\right) \vec{y}_O$$

Pour  $\theta = \pi/2$  et  $\pi/3$ , la valeur de l'accélération est maximale sur  $\vec{x}_O$  :

$$\vec{\Gamma}_{(Gb, 2/0)} = \pm R \theta'^2 \vec{x}_O$$

L'accélération du centre de gravité de la bielle est maximale pour  $\theta = \pi/2$ ; elle est minimale pour  $\theta = 0$ .

**Cas limite :** Si  $\lambda \rightarrow \infty$  c'est à dire  $L \ll R$ , alors  $\varphi' \rightarrow 0$  et  $\varphi'' \rightarrow 0$  :

$$\vec{\Gamma}_{(Gb, 2/0)} = \begin{pmatrix} R \theta'^2 \sin\theta \\ -R \theta'^2 \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_O \\ \vec{y}_O \\ \vec{z}_O \end{matrix}$$

L'accélération est un cercle de centre O et de rayon  $R^2 \theta'$ .

**d). Vitesse de glissement**

Pour l'étude de la tenue du coussinet de tête de bielle, il est nécessaire de connaître la vitesse de glissement de ce dernier sur le maneton.

Soit un point M appartenant au coussinet de tête de bielle, porté par exemple par  $\vec{y}_2$  (fig.2.35). Si on appelle  $R_m$  le rayon du maneton :

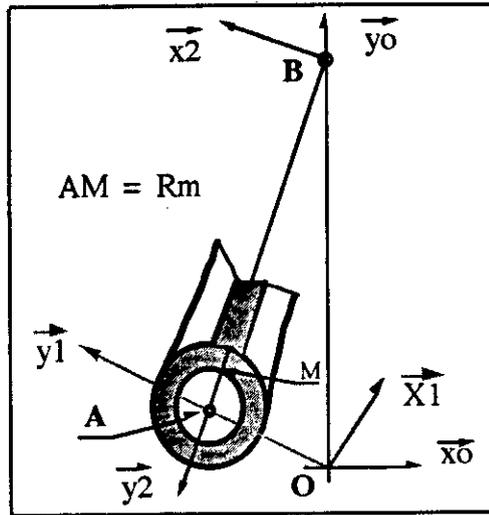


Fig.2.35 Vitesse de glissement du coussinet de tête de bielle sur le maneton.

La vitesse de glissement du point M, lié au repère (2), par rapport au maneton, lié au repère (1) est  $\vec{V}_{(M,2/1)}$ . En utilisant la définition de la vitesse, on aura :

$$\vec{V}_{(M,2/1)} = \frac{d^1 \vec{OM}}{dt}$$

Avec :

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = R \vec{y}_1 - Rm \vec{y}_2$$

$$\vec{V}_{(M,2/1)} = R \frac{d^1 \vec{y}_1}{dt} - Rm \frac{d^1 \vec{y}_2}{dt}$$

$$\vec{V}_{(M,2/1)} = Rm (\dot{\varphi} - \dot{\theta}) \vec{x}_2 \quad (2.54)$$

.Si  $\theta = 0$  alors  $\cos\theta = 1$ ,  $\cos\varphi = -1$  et  $\varphi' = -\theta' / \lambda$ , la vitesse de glissement devient maximale :

$$\vec{V}_{(M,2/1)} = -Rm \dot{\theta} \left( \frac{1}{\lambda} + 1 \right) \vec{x}_2$$

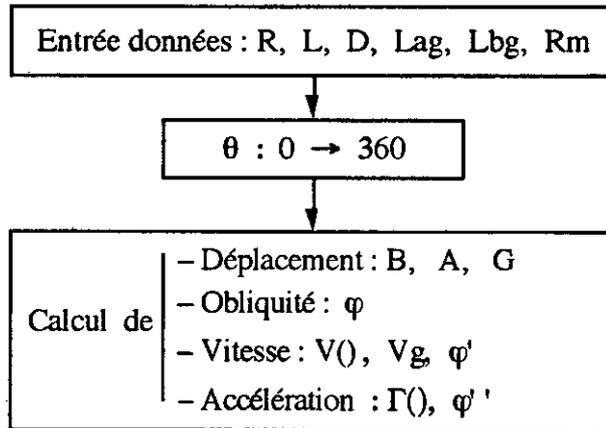
.Si  $\theta = \pi$  alors  $\cos\theta = -1$ ,  $\cos\varphi = -1$  et  $\varphi' = \theta' / \lambda$ , la vitesse de glissement devient minimale :

$$\vec{V}_{(M,2/1)} = Rm \dot{\theta} \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) \vec{x}_2$$

.Si  $\theta = \pi/2$  et  $3\pi/2$  alors  $\varphi' = 0$ , la vitesse de glissement prend sa valeur moyenne :

$$\vec{V}_{(M,2/1)} = -Rm \dot{\theta} \vec{x}_2$$

**Organigramme : cinématique des moteurs en ligne (CIML)**



Cet organigramme permet de calculer les coordonnées, les vitesses et les accélérations de tout point appartenant à l'embellage des moteurs en ligne ; en particulier, les points caractéristiques et ce en fonction d'un cycle thermodynamique donné.

## 4.2. Dynamique de l'attelage mobile des moteurs en ligne

L'étude dynamique a pour but de définir les efforts dûs aux liaisons ou au contact piston sur chemise en fonction du cycle moteur. De la connaissance des pressions sur les pistons et de la position de l'embellage, on définit les efforts aux points caractéristiques. L'étude du type de liaisons (supposées parfaites) entraîne la connaissance du torseur dynamique et donc les composantes des actions mécaniques. Celles-ci sont définies sur la bielle, le piston ainsi que sur le maneton du vilebrequin.

Le bilan global des forces ainsi que les équations générales de la dynamique conduisent à un système d'équations permettant de définir la résultante des efforts.

### Rappel des hypothèses :

- On néglige les efforts de pesanteur face aux efforts des gaz ;
- Nous négligeons les variations de la vitesse de rotation ( $\theta = \omega t$ , avec  $\omega = \text{constante}$ ) ;
- On suppose que les contacts sont ponctuels et sans frottement ;
- Tous les paliers sont considérés comme des liaisons parfaites sans frottement ;
- On suppose que les éléments mécaniques (bielles, pistons, ...) sont géométriquement parfaits et symétriques.

### 4.2.1. Etude dynamique du piston

#### 4.2.1.1. Analyse des actions mécaniques sur le piston

En isolant le piston, on trouve trois actions extérieures appliquées sur celui-ci (fig.2.49) :

- Action de l'axe du piston (ou action de la bielle) sur le piston au point B :  $-F_B$  ;
- Action de la chemise sur le piston au point C :  $F_c$  ;
- Action des gaz de combustion au point P :  $F_p$ .

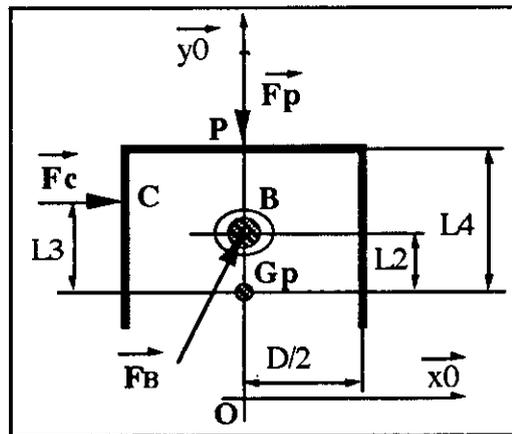


Fig. 2.36 Analyse des actions mécaniques appliquées au piston

$$\begin{aligned}\overrightarrow{G_p B} &= L_2 \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{G_p P} &= L_4 \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{G_p C} &= -\frac{D}{2} \overrightarrow{x_0} + L_3 \overrightarrow{y_0}\end{aligned}$$

**a) Action de la bielle sur le piston au point B**

- Torseur des actions mécaniques au point B :

$$\vec{F}_B = \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \quad \vec{M}_B = \vec{0} \quad (2.55)$$

**b) Action de la chemise sur le piston au point C**

La chemise immobile en translation et en rotation, est géométriquement parfaite et n'exerce aucun moment sur le piston.

Si le piston est géométriquement parfait et sa tête est plate, les gaz n'exercent aucun effort suivant  $\vec{x}_0$  et  $\vec{z}_0$ . Le point de contact chemise piston est donc situé sur une génératrice du

piston dans le plan  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$  ; soit C ce point de contact. On suppose a priori que sa position sur cette génératrice est quelconque, nous verrons par la suite que cette position n'est pas quelconque. L'étude théorique que nous menons nous montre que le point C a forcément la même ordonnée que le point B. Le torseur des actions mécaniques au point C est :

$$\vec{F}_C = \begin{pmatrix} X_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \quad \vec{M}_C = \vec{0} \quad (2.56)$$

**c) Action des gaz sur le piston au point P**

On suppose que la pression des gaz est uniformément répartie sur la tête du piston et que le point d'application de l'effort résultant s'applique sur le centre ; dans ce cas les gaz n'exercent pas de moment sur le piston.

Nous avons déjà supposé en (b) que la tête du piston est plate, il en résulte donc que les efforts dus aux gaz sont dirigés uniquement sur  $(-\vec{y}_0)$  et dépendent de l'angle vilebrequin. Le torseur des actions mécaniques au point P est donc :

$$\vec{F}_P(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ -Y_P(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \quad \vec{M}_P = \vec{0} \quad (2.57)$$

$$Y_P(\theta) = \begin{cases} P(\theta) S : \text{s'il s'agit d'un cycle théorique} \\ (P(\theta) - P_0) S : \text{pour un cycle réel ou quasi-réel} \end{cases}$$

avec :

- P(θ) : Pression des gaz en fonction de l'angle vilebrequin ;
- P<sub>0</sub> : Pression à l'intérieur du carter moteur (ou contre pression carter) ;
- S : Surface de la tête du piston = πD<sup>2</sup> / 4.

**4.2.1.2. Equations vectorielles fondamentales du piston**

Les équations vectorielles fondamentales du piston sont :

$$m_p \cdot \vec{\Gamma}_{(G_p \text{ piston} / 0)} = \sum \vec{F}_{(\text{ext} / \text{piston})}$$

$$\vec{\delta}_{(\text{piston} / G_p)} = \sum \vec{M}_{(\vec{F}_{\text{ext}} / G_p)} \quad (2.58)$$

Le piston est un solide indéformable, son mouvement est une translation, donc tous ses points ont la même vitesse et la même accélération. En particulier, le point  $G_p$  a la même accélération que le point  $B$  :

$$\vec{\Gamma}_{(G_p, \text{ piston} / 0)} = \vec{\Gamma}_{(B, 2 / 0)}$$

### a) Calcul du moment dynamique

$$\vec{\delta}_{(\text{piston} / G_p)}^o = \frac{d^o}{dt} \left( \vec{\sigma}_{(\text{piston} / G_p)}^o \right)$$

$\vec{\sigma}$  étant le moment cinétique du piston par rapport à son centre de gravité  $G_p$ . Il a pour expression :

$$\vec{\sigma}_{(\text{piston} / G_p)}^o = \overline{I(\text{piston} / G_p)} \cdot \vec{\Omega}_{(\text{piston} / 0)}$$

$$(G_p, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$$

Le piston n'a aucune rotation par rapport au repère fixe (O), donc le vecteur rotation instantanée du piston par rapport au repère fixe est nul.

$$\vec{\Omega}_{(\text{piston} / 0)} = \vec{0}$$

Ainsi

$$\vec{\sigma}_{(\text{piston} / G_p)}^o = \vec{0} \text{ et par conséquent } \vec{\delta}_{(\text{piston} / G_p)}^o = \vec{0}$$

### b) Calcul des moments

Les moments des forces extérieures au piston seront ramenés au centre de gravité  $G_p$ .

- Moment de la force  $\vec{F}_B$  :

$$\vec{M}_{(\vec{F}_B) / G_p} = \vec{M}_{(\vec{F}_B) / B} + \overline{G_p B} \wedge \vec{F}_B$$

$$\vec{M}_{(\vec{F}_B) / B} = \vec{0} \text{ et } \overline{G_p B} = L_2 \vec{y}_2$$

donc :

$$\vec{M}_{(\vec{F}_B) / G_p} = \begin{pmatrix} 0 \\ L_2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_{(\vec{F}_B) / G_p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_2 X_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

- Moment de la force  $\vec{F}_C$  :

$$\begin{aligned}\vec{M}_{\vec{F}_C/G_p} &= \vec{M}_{\vec{F}_C/C} + \vec{G}_p \vec{C} \wedge \vec{F}_C \\ \vec{M}_{\vec{F}_C/C} &= \vec{0} \text{ et } \vec{G}_p \vec{C} = -\frac{D}{2} \vec{x}_0 + L_3 \vec{y}_0\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\vec{M}_{\vec{F}_C/G_p} &= \begin{pmatrix} -D/2 \\ L_3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \\ \vec{M}_{\vec{F}_C/G_p} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_3 X_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}\end{aligned} \quad (2.60)$$

- Moment de la force  $\vec{F}_p(\theta)$  :

$$\vec{M}_{\vec{F}_p(\theta)/G_p} = \vec{0} \text{ car } \vec{F}_p(\theta) \text{ passe par } G_p \quad (2.61)$$

#### 4.2.1.3. Equations scalaires du piston

- Projection de la première équation (2.58) dans le repère  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\text{Sur } \vec{x}_0 : 0 = X_B + X_C \quad (1)$$

$$\text{Sur } \vec{y}_0 : m_p \left[ -R\theta'^2 \cos\theta + L(\varphi'' \sin\varphi + \varphi'^2 \cos\varphi) \right] = Y_B - Y_p(\theta) \quad (2)$$

$$\text{Sur } \vec{z}_0 : 0 = 0$$

- Projection de la deuxième équation (2.58) dans le repère  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\text{Sur } \vec{x}_0 : 0 = 0$$

$$\text{Sur } \vec{y}_0 : 0 = 0$$

$$\text{Sur } \vec{z}_0 : 0 = -L_2 \cdot X_B - L_3 \cdot X_C \quad (3)$$

L'étude dynamique du piston a un système de trois équations (1), (2), (3) à cinq inconnues  $X_B, X_C, Y_B, L_2, L_3$ . Nous remarquons que les deux équations (1) et (3) ne sont compatibles que si  $L_2 = L_3$ , l'équation (3) est donc en trop.

Nous avons ainsi deux équations à trois inconnues. Il faut donc isoler le solide voisin, c'est à dire la bielle, afin de faire apparaître une nouvelle équation (supplémentaire) sans inconnue en plus.

#### 4.2.2. Etude dynamique de la bielle

##### 4.2.2.1. Analyse des actions mécaniques appliquées à la bielle

En isolant la bielle on trouve deux actions mécaniques extérieurs appliquées à celle-ci (fig.2.37) :

- L'action du maneton sur la bielle au point A :  $\vec{F}_A$  ;

- L'action de l'axe du piston sur la bielle au point B :  $\vec{F}_B$ .

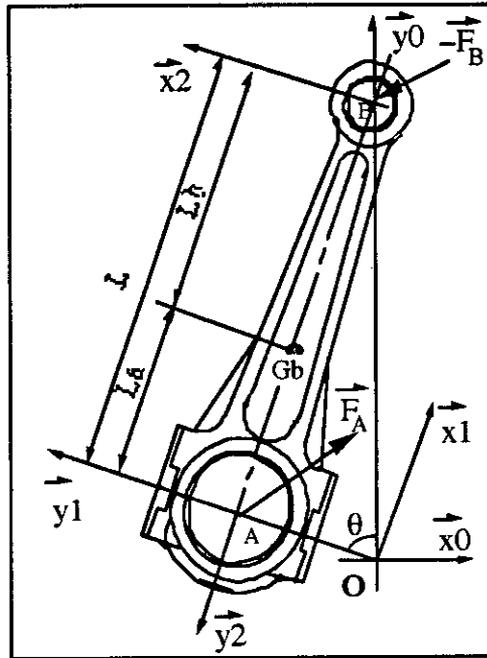


Fig. 2.37 Analyse des actions mécaniques appliquées à la bielle

**a) Action du maneton sur la bielle au point A**

La liaison est du type verrou, donc :

$$\vec{F}_A \cdot \vec{z} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{M}_A \cdot \vec{z} = 0$$

Les pièces en mouvement étant géométriquement parfaites, la bielle ne transmet pas de moment au maneton. Le torseur des actions mécaniques au point A se résume donc à :

**- Torseur des actions mécaniques au point A**

- Dans le repère fixe :  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\vec{F}_A = \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \quad \vec{M}_A = \vec{0}$$

- Dans le repère lié au maneton :  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

$$\vec{F}_A = \begin{pmatrix} X_A \cos\theta + Y_A \sin\theta \\ -X_A \sin\theta + Y_A \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} \quad \vec{M}_A = \vec{0}$$

- Dans le repère lié à la bielle : (B,  $\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2$ )

$$\vec{F}_A = \begin{pmatrix} X_A \cos\varphi + Y_A \sin\varphi \\ -X_A \sin\varphi + Y_A \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix} \quad \vec{M}_A = \vec{0} \quad (2.62)$$

**b) Action de l'axe de piston sur la bielle au point B**

De même qu'au point A, la liaison au point B est du type verrou, donc :

$$-\vec{F}_B \cdot \vec{z} = 0 \quad \text{et} \quad -\vec{M}_B \cdot \vec{z} = 0$$

Les pièces en mouvement étant géométriquement parfaites, l'axe de piston ne transmet pas de moment à la bielle. Le torseur des actions mécaniques au point B se résume à :

- Dans le repère fixe : (O,  $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ )

$$-\vec{F}_B = \begin{pmatrix} -X_B \\ -Y_B \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad -\vec{M}_B = \vec{0}$$

- Dans le repère lié à la bielle : (B,  $\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2$ )

$$-\vec{F}_B = \begin{pmatrix} -X_B \cos\varphi + -Y_B \sin\varphi \\ X_B \sin\varphi + -Y_B \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix} \quad -\vec{M}_B = \vec{0} \quad (2.63)$$

**4.2.2.2. Equations vectorielles fondamentales de la bielle**

Les équations vectorielles fondamentales de la bielle sont :

$$m_{\text{bielle}} \cdot \vec{\Gamma}_{(\text{Gb}, \text{bielle}/0)} = \sum \vec{F}_{(\text{ext}/\text{bielle})} \quad (2.64)$$

$$\vec{\delta}_{(\text{bielle}/\text{Gb})} = \sum \vec{M}_{(\text{F}_{\text{ext}}/\text{Gb})}$$

**a) Calcul du moment dynamique**

Le moment dynamique est donné par :

$$\vec{\delta}_{(\text{bielle}/\text{Gb})}^2 = \frac{d^0}{dt} \left( \vec{\sigma}_{(\text{bielle}/\text{Gb})}^2 \right)$$

Par définition, le moment cinétique est donné par :

$$\vec{\sigma}_{(\text{bielle}/\text{Gb})}^2 = \overline{\vec{I}(\text{bielle}/\text{Gb})} \cdot \vec{\Omega}_{(\text{bielle}/0)}$$

$$(\text{Gb}, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$$

Le tenseur d'inertie et le vecteur rotation instantanée doivent être exprimés dans le même repère. Le vecteur rotation instantanée de la bielle par rapport au repère fixe a été déjà défini :

$$\vec{\Omega}_{(\text{bielle}/0)} = \vec{\Omega}_{(2/0)} = \varphi' \vec{z}_2 = \varphi' \vec{z}_0$$

La bielle a deux plans de symétrie : (x2, y2) et (y2, z2), donc les trois produits d'inertie sont nuls ; d'où le moment cinétique :

$$\vec{\sigma}_{(\text{bielle}/Gb)}^2 = \begin{bmatrix} A_b & 0 & 0 \\ 0 & B_b & 0 \\ 0 & 0 & C_b \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi' I_{Gb z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$

Le moment dynamique est donné par :

$$\vec{\delta}_{(\text{bielle}/Gb)}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi'' I_{Gb z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi'' I_{Gb z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

### b) Calcul des moments

Puisque le moment dynamique est calculé par rapport au centre de gravité de la bielle, il faut ramener les moments des forces extérieures appliquées à la bielle au centre de gravité :

- Moment de la force  $\vec{F}_A$

$$\begin{aligned} \vec{M}_{(\vec{F}_A/Gb)} &= \vec{M}_{(\vec{F}_A/A)} + \vec{G}_b \vec{A} \wedge -\vec{F}_A \\ \vec{M}_{(\vec{F}_A/Gb)} &= \begin{pmatrix} -L_a \sin\varphi \\ L_a \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \\ \vec{M}_{(\vec{F}_A/Gb)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_a (X_A \cos\varphi + Y_A \sin\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.66)$$

- Moment de la force  $-\vec{F}_B$

$$\begin{aligned} \vec{M}_{(-\vec{F}_B/Gb)} &= \vec{M}_{(-\vec{F}_B/B)} + \vec{G}_b \vec{B} \wedge -\vec{F}_B \\ \vec{M}_{(-\vec{F}_B/Gb)} &= \begin{pmatrix} L_b \sin\varphi \\ -L_b \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -X_B \\ -Y_B \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \\ \vec{M}_{(-\vec{F}_B/Gb)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_b (X_B \cos\varphi + Y_B \sin\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.67)$$

### 4.2.2.3. Equations scalaires de la bielle

- Projection de la première équation (2.64) dans le repère  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\text{Sur } \vec{x}_0: m_b \left[ R\theta'^2 \sin\theta + La(\varphi'' \cos\varphi - \varphi'^2 \sin\varphi) \right] = X_A - X_B \quad (4)$$

$$\text{Sur } \vec{y}_0: m_b \left[ -R\theta'^2 \cos\theta + La(\varphi'' \sin\varphi - \varphi'^2 \cos\varphi) \right] = Y_A - Y_B \quad (5)$$

$$\text{Sur } \vec{z}_0: 0 = 0$$

- Projection de la deuxième équation (2.64) dans le repère  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\text{Sur } \vec{x}_0: 0 = 0$$

$$\text{Sur } \vec{y}_0: 0 = 0$$

$$\text{Sur } \vec{z}_0: -L_a [X_A \cos\varphi + Y_A \sin\varphi] - L_b [X_B \cos\varphi + Y_B \sin\varphi] = \varphi'' I_{Gz} \quad (6)$$

L'étude dynamique de la bielle aboutit à un système de trois équations linéaires (4), (5), (6) à deux inconnues supplémentaires  $X_A$  et  $Y_A$ . A présent, nous pouvons résoudre notre système d'équations qui présente cinq équations à cinq inconnues :  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $X_B$ ,  $Y_B$ ,  $X_C$ .

### 4.2.2.4. Système d'équations

1.  $X_B + X_C = 0$
2.  $Y_B - Y_{p(\theta)} = mp \left[ -R\theta'^2 \cos\theta + L(\varphi'' \sin\varphi + \varphi'^2 \cos\varphi) \right]$
3.  $X_A - X_B = mb \left[ R\theta'^2 \sin\theta + La(\varphi'' \cos\varphi + \varphi'^2 \sin\varphi) \right]$
4.  $Y_A - Y_B = mb \left[ -R\theta'^2 \cos\theta + La(\varphi'' \sin\varphi + \varphi'^2 \cos\varphi) \right]$
5.  $\varphi'' I_{Gbz} = -L_a (X_A \cos\varphi + Y_A \sin\varphi) - L_b (X_B \cos\varphi + Y_B \sin\varphi)$

### 4.2.2.5. Résolution du système d'équations

Valeurs intermédiaires facilitant le calcul des paramètres inconnus du système d'équations.

$$Y_{p(\theta)} = S(P(\theta) - P_0)$$

$$E_1 = R\theta'^2 \cos\theta$$

$$E_2 = \varphi'' \sin\varphi + \varphi'^2 \cos\varphi$$

$$E_3 = R\theta'^2 \sin\theta$$

$$E_4 = \varphi'' \cos\varphi + \varphi'^2 \sin\varphi$$

$$K = mb [E_3 + L_a E_4]$$

Solution du système d'équations :

$$Y_B = + Y_{p(\theta)} + mp [-E_1 + LE_2]$$

$$Y_A = + Y_B + mb [-E_1 + L_a E_2]$$

$$\begin{aligned}
 X_A &= \frac{1}{L \cos \varphi} \left[ -\ddot{\varphi} I_{Gb} + K L_b \cos \varphi - Y_A L_a \sin \varphi - Y_B L_b \sin \varphi \right] \\
 X_B &= -K - X_A \\
 X_C &= -X_B
 \end{aligned}$$

Efforts dus au gaz et aux inerties :

$$\begin{aligned}
 Y_{Bg} &= Y_{P(\theta)} \\
 Y_{Ag} &= Y_{Bg} = Y_{P(\theta)} \\
 X_{Ag} &= X_{Bg} = Y_{P(\theta)} \operatorname{tg} \varphi \\
 Y_{Bi} &= m p \left[ -E_1 + L E_2 \right] \\
 Y_{Ai} &= Y_{Bi} + m b \left[ -E_1 + L E_2 \right] \\
 X_{Ai} &= \frac{1}{L \cos \varphi} \left[ -\ddot{\varphi} I_{Gb} + K L_b \cos \varphi - Y_{Ai} L_a \sin \varphi - Y_{Bi} L_b \sin \varphi \right] \\
 X_{Bi} &= -K + X_{Ai}
 \end{aligned}$$

### 4.2.3. Etude dynamique d'une portion de bielle

#### 4.2.3.1. Analyse des actions mécaniques appliquées à la portion de bielle

Les efforts de cohésion, dans la section considérée, sont représentés par  $F_K$  et  $M_K$  :

- L'action du maneton sur la bielle au point A :  $\vec{F}_A$  ;
- L'action de liaison due à l'isolement de la bielle au point K :  $\vec{F}_K$  .

$$\vec{G}_{b'K} = -(Lb' - Lk) \vec{y}_2$$

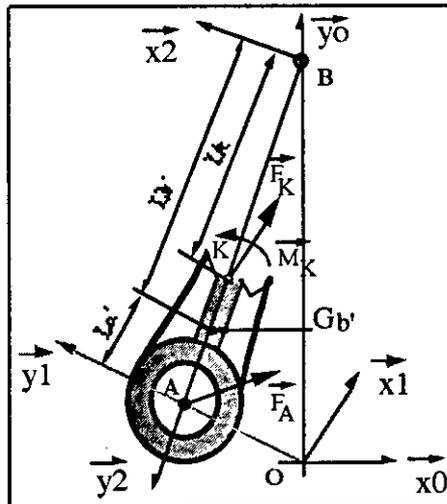


Fig. 2.38 Analyse des actions mécaniques appliquées à la portion de bielle

#### a) Torseur au point A :

La liaison est du type verrou, donc :

$$\vec{F}_A \cdot \vec{z} = 0 \text{ et } \vec{M}_A \cdot \vec{z} = 0$$

Les pièces en mouvement étant géométriquement parfaites, la bielle ne transmet pas de moment au maneton. Le torseur au point A est :

$$\vec{F}_A = \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \vec{M}_A = \vec{0}$$

**b) Torseur au point K :**

Le point K est choisi pour le le calcul des actions mécaniques dans une section donnée. La liaison est complète, donc le torseur en K se réduit à :

$$\vec{F}_K = \begin{pmatrix} X_K \\ Y_K \\ Z_K \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \vec{M}_K = \begin{pmatrix} L_K \\ N_K \\ M_K \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

**4.2.3.2. Equations vectorielles fondamentales de la portion de bielle**

$$\begin{aligned} m_{\text{port.bielle}} \vec{\Gamma}_{(Gb', 2/0)} &= \sum \vec{F}_{(\text{ext}/\text{port.bielle})} \\ \vec{\delta}_{(\text{port.bielle}/Gb)} &= \sum \vec{M}_{(\text{ext}/Gb)} \end{aligned} \quad (2.68)$$

**a) calcul du moment dynamique**

– Moment cinétique :

$$\vec{\sigma}_{(\text{port.bielle}/Gb)}^{\rightarrow 2} = \overline{I(\text{por.bielle}/Gb')} \cdot \vec{\Omega}_{(2/1)}^{\rightarrow}$$

(Gb',  $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ )

La portion de bielle possède deux plans de symétrie (x2, y2) et (y2, z2), donc les trois produits d'inertie sont nuls ; ce qui nous donne le moment cinétique suivant :

$$\vec{\sigma}_{(\text{port b}/Gb)}^{\rightarrow 2} = \begin{bmatrix} A_{pb} & 0 & 0 \\ 0 & B_{pb} & 0 \\ 0 & 0 & C_{pb} \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} I_{Gb z} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix}$$

d'où le moment dynamique :

$$\vec{\delta}_{(\text{port.bielle}/Gb)}^{\rightarrow 2} = \frac{d^0(\vec{\sigma}_{(\text{port.bielle}/Gb)}^{\rightarrow 2})}{dt} = \ddot{\varphi} \cdot I_{pb} \vec{z} \quad (2.69)$$

**b) Calcul des moments**

Calcul des moments des forces extérieures appliquées à la portion de bielle par rapport à son centre de gravité Gb' :

- moment de la force  $\vec{F}_A$  :

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_{(\vec{F}_A/Gb')} &= \vec{M}_{(\vec{F}_A/A)} + \vec{Gb'A} \wedge \vec{F}_A \\
 \vec{M}_{(\vec{F}_A/Gb')} &= \vec{0} + L'_a \vec{y}_2 \wedge (X_A \vec{x}_0 + Y_A \vec{y}_0) \\
 \vec{M}_{(\vec{F}_A/Gb')} &= \begin{pmatrix} -L'_a \sin\varphi & & \\ L'_a \cos\varphi & & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \\
 \vec{M}_{(\vec{F}_A/Gb')} &= \begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & & \\ -L'_a (X_A \cos\varphi + Y_A \sin\varphi) & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \quad (2.70)
 \end{aligned}$$

- moment de la force  $\vec{F}_K$  :

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_{(\vec{F}_K/Gb')} &= \vec{M}_{(\vec{F}_K/K)} + \vec{Gb'K} \wedge \vec{F}_K \\
 \vec{M}_{(\vec{F}_K/Gb')} &= \vec{0} + (L'_b - L_K) \vec{y}_2 \wedge (X_K \vec{x}_0 + Y_K \vec{y}_0) \\
 \vec{M}_{(\vec{F}_K/Gb')} &= \begin{pmatrix} (L'_b - L_K) \sin\varphi & & \\ -(L'_b - L_K) \cos\varphi & & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_K \\ Y_K \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \\
 \vec{M}_{(\vec{F}_K/Gb')} &= \begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & & \\ (L'_b - L_K) (X_K \cos\varphi + Y_K \sin\varphi) & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \quad (2.71)
 \end{aligned}$$

### e) Calcul de l'accélération au point Gb'

Par analogie au calcul de l'accélération au point Gb, on a :

$$\vec{\Gamma}_{(Gb', 2/0)} = \begin{pmatrix} R \theta'^2 \sin\theta + L'_a \varphi'' \cos\varphi - L'_a \varphi'^2 \sin\varphi \\ -R \theta'^2 \cos\theta + L'_a \varphi'' \sin\varphi + L'_a \varphi'^2 \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

### 4.2.3.3. Equations scalaires de la portion de bielle

La projection de la première équation vectorielle fondamentale (2.68) dans le repère fixe donne :

$$\begin{aligned}
 \text{Sur } \vec{x}_0 : m_{pb} [R \theta'^2 \sin\theta + L'_a (\varphi'' \cos\varphi - \varphi'^2 \sin\varphi)] &= X_A + X_K \\
 \text{Sur } \vec{y}_0 : m_{pb} [-R \theta'^2 \cos\theta + L'_a (\varphi'' \sin\varphi + \varphi'^2 \cos\varphi)] &= Y_A + Y_K \\
 \text{Sur } \vec{z}_0 : 0 &= Z_K
 \end{aligned}$$

La projection de la deuxième équation vectorielle (2.68) dans le repère fixe donne :

$$\text{Sur } \vec{x}_0 : 0 = L_K$$

$$\text{Sur } \vec{y}_0 : 0 = N_K$$

$$\text{Sur } \vec{z}_0 : (L'_b - L'_d)(X_K \cos\varphi + Y_K \sin\varphi) + M_K - L'_a(X_A \cos\varphi + Y_A \sin\varphi) = \varphi'' I_{ptz}$$

Nous obtenons un système de six équations à six inconnues.

#### 4.2.3.4. Résolution du système d'équations :

$$X_K = m_{pb}(E_3 + L'_a E_4) - X_A$$

$$Y_K = m_{pb}(-E_1 + L'_a E_2) - Y_A$$

$$Z_K = 0$$

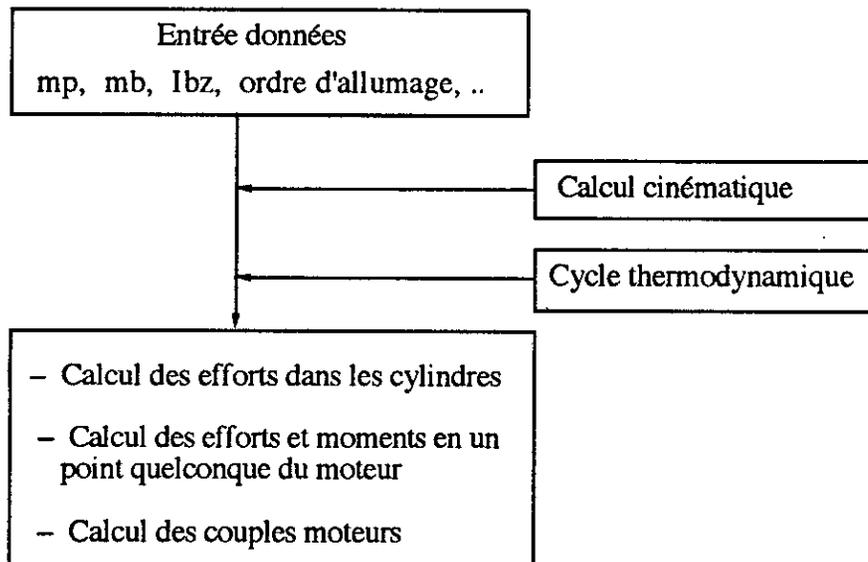
$$M_K = \varphi'' I_{ptz} + L'_a(X_A \cos\varphi + Y_A \sin\varphi) - (L'_b - L'_d)(Y_K \sin\varphi - X_K \cos\varphi)$$

$$L_K = 0$$

$$N_K = 0$$

#### 4.2.3.4. Organigramme de calcul dynamique

Le programme décrit par cet organigramme permet de calculer les composantes des efforts dans tous les points d'articulations du système bielle-manivelle, ainsi qu'en tout point du moteur. Il permet aussi le calcul des couples moteurs.



### 4.3. Cinématique de l'attelage mobile des moteurs en "V"

L'intérêt présenté par l'utilisation d'un moteur avec attelage bielle-biellette réside principalement dans la diminution de l'encombrement longitudinal du moteur. Cependant ce système s'assortit d'une augmentation de la hauteur du moteur et ce afin de permettre le fonctionnement correct de la bielle (une hauteur normale du moteur donne une longueur trop réduite de la bielle). Un autre intérêt réside dans la diminution corrélative du vilebrequin, en longueur, qui devenant plus robuste est appelé, en principe à une meilleure adaptation aux sollicitations de torsion. Enfin, lorsque la bielle atteint le point mort haut (PMH) l'ensemble bielle-œilleton de bielle est pratiquement aligné. Ceci permet d'avoir des efforts élevés (au moment de l'explosion) alors que la vitesse est nulle ce qui entraîne la conservation du film d'huile sur les axes d'articulation.

#### 4.3.1. Introduction

Cette étude porte sur l'ensemble bielle-biellette du moteur en V<sub>é</sub>, (fig.2.39). La cinématique permet de connaître la position, la vitesse et l'accélération en tout point de l'embellage et ce en fonction de la rotation du vilebrequin. Cette étude nécessite la mise en place de cinq repères cartésiens.

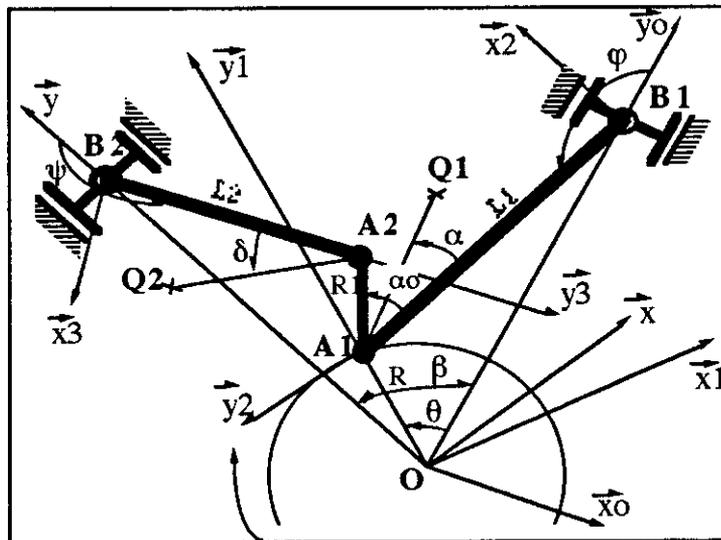


Fig. 2.39 Ensemble bielle-biellette

#### 4.3.1.1. Repères

a) Repère fixe lié à la première rangée de cylindre :  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

O : Centre du vilebrequin ;

$\vec{y}_0$  : Axe des cylindres de la première rangée ;

$\vec{z}_0$  : Axe du vilebrequin, le volant est placé sur les  $\vec{z}_0$  positifs.

b) Repère fixe lié à la deuxième rangée de cylindre :  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$\vec{y}$  : Axe des cylindres de la deuxième rangée ;

$\vec{z}$  : Axe du vilebrequin.

c) Repère mobile lié à la manivelle :  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

$\vec{y}_1$  : Axe portant la manivelle ;

$$\vec{z}_1 = \vec{z}_0$$

d) Repère mobile lié à la bielle :  $(B1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

B1 : Centre de pied de bielle ;

$\vec{y}_2$  : Axe portant la bielle ;

$$\vec{z}_2 = \vec{z}_0$$

e) Repère mobile lié à la biellette :  $(B2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$

B2 : Centre de pied de biellette ;

$\vec{y}_3$  : Axe portant la biellette ;

$$\vec{z}_3 = \vec{z}_0$$

#### 4.3.1.2. Notation

OA1 = R : Rayon manivelle ;

A1A2 = R1 : Bras bielle ;

A1B1 = L1 : Longueur bielle ;

A2B2 = L2 : Longueur biellette ;

A1Q1 = D1 : Distance au point quelconque de la bielle ;

A2Q2 = D2 : Distance au point quelconque de la biellette ;

$\theta = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$  : Angle de rotation du vilebrequin ;

$\theta' = d\theta/dt = \omega$  : Vitesse angulaire de rotation du vilebrequin = cte. ;

$\beta$  : Angle d'ouverture du "V" ;

$\alpha_0$  : Angle position du point d'articulation A2 par rapport au bras de bielle ;

$\varphi = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$  : Angle de rotation de la bielle ;

$\varphi' = d\varphi/dt$  : Vitesse angulaire de la bielle ;

$\psi = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$  : Angle de rotation de la biellette ;

$\psi' = d\psi/dt$  : Vitesse angulaire de la biellette ;

$\alpha = (\vec{y}_2, \vec{A_1Q_1})$  : Angle positionnant le point quelconque Q1 de la bielle ;

$\delta = (\vec{y}_3, \vec{A_2Q_2})$  : Angle positionnant le point quelconque Q2 de la biellette.

- On notera par  $\vec{\Omega}_{(1/0)} = \dot{\theta} \vec{z}_0$  le vecteur rotation instantanée du repère (1) lié à la manivelle par rapport au repère (0) autour de  $\vec{z}_0$  ;

- Le vecteur rotation instantané de la bielle par rapport au repère (0) autour de  $\vec{z}$  est :

$$\vec{\Omega}_{(2/0)} = \dot{\varphi} \vec{z}_0 ;$$

- Le vecteur rotation instantané de la biellette par rapport au repère (0) autour de  $\vec{z}$  est :

$$\vec{\Omega}_{(3/0)} = \dot{\psi} \vec{z}_0 .$$

Les formules de passage entre repères relatives au moteur en ligne restent valables, dans le cas de la bielle. Les formules de passage relatives à la biellette, seront vues dans l'étude de celle-ci.

*Remarque* : pour faciliter le calcul cinématique des différents points appartenant à la bielle et à la biellette (nombre de points importants : A1, A2, B1, B2, G1, G2), nous allons considérer la cinématique de deux points quelconques Q1, Q2 et ensuite étendre les résultats aux autres points, en faisant varier certains paramètres.

### 4.3.2. Etude de la bielle

#### 4.3.2.1. Angle, Vitesse et accélération angulaire de la bielle

Ces relations ont été déjà définies (2.41), (2.42), (2.43) dans le chapitre 4.1.

- Angle rotation de la bielle :

$$\varphi = \pi - \arcsin\left(\frac{R}{L} \sin\theta\right)$$

- Vitesse angulaire de la bielle :

$$\dot{\varphi} = \frac{R}{L} \dot{\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{\cos\varphi}$$

- Accélération angulaire de la bielle :

$$\ddot{\varphi} = \frac{R}{L} \ddot{\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{\cos\varphi} - \frac{R}{L} \dot{\theta}^2 \frac{\sin\theta}{\cos\varphi} + \dot{\varphi} \cdot \operatorname{tg}\varphi$$

$\theta'$  étant considérée comme constante pour le calcul des actions mécaniques, donc  $\theta'' = 0$ , d'où :

$$\ddot{\varphi} = \operatorname{tg}\varphi \cdot \begin{pmatrix} \cdot 2 & \cdot 2 \\ \varphi & -\theta \end{pmatrix}$$

*Remarque* : L'étude cinématique des points A1, B1, G1 de la bielle (moteur en V) est identique à celle de A, B et Gb de la bielle (moteur en ligne), paragraphe 4.1.4.

4.3.2.2. Coordonnées d'un point quelconque

Soit Q1 le point quelconque, appartenant au repère (B1,  $\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2$ )

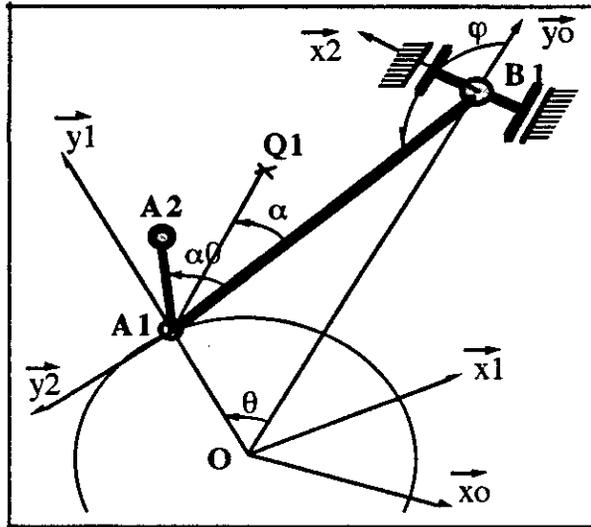


Fig. 2.40 Cinématique de la bielle

$$\vec{OQ1} = \vec{OA1} + \vec{A1Q1}$$

$$\vec{OA1} = \begin{pmatrix} -R \sin\theta \\ R \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

$$\vec{A1Q1} = \begin{pmatrix} D1(\cos\alpha \sin\varphi + \sin\alpha \cos\varphi) \\ -D1(\cos\alpha \cos\varphi - \sin\alpha \sin\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

$$\vec{A1Q1} = \begin{pmatrix} D1 \sin(\varphi + \alpha) \\ -D1 \cos(\varphi + \alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

d'où :

$$\vec{OQ1} = \begin{pmatrix} -R \sin\theta + D1 \sin(\varphi + \alpha) \\ R \cos\theta - D1 \cos(\varphi + \alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad (2.73)$$

Les coordonnées des points caractéristiques de la bielle, seront déduites de l'expression (2.73) en modifiant les valeurs de D1 et  $\alpha$  tel que :

a) **Point B1** (Pied de bielle)

$D1 = L1, \alpha = 0$  d'où : □

$$\overrightarrow{OB1} = \begin{pmatrix} -R \sin\theta + L1 \sin\varphi \\ R \cos\theta - L1 \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{xO} \\ \overrightarrow{yO} \\ \overrightarrow{zO} \end{pmatrix}$$

Comme  $R \sin\theta = L1 \sin\varphi$  (relation 2.39), on aura :

$$\overrightarrow{OB1} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \cos\theta - L1 \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{xO} \\ \overrightarrow{yO} \\ \overrightarrow{zO} \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

b) **Point A1** (Tête de bielle)

$D1 = 0, \alpha = \forall$  d'où : □

$$\overrightarrow{OA1} = \begin{pmatrix} -R \sin\theta \\ R \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{xO} \\ \overrightarrow{yO} \\ \overrightarrow{zO} \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

c) **Point A2** (Tête de biellette)

$D1 = R1, \alpha = \alpha_0$  d'où :

$$\overrightarrow{OA2} = \begin{pmatrix} -R \sin\theta + R1 \sin(\varphi + \alpha_0) \\ R \cos\theta - R1 \cos(\varphi + \alpha_0) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{xO} \\ \overrightarrow{yO} \\ \overrightarrow{zO} \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

d) **Point G1** (centre d'inertie de la bielle)

$D1 = DG1, \alpha = \alpha_G$  d'où :

$$\overrightarrow{OG1} = \begin{pmatrix} -R \sin\theta + DG1 \sin(\varphi + \alpha_G) \\ R \cos\theta - DG1 \cos(\varphi + \alpha_G) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{xO} \\ \overrightarrow{yO} \\ \overrightarrow{zO} \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

#### 4.3.2.3. Vitesse des points caractéristiques de la bielle

Par définition, la vitesse du point Q1 est donnée par :

$$\overrightarrow{V}_{(Q1, 2/0)} = \frac{d^0 \overrightarrow{OQ1}}{dt}$$

En dérivant l'expression (2.73) , on obtient :

$$\vec{V}_{(Q1,2/0)} = \begin{pmatrix} -R\theta'\cos\theta + D1\varphi'\cos(\varphi + \alpha) \\ -R\theta'\sin\theta + D1\varphi'\sin(\varphi + \alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{xO} \\ \vec{yO} \\ \vec{zO} \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

Les vitesses des points caractéristiques de la bielle, sont déduites de (2.78) en modifiant les valeurs de D1 et  $\alpha$ .

**a) Vitesse du point B1**

D1 = L1,  $\alpha = 0$  d'où :

$$\vec{V}_{(B1,2/0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R\theta'\sin\theta + L1\varphi'\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{xO} \\ \vec{yO} \\ \vec{zO} \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

**b) Vitesse du point A1**

D1 = 0,  $\alpha = \forall$  d'où :

$$\vec{V}_{(A1,2/0)} = \begin{pmatrix} -R\theta'\cos\theta \\ -R\theta'\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{xO} \\ \vec{yO} \\ \vec{zO} \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

**c) Vitesse du point A2**

D1 = R1,  $\alpha = \alpha_0$  d'où :

$$\vec{V}_{(A2,2/0)} = \begin{pmatrix} -R\theta'\cos\theta + R1\varphi'\cos(\varphi + \alpha_0) \\ -R\theta'\sin\theta + R1\varphi'\sin(\varphi + \alpha_0) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{xO} \\ \vec{yO} \\ \vec{zO} \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

**d) Vitesse du point G1**

D1 = DG1,  $\alpha = \alpha_G$  d'où :

$$\vec{V}_{(G1,2/0)} = \begin{pmatrix} -R\theta'\cos\theta + DG_1\varphi'\cos(\varphi + \alpha_G) \\ -R\theta'\sin\theta + DG_1\varphi'\sin(\varphi + \alpha_G) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{xO} \\ \vec{yO} \\ \vec{zO} \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

#### 4.3.2.4. Accélération des points caractéristiques de la bielle

En opérant de la même manière que pour la détermination des vitesses, l'accélération du point Q1 se déduit de :

$$\vec{\Gamma}_{(Q1)} = \frac{d\vec{V}_{(Q1)}}{dt}$$

En considérant que la vitesse du vilebrequin est constante ( $\theta' = \text{cte.}$ ), on obtient :

$$\vec{\Gamma}_{(Q1,2/0)} = \begin{pmatrix} -R\theta'^2 \sin\theta + D1\varphi'' \cos(\varphi + \alpha) - D1\varphi'^2 \sin(\varphi + \alpha) \\ -R\theta'^2 \cos\theta + D1\varphi'' \sin(\varphi + \alpha) + D1\varphi'^2 \cos(\varphi + \alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{xO} \\ \vec{yO} \\ \vec{zO} \end{pmatrix} \quad (2.83)$$

Cette expression nous permet d'écrire l'accélération des points caractéristiques de la bielle :

##### a) Accélération du point B1

$D1 = L1, \alpha = 0$  d'où :

$$\vec{\Gamma}_{(B1,2/0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R\theta'^2 \cos\theta + L1\varphi'' \sin\varphi + L1\varphi'^2 \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{xO} \\ \vec{yO} \\ \vec{zO} \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

##### b) Accélération du point A1

$D1 = 0, \alpha = \forall$  d'où :

$$\vec{\Gamma}_{(A1,2/0)} = \begin{pmatrix} R\theta'^2 \sin\theta \\ -R\theta'^2 \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{xO} \\ \vec{yO} \\ \vec{zO} \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

##### c) Accélération du point A2

$D1 = R1, \alpha = \alpha_0$  d'où :

$$\vec{\Gamma}_{(A2,2/0)} = \begin{pmatrix} R\theta'^2 \sin\theta + R1\varphi'' \cos(\varphi + \alpha_0) - R1\varphi'^2 \sin(\varphi + \alpha_0) \\ -R\theta'^2 \cos\theta + R1\varphi'' \sin(\varphi + \alpha_0) + R1\varphi'^2 \cos(\varphi + \alpha_0) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{xO} \\ \vec{yO} \\ \vec{zO} \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

d) Accélération du point G1

D1 = DG1,  $\alpha = \alpha_G$  d'où :

$$\vec{\Gamma}_{(G1,2/0)} = \left\{ \begin{array}{l} R\theta'^2 \sin\theta + DG_1 \varphi'' \cos(\varphi + \alpha_G) - DG_1 \varphi'^2 \sin(\varphi + \alpha_G) \\ -R\theta'^2 \cos\theta + DG_1 \varphi'' \sin(\varphi + \alpha_G) + DG_1 \varphi'^2 \cos(\varphi + \alpha_G) \\ 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{array} \quad (2.111)$$

4.3.3. Etude de la bielle

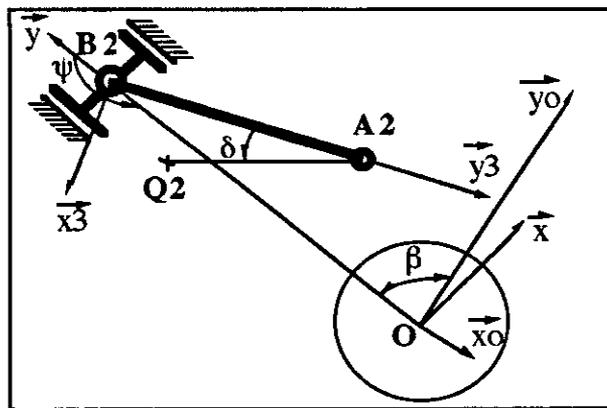
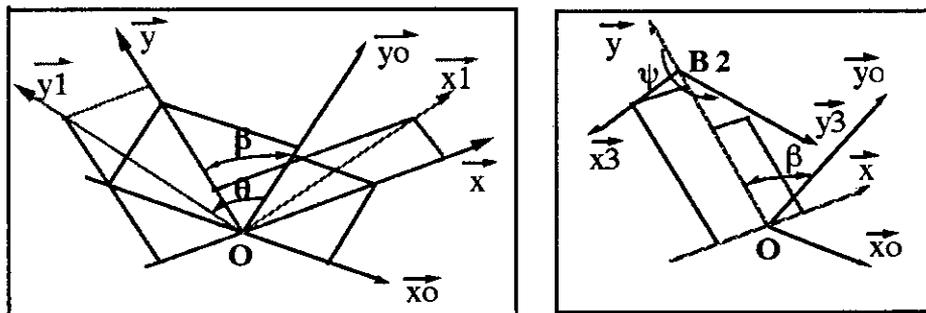


Fig. 2.41 Schéma de la bielle

4.3.3.1. Formule de passage entre repères



Passage de  $(O, x_0, y_0, z_0)$  à  $(O, x, y, z)$       Passage de  $(O, x, y, z)$  à  $(B_2, x_3, y_3, z_3)$

Fig. 2.42 passage entre repères

Passage du repère  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  au repère  $(B2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$

a) Vecteur position :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x}_3 = \cos(\psi + \beta)\vec{x}_0 + \sin(\psi + \beta)\vec{y}_0 \\ \vec{y}_3 = -\sin(\psi + \beta)\vec{x}_0 + \cos(\psi + \beta)\vec{y}_0 \\ \vec{z}_3 = \vec{z}_0 \end{array} \right.$$

b) Vecteur vitesse :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^0 \vec{x}_3}{dt} = \vec{\Omega}_{(3,0)} \wedge \vec{x}_3 + \frac{d^3 x_3}{dt} = \psi' \vec{z}_0 \wedge \vec{x}_3 + \vec{0} = \psi' \vec{y}_3 \\ \frac{d^0 \vec{y}_3}{dt} = \vec{\Omega}_{(3,0)} \wedge \vec{y}_3 + \frac{d^3 y_3}{dt} = \psi' \vec{z}_0 \wedge \vec{y}_3 + \vec{0} = -\psi' \vec{x}_3 \\ \frac{d^0 \vec{z}_3}{dt} = \vec{0} \end{array} \right.$$

Passage du repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  au repère  $(B2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$

a) Vecteur position :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x}_3 = \cos\psi \vec{x} + \sin\psi \vec{y} \\ \vec{y}_3 = -\sin\psi \vec{x} + \cos\psi \vec{y} \\ \vec{z}_3 = \vec{z} \end{array} \right.$$

b) Vecteur vitesse :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^1 \vec{x}_3}{dt} = \vec{\Omega}_{(3/.)} \wedge \vec{x}_3 = \psi' \vec{z}_0 \wedge \vec{x}_3 = \psi' \vec{y}_3 \\ \frac{d^1 \vec{y}_3}{dt} = \vec{\Omega}_{(3/.)} \wedge \vec{y}_3 = \psi' \vec{z}_0 \wedge \vec{y}_3 = -\psi' \vec{x}_3 \\ \frac{d^1 \vec{z}_3}{dt} = \vec{0} \end{array} \right.$$

## RECAPITULATIF DES FORMULES DE PASSAGE ENTRE REPERES

Passage du repère  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  au repère  $(B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$

$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} \cos(\psi + \beta) \\ \sin(\psi + \beta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} ; \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} -\sin(\psi + \beta) \\ \cos(\psi + \beta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} ; \vec{z}_3 = \vec{z}_0$$

Passage du repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  au repère  $(B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$

$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix} ; \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} -\sin\psi \\ \cos\psi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix} ; \vec{z}_3 = \vec{z}$$

Passage du repère  $(B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  au repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ -\sin\psi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{pmatrix} ; \vec{y} = \begin{pmatrix} \sin\psi \\ \cos\psi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{pmatrix} ; \vec{z} = \vec{z}_3$$

Passage du repère  $(B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  au repère  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} \cos(\psi + \beta) \\ -\sin(\psi + \beta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{pmatrix} ; \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} \sin(\psi + \beta) \\ \cos(\psi + \beta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{pmatrix} ; \vec{z}_0 = \vec{z}_3$$

## 4.3.3.2. Angle, vitesse et accélération de la bielle.

a) Angle  $\psi$ :

Nous remarquons que les projections de  $\vec{B_2A_2}$  et de  $\vec{OA_2}$  par rapport à  $\vec{x}$  sont égales, écrivons la projection de ces deux vecteurs dans le repère :  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

$$* \vec{OA_2} = \vec{OA_1} + \vec{A_1A_2}$$

Le vecteur  $\vec{OA_2}$  a été calculé dans le repère  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , il a pour valeur :

$$\vec{OA_2} = \begin{pmatrix} -R \sin\theta + R_1 \sin(\varphi + \alpha_0) \\ R \cos\theta - R_1 \cos(\varphi + \alpha_0) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

Dans le repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  Le vecteur  $\vec{OA}_2$  a pour valeur :

$$\vec{OA}_2 = \begin{cases} -R \sin\theta \cos\beta + R \cos\theta \sin\beta + R1 \sin(\varphi + \alpha) \cos\beta - R1 \cos(\varphi + \alpha) \sin\beta \\ R \cos\theta \cos\beta + R \sin\theta \sin\beta - R1 \sin(\varphi + \alpha) \sin\beta - R1 \cos(\varphi + \alpha) \cos\beta \end{cases} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{matrix}$$

$$\vec{OA}_2 = \begin{cases} -R[\sin\theta \cos\beta + \cos\theta \sin\beta] + R1[\sin(\varphi + \alpha) \cos\beta - \cos(\varphi + \alpha) \sin\beta] \\ R[\cos\theta \cos\beta + \sin\theta \sin\beta] - R1[\sin(\varphi + \alpha) \sin\beta + \cos(\varphi + \alpha) \cos\beta] \end{cases} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{matrix}$$

$$\vec{OA}_2 = \begin{cases} -R \sin(\theta - \beta) + R1 \sin(\varphi + \alpha - \beta) \\ R \cos(\theta - \beta) - R1 \cos(\varphi + \alpha - \beta) \end{cases} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{matrix} \quad (2.88)$$

$$\ast \vec{B}_2\vec{A}_2 = L_2 \vec{y}_3$$

La projection de  $\vec{y}_3$  dans le repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est donnée par les formules de passage entre repères, d'où :

$$\vec{B}_2\vec{A}_2 = -L_2 \sin\psi \vec{x} + L_2 \cos\psi \vec{y}$$

Les vecteurs  $\vec{OA}_2$  et  $\vec{B}_2\vec{A}_2$  étant définis dans le repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , nous pouvons évaluer leur projection sur  $\vec{x}$  :

$$\begin{aligned} -R \sin(\theta - \beta) + R1 \sin(\varphi + \alpha - \beta) &= -L2 \sin \psi \\ R \cos(\theta - \beta) - R1 \cos(\varphi + \alpha - \beta) &= L2 \cos \psi \end{aligned}$$

d'où la relation cinématique fondamentale :

$$\sin\psi = R/L2. \sin(\theta - \beta) - R1/L2. \sin(\varphi + \alpha - \beta) \quad (2.89)$$

Auquel il convient d'ajouter, comme pour  $\varphi$ ,  $\psi \in [\pi/2, 3\pi/2]$  soit :

$$\psi = \pi - \arcsin [R/L2. \sin(\theta - \beta) - R1/L2. \sin(\varphi + \alpha - \beta)] \quad (2.90)$$

De cette relation on tire la vitesse et l'accélération angulaire de la bielle.

**b) Vitesse angulaire de la bielle :**

$$\psi' = \frac{1}{\cos\psi} \left[ \frac{R}{L2} \dot{\theta} \cos(\theta - \beta) - \frac{R1}{L2} \dot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha - \beta) \right] \quad (2.91)$$

c) Accélération angulaire de la biellette :

$$\psi'' = \frac{1}{\cos\psi} \left[ -\frac{R}{L2} \dot{\theta}^2 \sin(\theta-\beta) - \frac{R1}{L2} \ddot{\varphi} \cos(\varphi+\alpha_0-\beta) + \frac{R1}{L2} \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi+\alpha_0-\beta) + \dot{\psi}^2 \sin\psi \right]$$

4.3.3.3. Coordonnées des points caractéristiques de la biellette

Soit un point  $Q_2$  appartenant au repère  $(B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  tel que :

$$\vec{OQ}_2 = \vec{OA}_2 + \vec{A}_2Q_2$$

Le point  $A_2$  à été déjà calculé dans l'étude de la bielle (2.100), dans le repère fixe :

$$\vec{OA}_2 = \begin{pmatrix} -R \sin\theta + R1 \sin(\varphi + \alpha_0) \\ R \cos\theta - R1 \cos(\varphi + \alpha_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur  $\vec{A}_2Q_2$  dans le repère  $(B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  est donné par :

$$\vec{A}_2Q_2 = \begin{pmatrix} D_2 \sin\delta \\ -D_2 \cos\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \end{pmatrix}$$

La projection de vecteur dans le repère fixe donne :

$$\vec{A}_2Q_2 = \begin{pmatrix} D_2 [\sin\delta \cdot \cos(\psi+\beta) + \cos\delta \cdot \sin(\psi+\beta)] \\ -D_2 [-\sin\delta \cdot \sin(\psi+\beta) + \cos\delta \cdot \cos(\psi+\beta)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A}_2Q_2 = \begin{pmatrix} D_2 \sin(\psi+\delta+\beta) \\ -D_2 \cos(\psi+\delta+\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \end{pmatrix}$$

d'où les coordonnées du point  $Q_2$  dans le repère fixe

$$\vec{OQ}_2 = \begin{pmatrix} -R \sin\theta + R1 \sin(\varphi+\alpha_0) + D_2 \sin(\psi+\delta+\beta) \\ R \cos\theta - R1 \cos(\varphi+\alpha_0) - D_2 \cos(\psi+\delta+\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \end{pmatrix} \quad (2.93)$$

Les coordonnées des points caractéristiques de la bielle, sont déduits de l'expression (2.93) en modifiant les valeurs de  $D_2$  et  $\delta$ .

**a) Pied de bielle (point  $B_2$ )**

En modifiant les valeurs de  $D_2$  et  $\delta$  tel que :  $D_2 = L_2$  et  $\delta = 0$ , on obtient :

$$\overrightarrow{OB_2} = \begin{pmatrix} -R\sin\theta + R_1\sin(\varphi+\alpha_0) + L_2\sin(\psi+\beta) \\ R\cos\theta - R_1\cos(\varphi+\alpha_0) - L_2\cos(\psi+\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \end{pmatrix} \quad (2.94)$$

**b) Centre d'inertie de la bielle (point  $G_2$ )**

Pour les coordonnées du point  $G_2$ , les paramètres  $D_2$  et  $DG_2$  prennent pour valeur :  $D_2 = DG_2$  et  $\delta = \delta_G$  d'où :

$$\overrightarrow{OG_2} = \begin{pmatrix} -R\sin\theta + R_1\sin(\varphi+\alpha_0) + DG_2\sin(\psi+\delta_G+\beta) \\ R\cos\theta - R_1\cos(\varphi+\alpha_0) - DG_2\cos(\psi+\delta_G+\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \end{pmatrix} \quad (2.95)$$

**4.3.3.4. Vitesse des points caractéristiques de la bielle**

La vitesse du point  $Q_2$  est donnée par :

$$\overrightarrow{V}_{(Q_2, 3/0)} = \frac{d^0 \overrightarrow{OQ_2}}{dt}$$

La dérivée du vecteur  $\overrightarrow{OQ_2}$  dans le repère fixe donne :

$$\overrightarrow{V}_{(Q_2, 3/0)} = \begin{pmatrix} -R\dot{\theta}\cos\theta + R_1\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha_0) + D_2\dot{\psi}\cos(\psi+\delta+\beta) \\ -R\dot{\theta}\sin\theta + R_1\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha_0) + D_2\dot{\psi}\sin(\psi+\delta+\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \end{pmatrix} \quad (2.96)$$

La vitesse des points caractéristiques de la bielle sont déduites de (1.120) en modifiant les valeurs de  $D_2$  et  $\delta$ .

**a) Vitesse du pied de bielle (point  $B_2$ )**

La modification des paramètres  $D_2$  et  $\delta$  ( $D_2 = L_2$  et  $\delta = 0$ ), donne :

$$\overrightarrow{V}_{(B_2, 3/0)} = \begin{pmatrix} -R\dot{\theta}\cos\theta + R_1\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha_0) + L_2\dot{\psi}\cos(\psi+\beta) \\ -R\dot{\theta}\sin\theta + R_1\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha_0) + L_2\dot{\psi}\sin(\psi+\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \end{pmatrix} \quad (2.97)$$

**b) Vitesse du centre d'inertie de la bielle (point G<sub>2</sub>)**

Avec : D<sub>2</sub> = DG<sub>2</sub> et δ = δ<sub>G</sub> on a :

$$\vec{V}_{(G_2,3/0)} = \begin{pmatrix} -R\dot{\theta}'\cos\theta + R_1 \dot{\varphi}'\cos(\varphi + \alpha_0) + DG_2 \dot{\psi}'\cos(\psi + \delta_G + \beta) \\ -R\dot{\theta}'\sin\theta + R_1 \dot{\varphi}'\sin(\varphi + \alpha_0) + DG_2 \dot{\psi}'\sin(\psi + \delta_G + \beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \end{pmatrix} \quad (2.98)$$

**4.3.3.5. Accélération des points caractéristiques de la bielle**

L'accélération d'un point quelconque Q<sub>2</sub> est donnée par :

$$\vec{\Gamma}_{(Q_2,3/0)} = \frac{d\vec{V}_{(Q_2,3/0)}}{dt}$$

$$\vec{\Gamma}_{(Q_2,3/0)} = \begin{pmatrix} R\ddot{\theta} \sin\theta + R_1 \ddot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha_0) - R_1 \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi + \alpha_0) \\ + D_2 \ddot{\psi} \cos(\psi + \delta + \beta) - D_2 \dot{\psi}^2 \sin(\psi + \delta + \beta) \\ - R\ddot{\theta} \cos\theta + R_1 \ddot{\varphi} \sin(\varphi + \alpha_0) + R_1 \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi + \alpha_0) \\ + D_2 \ddot{\psi} \sin(\psi + \delta + \beta) + D_2 \dot{\psi}^2 \cos(\psi + \delta + \beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \end{pmatrix} \quad (2.99)$$

Les accélération des points caractéristiques de la bielle sont déduites de (2.123) en modifiant les valeurs des paramètres D<sub>2</sub> et δ.

**a) Accélération du pied de la bielle (point B<sub>2</sub>)**

Pour obtenir l'accélération du point B<sub>2</sub>, on fait correspondre à la valeur D<sub>2</sub> = L<sub>2</sub> et δ = 0. d'où :

$$\vec{\Gamma}_{(B_2,3/0)} = \begin{pmatrix} R\ddot{\theta} \sin\theta + R_1 \ddot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha_0) - R_1 \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi + \alpha_0) \\ + L_2 \ddot{\psi} \cos(\psi + \beta) - L_2 \dot{\psi}^2 \sin(\psi + \beta) \\ - R\ddot{\theta} \cos\theta + R_1 \ddot{\varphi} \sin(\varphi + \alpha_0) + R_1 \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi + \alpha_0) \\ + L_2 \ddot{\psi} \sin(\psi + \beta) + L_2 \dot{\psi}^2 \cos(\psi + \beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \end{pmatrix} \quad (2.100)$$

**b) Accélération du centre d'inertie de la bielle (point G<sub>2</sub>)**

L'accélération du point G<sub>2</sub> s'obtient en faisant correspondre à D<sub>2</sub> = DG<sub>2</sub> et à δ = δ<sub>G</sub>, d'où :

$$\vec{\Gamma}_{(G_2,3/0)} = \begin{pmatrix} R\ddot{\theta} \sin\theta + R_1 \ddot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha_0) - R_1 \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi + \alpha_0) \\ + D_{G_2} \ddot{\psi} \cos(\psi + \delta_G + \beta) - D_{G_2} \dot{\psi}^2 \sin(\psi + \delta_G + \beta) \\ - R\ddot{\theta} \cos\theta + R_1 \ddot{\varphi} \sin(\varphi + \alpha_0) + R_1 \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi + \alpha_0) \\ + D_{G_2} \ddot{\psi} \sin(\psi + \delta_G + \beta) + D_{G_2} \dot{\psi}^2 \cos(\psi + \delta_G + \beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \end{pmatrix} \quad (2.100)$$

**c) Vitesse de glissement aux points d'articulation  $A_1$  et  $A_2$**

Il s'agit de calculer la vitesse de glissement (au point  $A_1$ ), du coussinet de tête de bielle sur le maneton et (au point  $A_2$ ), la vitesse de glissement du coussinet de tête de bielle sur l'axe d'articulation de bielle.

La vitesse de glissement au point  $A_1$  a été déjà calculée (2.54), dans le cas des moteurs en ligne (paragraphe 4.1.4).

$$\vec{V}_{(M1, 2/1)} = R_{m1} \cdot (\dot{\varphi} - \dot{\theta}) \vec{x}_2 \quad (2.54)$$

**La Vitesse de glissement au point  $A_2$**

Soit  $M_2$  lié au coussinet de la bielle appartenant au repère (3), par rapport à l'axe de la bielle lié au repère (2). La vitesse de  $M_2$  lié au repère (3) par rapport au repère (2) est :

$$\vec{V}_{(M2, 3/2)} = \frac{d^2 \vec{OM}_2}{dt}$$

Avec :

$$\vec{OM}_2 = \vec{OA}_2 + \vec{A}_2 M_2$$

et

$$\vec{OA}_2 = \vec{OA}_1 + \vec{A}_1 A_2$$

donc :

$$\vec{V}_{(M2, 3/2)} = \frac{d^2 \vec{OA}_1}{dt} + \frac{d^2 \vec{A}_1 A_2}{dt} + \frac{d^2 \vec{A}_2 M_2}{dt}$$

$\vec{A}_1 A_2$  étant lié au repère (2), donc sa dérivé dans ce repère est nulle d'où :

$$\vec{V}_{(M2, 3/2)} = -R(\dot{\varphi} - \dot{\theta}) \vec{x}_1 + R_{m2}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}) \vec{x}_3$$

donc :

$$\vec{V}_{(M2, 3/0)} = \begin{pmatrix} -R(\dot{\varphi} - \dot{\theta}) \cos\theta + R_{m2}(\dot{\varphi} - \dot{\theta}) \cos(\psi + \beta) \\ -R(\dot{\varphi} - \dot{\theta}) \sin\theta + R_{m2}(\dot{\varphi} - \dot{\theta}) \sin(\psi + \beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \end{pmatrix} \quad (2.102)$$

**4.3.4. Etude des pistons**

Tous les points des pistons ont un mouvement de translation lié à  $B_1$  ou  $B_2$ . Pour un point quelconque, il suffit donc d'ajouter les coordonnées de  $B_1 P_1$ , (ou  $B_2 P_2$ ) à celles de  $OB_1$  (ou  $OB_2$ ) telles que :

$$B_1 P_1 = B_2 P_2 = L_p$$

et

$$(\vec{y}_0, \vec{B}_1 P_1) = (\vec{y}, \vec{B}_2 P_2) = \xi$$

de même

$$\vec{OP}_1 = \vec{OB}_1 + \vec{B}_1 P_1$$

et 
$$\vec{OP}_2 = \vec{OB}_2 + \vec{B}_2\vec{P}_2$$

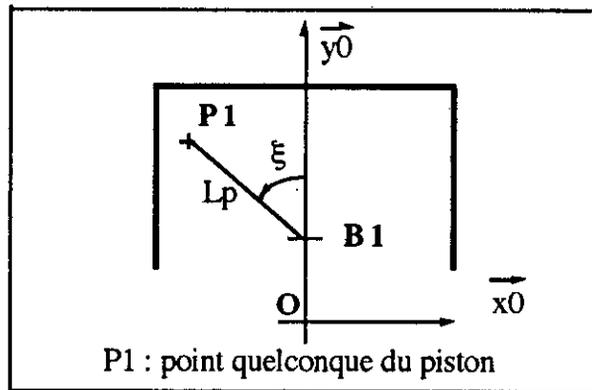


Fig. 2. 43. Positionnement d'un point quelconque du piston

#### 4.3.4.1. Vecteur position

##### a) Piston 1 (lié à la bielle) :

Le vecteur  $\vec{OB}_1$  a été déjà déterminé (2.74), donc  $\vec{OP}_1$  a pour expression :

$$\vec{OP}_1 = \begin{pmatrix} -L_p \sin \xi \\ R \cos \theta - L_1 \cos \varphi + L_p \cos \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \end{pmatrix} \quad (2.103)$$

##### b) Piston 2 (lié à la biellette) :

De même que  $\vec{OB}_1$ , le vecteur  $\vec{OB}_2$  a été déjà calculé dans le repère fixe (2.94), d'où le vecteur  $\vec{OP}_2$  :

$$\vec{OP}_2 = \begin{pmatrix} -R \sin \theta + R_1 \sin(\varphi + \alpha) + L_2 \sin(\psi + \beta) - L_p \sin(\beta + \xi) \\ R \cos \theta - R_1 \cos(\varphi + \alpha) - L_2 \cos(\psi + \beta) + L_p \cos(\beta + \xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \end{pmatrix} \quad (2.104)$$

#### 4.3.4.2. Vecteur vitesse et accélération

Le mouvement des pistons étant une translation rectiligne, le vecteur rotation instantané est nul ( $\Omega = 0$ ) donc on a :

$$\vec{V}_{p1} = \vec{V}_{B1} \text{ et } \vec{V}_{p2} = \vec{V}_{B2}$$

Ces vitesses sont déjà calculés (2.79 et 2.97). De même les accélérations  $\Gamma_{p1}$  et  $\Gamma_{p2}$ , sont identiques aux  $\Gamma_{B1}$  et  $\Gamma_{B2}$  et ne font donc pas l'objet d'une formulation particulière. Ceci reste bien sûr valable pour le centre d'inertie des pistons puisque  $G_{p1}$  (ou  $G_{p2}$ ) n'est qu'un point particulier de  $p1$  avec :

$$L_p = LG_p \text{ et } \xi = \pi$$

### 4.3.4.3. Modification des équations de base dans le cas d'un désaxement des pistons

Le désaxement du piston entraîne que B1, peut se situer en B'1 (coté intérieur du v<sup>é</sup>) ou en B''1 (coté extérieur du v<sup>é</sup>). La modification apparait au niveau des obliquités, mais le terme correctif étant une constante, il n'apparait plus dans les dérivées successives qui restent inchangées littéralement (mais pas numériquement du fait de la présence des termes  $\cos\varphi$  et  $\operatorname{tg}\varphi$  ou  $\cos\psi$  et  $\operatorname{tg}\psi$ ). Donc nous aurons :

$$\varphi_1 = \pi - \operatorname{arc\,sin} \left( \frac{R}{L_1} \cdot \sin\theta - \frac{z}{L_1} \right) \quad \text{avec } z \text{ algébrique} \quad (2.105)$$

$$\psi_1 = \pi - \operatorname{arc\,sin} \left( \frac{R}{L_1} \cdot \sin(\theta - \beta) - \frac{R_1}{L_2} \cdot \sin(\varphi_1 - (\beta - \alpha_0)) - \frac{z}{L_2} \right) \quad (2.106)$$

Les vitesses et les accélérations angulaires de la bielle et de la biellette, relatives au désaxement, s'obtiennent par dérivation des expressions (2.105) et (2.106).

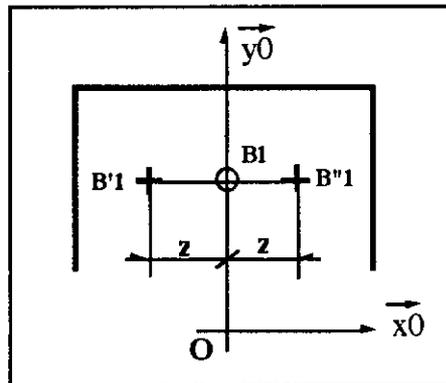
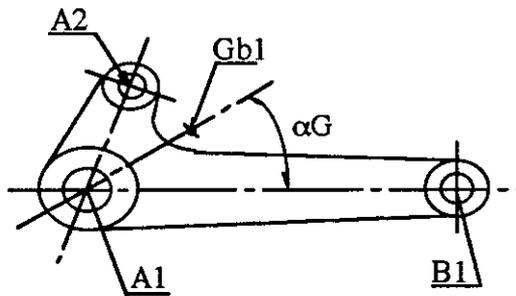


Fig. 2.44 Désaxement du piston

### 4.3.4.4. Centre d'inertie

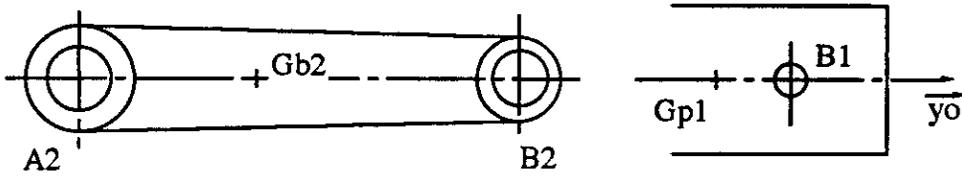
On peut définir les centres d'inertie des bielles et pistons de la manière suivante :

#### a) Bielle



$$A_1 G_{b1} = D_{G1} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{A_1 B_1}, \overrightarrow{A_1 G_{b1}}) = \alpha_G$$

b) Bielle et piston



$$A_2 G_{b2} = D G_2$$

$$\left( \overrightarrow{A_2 B_2}, \overrightarrow{A_2 G_{b2}} \right) = 0$$

$$B_1 G_{p1} = B_2 G_{p2} = L_p$$

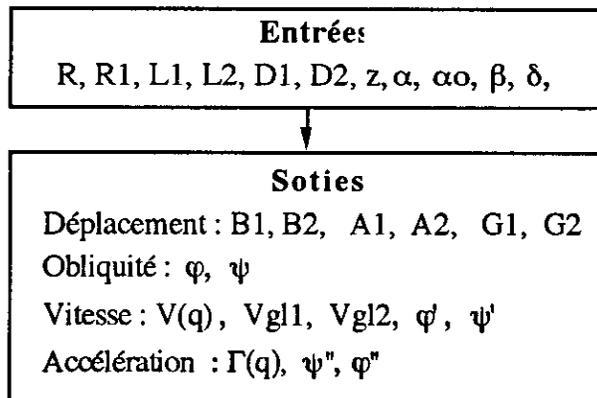
$$\left( \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{B_1 G_{p1}} \right) = \left( \overrightarrow{y}, \overrightarrow{B_2 G_{p2}} \right) = \pi$$

Remarque : On peut concevoir, pour des motifs de fonctionnement une bielle non symétrique. Dans ce cas Gp n'appartient plus à l'axe et on aura un angle tel que :

$$\left( \overrightarrow{A_1 B_1}, \overrightarrow{A_1 G_{p1}} \right) = \zeta_0 . \text{ Le piston peut également être non symétrique.}$$

ORGANIGRAMME : CINEMATIQUE DES MOTEURS EN "v"

Cet organigramme décrit la recherche des coordonnées, des vitesses et des accélérations de tout point appartenant à l'embellage, et en particulier les points caractéristiques, et ce pour un cycle thermodynamique donné.



#### 4.4. Dynamique de l'attelage mobile des moteurs en "V"

**- Rappel des hypothèses :**

- \*  $\theta = \omega t$ , avec  $\omega$  constante (nous négligeons les variations cycliques de la vitesse de rotation pour le calcul des actions mécaniques);
- \* On néglige les efforts de pesanteur face aux efforts des gaz;
- \* On suppose que les contacts sont ponctuels et sans frottement (par manque de moyens de mesure entre chemise et piston);
- \* Tous les paliers sont considérés comme des liaisons parfaites sans frottement.

**- Indices utilisés :**

- p1 : piston coté bielle
- p2 : piston coté biellette
- b1 : bielle
- b2 : biellette
- c1 : chemise coté bielle
- c2 : chemise coté biellette
- cb : chambre de combustion (effort dû au gaz)
- pal : palier du vilebrequin (appartenant au bloc moteur)
- v : vilebrequin

#### 4.4.1. Etude dynamique du Piston 1 (coté bielle):

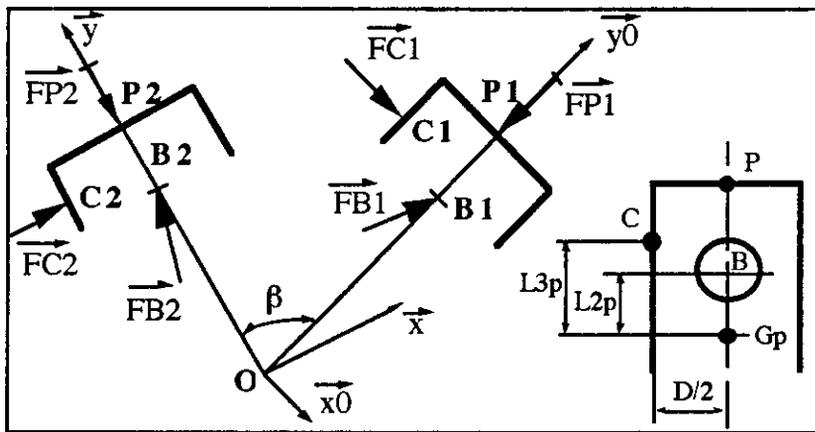


Fig.2.45 Actions mécaniques sur les pistons 1 et 2

Les torseurs des actions mécaniques relatif au piston sont définis aux différents points :

**. Point B<sub>1</sub>** (articulation bielle-piston 1)

$$\tau \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{b1/p1} \\ \vec{M}_{b1/p1} \end{array} \right\}_{B1} \Rightarrow \vec{F}_{(b1/p1, B1)} = \begin{pmatrix} X_{B1} \\ Y_{B1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} ; \vec{M}_{(F(b1/p1, B1))} = 0$$

Les expressions de l'effort et du moment données par le torseur sont lues de la manière suivante :

- $\vec{F}_{(b1/p1, B1)}$  : effort de la bielle sur le piston 1 au point B1
- $\vec{M}_{(F(b1/p1, B1))}$  : moment de l'effort de la bielle sur le piston 1 au point B1

. **Point C<sub>1</sub>** (contact chemise-piston 1)

$$\tau \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{cl/p1} \\ \vec{M}_{cl/p1} \end{array} \right\}_{C1} \Rightarrow \vec{F}_{(cl/p1, C1)} = \begin{pmatrix} X_{C1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{array} ; \vec{M}_{\vec{F}(cl/p1, C1)} = 0$$

. **Point P<sub>1</sub>** (point d'application des efforts dûs aux gaz sur le piston 1)

$$\tau \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{cb/p1} \\ \vec{M}_{cb/p1} \end{array} \right\}_{P1} \Rightarrow \vec{F}_{(cb/p1, P1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -Y_{P1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{array} ; \vec{M}_{\vec{F}(cb/p1, P1)} = 0$$

**4.4.2. Etude dynamique du Piston 2 (coté bielle) :**

Le piston coté bielle, est sollicité par les mêmes types d'efforts que le piston coté bielle, donc nous retrouvons les mêmes types de torseurs aux indices près.

. **Point B<sub>2</sub>** (articulation bielle-piston 2)

$$\tau \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{b2/p2} \\ \vec{M}_{b2/p2} \end{array} \right\}_{B2} \Rightarrow \vec{F}_{(b2/p2, B2)} = \begin{pmatrix} X_{B2} \\ Y_{B2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{array} ; \vec{M}_{\vec{F}(b2/p2, B2)} = 0$$

. **Point C<sub>2</sub>** (contact chemise-piston 2)

$$\tau \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{c2/p2} \\ \vec{M}_{c2/p2} \end{array} \right\}_{C1} \Rightarrow \vec{F}_{(c2/p2, C2)} = \begin{pmatrix} X_{C2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{array} ; \vec{M}_{\vec{F}(c2/p2, C2)} = 0$$

. **Point P<sub>2</sub>** (point d'application des efforts dûs aux gaz sur le piston 2)

$$\tau \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{cb/p2} \\ \vec{M}_{cb/p2} \end{array} \right\}_{P1} \Rightarrow \vec{F}_{(cb/p2, P2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -Y_{P2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{array} ; \vec{M}_{\vec{F}(cb/p2, P2)} = 0$$

4.4.3. Etude dynamique de la Bielle :

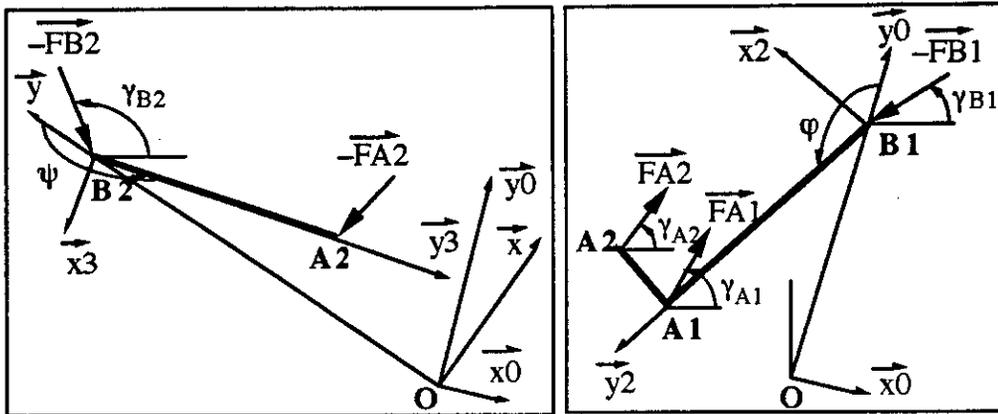


Fig. 2.46 Action mécanique sur la bielle et la biellette

. Point B<sub>1</sub> (articulation bielle-piston 1)

Aux signes près, nous retrouvons le même torseur que celui utilisé pour le piston 1.

$$\tau \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{p1/b1} \\ \vec{M}_{p1/b1} \end{array} \right\}_{B1} \Rightarrow -\vec{F}_{(p1/b1, B1)} = \begin{pmatrix} -X_{B1} \\ -Y_{B1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} ; \vec{M}_{\vec{F}(p1/b1, B1)} = 0$$

. Point A<sub>1</sub> (articulation bielle-vilebrequin)

$$\tau \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{v/b1} \\ \vec{M}_{v/b1} \end{array} \right\}_{A1} \Rightarrow \vec{F}_{(v/b1, A1)} = \begin{pmatrix} X_{A1} \\ Y_{A1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} ; \vec{M}_{\vec{F}(v/b1, A1)} = 0$$

. Point A<sub>2</sub> (articulation bielle-biellette)

$$\tau \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{b2/b1} \\ \vec{M}_{b2/b1} \end{array} \right\}_{A2} \Rightarrow \vec{F}_{(b2/b1, A2)} = \begin{pmatrix} X_{A2} \\ Y_{A2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} ; \vec{M}_{\vec{F}(b2/b1, A2)} = 0$$

4.4.4. Etude dynamique de la Biellette :

. Point A<sub>2</sub> (articulation biellette-bielle)

$$\tau \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{b1/b2} \\ \vec{M}_{b1/b2} \end{array} \right\}_{A2} \Rightarrow -\vec{F}_{(b1/b2, A2)} = \begin{pmatrix} -X_{A2} \\ -Y_{A2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} ; \vec{M}_{\vec{F}(b1/b2, A2)} = 0$$

. Point  $B_2$  (articulation biellette-piston 2)

$$\tau \begin{pmatrix} \vec{F}_{p2/b2} \\ \vec{M}_{p2/b2} \end{pmatrix}_{B2} \Rightarrow -\vec{F}_{(p2/b2, B2)} = \begin{pmatrix} -X_{B2} \\ -Y_{B2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix} ; \vec{M}_{F(p2/b2, B2)} = 0$$

#### 4.4.5. Equations de la dynamique

##### 4.4.5.1. Principe fondamental

La somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un solide est égale à la quantité d'accélération :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{\Gamma}$$

Dans le cas du moteur en V (système bielle-biellette), le principe fondamental de la dynamique appliqué aux différents organes du moteur, nous donne :

a) Piston 1 :

$$\vec{F}_{b1/p1} + \vec{F}_{c1/p1} + \vec{F}_{cb/p1} = m_{p1} \cdot \vec{\Gamma}_{Gp1} \quad (2.107)$$

b) Piston 2 :

$$\vec{F}_{b2/p2} + \vec{F}_{c2/p2} + \vec{F}_{cb/p2} = m_{p2} \cdot \vec{\Gamma}_{Gp2} \quad (2.108)$$

c) bielle :

$$\vec{F}_{p1/b1} + \vec{F}_{v/b1} + \vec{F}_{b2/b1} = m_{b1} \cdot \vec{\Gamma}_{Gb1} \quad (2.109)$$

d) biellette :

$$\vec{F}_{p2/b2} + \vec{F}_{b1/b2} = m_{b2} \cdot \vec{\Gamma}_{Gb2} \quad (2.110)$$

##### 4.4.5.2. Moment dynamique

Le moment dynamique ou la dérivée du moment cinétique, appliqué au centre d'inertie d'un solide est égale au moment dynamique des forces extérieures appliquées au même point.

$$\vec{\delta}_G = \frac{d \sigma_G}{dt} = \sum \vec{M}_G(\vec{F}_{\text{ext}}) \quad (2.111)$$

Le moment dynamique appliqué aux différents organes du moteur en V nous donne :

a) Piston 1 :

Le piston n'a aucune rotation par rapport au repère fixe, son vecteur rotation instantané est donc nul, et par conséquent son moment dynamique est nul, d'où :

$$\vec{0} = \vec{M}_{(\vec{F}_{\text{ext}})_{Gp1}} = -L_{2p1} \cdot X_{B1} \vec{x}_0 - L_{3p1} \cdot X_{C1} \vec{x}_0 \quad (2.112)$$

b) Piston 2 :

Par analogie au piston 1, le piston 2 a :

$$\vec{0} = \vec{M}_{(\vec{F}_{\text{ext}})_{Gp2}} = -L_{2p2} \cdot X_{B2} \vec{x}_0 - L_{3p2} \cdot X_{C2} \vec{x}_0 \quad (2.113)$$

c) Bielle :

Le vecteur rotation instantanée de la bielle par rapport au repère fixe est :

$$\vec{\Omega}_{(b1/0)} = \vec{\Omega}_{(2/0)} = \dot{\varphi} \vec{z}_2 = \dot{\varphi} \vec{z}_0$$

Le tenseur d'inertie de la bielle par rapport à son centre de gravité dans le repère fixe est donné par :

$$\bar{I}_{(b1/G1), (B, x_2, y_2, z_2)} = \begin{bmatrix} I_{x_2} & -I_{x_2 y_2} & -I_{x_2 z_2} \\ -I_{y_2 x_2} & I_{y_2} & -I_{y_2 z_2} \\ -I_{z_2 x_2} & -I_{z_2 y_2} & I_{z_2} \end{bmatrix}$$

La bielle ne possédant qu'un seul plan de symétrie  $x_2 y_2$ , à cause de son point d'articulation  $A_2$ , elle donne un produit d'inertie non nul, qui est  $I_{y_2 z_2}$ . Le moment cinétique de la bielle par rapport à  $G_1$  dans le repère fixe s'écrira alors :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{(b1/G1)} &= \begin{bmatrix} I_{x_2} & -I_{x_2 y_2} & -I_{x_2 z_2} \\ -I_{y_2 x_2} & I_{y_2} & -I_{y_2 z_2} \\ -I_{z_2 x_2} & -I_{z_2 y_2} & I_{z_2} \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -I_{y_2 z_2} \cdot \dot{\varphi} \\ I_{z_2} \dot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -I_{y_2 z_2} \cdot \dot{\varphi} \cos \varphi \\ I_{z_2} \dot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où le moment dynamique dans le repère fixe :

$$\vec{\delta}_{(b1/G1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -I_{y_2 z_2} \cdot \ddot{\varphi} \cos \varphi + I_{y_2 z_2} \cdot \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \\ I_{z_2} \ddot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \quad (2.114)$$

- Calcul des moments :

Le moment des efforts extérieurs appliqués sur la bielle par rapport à son centre de gravité est :

$$\vec{M}_{(\vec{F}_{\alpha/G1})} = \vec{G}_{b1} \vec{B}_1 \wedge \vec{F}_{p1/b1} + \vec{G}_{b1} \vec{A}_1 \wedge \vec{F}_{v1/b1} + \vec{G}_{b1} \vec{A}_2 \wedge \vec{F}_{b2/b1}$$

1) Moment de l'effort du piston sur la bielle par rapport au centre de gravité de la bielle :

$$\vec{M}_{(\vec{F}_{(p1/b1)/G1})} = \vec{G}_{b1} \vec{B}_1 \wedge \vec{F}_{p1/b1}$$

$$\vec{M}_{(\vec{F}_{(p1/b1)/G1})} = \begin{pmatrix} -D_{G1} \sin(\varphi + \alpha_G) + L_1 \sin \varphi \\ D_{G1} \cos(\varphi + \alpha_G) - L_1 \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -X_{B1} \\ -Y_{B1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_{(\vec{F}_{(p1/b1)/G1})} = \left\{ Y_{B1} [D_{G1} \sin(\varphi + \alpha_G) - L_1 \sin \varphi] + X_{B1} [D_{G1} \cos(\varphi + \alpha_G) - L_1 \cos \varphi] \right\} \vec{z}_0$$

2) Moment de l'effort de la manivelle sur la bielle par rapport au centre de gravité de la bielle :

$$\begin{aligned}\vec{M}_{(\vec{F}_{v/b1})/G_{b1}} &= \vec{G}_{b1} A_1 \wedge \vec{F}_{v/b1} \\ \vec{M}_{(\vec{F}_{v/b1})/G_{b1}} &= \begin{pmatrix} -D_{G1} \sin(\varphi + \alpha_0) \\ D_{G1} \cos(\varphi + \alpha_0) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_{A1} \\ Y_{A1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \\ \vec{M}_{(\vec{F}_{v/b1})/G_{b1}} &= \left\{ -X_{A1} [D_{G1} \cos(\varphi + \alpha_0)] - Y_{A1} [D_{G1} \sin(\varphi + \alpha_0)] \right\} \vec{z}_0\end{aligned}$$

3) Moment de l'effort de la biellette sur la bielle par rapport au centre de gravité de la bielle :

$$\begin{aligned}\vec{M}_{(\vec{F}_{(b2/b1)/G_{b1}})} &= \vec{G}_{b1} A_2 \wedge \vec{F}_{b2/b1} \\ \vec{M}_{(\vec{F}_{(b2/b1)/G_{b1}})} &= \begin{pmatrix} R_1 \sin(\varphi + \alpha_0) - D_{G1} \sin(\varphi + \alpha_0) \\ -R_1 \cos(\varphi + \alpha_0) + D_{G1} \cos(\varphi + \alpha_0) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_{A2} \\ Y_{A2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \\ \vec{M}_{(\vec{F}_{(b2/b1)/G_{b1}})} &= \left\{ Y_{A2} [R_1 \sin(\varphi + \alpha_0) - D_{G1} \sin(\varphi + \alpha_0)] \right. \\ &\quad \left. + X_{A2} [R_1 \cos(\varphi + \alpha_0) - D_{G1} \cos(\varphi + \alpha_0)] \right\} \vec{z}_0\end{aligned}$$

d) Biellette :

Le vecteur rotation instantanée de la biellette par rapport au repère fixe est :

$$\vec{\Omega}_{(b2/0)} = \vec{\Omega}_{(3/0)} = \dot{\psi} \vec{z}_3 = \dot{\psi} \vec{z}_0$$

La biellette possède deux plans de symétries  $x_3y_3$  et  $y_3z_3$ , donc tous ses produits d'inertie par rapport aux 3 plans ( $x_3y_3$ ,  $y_3z_3$ ,  $z_3x_3$ ) sont nuls :

$$I_{x_3y_3} = I_{y_3z_3} = I_{z_3x_3} = 0$$

Le tenseur d'inertie de la biellette est alors :

$$\vec{I}_{(b2/G2), (G2, x_3, y_3, z_3)} = \begin{bmatrix} I_{x_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_3} \end{bmatrix}$$

Le vecteur moment cinétique de la biellette par rapport à  $G_2$  dans le repère fixe est :

$$\vec{\sigma}_{(b2/G2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{G_2 z_3} \cdot \dot{\psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

D'où le moment dynamique obtenu par dérivation du vecteur moment cinétique par rapport au temps

$$\vec{\delta}_{(b2/G2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{G2} \cdot \ddot{\psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \quad (2.115)$$

**- Calcul des moments**

Les moments des forces extérieures appliquées sur la bielle sont calculées par rapport au centre de gravité G2, d'où :

$$\vec{M}_{(\vec{F}_{ext}/G2)} = \vec{G}_{b2} \vec{B}_2 \wedge \vec{F}_{p2/b2} + \vec{G}_{b2} \vec{A}_2 \wedge \vec{F}_{b1/b2}$$

1) *Moment de l'effort du piston 2 sur la bielle par rapport au centre de gravité de la bielle*

$$\vec{M}_{(\vec{F}_{(p2/b2)}/G2)} = \begin{pmatrix} -D_{G2} \sin(\psi + \delta_G + \beta) + L_2 \sin(\psi + \beta) \\ D_{G2} \cos(\psi + \delta_G + \beta) - L_2 \cos(\psi + \beta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -X_{B2} \cos\beta + Y_{B2} \sin\beta \\ -X_{B2} \sin\beta - Y_{B2} \cos\beta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_{(\vec{F}_{(p2/b2)}/G2)} = \{ Y_{B2} [D_{G2} \sin(\psi + \delta_G) - L_2 \sin\psi] + X_{B2} [D_{G2} \cos(\psi + \delta_G) - L_2 \cos\psi] \} \vec{z}_0$$

2) *Moment de l'effort de la bielle sur la bielle par rapport au centre de gravité de la bielle*

$$\vec{M}_{(\vec{F}_{(b1/b2)}/G2)} = \begin{pmatrix} -D_{G2} \sin(\psi + \delta_G + \beta) \\ D_{G2} \cos(\psi + \delta_G + \beta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -X_{A2} \cos\beta + Y_{A2} \sin\beta \\ -X_{A2} \sin\beta + Y_{A2} \cos\beta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_{(\vec{F}_{(b1/b2)}/G2)} = \{ X_{A2} [D_{G2} \cos(\psi + \delta_G)] - Y_{A2} [D_{G2} \sin(\psi + \delta_G)] \} \vec{z}_0$$

**4.4.5.3. Equations scalaires du moteur en "V"**

**a) Equations scalaires du piston 1**

La projection des équations vectorielles (2.107) et (2.111) dans le repère fixe donnent :

- 1)  $X_{B1} + X_{C1} = 0$
- 2)  $Y_{B1} - Y_{P1} = m_{p1} (-R\dot{\theta}^2 \cos\theta + L_1 \ddot{\varphi} \sin\varphi + L_1 \dot{\varphi}^2 \cos\varphi)$
- 3)  $0 = -L_2 p1 .XB1 - L_3 p1 .XC1$

**b) Equations scalaires du piston 2**

La projection des équations vectorielles (2.133) et (2.136) dans le repère fixe donnent :

$$4) X_{B2} + X_{C2} = m_{p2} \left( R\dot{\theta}^2 \sin\theta + R_1 \ddot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha_0) - R_1 \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi + \alpha_0) + L_2 \ddot{\psi} \cos(\psi + \beta) - L_2 \dot{\psi}^2 \sin(\psi + \beta) \right)$$

$$5) Y_{B2} - Y_{p2} = m_{p2} \left( -R\dot{\theta}^2 \cos\theta + R_1 \ddot{\varphi} \sin(\varphi + \alpha_0) + R_1 \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi + \alpha_0) + L_2 \ddot{\psi} \sin(\psi + \beta) + L_2 \dot{\psi}^2 \cos(\psi + \beta) \right)$$

$$6) 0 = -L_2 p_2 .XB2 - L_3 p_2 .XC2$$

**c) Equations scalaires de la bielle**

La projection des équations vectorielles (2.134) et 2.136) dans le repère fixe donnent :

$$7) -X_{B1} + X_{A1} + X_{A2} = m_{b1} \left( R\dot{\theta}^2 \sin\theta + D_{G1} \ddot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha_G) - D_{G1} \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi + \alpha_G) \right)$$

$$8) -Y_{B1} + Y_{A1} + Y_{A2} = m_{b1} \left( -R\dot{\theta}^2 \cos\theta + D_{G1} \ddot{\varphi} \sin(\varphi + \alpha_G) + D_{G1} \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi + \alpha_G) \right)$$

$$9) I_{b1yz} \left( -\ddot{\varphi} \cos\varphi + \dot{\varphi}^2 \sin\varphi \right) = 0$$

$$10) I_{b1z} \ddot{\varphi} = Y_{B1} E1 + X_{B1} E2 - Y_{A1} E3 - X_{A1} E4 + Y_{A2} E5 + X_{A2} E6$$

**d) Equations scalaires de la biellette**

La projection des équations vectorielles (2.110) et 2.111) dans le repère fixe donnent :

$$11) -X_{A2} - X_{B2} = m_{b2} \left( R\dot{\theta}^2 \sin\theta + R_1 \ddot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha_0) - R_1 \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi + \alpha_0) + D_{G2} \ddot{\psi} \cos(\psi + \delta_G + \beta) - D_{G2} \dot{\psi}^2 \sin(\psi + \delta_G + \beta) \right)$$

$$12) -Y_{A2} - Y_{B2} = m_{b2} \left( -R\dot{\theta}^2 \cos\theta + R_1 \ddot{\varphi} \sin(\varphi + \alpha_0) + R_1 \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi + \alpha_0) + D_{G2} \ddot{\psi} \sin(\psi + \delta_G + \beta) + D_{G2} \dot{\psi}^2 \cos(\psi + \delta_G + \beta) \right)$$

$$13) I_{b2z} \ddot{\psi} = Y_{B2} E7 + X_{B2} E8 + Y_{A2} E9 + X_{A2} E10$$

Valeur des paramètres utilisés dans les équations (10) et (13) :

$$E_1 = D_{G1} .\sin(\varphi + \alpha_G) - L1 .\sin\varphi$$

$$E_2 = D_{G1} .\cos(\varphi + \alpha_G) - L1 .\cos\varphi$$

$$E_3 = D_{G1} .\sin(\varphi + \alpha_G)$$

$$E_4 = D_{G1} .\cos(\varphi + \alpha_G)$$

$$E_5 = R_1 .\sin(\varphi + \alpha_G) - D_{G1} .\sin(\varphi + \alpha_G)$$

$$E_6 = R_1 .\cos(\varphi + \alpha_G) - D_{G1} .\cos(\varphi + \alpha_G)$$

$$E_7 = D_{G2} .\sin(\psi + \delta_G) - L2 .\sin\psi$$

$$E_8 = D_{G2} .\cos(\psi + \delta_G) - L2 .\cos\psi$$

$$E_9 = -D_{G2} .\sin(\psi + \delta_G)$$

$$E_{10} = D_{G2} .\cos(\psi + \delta_G)$$

$$\vec{\Gamma}_{b1\vec{x}} = R\dot{\theta}^2 \sin\theta + D_{G1} \ddot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha_G) - D_{G1} \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi + \alpha_G)$$

$$\vec{\Gamma}_{b1\vec{y}} = -R\dot{\theta}^2 \cos\theta + D_{G1} \ddot{\varphi} \sin(\varphi + \alpha_G) + D_{G1} \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi + \alpha_G)$$

$$\vec{\Gamma}_{b2\vec{x}} = R\dot{\theta}^2 \sin\theta + R_1 \ddot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha_0) - R_1 \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi + \alpha_0) + D_{G2} \ddot{\psi} \cos(\psi + \delta_G + \beta) - D_{G2} \dot{\psi}^2 \sin(\psi + \delta_G + \beta)$$

$$\vec{\Gamma}_{b2\vec{y}} = -R\dot{\theta}^2 \cos\theta + R_1 \ddot{\varphi} \sin(\varphi + \alpha_0) + R_1 \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi + \alpha_0) + D_{G2} \ddot{\psi} \sin(\psi + \delta_G + \beta) + D_{G2} \dot{\psi}^2 \cos(\psi + \delta_G + \beta)$$

$$\vec{\Gamma}_{p1\vec{y}} = -R\dot{\theta}^2 \cos\theta + L1 \ddot{\varphi} \sin\varphi + L1 \dot{\varphi}^2 \cos\varphi$$

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_{p2\vec{x}} &= R\theta^2 \sin\theta + R_1 \ddot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha_0) - R_1 \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi + \alpha_0) + L_2 \ddot{\psi} \cos(\psi + \beta) - L_2 \dot{\psi}^2 \sin(\psi + \beta) \\ \vec{\Gamma}_{p2\vec{y}} &= -R\theta^2 \cos\theta + R_1 \ddot{\varphi} \sin(\varphi + \alpha_0) + R_1 \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi + \alpha_0) + L_2 \ddot{\psi} \sin(\psi + \beta) + L_2 \dot{\psi}^2 \cos(\psi + \beta) \end{aligned}$$

Nous obtenons un système de 13 équations à 13 inconnues. Avant de résoudre les équations, on peut remarquer les points suivants :

- Les pistons p1 et p2 étant identiques, on prend :  $Y_{p1} = Y_{p2} = Y_p$  ;
- Pour que les équations (1) et (3) soient compatibles, il faut que :  $L_2 p1 = L_3 p1$  ;
- Si  $L_2 p1 = L_3 p1$ , L'équation (6) nous donne :  $X_{B2} = -X_{C2}$ , ce qui entraîne dans.

l'équation (4)  $\vec{\Gamma}_{Gp2} \cdot \vec{x} = 0$ . En tenant compte de ces considérations nous obtenons un système de 11 équations à 11 inconnues.

#### 4.4.6. Solution des équations

- 1)  $Y_{B1} = Y_{p(\theta)} + m_{p1} \cdot \vec{\Gamma}_{p1} \cdot \vec{y}$
- 2)  $Y_{B2} = Y_{p(\theta)} + m_{p2} \cdot \vec{\Gamma}_{p2} \cdot \vec{y}$
- 3)  $Y_{A2} = -Y_{B2} - m_{b2} \cdot \vec{\Gamma}_{b2} \cdot \vec{y}$
- 4)  $Y_{A1} = Y_{B1} - Y_{A2} + m_{b1} \cdot \vec{\Gamma}_{b1} \cdot \vec{y}$
- 5)  $X_{A2} = \left[ I_{b2z} \ddot{\psi} - Y_{B2} \cdot E_7 - Y_{A2} \cdot E_9 + E_8 \cdot m_{b2} \cdot \vec{\Gamma}_{b2} \cdot \vec{x} \right] \frac{1}{(E_{10} - E_8)}$
- 6)  $X_{B2} = -X_{A2} - m_{b2} \cdot \vec{\Gamma}_{b2} \cdot \vec{x}$
- 7)  $X_{A1} = \frac{1}{(E_2 - E_4)} \left[ I_{b1z} \ddot{\varphi} - X_{A2} (E_2 + E_4) - Y_{B1} E_1 + Y_{A1} E_3 - Y_{A2} E_5 + E_2 m_{b1} \vec{\Gamma}_{b1} \cdot \vec{x} \right]$
- 8)  $X_{B1} = X_{A2} + X_{A1} - m_{b1} \cdot \vec{\Gamma}_{b1} \cdot \vec{x}$
- 9)  $X_{C1} = -X_{B1}$
- 10)  $L_2 p1 = L_3 p1$  et  $L_2 p2 = L_3 p2$
- 11)  $X_{C2} = -X_{B2}$

#### 4.4.7. Recherche des efforts dans le cas de pistons désaxés

Pour un piston classique (non désaxé), la résultante des efforts ne permet pas de connaître leur répartition, mais lors d'un désaxement, on peut exprimer les forces aux points de contact piston/chemise dues au basculement du piston. On choisit deux plans de contact sur le piston (p1 et p2 fig.2.47), et on calcule les efforts dans les deux cas qui peuvent se présenter (position a et b).

Le frottement est négligé et l'angle de basculement est très faible, on considère que les dimensions des pistons sont identiques.

##### - Piston côté bielle :

L'équation du moment due aux efforts sur le piston, par rapport à Gp1, pour la position (a) du piston, nous avons :

$$-X_{B2} \cdot L_2 + Y_{B2} \cdot e - X_{C2} \cdot L_3 - N \cdot b - M \cdot a = 0 \quad (1)$$

Comme on a :  $X_{B2} = -X_{C2}$  et par hypothèse  $N = M$ , donc (1) nous donne :

$$N = \frac{XC \cdot (L_2 - L_3) + YB \cdot e}{(a + b)} \quad (2.116)$$

De même la position (b) du piston, nous permet de déduire R en prenant S = R.

$$R = \frac{XC \cdot (L_3 - L_2) - YB \cdot e}{(a + b)} \quad (2.117)$$

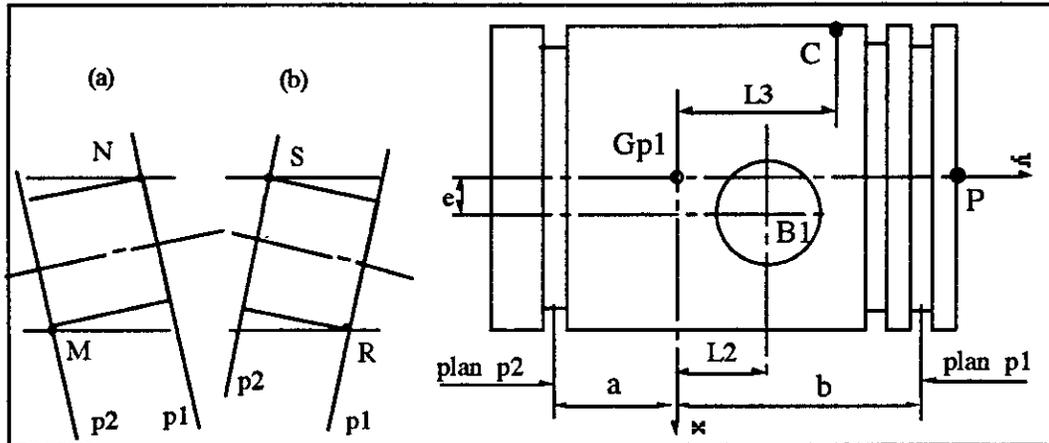


Fig. 2.47 Pistons désaxés

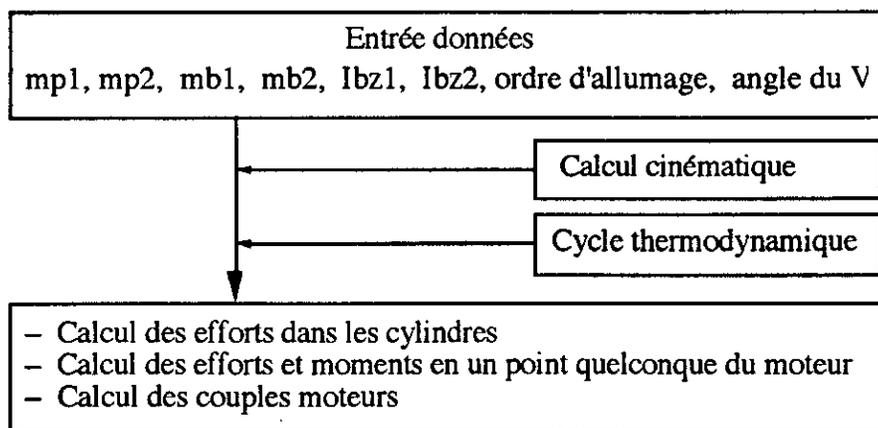
Suivant la position des pistons, on obtient des valeurs algébriques pour N et R, (ou M et S). Si on a le même signe pour N et R (ou M et S) le piston appuie linéairement contre la chemise; si les signes sont différents, il y a deux appuis et donc basculement. Les valeurs numériques de N et R permettent de connaître l'intensité de l'effort et la position du piston.

**- Piston côté bielle :**

Avec les mêmes hypothèses et le même type de calcul, on arrive à déterminer N' et R' (ou R' et s').

**- Organigramme de calcul dynamique :**

Le programme décrit par cet organigramme permet de calculer les composantes des efforts dans tous les points d'articulations du système bielle-bielle, ainsi qu'en tout point du moteur. Il permet aussi le calcul des couples moteurs.





### 5.1.1. Couple dû aux pressions des gaz

La pression régnant dans le cylindre, à un instant donné, exerce des efforts sur le piston, la culasse et la chemise. Les pressions radiales agissant sur la chemise s'auto-équilibrent et n'ont pas d'effet sur le piston. Les forces des pressions agissant sur le piston sont de direction et sens fixes, mais de grandeurs variables, de période  $4\pi$ . Ces forces sont transmises au maneton (aux frottements près) par l'intermédiaire de la bielle, pour fournir le couple moteur dû à la pression des gaz. C'est ce couple qui engendre un couple moyen négatif qui fait tourner le vilebrequin dans le sens trigonométrique.

Le couple dû aux gaz ( $C_g$ ) est obtenu en égalisant la masse du piston, ainsi que la masse et le moment d'inertie de la bielle à zéro ( $m_p = m_b = I_{gz} = 0$ ), dans l'expression du couple total  $C$ .

$$C_g = -R (X_{Ag} \cdot \cos\theta + Y_{Ag} \cdot \sin\theta)$$

tel que :

$$X_{Ag} = X_A \quad \text{avec } m_p = m_b = I_{gz} = 0$$

et

$$Y_{Ag} = Y_A \quad \text{avec } m_p = m_b = 0$$

C'est à dire :

$$X_{Ag} = -Y_{p(\theta)} \cdot \operatorname{tg}\varphi$$

$$Y_{Ag} = Y_{p(\theta)}$$

L'évolution du couple dû aux gaz, pour un monocylindre (en utilisant le cycle thermodynamique du F4L 912 à 2800 tr/mn) est donnée par :

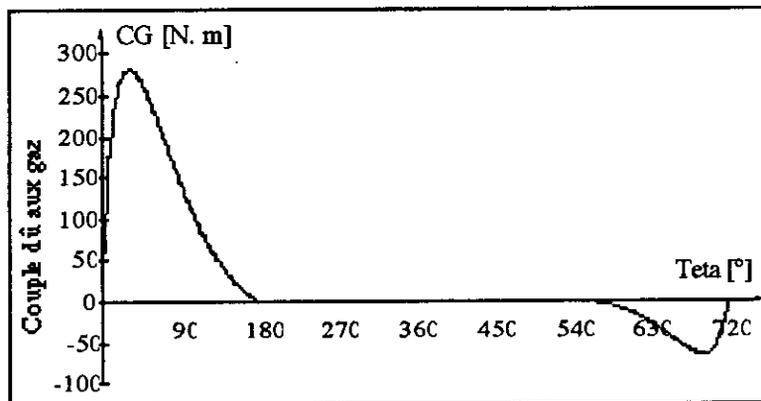


Fig. 2.50 Couple dû aux gaz d'un monocylindre avec  $N = 2800$  tr/mn

### 5.1.2. Couple dû aux inerties des pièces en mouvement :

C'est le couple moteur à charge nulle. Il est calculé en faisant tourner le moteur sans être alimenté en combustible. Ce couple est produit par une force d'inertie sinusoïdale de période  $2\pi$ , engendrée par le déplacement rectiligne alternatif du piston suivant  $\vec{y}_0$ . Il est symétrique par rapport à  $\theta = \pi$ . Ce couple engendre un couple moyen nul si on néglige les frottements.

Comme pour le couple dû aux gaz, l'expression du couple dû aux inerties se déduit de celle du couple total, en égalisant la pression des gaz à zéro, d'où :

$$C_i = -R(X_{Ai} \cos\theta + Y_{Ai} \sin\theta)$$

et  $X_{Ai} = X_A$  en posant :  $Y_{p(\theta)} = 0$

et  $Y_{Ai} = Y_A$  en posant :  $Y_{p(\theta)} = 0$

C'est à dire :

$$X_{Ai} = \frac{1}{L \cdot \cos\varphi} \left( -I_{GZ} \ddot{\varphi} + L_b \cdot m_b \cdot \cos\varphi \cdot \bar{\Gamma}_{Gb/x0} - L_a \cdot m_b \cdot \sin\varphi \cdot \bar{\Gamma}_{Gb/y0} - L \cdot m_p \cdot \sin\varphi \cdot \bar{\Gamma}_{Gp/y0} \right)$$

et

$$Y_{Ai} = \left( m_p \cdot \bar{\Gamma}_{Gp/y0} + m_b \cdot \bar{\Gamma}_{Gb/y0} \right)$$

Ces deux couples ( $C_g$  et  $C_i$ ) se composent et s'opposent au moment de la charge ; on dit que l'inertie compense la charge.

L'évolution du couple dû aux inerties, pour un monocylindre à 2800 tr/mn) est donnée par :

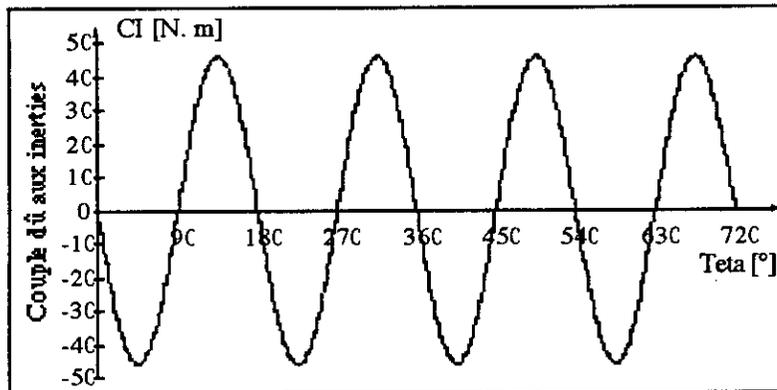


Fig. 2.51 Couple dû aux inerties d'un monocylindre avec  $N = 2800$  tr/mn

## 5.2. Couple du moteur multicylindre en ligne 4 temps

Le couple instantané d'un moteur  $n$  cylindres s'obtient par composition du couple instantané du moteur monocylindre. Le couple instantané dépend :

1 - Du nombre de cylindres ( $nc$ ) et de leur disposition ;

2 - Du vilebrequin utilisé : (pour un moteur 4 temps, on prend un vilebrequin dont les manetons sont calés à  $4\pi/nc$ , sauf cas particulier dûs à des raisons d'encombrement). Lorsque le nombre de cylindres est pair on choisit un vilebrequin dont le plan médian est plan de symétrie, ceci pour des raisons d'équilibrage ;

**3 - De l'ordre et de l'intervalle entre deux allumages (imposé par le nombre de cylindres, leur disposition et le vilebrequin employé).** Lorsque le vilebrequin, le nombre et la disposition des cylindres sont choisis, on a :  $2\left(\frac{nc}{2}-1\right)$  ordres d'allumage possibles. Pour le choix d'un ordre d'allumage donné, il faut tenir compte des paramètres suivants :

**a) Possibilité de grouper les admissions**

Le remplissage du moteur, pour un ordre d'allumage donné, dépend du groupement des admissions. Selon l'encombrement disponible, on peut ou non regrouper les admissions conduisant au meilleur remplissage.

**b) Possibilité de grouper les échappements**

Ce groupement dépend de la géométrie du moteur, selon le cas, il se fait en un ou plusieurs collecteurs. Il dépend aussi de la suralimentation lorsqu'elle est réalisée par turbocompresseur, car l'entraînement de la turbine n'est pas continu, elle est due à une succession de bouffées de gaz d'échappement.

**c) Fréquence de charge des paliers de ligne d'arbre**

En supposant que seuls les deux paliers situés de part et d'autre du cylindre (dans lequel se produit l'explosion) supportent les efforts de l'explosion; il faut éviter de charger plusieurs fois de suite le même palier, et pour ce faire on alterne l'allumage côté avant et côté arrière du moteur.

**d) Autres paramètres**

L'irrégularité cyclique ou les vibrations de torsion, sont des paramètres à prendre en compte pour le choix d'un ordre d'allumage.

La condition de régularité du couple moteur (4 temps) exige que l'alternance des courses dans les différents cylindres corresponde au rapport  $720/nc$ , où  $nc$  est le nombre de cylindres, ce qui impose de caler les différents coudes du vilebrequin selon un angle de calage  $\delta$  égale à  $4\pi/nc$ .

*Repérage des cylindres (exemple du Moteur 4 cylindres en ligne) :*

Le moteur étant placé dans sa position normale de fonctionnement, un observateur placé coté volant moteur, regardant face à celui-ci (précisant ainsi le coté droit et le coté gauche du moteur), définit :

- Le plan de référence : 1/2 plan horizontal passant par l'axe du moteur et situé à gauche de l'observateur ;
- Le numérotage des cylindres : qui se fait dans l'ordre croissant de l'avant vers l'arrière.

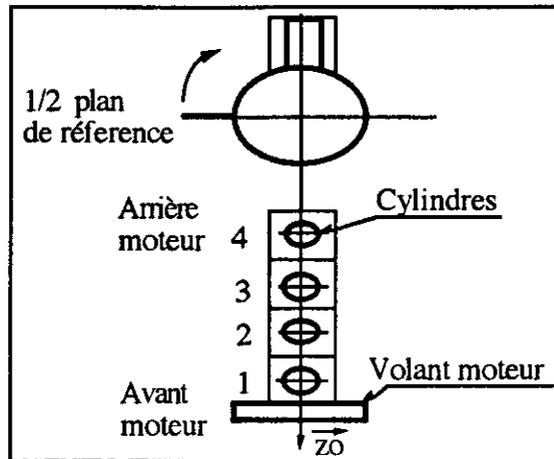


Fig.2.52 Repérage des cylindres sur un moteur 4 cylindres en ligne

**5.2.1. Couple du moteur 2 cylindres en ligne**

Pour avoir un allumage régulier, il faut caler les manetons à  $4\pi/nc$  ; pour  $nc=2$ , nous obtenons un angle de calage  $\delta = 2\pi$ , ce qui nous permet de prendre un vilebrequin symétrique.

**A. Vilebrequin symétrique**

**a) Ordre d'allumage**

La formule  $2\left(\frac{nc}{2}-1\right)$  nous permet de connaître les ordres d'allumage possibles, ainsi ; pour  $nc = 2$ , nous obtenons un seul ordre d'allumage (1-2-1). Le vilebrequin étant symétrique, cet ordre d'allumage est régulier et vaut  $360^\circ$ .

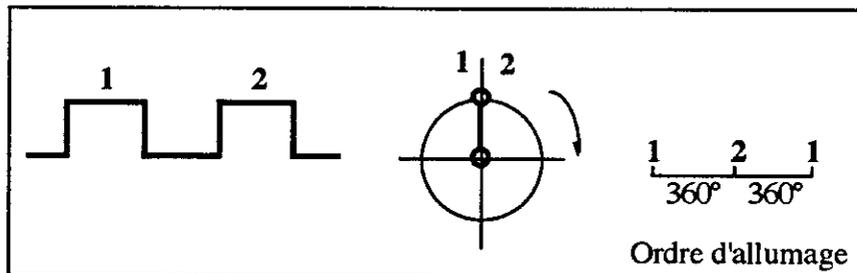


Fig. 2.53 Vilebrequin symétrique du moteur à 2 cylindres en ligne

**b) Couple moteur**

Si nous attribuons le couple  $C_1$  à la bielle n° 1, le couple de la deuxième bielle est obtenu par un déphasage de  $2\pi$ .

$$C_1(\theta) = C(\theta)$$

$$C_2(\theta) = C(\theta + 2\pi)$$

Le couple résultant est la somme des deux couples de bielle :

$$C_1(\theta) = C(\theta) + C(\theta + 2\pi) \quad (2.119)$$

**B. Vilebrequin à manetons opposés**

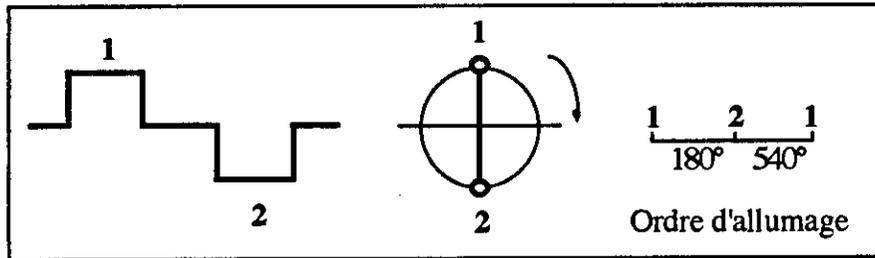


Fig. 2.54 Vilebrequin à manetons opposés du moteur à 2 cylindres en ligne

Le nombre de cylindres n'ayant pas changé, l'ordre d'allumage reste toujours le même (1-2-1), mais les intervalles entre deux allumages ne sont plus réguliers ; ils valent 180° et 540° .

Si nous suivons le même raisonnement que pour le vilebrequin symétrique, nous obtenons un couple résultant tel que :

$$C_1(\theta) = C(\theta) + C(\theta + \pi) \quad (2.120)$$

**Remarque :** Pour le calcul du couple multicylindre, on peut raisonner sur l'effort résultant appliqué par la bielle sur le maneton, et dire que le couple total du moteur (pour un deux cylindres en ligne à manetons opposés) est donné par :

$$\vec{C}_t \vec{x}_1 = -R \cdot \vec{R}(\theta) \cdot \vec{x}_1 \quad \text{avec} \quad \vec{R}(\theta) = \vec{F}_A(\theta) + \vec{F}_A(\theta + \pi)$$

**5.2.2. Couple du moteur 3 cylindres en ligne**

Si nous considérons un vilebrequin symétrique, les manetons seront calés à  $4\pi/nc$  ; pour un moteur à 3 cylindres on a des allumages réguliers tous les  $4\pi/3$  (où 240°).

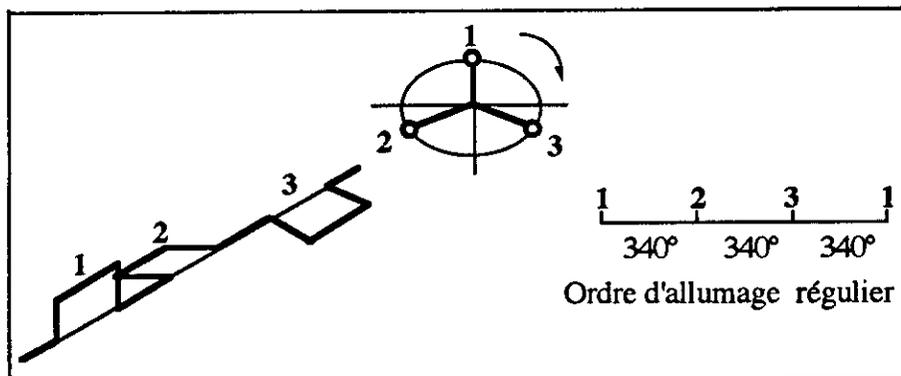


Fig. 2.55 Vilebrequin symétrique du moteur 3 cylindres en ligne

Le couple résultant des actions des trois bielles sur le vilebrequin est donné par :

$$C_t(\theta) = C(\theta) + C\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) + C\left(\theta + \frac{8\pi}{3}\right) \quad (2.121)$$

### 5.2.3. Couple du moteur 4 cylindres en ligne

Pour un moteur à 4 cylindres, on doit avoir 4 allumages pour deux tours du vilebrequin ; d'où l'angle de calage des manetons  $\delta = 4\pi/nc = \pi$ . Les allumages ont donc lieu à intervalles réguliers de  $180^\circ$ .

Il y a deux configurations possibles de vilebrequins (fig. 2.55 et 2. 56). Pour des raisons de symétrie, on utilise le vilebrequin dont le plan médian est le plan de symétrie.

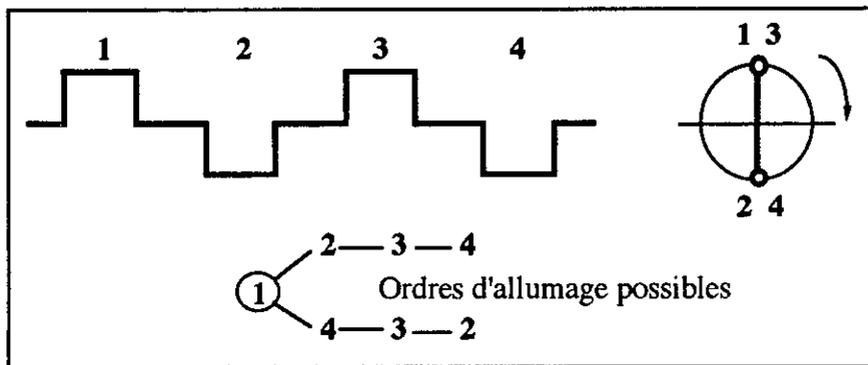


Fig. 2.104. Vilebrequin à plan médian non symétrique du moteur à 4 cylindres en ligne

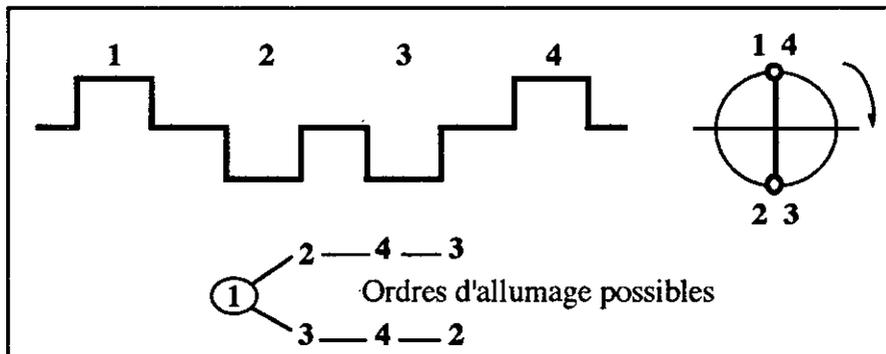


Fig. 2.105. Vilebrequin à plan médian symétrique du moteurs 4 cylindres en ligne

Si nous devons tenir compte d'une alimentation des cylindres, ou à défaut d'un remplissage préférentiel des cylindres extérieurs (1 et 4), on choisirait l'ordre 1-3-4-2.

Le couple moteur au niveau de chaque bielle est exprimé par :

$$\begin{aligned} C_1(\theta) &= C(\theta) \\ C_2(\theta) &= C(\theta+3\pi) \\ C_3(\theta) &= C(\theta+\pi) \\ C_4(\theta) &= C(\theta+2\pi) \end{aligned}$$

Les indices 1, 2, 3, 4 correspondent au numéro des cylindres indiqués dans la figure 2.56.

Le couple moteur résultant, ordonné suivant l'ordre d'allumage choisi est donné par :

$$C_t(\theta) = C(\theta) + C(\theta+\pi) + C(\theta+2\pi) + C(\theta+3\pi) \quad (2.122)$$

Evolution du couple moteur 4 cylindres en ligne en fonction de l'angle vilebrequin pour une vitesse de rotation  $N = 2800$  tr/mn.

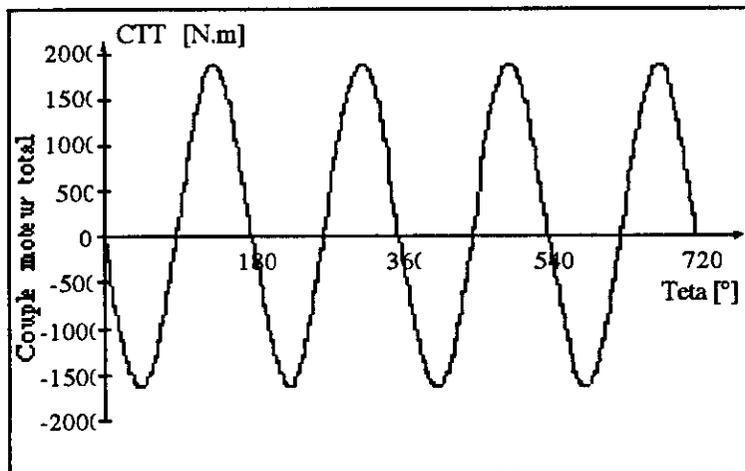


Fig. 2.106. Evolution du couple total du moteur F4L 912

#### 5.2.4. Couple du moteur 6 cylindres en ligne

Les manetons du vilebrequin du moteur à 6 cylindres sont calés à  $\delta = 4\pi/6$  (ou  $120^\circ$ ). Pour annuler les produits d'inertie du vilebrequin on choisit un vilebrequin ayant comme plan de symétrie le plan

médian fig. 2.58. Les ordres d'allumage possibles sont de  $2\left(\frac{n}{2}-1\right) = 4$

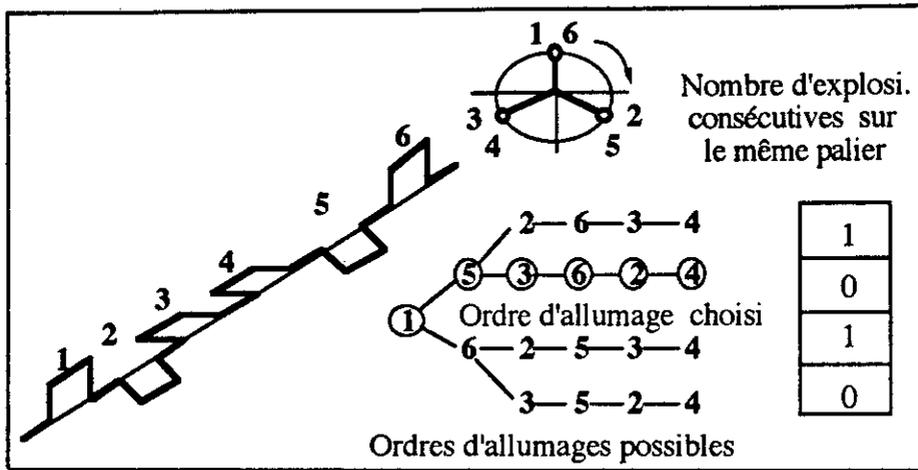
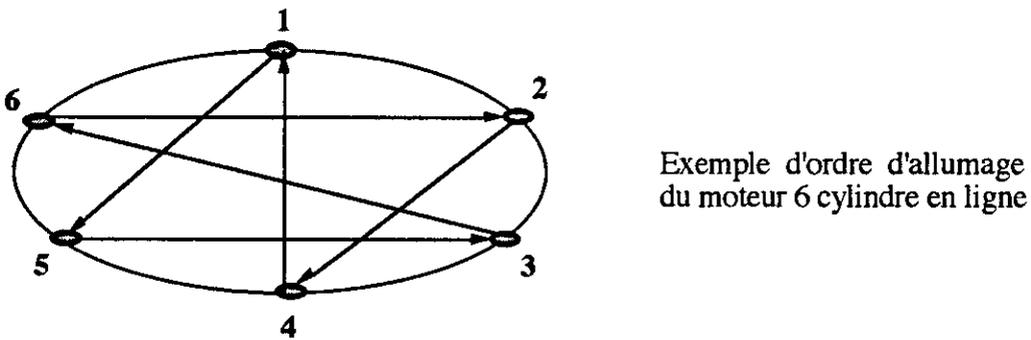


Fig. 2.59 Vilebrequin symétrique du moteur 6 cylindres en ligne



Si l'on choisit l'ordre d'allumage : 1- 5 - 3 - 6 - 2 - 4 , la fréquence de charge des paliers peut être schématisée comme suit :

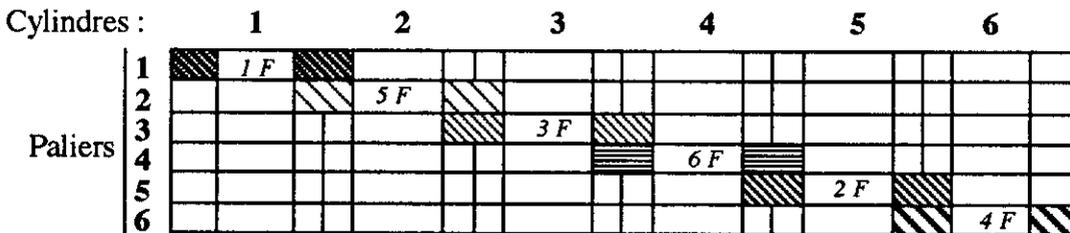


Fig. 2.60 Fréquence de charge des paliers du moteur 6 cylindres en ligne (1f, 2f, 3f, ...)

Nous pouvons remarquer, pour l'ordre d'allumage pris, que la fréquence de charge des paliers est bien répartie, puisque un même palier n'est pas sollicité par deux explosions successives.

Les intervalles entre deux allumages sont de  $2\pi/3$ , le couple résultant (pris selon l'ordre d'allumage choisi) est de :

$$C_t(\theta) = C(\theta) + C\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + C\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) + C(\theta + 2\pi) + C\left(\theta + \frac{8\pi}{3}\right) + C\left(\theta + \frac{10\pi}{3}\right) \quad (2.123)$$

**5.2.5. Couple du moteur à n cylindres en ligne**

Pour un moteur à n cylindres, l'angle de calage  $\delta$  est égal à  $4\pi/nc$ . Si le cylindre n° 1 (pris comme cylindre de référence) subit un couple  $C(\theta)$ , la manivelle du cylindre p subira un couple de  $C(\alpha)$ , avec  $\alpha = \theta + (k - 1).4\pi/nc$  ; d'où :

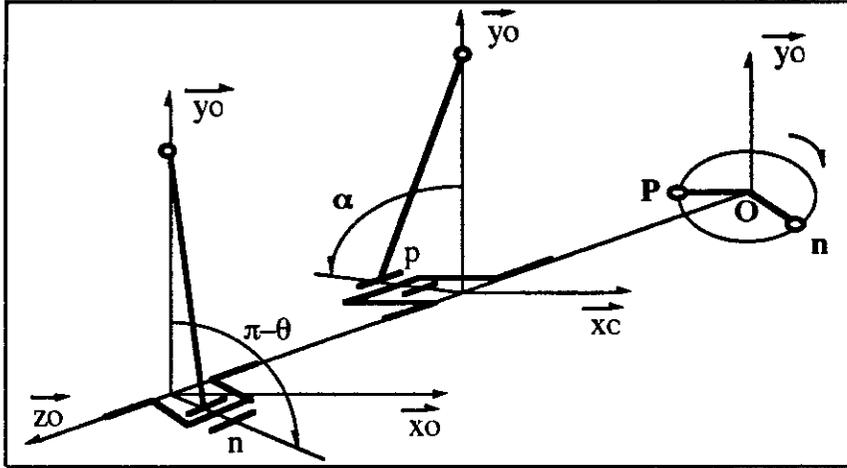


Fig. 2.61 Moteur à n cylindres

$$\begin{aligned}
 C_1(\theta) &= C(\theta) \\
 C_2(\theta) &= C\left(\theta + \frac{4\pi}{nc}\right) \\
 C_k(\theta) &= C\left(\theta + (k-1) \cdot \frac{4\pi}{nc}\right) \\
 C_{nc}(\theta) &= C\left(\theta + (nc-1) \cdot \frac{4\pi}{nc}\right)
 \end{aligned}$$

Le couple résultant du moteur multicylindre en ligne est de :

$$\begin{aligned}
 C_t(\theta) &= C_1(\theta) + C_2(\theta) + \dots + C_k(\theta) + \dots + C_{nc}(\theta) \\
 C_t(\theta) &= C(\theta) + C\left(\theta + \frac{4\pi}{nc}\right) + \dots + C\left(\theta + (p-1) \cdot \frac{4\pi}{nc}\right) + \dots + C\left(\theta + (nc-1) \cdot \frac{4\pi}{nc}\right) \\
 C_t(\theta) &= \sum_{k=1}^{nc} C\left(\theta + (k-1) \cdot \frac{4\pi}{nc}\right) \tag{2.124}
 \end{aligned}$$

L'indice k indique l'ordre d'allumage des cylindres.

**5.2.5.1. Couples dûs aux gaz et aux inerties des multicylindres en ligne**

Par analogie au couple total, on a :

**a) Couple dû aux gaz d'un multicylindre en ligne**

$$C_{ig}(\theta) = \sum_{p=1}^{nc} C_g \left( \theta + (p-1) \cdot \frac{4\pi}{nc} \right)$$

**b) Couple dû aux inerties d'un multicylindre en ligne**

$$C_{ii}(\theta) = \sum_{p=1}^{nc} C_i \left( \theta + (p-1) \cdot \frac{4\pi}{nc} \right)$$

**5.3. Couple du moteur multicylindres en "V"**

L'étude du couple moteur est faite en fonction de l'angle d'ouverture du V, pour un ordre d'allumage donné.

**5.3.1. Couple du moteur 6 cylindres en "V"**

On doit avoir 6 allumages pour deux tours du vilebrequin, c'est à dire en moyenne un allumage tous les 120°. Pour avoir un ordre d'allumage régulier, on doit avoir :

- L'angle de calage des manetons  $\delta = 4\pi/nm$ , avec  $nm$  le nombre de manetons ( $nm = nc/2$ ), et  $nc$  le nombre de cylindres ;
- L'angle du V  $\beta = 4\pi / nc$ .

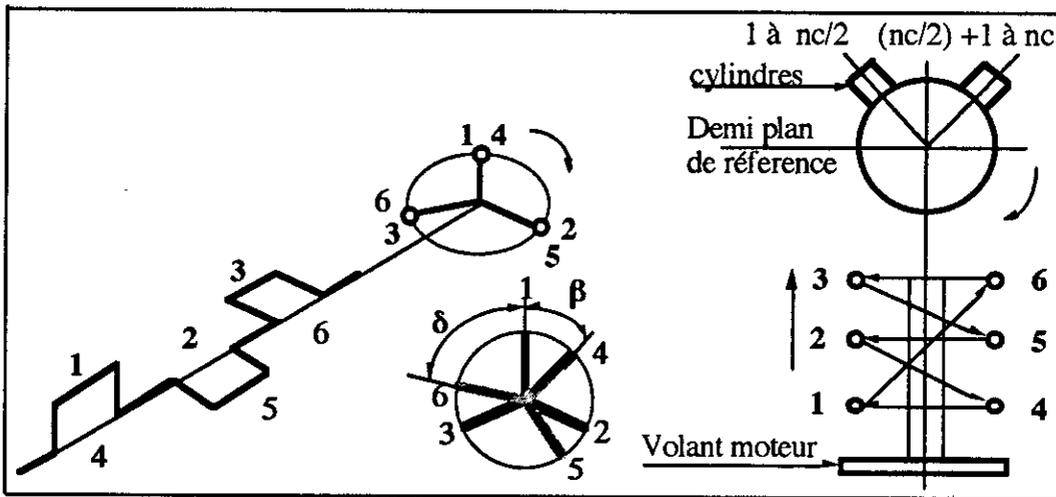


Fig. 2.62 Repérage et ordre d'allumage du moteur 6 cylindres en V

Si le V est ouvert à  $\beta = 4\pi / nc$ , les allumages ont lieu à intervalles réguliers =  $\beta$

Si le V est ouvert à  $\beta \neq 4\pi / nc$ , les allumages ont lieu à intervalles de :  $\delta - \beta$  et  $\beta$

Le repérage des cylindres, se fait selon le schéma de la figure 2.62.

**a) Moteur V6 ouvert à  $\beta=4\pi/6$**

Le nombre d'ordres d'allumage possibles est de  $2\left(\frac{nc}{2}-1\right) = 4$ . Lorsque l'angle d'ouverture du V ( $\beta$ ) varie, le couple moteur instantané varie, mais le couple moyen reste inchangé.

Le couple moteur résultant de l'action des 6 bielles est :

$$C_t(\theta) = C(\theta) + C\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right) + C\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right) + C(\theta+2\pi) + C\left(\theta+\frac{8\pi}{3}\right) + C\left(\theta+\frac{10\pi}{3}\right) \quad (2.125)$$

Nous remarquons que le couple résultant du V6 avec  $\beta = 120^\circ$  est identique à celui du moteur 6 cylindres en ligne (2.123). Ceci est dû à ce que dans les deux cas, l'intervalle entre deux allumages est régulier et vaut  $4\pi/nc$ .

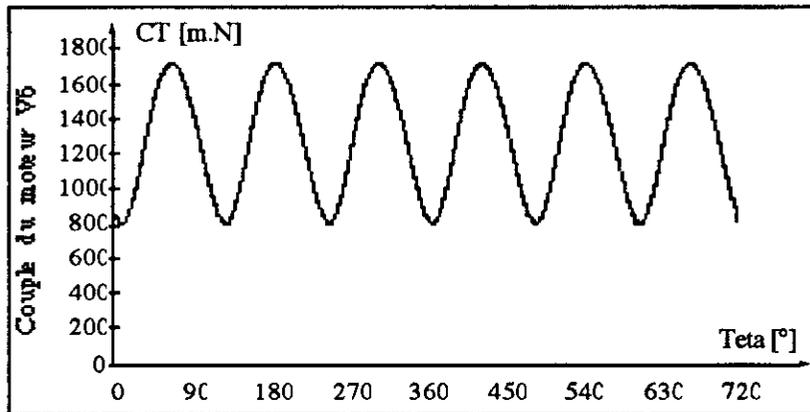


Fig. 2.63 Couple du moteur V6 pour  $N = 2800 \text{ tr/mn}$  ( $V=120^\circ$ )

**b) Moteur V6 ouvert à  $\beta = \pi/3$**

Si nous conservons le même vilebrequin et le même ordre d'allumage que précédemment avec une ouverture du V $\acute{e}$  de  $60^\circ$ , nous obtenons des intervalles (entre deux allumages successifs) non réguliers ayant pour valeurs  $\pi$  et  $\pi/3$ . D'où le couple résultant :

$$C_t(\theta) = C(\theta) + C(\theta+\pi) + C\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right) + C\left(\theta+\frac{7\pi}{3}\right) + C\left(\theta+\frac{8\pi}{3}\right) + C\left(\theta+\frac{11\pi}{3}\right) \quad (2.126)$$

**Remarque :**

Le moteur V6 à  $60^\circ$  est composé de deux moteurs 3 cylindres en ligne décalés de  $60^\circ$ . Pour avoir le couple moteur du V6 à  $60^\circ$ , on peut composer le couple du moteur 3 cylindres en ligne (Fig 255) décalé de  $60^\circ$  ou de  $180^\circ$ .

A plein charge le couple moteur est périodique, de période  $4\pi/3$ . Sans charge le couple moteur dû uniquement aux inerties est nul. En effet, si on superpose les courbes de couples dûs aux inerties du moteur 3 cylindres en ligne en les décalant de  $60^\circ$  ou de  $180^\circ$ , on obtient un couple résultant presque nul.

Le couple résultant n'est pas tout à fait nul car le couple du moteur 3 cylindres en ligne n'est pas parfaitement sinusoïdal.

### 5.3.2. Couple du moteur 8 cylindres en V

#### a) Moteur V8 ouvert à $\beta = \pi/2$

Pour le V8, nous avons le choix de trois vilebrequins possibles : le vilebrequin à plat, le vilebrequin en croix et le vilebrequin en quadrature.

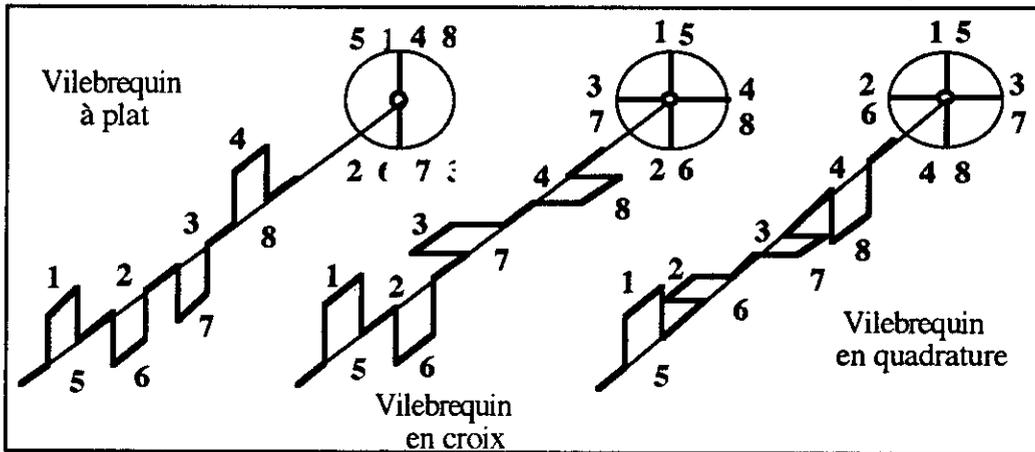


Fig. 2.64 Architecture des vilebrequins pour le moteur V8

On choisit pour notre exemple, le vilebrequin dont le plan médian est plan de symétrie.

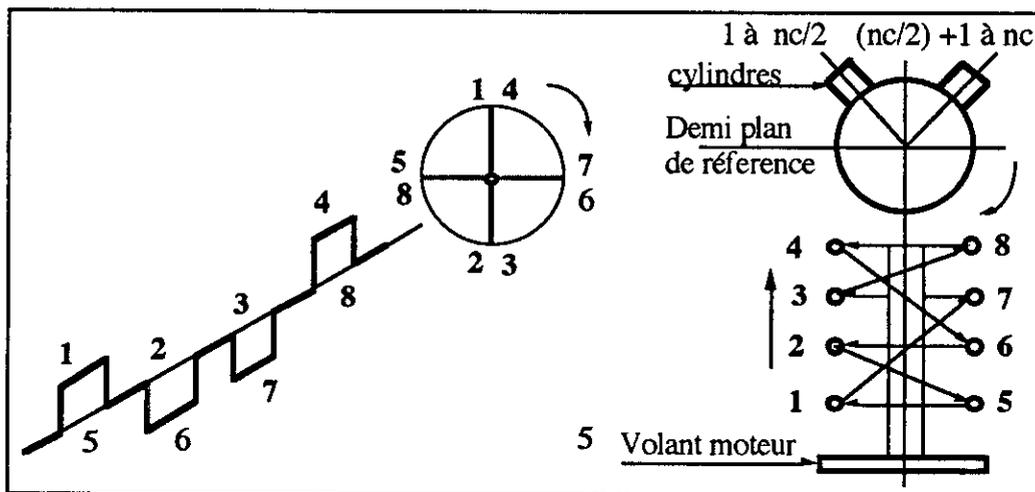


Fig. 2.65 Repérage et ordre d'allumage du moteur 8 cylindres en V

Les intervalles entre deux allumages sont réguliers et valent  $90^\circ$  si les manetons sont calés à  $4\pi/nm=\pi$ . Le nombre d'allumage possible est  $2\left(\frac{nc}{2}-1\right) = 8$ , on choisit l'ordre 1-7-3-8-4-6-2-5. Ces choix nous donnent le couple résultant suivant :

$$C_t(\theta) = C(\theta) + C\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + C(\theta + \pi) + C\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right) + C(\theta + 2\pi) + C\left(\theta + \frac{5\pi}{2}\right) + C(\theta + 3\pi) + C\left(\theta + \frac{7\pi}{2}\right)$$

Nous remarquons une fois de plus que ce couple est identique au couple du moteur 8 cylindres en ligne à  $90^\circ$  puisque l'intervalle d'allumage est régulier dans les deux cas et vaut  $90^\circ$ .

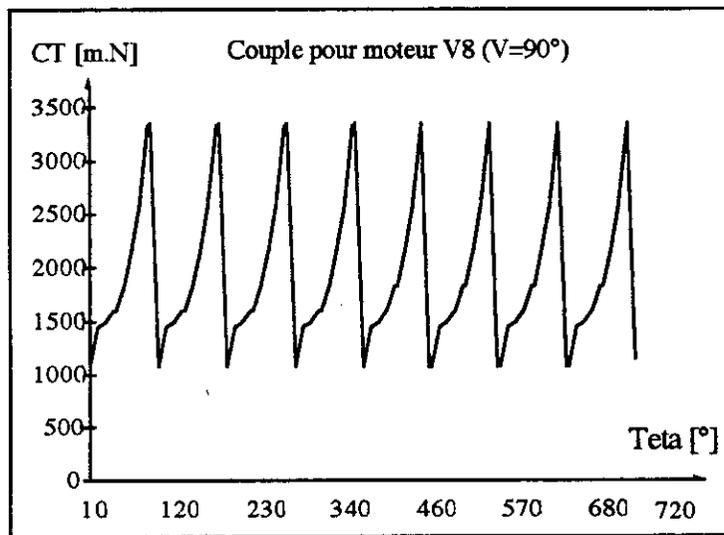


Fig. 2. 66 Couple pour moteur V8 ( $V=90^\circ$ ),  $N=2800\text{tr}/\text{mn}$

### 5.3.3. Couple du moteur à n cylindres en "V"

Après avoir montré comment calculer le couple du moteur V6 et du moteur V8 nous pouvons généraliser le calcul du couple pour un moteur en V à n cylindres, ayant un angle d'ouverture quelconque.

Le vilebrequin est celui d'un moteur en ligne à  $(nc/2)$  cylindres, dont les manetons sont calés à  $8\pi/nc$ . Pour des raisons d'équilibrage, si le nombre de cylindres est pair on choisit un vilebrequin dont le plan médian est plan de symétrie.

L'ordre d'allumage est choisi parmi les k cas possibles, en tenant compte des paramètres cités précédemment ( $k = 2\left(\frac{nc}{2}-1\right)$ ).

a) **Premier cas :** L'angle d'ouverture du V est  $\beta = 4\pi/nc$

Nous remarquons que  $\beta$  est égal à la moitié de l'angle de calage des manetons ; dans ce cas, le couple moteur est égal à celui du multicylindre en ligne ayant le même nombre de cylindres. L'intervalle entre deux allumages est régulier et vaut  $4\pi/nc$ .

$$C_t(\theta) = C\left(\theta + \frac{4\pi}{nc}\right) + C\left(\theta + \frac{2.4\pi}{nc}\right) + C\left(\theta + \frac{3.4\pi}{nc}\right) + \dots + C\left(\theta + (2p-1) \cdot \frac{4\pi}{nc}\right)$$

$$C_t(\theta) = \sum_{k=1}^{nc} C\left(\theta + (k-1) \frac{4\pi}{nc}\right) \quad (2.127)$$

b) **Deuxième cas :** L'angle d'ouverture du V est  $\beta \neq 4\pi/nc$

Les intervalles entre deux allumages ne sont pas réguliers, ils valent  $8\pi/nc - \beta$  et  $\beta$  ; ainsi le couple résultant est :

$$C_t(\theta) = C(\theta) + C\left(\theta + \frac{8\pi}{nc} - \beta\right) + C\left(\theta + \frac{8\pi}{nc} - \beta + \beta\right) + \dots + C\left(\theta + (p-1) \frac{8\pi}{nc}\right) + \dots + C\left(\theta + p \frac{8\pi}{nc} - \beta\right)$$

$$C_t(\theta) = \sum_{k=1}^{nc/2} \left[ C\left(\theta + (k-1) \frac{8\pi}{nc}\right) + C\left(\theta + k \frac{8\pi}{nc} - \beta\right) \right] \quad (2.128)$$

Le couple dû au gaz  $C_g(\theta)$  et le couple dû aux inerties  $C_i(\theta)$  se calculent de la même manière que le couple total et nous obtenons finalement :

$\beta = 4\pi/nc$

$$C_g(\theta) = \sum_{k=1}^{nc} C_g\left(\theta + (k-1) \cdot \frac{4\pi}{nc}\right)$$

$$C_i(\theta) = \sum_{k=1}^{nc} C_i\left(\theta + (k-1) \cdot \frac{4\pi}{nc}\right)$$

$\beta \neq 4\pi/nc$

$$C_g(\theta) = \sum_{k=1}^{nc/2} \left[ C_g\left(\theta + (k-1) \cdot \frac{8\pi}{nc}\right) + C_g\left(\theta + k \cdot \frac{8\pi}{nc} - \beta\right) \right]$$

$$C_i(\theta) = \sum_{k=1}^{nc/2} \left[ C_i\left(\theta + (k-1) \cdot \frac{8\pi}{nc}\right) + C_i\left(\theta + k \cdot \frac{8\pi}{nc} - \beta\right) \right]$$

## 5.4. Etude des harmoniques du couple moteur

### 5.4.1. Harmoniques du couple moteur d'un monocylindre

Si une fonction est périodique de période  $T$ , monotone par tranche et borné sur l'intervalle  $[0, T]$ ; cette fonction est décomposable en série de Fourier et la somme de la série converge en tous points vers sa somme  $f(x)$ .

Dans le cas du couple moteur 4 temps, la période du cycle s'étend sur  $4\pi$ , soit deux tours du vilebrequin. La décomposition du couple moteur en série de Fourier est donnée par :

$$C(\theta) = C_0 + C_{1/2} \sin\left(1/2 \cdot \omega t + \varphi_{1/2}\right) + C_{3/2} \sin\left(3/2 \cdot \omega t + \varphi_{3/2}\right) + \dots + C_{q/2} \sin\left(q/2 \cdot \omega t + \varphi_{q/2}\right)$$

ou encore :

$$C(\theta) = C_0 + \sum_{q=1}^{\infty} C_q \sin(q\omega t + \varphi_q) \quad (2.129)$$

Avec :

$C_0$  le couple moteur moyen résultant de l'harmonique d'ordre 0 ;  
Les harmoniques  $q$  sont dites d'ordre  $1/2, 1, 3/2, \dots$

Chacun des couples harmoniques  $C_1, C_2, \dots, C_q$ , apporte une vibration forcée au système élastique constitué par le vilebrequin. Si la pulsation  $q\omega$  de l'un des couples harmoniques coïncide avec la pulsation naturelle  $\Omega$  du vilebrequin, il y a résonance.

Le terme général du développement  $C_q \sin(q\omega t + \varphi_q)$  peut s'écrire sous la forme :

$$a_q \cdot \cos q\omega t + b_q \cdot \sin q\omega t$$

d'où

$$C(\theta) = C_0 + \sum_{q=1}^m (a_q \cdot \cos q\omega t + b_q \cdot \sin q\omega t) \quad (2.130)$$

$m$  étant le nombre d'harmonique.

$$C_q = \sqrt{a_q^2 + b_q^2} \quad \text{et} \quad \text{tg } \varphi_q = \frac{b_q}{a_q}$$

$C_q$  et  $\varphi_q$  sont respectivement le module et le déphasage des coefficients de Fourier.  $a_q$  et  $b_q$  sont les coefficients de Fourier et  $C_0$  le couple moyen ; ils sont donnés par :

$$a_q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} C(\theta) \cdot \cos(q\theta) \cdot d\theta$$

$$b_q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} C(\theta) \cdot \sin(q\theta) \cdot d\theta$$

$$C_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} C(\theta) d\theta$$

Si l'on divise la longueur  $[0, 4\pi]$  en  $N_p$  intervalles égaux, cet intervalle sera de  $\Delta\theta = 4\pi/N_p$ , d'où le terme a de rang  $q$  s'écrira :

$$a_q = \frac{2}{N_p} \sum_{I=0}^{N_p-1} C(\theta) \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{N_p} \cdot I \cdot q\right) \quad (2.131)$$

$$b_q = \frac{2}{N_p} \sum_{I=0}^{N_p-1} C(\theta) \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{N_p} \cdot I \cdot q\right) \quad (2.132)$$

avec  $q$  variant de 0 à  $NH$ , le nombre d'harmonique.  $C(\theta)$  est calculé pour  $\theta = (4\pi/N_p) \cdot I$ , avec  $I$  variant de 0 à  $N_p-1$ .

#### 5.4.1.1. Décomposition en série de Fourier du couple dû au gaz

Le couple dû au gaz est périodique de période  $4\pi$ , sa décomposition en série de Fourier est donnée par analogie au couple total par :

$$C_g(\theta) = C_{g0} + \sum_{q=1}^m \left( a_{gq} \cdot \cos q\omega t + b_{gq} \cdot \sin q\omega t \right)$$

$C_{g0}$  : couple moyen ;

$a_{gq}$ ,  $b_{gq}$  : amplitudes de l'harmonique d'ordre  $q$  du couple dû au gaz, ils sont donnés par :

$$a_{gq} = \frac{2}{N_p} \sum_{I=0}^{N_p-1} C(\theta) \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{N_p} \cdot I \cdot q\right)$$

$$b_{gq} = \frac{2}{N_p} \sum_{I=0}^{N_p-1} C(\theta) \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{N_p} \cdot I \cdot q\right)$$

#### 5.4.1.2. Décomposition en série de Fourier du couple dû aux forces d'inerties

Les forces d'inerties sont variables suivant la vitesse de rotation du moteur et la valeur de la masse participant au mouvement alternatif.

Quelques harmoniques (5 par exemple) suffisent dans la décomposition du couple dû aux inerties, car les amplitudes de ces couples harmoniques tendent rapidement vers zéro ; cela est dû au fait que la fonction périodique de ce couple est presque une fonction harmonique.

Le couple dû aux forces d'inertie est périodique de période  $2\pi$ , sa décomposition en série de Fourier a la forme suivante :

$$C_i(\theta) = a_1 \sin 1\theta + a_2 \sin 2\theta + \dots + a_q \sin q\theta$$

où encore :

$$C_i(\theta) = \sum_{q=1}^{\infty} a_{iq} \sin q\theta$$

Nous remarquons dans ce cas, que le couple moyen et le déphasage entre les coefficients de Fourier sont nuls. L'amplitude de l'harmonique d'ordre  $q$  du couple dû aux forces d'inerties est :

$$a_{iq} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} C_i(\theta) \cdot \sin q\theta \cdot d\theta$$

où encore :

$$a_{iq} = \frac{2}{N_p} \sum_{l=0}^{N_p} C_i(\theta) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N_p} \cdot l \cdot q\right)$$

Pour avoir une approximation suffisante du couple moteur 4 temps, il faut prendre les 18 premiers harmoniques du couple total et celui dû aux gaz, ainsi que les 9 premiers harmoniques du couple dû aux inerties. Les harmoniques d'ordre supérieur ont des amplitudes négligeables devant celles des harmoniques inférieurs.

#### 5.4.2. Harmoniques du couple moteur d'un multicylindre

La décomposition en série de Fourier du multicylindre est analogue à celle du monocylindre. Si on note par  $C_t(\theta)$  le couple total d'un multicylindre, sa décomposition en série de Fourier sera donnée par :

$$C_t(\theta) = C_0^t + \sum_{q=1}^m (a_q^t \cdot \cos q\omega t + b_q^t \cdot \sin q\omega t) \quad (2.133)$$

Les coefficients de Fourier sont donnés par :

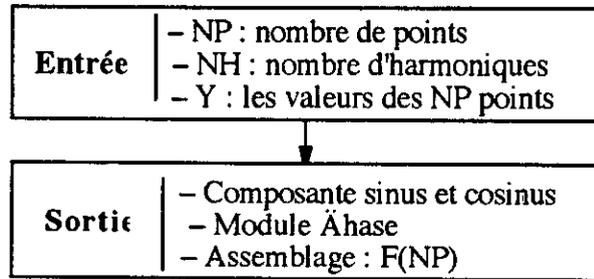
$$C_0^t = \frac{2}{N_p} \sum_{l=0}^{N_p-1} C_t(\theta) \quad (2.134)$$

$$a_q^t = \frac{2}{N_p} \sum_{l=0}^{N_p-1} C_t(\theta) \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{N_p} \cdot l \cdot q\right) \quad (2.135)$$

$$b_q^t = \frac{2}{N_p} \sum_{l=1}^{N_p-1} C_t(\theta) \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{N_p} \cdot l \cdot q\right) \quad (2.136)$$

$N_p$  étant le nombre de points que divise l'intervalle  $[0, 4\pi]$  et  $q$  l'ordre d'harmonique.

**Organigramme : Décomposition en série de Fourier.**



## 6. INERTIES ET RIGIDITES DU SYSTEME BIELLE-MANIVELLE

### 6.1. Moment d'inertie

"Inertie" est un mot latin qui signifie : "résistance au changement du mouvement". Sa notion est principalement liée à la dynamique ; c'est une grandeur géométrique qui joue un rôle capitale en dynamique des solides.

#### 6.1.1. Définitions

Le moment d'inertie d'un point matériel de masse  $m$  par rapport à un axe  $(\Delta)$  est défini par

$$I_{(\Delta)} = m r^2 \quad (2.137)$$

où  $r$  est la distance entre le point matériel  $m$  et l'axe  $\Delta$ .

Le moment d'inertie d'un système de point matériel de masse  $m_1, m_2, \dots, m_n$  par rapport à l'axe  $(\Delta)$  est défini par :

$$I_{(\Delta)} = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (2.138)$$

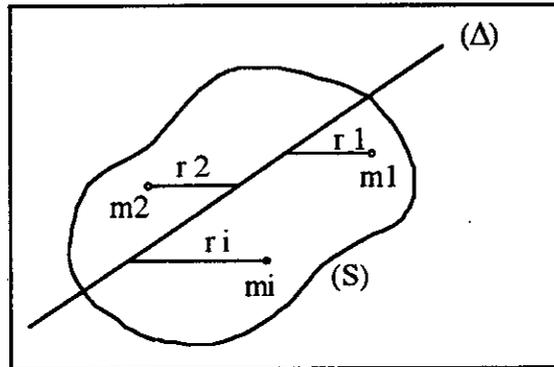


Fig. 2.67 Système de points matériel

Dans le cas d'une distribution continue de masses (solides indéformables) l'expression du moment d'inertie est donnée par :

$$I = \int_{(S)} r^2 dm \quad (2.139)$$

où  $r$  est la distance entre l'élément de masse  $dm$  et l'axe considéré.

L'intégrale ainsi définie peut être simple, double ou triple, selon l'élément de masse considéré.

## Rappel du théorème de Huyghens

### a) Axes parallèles

Le moment d'inertie d'un système continu de points matériels de masse  $M$  par rapport à un axe  $AB$  parallèle à l'axe  $(\Delta)$  qui passe par le centre de gravité du système considéré est donné par :

$$I_{(AB)} = I_{\Delta} + Md^2$$

où  $d$  est la distance entre les axes  $(\Delta)$  et  $(AB)$ .

### b) Axes perpendiculaires

Dans le cas d'une distribution de masse dans le plan  $(x,y)$ , les moments d'inertie  $I_x$ ,  $I_y$  et  $I_z$  sont liées par l'expression :

$$I_z = I_x + I_y$$

## 6.1.2. Moment d'inertie du vilebrequin

La forme du vilebrequin dépend du nombre de cylindres du moteur, de l'équilibrage et de la régularité cyclique.

Le vilebrequin est constitué de plusieurs coudes (le nombre de coudes dépend du nombre de cylindres), d'un plateau de fixation du volant, du pignon de commande de distribution et le cas échéant d'un amortisseur dynamique de vibration (damper) .

Le moment d'inertie du vilebrequin est la somme des moments d'inertie des éléments le constituant.

### 6.1.2.1. Coude

Un coude est composé :

- de deux demi-tourillons : qui ont pour siège les paliers (4) ;
- d'un maneton : sur lequel s'articulent les têtes de bielles (3) ;
- de deux bras de manivelle (ou flasques) : qui relient les tourillons aux manetons (2), (1).

Dans certains cas les bras de manivelle comportent des masses d'équilibrage (contrepois).

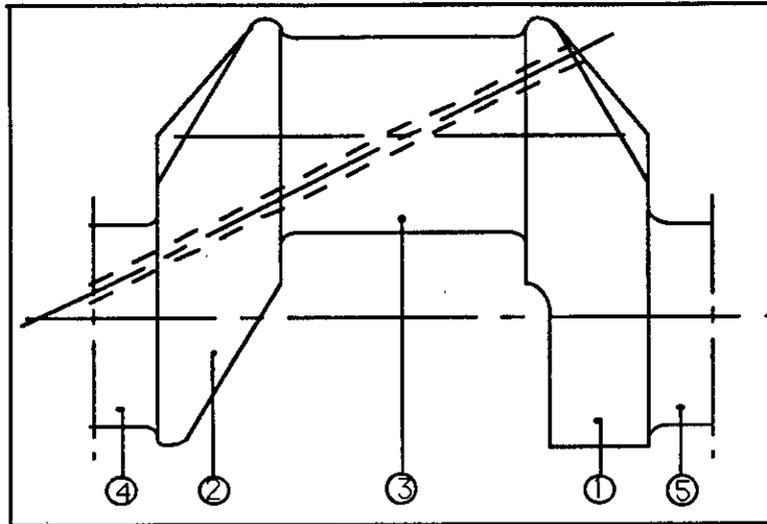


Fig. 2.68 Coude de vilebrequin

### A. Manetons et tourillons

Les tourillons et manetons ont la forme d'un cylindre creux. Soit un cylindre creux de diamètre extérieur  $D$ , de diamètre intérieur  $d$ , de longueur  $a$  et de masse volumique  $\rho$  (fig. 2.69). Calculons son inertie par rapport à son axe de rotation  $xx'$  et par rapport à un axe  $yy'$  distant de  $l$ .

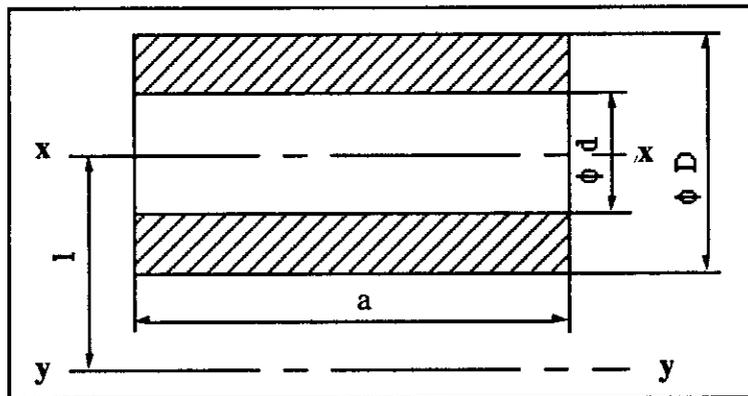


Fig. 2.69 Cylindre creux

Le moment d'inertie du cylindre par rapport à l'axe  $xx'$  est :

$$I_{xx'} = \int r^2 \cdot \rho dv = \int_{d/2}^{D/2} r^2 \cdot \rho \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr \cdot a$$

d'où :

$$I_{xx'} = \frac{\pi \rho a}{32} (D^4 - d^4)$$

Le moment d'inertie par rapport à l'axe  $yy'$  (se trouvant à une distance  $l$  de  $xx'$ ) est :

$$I_{yy} = I_{xx'} + Ml^2$$

avec :

$$M = \rho \int_r dr = \frac{\pi \rho a}{4} (D^2 - d^2)$$

d'où :

$$I_{yy} = \frac{\pi \rho a}{32} \left[ (D^4 - d^4) + 8 (D^2 - d^2) l^2 \right]$$

L'axe de rotation du vilebrequin et l'axe  $xx'$  (passant par le centre de gravité du tourillon) coïncident, donc le moment d'inertie du demi tourillon est donné par :

$$I_{t (1/2)} = \frac{\pi L_t}{64} \rho (D_t^4 - d_t^4) \tag{2.140}$$

avec:

- $D_t$  : diamètre extérieur du tourillon ;
- $d_t$  : diamètre intérieur du tourillon ;
- $L_t$  : longueur du tourillon.

L'axe passant par le centre de gravité du maneton se trouve à une distance  $R$  de l'axe de rotation du vilebrequin, d'où le moment d'inertie du maneton :

$$I_m = \frac{\pi L_m}{32} \rho \left[ (D_m^4 - d_m^4) + 8 (D_m^2 - d_m^2) R^2 \right] \tag{2.141}$$

avec :

- $D_m$  : diamètre extérieur du maneton ;
- $d_m$  : diamètre intérieur du maneton ;
- $L_m$  : longueur du maneton.

### B. Bras

On effectue un découpage du bras (et de son contrepoids le cas échéant) en éléments simples. Puis, pour chaque élément, après avoir calculé son inertie par rapport à un axe passant par son centre de gravité et parallèle à l'axe du vilebrequin, on détermine son moment d'inertie par rapport à l'axe du vilebrequin en appliquant le théorème de Huyghens ; la somme de ces inerties élémentaires est égale à l'inertie du bras par rapport à l'axe du vilebrequin.

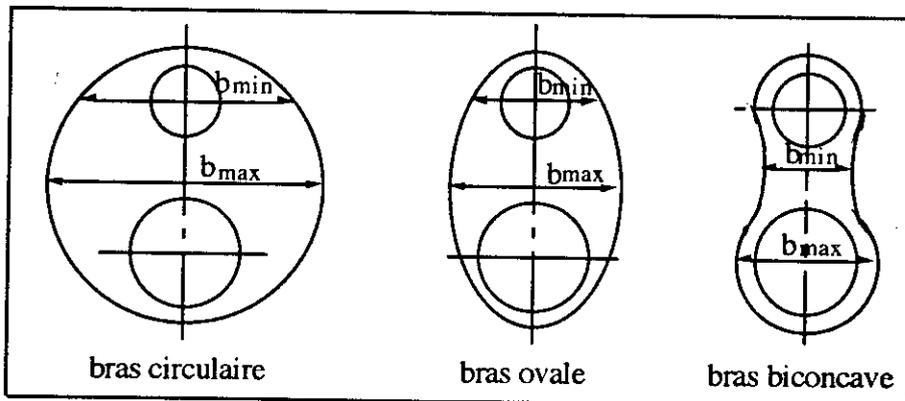


Fig. 2.70 Formes de bras de vilebrequins

Les formes de bras de vilebrequin les plus connus sont circulaires, ovales, ou biconcaves. Les bras utilisés dans les moteurs de véhicules sont souvent ovales (nous nous limiterons à l'étude de cette forme).

**a) Bras de forme permettant de recevoir le contre poids (indice 1)**

**- Portion circulaire :**

Cette partie à la forme d'un secteur de cercle de rayon  $R_m$ , son épaisseur varie selon une droite d'équation :

$$y = m x + k$$

avec :

$m$  : la pente de la droite :  $m = hm1 / (ep1 - epm1)$  ;  
 $k$  : l'ordonnée à l'origine.

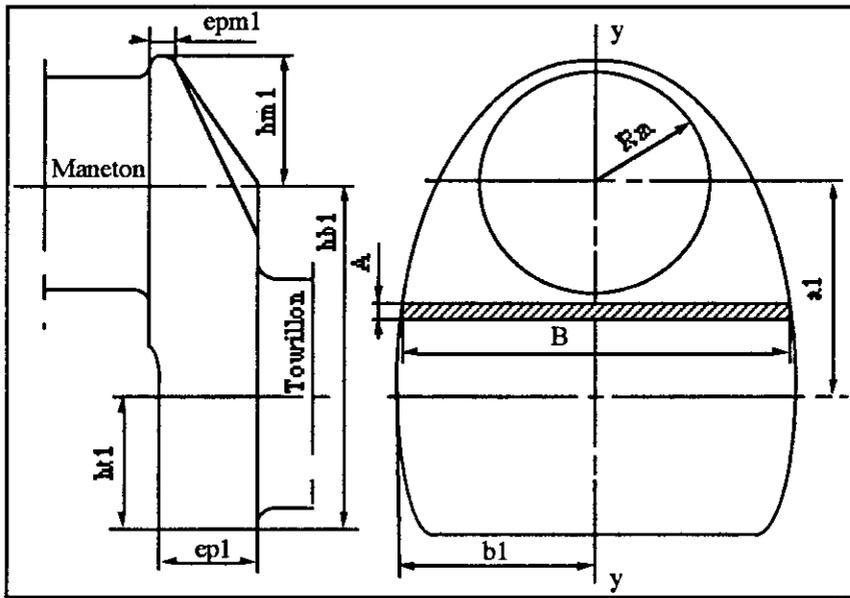


Fig. 2.71 Formes de bras pouvant recevoir le contre poids

La portion de cercle est divisée en éléments infinitésimaux de forme parallépipédique, de dimensions A, B et ep tel que :

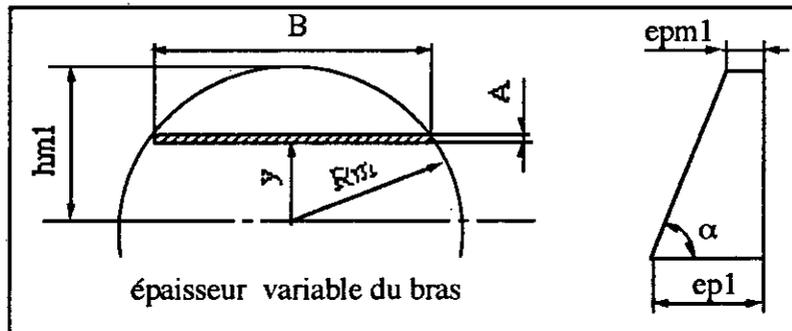
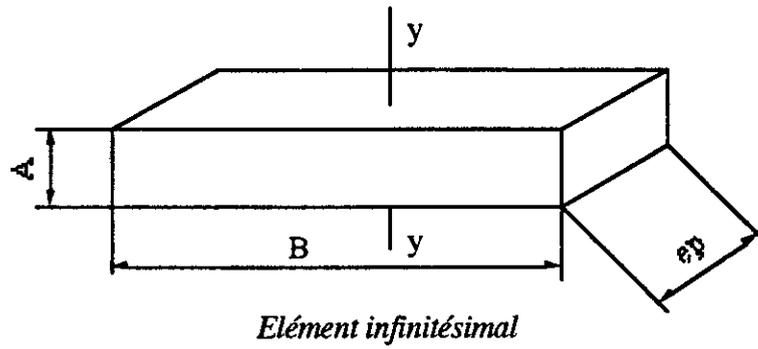


Fig. 2.72 Portion de cercle du bras indice 1



$$A = \frac{hm1}{N}$$

$$B = 2 \sqrt{Rm^2 - y^2}$$

$$ep = ep1 - \frac{y(ep1 - epm1)}{hm1}$$

Avec :

hm1 : hauteur de la portion de cercle ;

N : nombre de subdivisions ;

Rm : rayon de la portion de cercle ;

y : distance entre le centre de gravité de l'élément et le centre du cercle ;

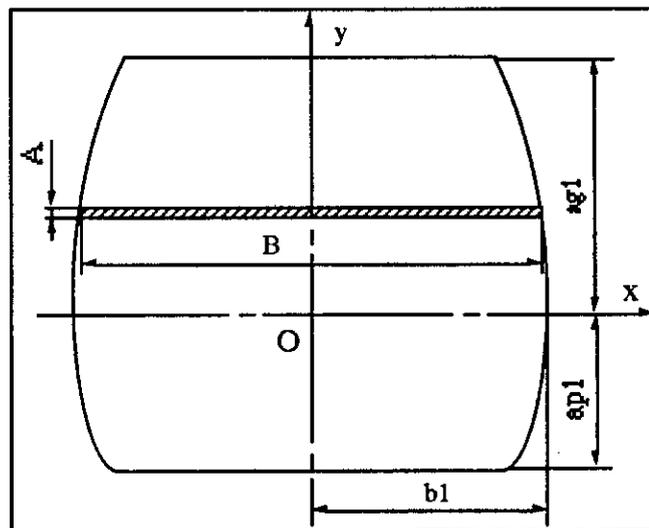
ep1 : épaisseur maximale du bras ;

epm1 : épaisseur minimale du bras.

#### - Partie elliptique :

Elle a la forme d'un tronc d'ellipse, de 1/2 grand axe ag1, ap1 et de 1/2 petit axe b1, avec une épaisseur ep1 qui reste constante sur la hauteur hb1.

*Fig. 2.73 Partie elliptique du bras porte contre poids*



Les dimensions A et B de l'élément infinitésimal sont données par :

$$A = \frac{ag1 + ap1}{N}$$

$$B = b1 \sqrt{1 - \frac{y^2}{ag1^2}} + b1 \sqrt{1 - \frac{y^2}{ap1^2}}$$

Avec :

ag1 : 1/2 grand axe de l'ellipse supérieur ;

ap1 : 1/2 grand axe de l'ellipse inférieur ;

b1 : 1/2 petit axe de l'ellipse ;

y : distance entre le centre de gravité de l'élément et centre de l'ellipse.

**b) Bras de forme simple (indice 2)**

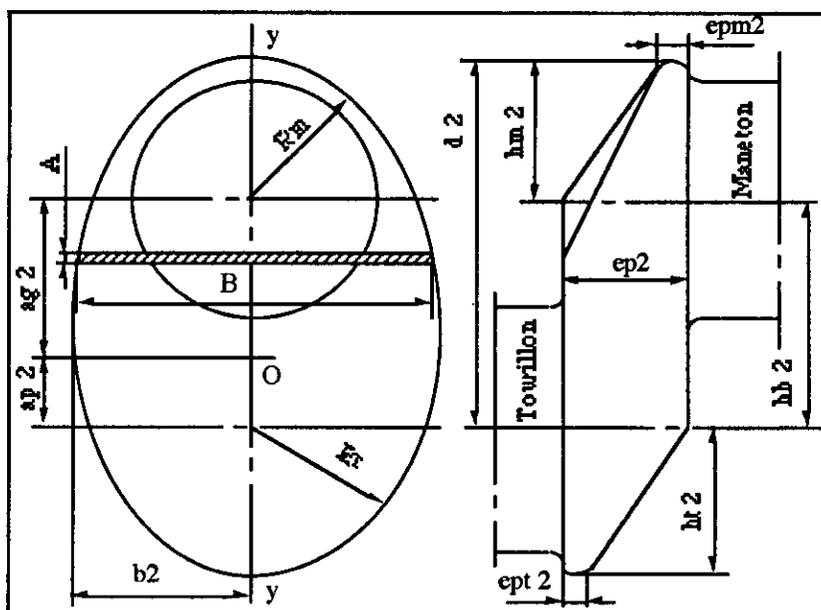


Fig. 2.74 Bras de forme simple indice 2

**- Portion de cercle coté maneton :**

Cette partie à la forme d'un secteur de cercle de rayon  $R_m$ , son épaisseur varie selon une droite d'équation :

$$y = m x + k$$

avec :

m : la pente de la droite :  $m = hm2 / (ep2 - epm2)$  ;

k : l'ordonnée à l'origine.

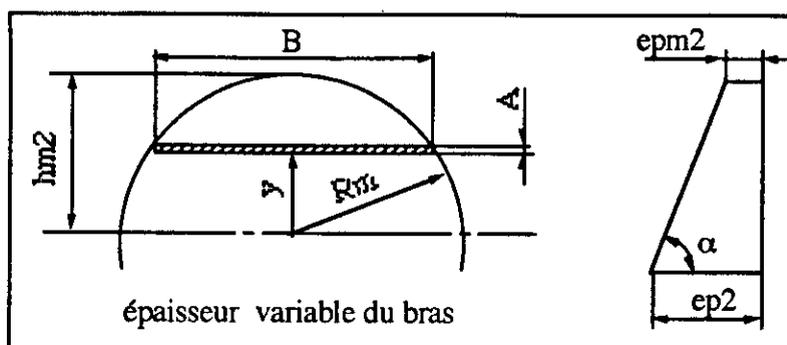


Fig. 2.75 Portion de cercle du bras indice 2

La portion de cercle est divisée en éléments infinitésimaux de forme parallépipédique, de dimensions A, B et ep tel que :

$$A = \frac{hm2}{N}$$

$$B = 2 \sqrt{Rm2^2 - y^2}$$

$$ep = ep2 - \frac{y(ep2 - epm2)}{hm2}$$

Avec :

hm2 : hauteur de la portion de cercle ;

N : nombre de subdivisions ;

Rm2 : rayon de la portion de cercle ;

y : distance entre le centre de gravité de l'élément et le centre du cercle ;

ep2 : épaisseur maximale du bras ;

epm2 : épaisseur minimale du bras.

#### - Partie elliptique :

Elle a la forme d'un tronc d'ellipse, de 1/2 grand axe ag2, ap2 et de 1/2 petit axe b2, avec une épaisseur ep2 qui reste constante sur la hauteur hb2.(fig. 2.118).

Les dimensions de A et B sont données par :

$$A = \frac{ag2 + ap2}{N}$$

$$B = b2 \sqrt{1 - \frac{y^2}{ag2^2}} + b2 \sqrt{1 - \frac{y^2}{ap2^2}}$$

Avec :

ag2 : 1/2 grand axe de l'ellipse supérieur ;

ap2 : 1/2 grand axe de l'ellipse inférieur ;

b2 : 1/2 petit axe de l'ellipse ;

y : distance entre le centre de gravité de l'élément et centre de l'ellipse.

### 3. Portion de cercle coté tourillon :

cette partie à la forme d'un secteur de cercle de rayon  $R_t$ , son épaisseur variable selon une droite d'équation :

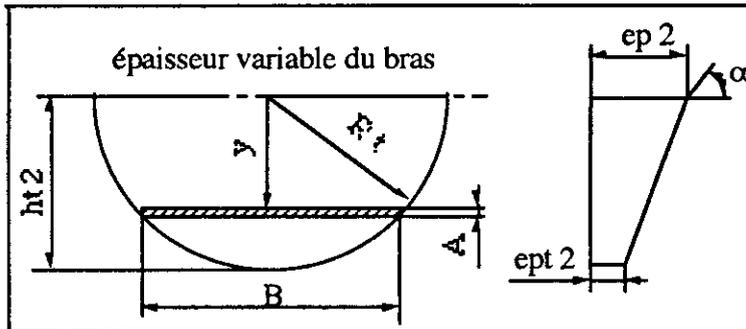
$$y = m x + k$$

avec :

$m$  : la pente de la droite :  $m = \frac{ht_2}{ep_2 - ept_2}$  ;

$k$  : l'ordonnée à l'origine.

Fig. 2.76 Portion de cercle du bras indice 2



Les dimensions relatives à la portion de cercle A, B et  $ep$  sont données par :

$$A = \frac{ht_2}{N}$$

$$B = 2 \sqrt{R_t^2 - y^2}$$

$$ep = y \frac{(ep_2 - ept_2)}{ht_2}$$

Avec :

$ht_2$  : hauteur de la portion de cercle ;

$N$  : nombre de subdivision ;

$R_t$  : rayon de la portion de cercle ;

$y$  : distance entre le centre de gravité de l'élément et centre du cercle ;

$ep_2$  : épaisseur maximale du bras ;

$ept_2$  : épaisseur minimale du bras.

#### 6.1.2.2. Contre poids :

Le contre poids peut être conçu de forme géométrique simple et d'épaisseur constante. Cette forme est choisie selon sa fixation sur le bras. Considérons pour notre cas un contre poids ayant la forme d'un trapèze droit.

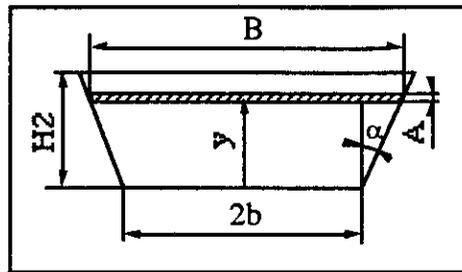


Fig. 2.77 contre poids

$$A = \frac{H_2}{N}$$

$$B = 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot y + b$$

avec :

H<sub>2</sub> : hauteur du trapèze ;

b : petite base du trapèze ;

y : distance entre le centre de gravité de l'élément et la petite base du trapèze

N : nombre de subdivision.

### Moment d'inertie de l'élément parallépipédique

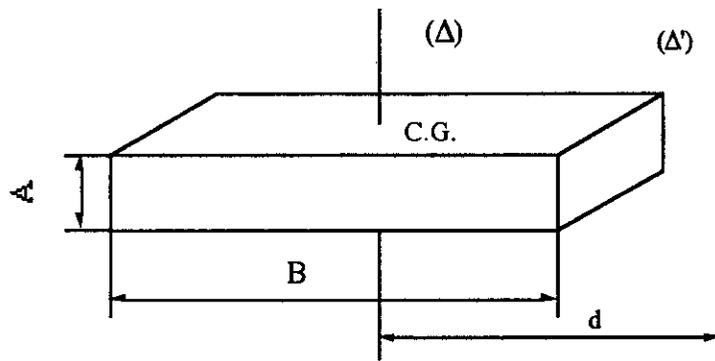


Fig. 2.78 Elément parallépipédique

Le moment d'inertie de l'élément parallépipédique par rapport à un axe (Δ) qui lui est perpendiculaire et passant par son centre de gravité est donnée par :

$$I_{(\Delta)} = \frac{M}{12} (A^2 + B^2) \quad (2.142)$$

Le moment d'inertie passant par un axe (Δ') parallèle à l'axe (Δ) à une distance d de ce dernier est :

$$I_{(\Delta')} = M \left[ \frac{(A^2 - B^2)}{12} + d^2 \right] \quad (2.143)$$

#### 6.1.2.3. Moment d'inertie équivalent de l'équipage mobile

Pour tenir compte de l'effort de l'attelage mobile sur le système élastique (vilebrequin), nous calculons une masse équivalente constante liée au maneton. Elle se compose de :

**a) Masse équivalente du piston et de son axe**

La masse équivalente moyenne est obtenue en calculant la moyenne arithmétique de la fonction  $m_{ep}(\alpha)$ , pour  $\alpha$  variant de 0 à  $\pi$  [31].

$$M_{ep} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} m_{ep}(\alpha) d\alpha$$

Pour un système bielle-manivelle classique, dont le rapport R/L est compris entre 0,25 et 0,30, la valeur de la masse équivalente du piston et de son axe est :

$$M_{ep} = \frac{1}{2} m_p \tag{2.144}$$

**b) Masse équivalente de la bielle**

La masse équivalente cherchée est obtenue en calculant la moyenne arithmétique de la fonction  $M_{eb}(\alpha)$ , pour  $\alpha$  variant de 0 à  $\pi$ .

$$M_{eb} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{m_b \left[ \vec{V}_{(G)}^0 \right]^2 + \frac{\vec{\Omega}_b \cdot \vec{I}_{(bG)} \cdot \vec{\Omega}_b}{R^2 \cdot \omega^2}}{R^2 \cdot \omega^2} d\alpha$$

Pour une bielle admettant deux plans de symétrie et dont la répartition des masses est telle que le centre de gravité est situé à un tiers de la longueur de la bielle à partir de l'axe de la tête, la masse équivalent est :

$$M_{eb} = \frac{3}{4} m_b + \frac{I}{2L^2} \tag{2.145}$$

avec :

- $m_b$  : masse de la bielle [kg] ;
- $I$  : moment d'inertie de la bielle par rapport à un axe parallèle à l'axe du vilebrequin et passant par le centre de gravité de la bielle, [N.m.s<sup>2</sup>] ;
- $L$  : Longueur de la bielle [m].

D'où le le moment d'inertie équivalent de l'équipage mobile  $I_{eqm}$  [N.m.s<sup>2</sup> ]

$$I_{eqm} = (M_{ep} + M_{eb}) \cdot R^2 \tag{2.146}$$

avec :

- $M_{ep}$  : masse équivalente du piston [kg] ;
  - $M_{eb}$  : masse équivalente de la bielle [kg] ;
  - $R$  : rayon de la manivelle [m].
- Si  $I_{b1}$  et  $I_{b2}$  sont les moments d'inertie des bras,  $I_t$  et  $I_m$  les moments d'inertie du tourillon et du maneton, le moment d'inertie  $I_c$  du coude est donné par :

$$I_c = I_t + I_m + I_{b1} + I_{b2} + I_{eqm} \tag{2.147}$$

#### 6.1.2.4. Moment d'inertie du volant moteur

Le volant est assimilé à une jante annulaire de masse  $M$  et de rayon moyen  $R_m$  tel que :

$$R_m = \frac{2}{3} \left[ \frac{R_{ex}^3 - R_{in}^3}{R_{ex}^2 - R_{in}^2} \right]$$

Le moment d'inertie  $I_v$  est donné par :

$$I_{vd} = \frac{1}{2} M R_m^2 \quad (2.148)$$

Si  $I_a$  représente l'inertie de l'amortisseur de torsion et du pignon de commande, le vilebrequin aura un moment d'inertie  $I_{vil}$  tel que :

$$I_{vil} = n_c \cdot I_c + I_{vd} + I_a \quad (2.149)$$

avec :

- $n_c$  : nombre de coudes ;
- $I_c$  : moment d'inertie d'un coude [N.m.s<sup>2</sup>] ;
- $I_{vd}$  : moment d'inertie du volant [N.m.s<sup>2</sup>].

#### 6.2. Longueur équivalente d'un coude

La longueur équivalente  $L_e$  d'un coude rectiligne de diamètre équivalent en torsion  $D_e$  est donnée par l'expression :

$$L_e = \frac{G \pi D_e^4}{32} \cdot \frac{1}{k}$$

Cette formule, qui repose sur l'hypothèse contestable réduisant le coude de vilebrequin à une suite de poutres, est très approximative. Or le coude est un système très complexe, et seul la prise en compte de formes réelles permet de déterminer avec précision sa longueur équivalente.

Plusieurs méthodes de calcul semi-expérimentales ont été appliquées à plusieurs formes de vilebrequin, parmi ces méthodes on cite :

- . Méthode de BICERA ;
- . Méthode de Carter ;
- . Méthode de Ker-Wilson ;
- . Méthode de Timoshenko ;
- . Méthode de Tuplin.

##### Méthode de BICERA (British International Combustion Engine Research)

Cette méthode est applicable à toutes les formes de vilebrequins et elle tient compte en détail de la géométrie du coude. Cette méthode nous paraît la plus proche de la réalité. Elle nous permet de calculer la longueur équivalente du coude pour un diamètre équivalent  $D_e = dt$  :

$$L_e = 2 E_{pb} + L_{et} + L_{em} \quad (2.150)$$

avec :

Epb : épaisseur équivalente du bras [m] ;  
 Let : longueur équivalente du tourillon [m] ;  
 Lem : longueur équivalente du maneton [m]

### 6.2.1. Longueur équivalente des deux demi-tourillons Let

$$L_{et} = \frac{d_t^4}{d_t^4 - d_{it}^4} \cdot L_t \quad (2.151)$$

avec :

Lt : longueur du tourillon [m] ;  
 dt : diamètre extérieur du tourillon [m] ;  
 dit : diamètre intérieur du tourillon [m].

### 6.2.2. Longueur équivalente du maneton Lem

$$L_{em} = \frac{d_m^4}{d_m^4 - d_{im}^4} \cdot L_m \quad (2.152)$$

avec :

Lm : longueur du maneton [m] ;  
 dm : diamètre extérieur du maneton [m] ;  
 dim : diamètre intérieur du maneton [m].

### 6.2.3. Largeur équivalente du bras be

Dans le cas d'un bras rectangulaire, la largeur équivalente est prise égale à la largeur réelle ; mais si les bras sont circulaires, ovales ou biconcaves, la largeur équivalente est déterminée par

$$\frac{1}{b_e^3} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{b_{\max}^3} + \frac{1}{b_{\min}^3} \right)$$

avec :

b max : largeur maximale du bras [m] ;  
 b min : largeur minimale du bras [m].

Si les bras comportent une dépouille, l'épaisseur équivalente est donnée par :

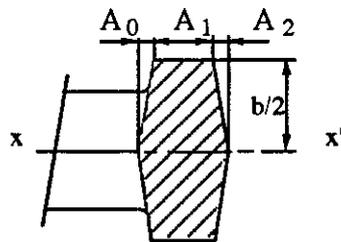


Fig. 2.79 Bras du vilebrequin avec dépouille

$$E_{pb} = \frac{12J}{b^3}$$

avec :

J : moment quadratique [m<sup>4</sup>] de la section transversale du bras par rapport à 'axe xx';

b : largeur du bras [m].

Le moment quadratique de la section considérée du bras par rapport à l'axe xx' est donnée par :

$$J = \frac{b^3}{12} \left( \frac{A_0}{4} + A_1 + \frac{A_2}{4} \right) \quad (2.153)$$

d'où :

$$E_{pb} = \left( \frac{A_0}{4} + A_1 + \frac{A_2}{4} \right) \quad (2.154)$$

La longueur équivalente des bras tenant compte des termes correctifs est donnée par :

$$E_{pb} = dt \left[ \frac{L_{e0}}{dt} + \frac{\Delta L_{e1}}{dt} + \frac{\Delta L_{e2}}{dt} + \frac{\Delta L_{e3}}{dt} + \frac{\Delta L_{e4}}{dt} + \frac{\Delta L_{e5}}{dt} \right] \quad (2.155)$$

avec :

$L_{e0}$  : longueur relative équivalente du bras rectangulaire ;

$\frac{\Delta L_{e1}}{dt}$  : terme correctif de la longueur équivalente ;

$\frac{\Delta L_{e2}}{dt}$  : terme correctif qui tient compte de l'écart de diamètre entre le tourillon et le maneton ;

$\frac{\Delta L_{e3}}{dt}$  : terme correctif qui tient compte de l'influence du forage des bras ;

$\frac{\Delta L_{e4}}{dt}$  : terme correctif qui tient compte des rayons de raccordement des tourillons et des manetons ;

$\frac{\Delta L_{e5}}{dt}$  : terme correctif qui tient compte des chanfreins arrières et des chanfreins latéraux.

Ces différents termes correctifs sont déterminés graphiquement [38]

### 6.3. Rigidité torsionnelle d'un coude

Soit un coude soumis à deux couples opposés  $C$  [N.m] portés par l'axe des tourillons et appliqués à chaque extrémité, la déformation globale en torsion est la somme des déformations :

- en torsion des deux demi-tourillons,
- en flexion des deux bras.

Cette déformation se traduit par la rotation relative des deux sections extrêmes du coude, d'un angle  $\theta_{li}$  exprimé en rad. La rigidité torsionnelle  $k$  [N.m/rad] du coude est définie par le rapport du couple sur la rotation relative  $\theta_{li}$  :

$$k = \frac{C}{\theta_{li}} \quad (2.156)$$

Le calcul de la rigidité  $k$  peut être exprimé en fonction des dimensions de chaque élément du coude et de la résistance des matériaux de ces éléments.

$$\frac{1}{k} = \frac{2}{k_t} + \frac{2}{k_b} + \frac{1}{k_m} \quad (2.157)$$

avec :

$$k_t = \frac{2 G \cdot J_t}{L_t} : \text{rigidité torsionnelle d'un demi-tourillon ;}$$

$$k_m = \frac{G \cdot J_m}{L_m} : \text{rigidité torsionnelle du maneton ;}$$

$$k_b = \frac{E \cdot J_b}{R} : \text{rigidité équivalente d'un bras.}$$

où :

- $E$  : module d'élasticité [N/m<sup>2</sup> ou Pa] ;
- $G$  : module de glissement [N/m<sup>2</sup> ou Pa] ;
- $J_t, J_m, J_b$  : moments quadratiques des sections considérées [m<sup>4</sup>] ;
- $L_t, L_m$  : dimensions de la section du bras [m] ;
- $R$  : rayon de manivelle [m].

## 7. PRE-DIMENSIONNEMENT DE L'EQUIPAGE MOBILE

L'équipage mobile des moteurs en ligne et en "V" comprend : le piston, l'axe de piston, la bielle (bielle à œil-biellette ou bielle à fourche-biellette pour les moteurs articulés) et le vilebrequin. Ainsi la détermination des dimensions de chaque élément (tenant compte de l'encombrement du moteur, de son poids, ainsi que des conditions de résistance aux différents types de contraintes), par le choix approprié des matériaux est d'une importance capitale pour le bon fonctionnement du moteur.

Cependant, on ne peut procéder à la détermination des dimensions et des formes des organes mobiles des moteurs en utilisant exclusivement les lois de la mécanique (résistance des matériaux, élasticité, plasticité) ; cette détermination est plutôt empirique, basée sur l'expérimentation née de la conjugaison de l'observation et du raisonnement.

### 7.1. Piston

#### 7.1.1. Généralités

Le piston, fond mobile de la chambre de combustion, considéré comme l'organe le plus vulnérable du moteur, se compose :

- d'une tête porteuse de segments, en contact avec les gaz chauds ;
- d'une jupe en liaison avec la chemise assurant le guidage du piston ;
- d'un axe en liaison avec la bielle lui transmettant des efforts de combustion.

Le piston doit assumer des fonctions multiples tout en souscrivant à des impératifs discordants, à savoir :

- Recevoir et transmettre les efforts moteurs développés par la combustion des gaz sans subir de déformation appréciable, ce qui implique un matériau de module d'élasticité encore élevé à haute température ;
- Recevoir et éliminer une grande partie de la quantité de chaleur dégagée durant la combustion sans subir de déformation notable, ce qui motive un bon coefficient de conductivité thermique ;
- Assurer l'étanchéité aux gaz de combustion tout en contrôlant le passage de l'huile de graissage dans la combustion, ce qui incite à choisir des matériaux à coefficients de dilatation thermique faibles ;
- Opérer dans une vaste plage de température, ce qui oriente vers des matériaux à température de fusion élevée et à haute limite élastique à chaud ;
- Diminuer au maximum les efforts d'inertie, ce qui conduit à l'adoption d'alliages aussi légers que possible.
- Ces fonctions fondamentales du piston, tant d'ordre mécanique que thermique doivent être assurées avec la plus grande sécurité, ce qui rend le piston l'un des organes le plus délicats du moteur, et donc subit, depuis la création du moteur à explosion, des modifications constantes destinées à améliorer son fonctionnement. Les qualités exigées aux matériaux pour pistons sont :
  - Une bonne conduction ;
  - Des caractéristiques mécaniques encore élevées à chaud ;
  - Une bonne résistance à la corrosion par les gaz chauds, et à l'usure ;
  - Une faible dilatabilité afin de réduire les jeux à froid ;

- Une masse réduite ;
- Une bonne coulabilité ;
- Un usinage facile.

### 7.1.2. Différents types de pistons

#### A. Pistons pour moteur à essence

Afin de diminuer les efforts d'inertie, les pistons ont été allégés par l'introduction d'alliage d'aluminium. La dilatation exagérée de l'aluminium, a été solutionnée, par l'introduction de plaquettes en acier au niveau de la jupe du piston. De cette manière on a allié le faible poids des métaux légers à la faible dilatation de l'acier.

#### B. Piston pour moteur Diesel

Le facteur prépondérant intervenant dans la réalisation du piston pour moteurs Diesel, est le facteur température qui, imposant des dispositions constructives destinées à soulager thermiquement les têtes de pistons, entraîne par conséquent, des réalisations variées. Les effets nuisibles de la température se manifestent :

- Dans les premières loges de segments par le gommage et l'usure des flancs de gorges ;
- Sur la tête et particulièrement, dans les cas de formes complexes, par des fissurations dues aux contraintes thermiques et parfois par des fusions locales.

Parmi les solutions technologiques les plus courantes, adoptées par les constructeurs pour combattre les effets de température, on cite :

- Un tracé favorable à la conductibilité thermique, solution à laquelle il est sage de faire appel avant d'envisager des solutions plus complexes ;
- Incorporation de métaux plus durs et moins fusibles que les alliages d'aluminium, cette dernière ayant lieu sur les fonds et autour de la première gorge des segments d'étanchéité ;
- Refroidissement par l'huile : avec arrosage des parois intérieurs de la tête, avec circulation à travers la tête.

### 7.1.3. Morphologie du piston

#### A. Tête de piston

La forme de la tête du piston est d'une très grande importance par le rôle qu'elle joue dans la modification de la turbulence, particulièrement pour les moteurs Diesel où une partie de la chambre de combustion peut y être incorporée.

En effet, pour ce type de moteurs, la tête de piston présente une forme particulière suivant l'emplacement de l'injecteur et des soupapes. On distingue des pistons à chambre concave, déportée, à courant circulaire ; à chambre plate pour injecteur horizontal, avec évidement ; à chambre lenticulaire ...

Pour les pistons ne présentant pas de symétrie, la répartition des températures n'est pas uniforme provoquant une irrégularité de l'écoulement de chaleur.

Du fait des multiples variations de températures, on peut craindre la naissance de criques radiales, le métal à chaud dépassant la limite élastique en compression se crique au refroidissement.

Les solutions envisageables pour remédier à ce défaut se résument en :

- L'augmentation du rayon de raccordement de la boucle avec la partie plane du fond ;
- Le polissage de la partie plane du fond voisin du rayon de raccordement, pour supprimer les irrégularités d'usinage, pouvant engendrer des amorces de rupture ;
- Le rapport d'une partie en acier spécial à haute résistance à chaud dans la partie étranglée.

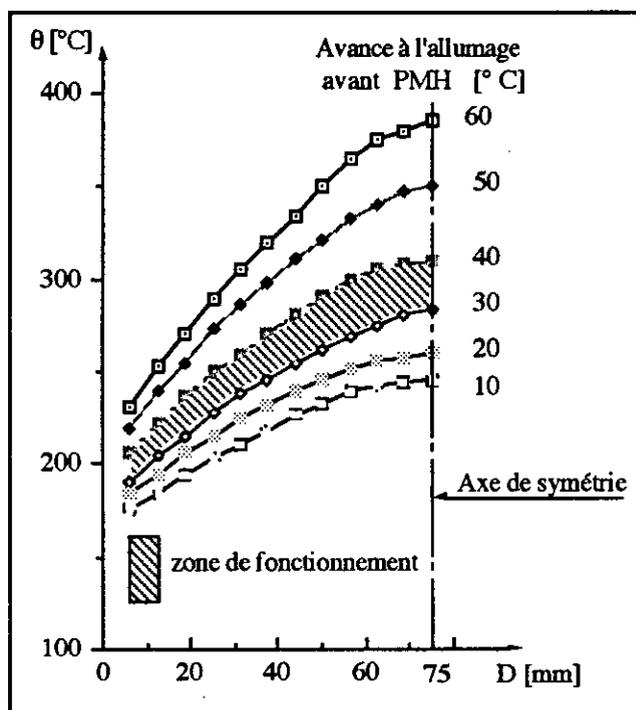


Fig. 2.80 Répartition des températures dans une tête de piston suivant l'avance à l'allumage

## B. Couronne porte segments

Cette partie reçoit donc les segments et présente à sa base des orifices d'évacuation de l'huile (ces derniers pouvant être situés au fonds de la gorge du racleur, sous celui-ci, ou à cheval sur le flanc inférieur de la gorge).

Elle dissipe une partie de l'énergie calorifique entrée par le fond du piston et assure l'étanchéité aux gaz et à l'huile.

L'étanchéité aux gaz :

- Assure la compression de l'air ;
- Limite les fuites de gaz de combustion (donc les pertes d'énergie utile) ;
- Evite que ces gaz refoulant l'huile, ne provoquent le gommage des segments, le grippage en jupe et les fumées au reniflard (évacuation des vapeurs présentes dans le carter d'huile).

L'étanchéité à l'huile ne permet qu'une faible remontée d'huile ce qui assure la propreté de la chambre de combustion et concourt à diminuer la consommation de cette huile.

## C. Jupe

La jupe a pour rôle :

- De guider la couronne porte-segments ;
- De répartir l'effort normal du cylindre dû à l'obliquité de la bielle ;
- D'évacuer la chaleur reçue par la tête de piston.

### C.1. Guidage

Le piston se déplaçant dans la chemise, il y a glissement des surfaces en contact sous forte pression, et ceci, à grande vitesse et haute température.

Il est donc nécessaire de remédier au grippage du piston dans son alésage par une bonne lubrification de la jupe et des segments, et par un usinage spécial des profils extérieurs de la pièce. En effet, le piston n'ayant pas une architecture symétrique, la température n'étant pas la même en tous les points, la dilatation n'est pas égale dans toutes les directions. On est donc conduit à donner au piston une forme à froid qui, évoluant avec la température, fera que le piston à chaud aura un contact cylindrique avec la chemise dans le sens du battement.

Pour supprimer les risques de grippage et améliorer l'ensemble du comportement du piston, le contact entre ce dernier et le cylindre doit être assuré dans certaines conditions :

- Ce contact doit se limiter à la jupe et ne pas intéresser les cordons porte segments ;
- La zone de portée doit avoir la plus grande surface possible afin de diminuer la pression de contact et favoriser la transmission thermique. Il faut cependant éviter l'étalement de la portée vers les trous d'axe, zone critique soumise à des déformations thermiques et mécaniques.

C'est alors dans le façonnage extérieur du piston, c'est à dire par les profils d'usinage, que l'on cherche des solutions à ces problèmes.

### C.2. Ovalisation des jupes - profils polaires

La dilatation du piston n'étant pas égale dans toutes les directions, il faut, compte tenu de l'architecture du piston, choisir des profils méridiens et des profils polaires tels que, la température s'élevant la forme extérieur du piston tend à devenir cylindrique.

Il est commode de définir la courbe par la différence :

$$D - d = 2e = \delta$$

sur le rayon polaire d'angle  $\theta$  on peut mettre en évidence la différence des diamètres principaux du cylindre et de la jupe.

Pour des raisons de précision et de fiabilité de reproduction, il est préférable d'adopter parmi les ovales satisfaisants, ceux qui sont engendrables par des cinématiques facilement réalisables, parmi lesquels on peut citer la famille d'équation :

$$e = [(D - d) / 2] \cdot \sin^2 \theta$$

Des formules empiriques permettent de donner  $\delta$  en fonction du diamètre  $D$ , tout au long de la hauteur du piston :

- au niveau de la tête :  $\delta = 0$
- au dessus du segment intermédiaire :  $\delta = (0,0007 \cdot D)$

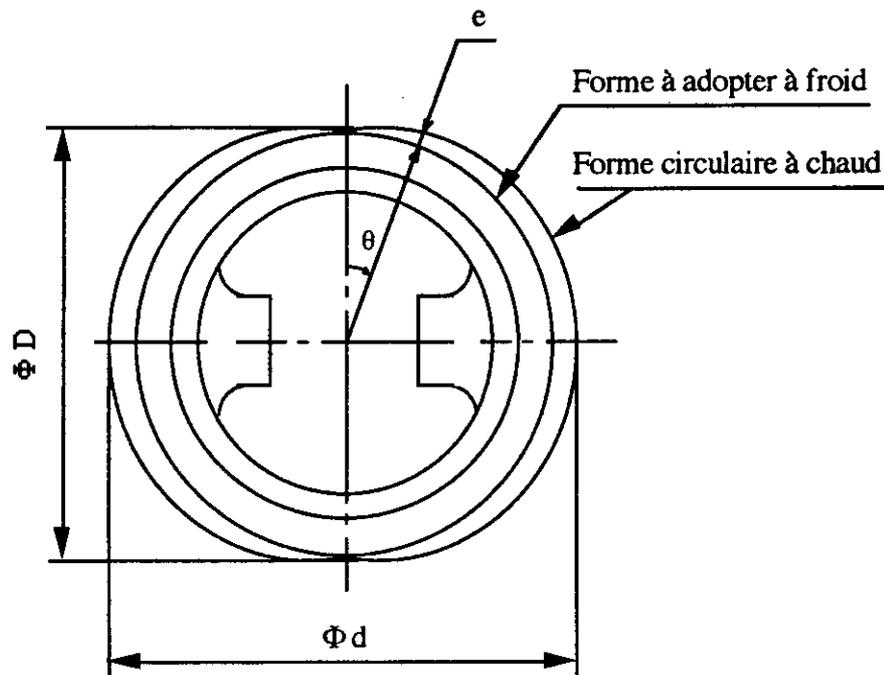


Fig 2.81 Ovalisation du piston

- au dessus du segment racleur :  $\delta = (0,001 \cdot D)$
- haut de jupe :  $\delta = (0,003 \cdot D)$
- bas de jupe :  $\delta = (0,002 \cdot D)$

#### 7.1.4. Matériaux pour pistons

De façon générale, les alliages d'aluminium sont utilisés pour les pistons qui ne sont pas refroidis. Ces alliages ont l'avantage d'avoir une bonne conductivité, une bonne usinabilité et d'être légers. Par contre ils ont un mauvais coefficient de dilatation et une mauvaise résistance mécanique.

| Caractéristiques mécaniques          | Aluminium          | Acier              | Fonte              | Températ. |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-----------|
| Module d'élasticité<br>E en MPa      | 82 500             | 210 000            | 180 000            | 20 ° C    |
|                                      | 77 000             | 180 000            | 130 000            | 300 ° C   |
| Résistance élasti.<br>Re en :MPa     | 130                | 700                | 480                | 20 ° C    |
|                                      | 100                | 500                |                    | 300 ° C   |
| Conductibilité therm. en W/m°C       | $21 \cdot 10^{-3}$ | $4 \cdot 10^{-3}$  | $5 \cdot 10^{-3}$  |           |
| Allongement A%                       | 0,5                | 9                  | 2                  |           |
| Masse volumique en kg/m <sup>3</sup> | 2 600              | 7 800              | 7 200              |           |
| Dilatation therm. en / °C            | $19 \cdot 10^{-6}$ | $11 \cdot 10^{-6}$ | $10 \cdot 10^{-6}$ |           |

Tableau des caractéristiques mécaniques

Les éléments d'addition apportent des améliorations diverses tel que :

- Silicium : coulabilité, résistance à chaud, frottement ;
- Cuivre : usinabilité, coulabilité, dureté ;
- Nickel : résistance à chaud ;
- Mn 1 à 4 % : dureté à chaud ;
- Fe 0,5 % : facilité de moulage.

### 7.1.5. Dimensionnement du piston

#### A. Piston pour moteur essence

Les dimensions que nous donnons sont fournies par des statistiques Américaines et Allemandes [30], concernent les moteurs 4 temps à essence, refroidis par eau.

##### a) Longueur totale des pistons :

La longueur totale des pistons Américains varie entre  $0,85 D$  et  $1,16 D$ , les pistons de même longueur que le diamètre formant la majorité. La longueur totale des pistons Européens se situe entre  $0,965 D$  et  $1,3 D$ .

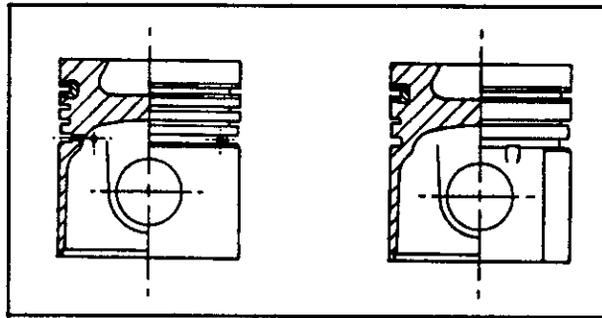


Fig. 2.82 Schéma de pistons pour moteurs

##### b) Hauteur d'axe des pistons :

La hauteur d'axe est définie comme étant la longueur depuis le centre de l'axe jusqu'au bord de la tête du piston. On trouve pour les pistons Américains, des valeurs entre  $0,46 D$  et  $0,56 D$  tandis que pour les pistons Européens, on trouve à une exception près, des valeurs entre  $0,50 D$  et  $0,63 D$ .

##### c) Longueur de la jupe du piston :

C'est la longueur au dessous de la zone de segmentation. Au U.S.A. elle est de  $0,58 D$  à  $0,8 D$ , en Europe de  $0,58 D$  à  $0,96 D$ .

##### d) Désaxage :

Pour des raisons de silence de marche, les pistons de série, des voitures Américaines et Européennes sont généralement désaxés.

Les pistons dont l'axe est placé hors du centre du piston, empêchent le claquement qui naît au bas de la jupe lorsque, arrivé au P.M.H. le piston change de côté de son appui dans le cylindre.

Le désaxage des pistons Américains varie entre 1,5 et 2 mm (0,014 à 0,022 D). De même on choisit généralement pour les pistons européens un désaxage de 1 à 2 mm (soit 0,016 à 0,025 D).

*e) Jeu :*

Le jeux à froid entre piston-chemise dans la zone de segmentation :

- Américains : 0,5 à 0,9 mm ;
- Européens : 0,3 à 0,5 mm.

Pour les pistons à dilatation contrôlée, le jeu a pour valeur dans la zone de segmentation :  
USA : 0,7 % D et Europe : 0,5 % D.

**B. Piston pour moteur Diesel**

Dimensions générales d'un piston de moteur Diesel 4 temps en alliage d'aluminium-silicium :

*a) Diamètre de tête :*

$$D_t = (1 - 0,007) D$$

*b) Epaisseur du fonds de piston :*

$$e_{fp} = D / 8$$

*c) Epaisseur du cordon de tête :*

$$e_{ct} = 0,2 D$$

*d) Diamètre de haut de jupe :*

$$D_{hj} = (1 - 0,003) D$$

*e) Diamètre de bas de jupe :*

$$D_{bj} = (1 - 0,0015) D$$

*f) Hauteur d'axe :*

$$(0,7 \text{ à } 0,8) D$$

*g) Hauteur de jupe :*

$$h_j = (0,9 \text{ à } 1) D$$

**C. Vérification aux contraintes et déformations :**

On utilise la théorie des plaques pour calculer la flèche et les contraintes maximales. On suppose le fond du piston encastré sur son pourtour.

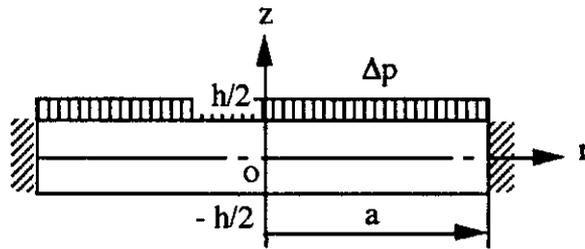


Fig. 2.83 Tête du piston

On suppose que la plaque ne travaille qu'en flexion simple, et on ne s'intéresse qu'aux efforts statiques.

a) Vérification de la tête de piston à la flèche maximale :

Si nous nous reportons à la figure 2.83 la flèche est donnée par :

$$f = \frac{\Delta p (a^2 - r^2)^2}{64 E h^3} \cdot \frac{1}{12 (1 - \nu^2)}$$

La flèche maximale a lieu au centre de la tête du piston (pour  $r = 0$ ,  $a = D_{ip}/2$ , et  $h = e_{fp}$ ), elle a pour expression :

$$f_{\max} = \frac{A (P_{\text{cyl max}} - P_{\text{cater}}) D_{ip}^4}{16 E (e_{fp})^3} \leq f_{\text{adm}} \quad (2.158)$$

où :

$D_{ip}$  : diamètre intérieur du piston ;

$E$  : module d'élasticité longitudinale du matériau ;

$e_{fp}$  : épaisseur fond du piston ( $h = e_{fp}$ ) ;

$A$  : constante dépendant du matériau ;  $A = 0,175$  pour les aciers et  $0,168$  pour l'aluminium et ses alliages ( $A = 12(1-\nu)/64$ , avec  $\nu$  : coef. de poisson).

La flèche maximale admissible est de :  $f_{\text{adm}} = 0,001 D$

b) Contrainte radiale et tangentielle

$$\sigma_r = \frac{3 \Delta p}{8 h^2} [(1 - \nu) a^2 - (3 + \nu) r^2]$$

$$\sigma_t = \frac{3 \Delta p}{8 h^2} [(1 - \nu) a^2 - (1 - 3\nu) r^2]$$

La contrainte au centre du piston ( $r = 0$ ) à pour expression :

$$\sigma_r = \frac{3 \Delta p}{32} \left[ (1 + \nu) \left( \frac{D_{ip}}{e_{fp}} \right)^2 \right]$$

$$\sigma_t = \frac{3 \Delta p}{32} \left[ (1 - \nu) \left( \frac{D_{ip}}{e_{fp}} \right)^2 \right]$$

La contrainte au pourtour de la plaque ( $r = \pm a$ ) à pour expression :

$$\sigma_t = \frac{3 \Delta p}{16} \nu \left( \frac{D_{ip}}{e_{fp}} \right)^2$$

$$\sigma_r = \frac{3 \Delta p}{16} \left( \frac{D_{ip}}{e_{fp}} \right)^2$$

La contrainte de flexion maximale a pour expression :

$$\sigma_{f \max} = 0,75 [P_{cyl \max} - P_{carter}] \left( \frac{D_{ip}}{e_{fp}} \right)^2 \leq \sigma_{adm} \quad (2.159)$$

avec :

- P<sub>cyl.max</sub> : pression maximale dans le cylindre ;
- P<sub>car</sub> : pression dans le carter (ou pression atmosphérique) ;
- D<sub>ip</sub> : diamètre intérieur du piston ;
- e<sub>fp</sub> : épaisseur du fonds de piston.

La contrainte admissible à la flexion du matériau utilisé a pour valeur :

. Alliages légers :

- $\sigma_{adm} = 20$  à  $30$  [N / mm<sup>2</sup>] ;
- $\sigma_{adm} = 25$  à  $30$  [N / mm<sup>2</sup>] , pistons comportant des nervures.

. Fonte :

- $\sigma_{adm} = 40$  à  $45$  [N / mm<sup>2</sup>] ;
- $\sigma_{adm} = 90$  à  $200$  [N / mm<sup>2</sup>] , pistons comportant des nervures.

c) *Vérification à la compression au niveau du porte segments :*

La contrainte maximale de compression s'exerçant sur le porte segments a lieu au niveau du segment racleur. Elle est donnée par :

$$\sigma_{c \max} = P_{cyl \max} \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{1}{S_p} \quad (2.160)$$

avec :

S<sub>p</sub> : la section la plus faible du piston, amoindrie par les trous de graissage se trouvant au niveau du segment racleur.

$$S_p = \frac{\pi}{4} \left( (D_{ip} + 2e_{ct})^2 - D_{ip}^2 \right) - n \cdot d_{tg} \cdot e_{ct}$$

où :

$d_{tg}$  : diamètre des trous de graissage ;  
 $n$  : le nombre de trous de graissage.

La contrainte maximale de compression dans la région porte segments doit être inférieure à la contrainte admissible de traction (ou compression).

*d) Epaisseur des cordons :*

Les épaisseurs des cordons séparant les gorges de segments sont établies en fonction des contraintes de flexion.

$$\sigma_{f \max} = 3 p_{\max} \frac{tg^2}{2ec} \leq \sigma_{adm}$$

où :

$p_{\max}$  : pression maximale des gaz sur le cordon considéré [MPa] ;  
 $tg$  : profondeur de la gorge [mm] ;  
 $ec$  : épaisseur du cordon [mm].

*e) Vérification à la flexion dans les bossages du piston :*

Les bossages du piston sont soumis aux contraintes de flexion dues à la pression des gaz de combustion. La contrainte maximale de flexion est donnée par :

$$\sigma_{f \max} = \frac{M_{f \max}}{I/V} \quad (2.161)$$

avec :

$I$  : moment quadratique axial de la section du bossage, il est donnée par :

$$I = \frac{\pi}{64} (d_{be}^4 - d_{bi}^4)$$

où :

$d_{be}$  : diamètre extérieur du bossage ;  
 $d_{bi}$  : diamètre intérieur du bossage ;  
 $M_{f \max}$  : moment de flexion maximale au niveau des bossages, il est donné par :

$$M_{f \max} = \frac{P_{cyl \max}}{2} \cdot d_{bi} \cdot a^2$$

avec  $a$  : la longueur du bossage.

*f) Vérification à la pression spécifique au niveau de la jupe du piston :*

Afin de permettre un bon guidage du piston dans le cylindre, la pression spécifique sur la jupe du piston doit être limitée. Cette dernière est donnée par :

$$P_j = \frac{F_{cmax}}{D \cdot L_j - S_{deg}} \leq P_{adm} \quad (2.162)$$

où :

- D.L<sub>j</sub> : la projection de la surface de la jupe ;
- S<sub>deg</sub> : la surface de dégagement au niveau des trous de l'axe ;
- F<sub>c max</sub> : la force latérale maximale sur le piston.

Cette pression spécifique calculée doit être inférieure à la pression spécifique admissible, qui a pour valeur : P<sub>adm</sub> = 1,5 à 3 [N/mm<sup>2</sup>].

g) Vérification à la contrainte thermique sur le piston :

Les variations de température dans le corps du piston sont fonction du temps et des modifications de vitesse et de couple, dues à un fonctionnement prolongé et à un régime variable du moteur ; ce qui provoquent des contraintes thermiques génératrices de déformations conduisant le piston au grippage, et à l'extrême, à des fissurations. Ces contraintes thermiques générées devront être inférieures à la contrainte thermique admissible pour le matériau constructif. Cette contrainte est donnée par :

$$\sigma_{th} = E \cdot \alpha \cdot \frac{\Delta\theta}{2} \leq \sigma_{tadm} \quad (2.163)$$

avec :

- E : le module d'élasticité longitudinale ;
- α : le coefficient de dilatation = 10.10<sup>-6</sup> pour la fonte et 22.10<sup>-6</sup> pour l'aluminium
- Δθ : est la différence de température entre le centre et la périphérie du piston.

La contrainte thermique σ<sub>th</sub> est de l'ordre de grandeur des contraintes mécaniques, elle provoque une augmentation du diamètre ΔD de la tête du piston sensiblement égale à :

$$\Delta D = D \cdot \alpha \cdot \frac{\Delta\theta}{2}$$

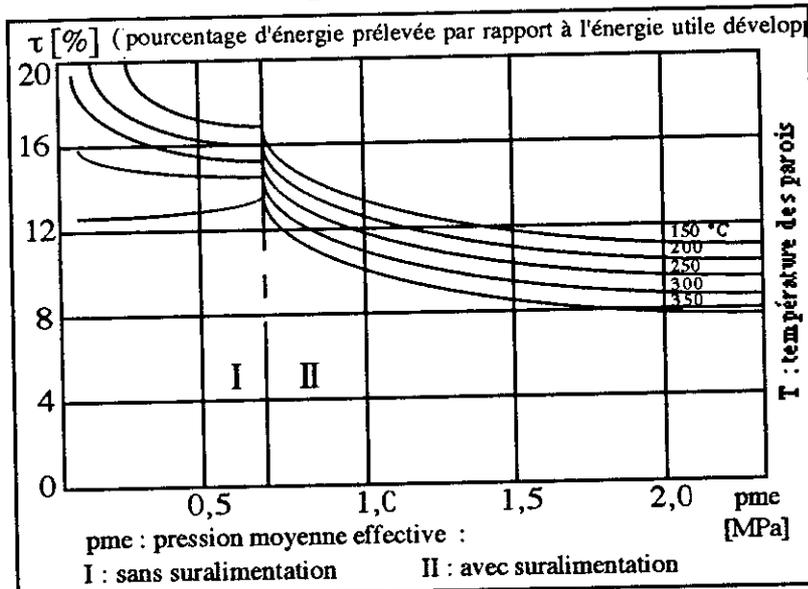


Fig. 2.84 Variation du taux de quantité de chaleur évacuée par la tête du piston avec la pme et la température de parois de tête

### D. Calcul du piston en fatigue

En supposant un régime de rotation  $N$  tr/mn, et en exigeant une durée de vie de piston de  $t$  heures, on obtient un nombre de cycles  $n$  cy tel que :

$$n \text{ cy} = (N/2) \cdot 60 t$$

En l'absence de contrainte de fatigue connue, on utilise une formule de corrélation entre la limite de fatigue et la résistance à la rupture du matériau.

Contrainte de fatigue en flexion plane (cas de sollicitation exercées sur le fond du piston) pour un piston en acier nous avons :

$$\sigma_D = 1,05 R_m \cdot (0,56 - 1,4 \cdot 10^{-4} \cdot R_m) \text{ pour } R_m \leq 800 \text{ MPa ou } R_m \geq 1300 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = 1,05 R_m \cdot (0,57 - 1,2 \cdot 10^{-4} \cdot R_m) \text{ pour } 800 \text{ MPa} \leq R_m \leq 1300 \text{ MPa.}$$

On prend  $R_m$  à la température de fonctionnement du piston (température peut différente de  $350^\circ\text{C}$ ) et on calcul  $\sigma_{D0}$ . La limite de fatigue trouvée correspond à la limite élastique de l'acier à  $n \text{ cy} = 10^7$  cycles ( $N_f$ ).

Pour un nombre de cycle du piston inférieur ( $n \text{ cy. piston} < N_f$ ), la limite élastique correspondante est supérieure à  $\sigma_{D(N_f)}$  calculée (voir diagramme d'endurance et courbe de wöhler).

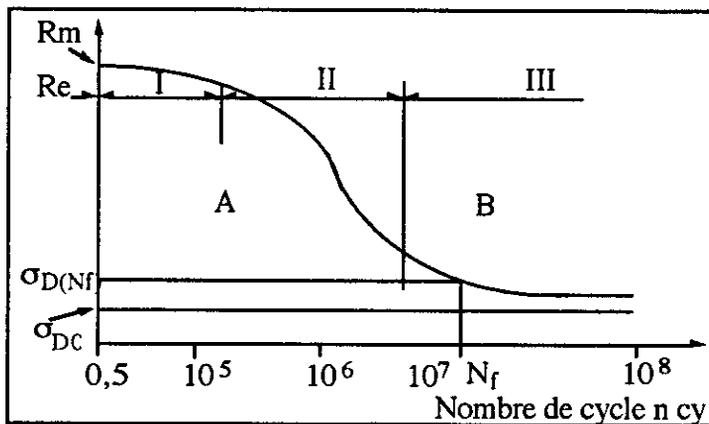


Fig. 2.85 Diagramme d'endurance

- |                                       |                                                                        |
|---------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| I : domaine plastique oligocyclique ; | $R_m$ : charge de rupture ;                                            |
| II : domaine d'endurance limitée ;    | $R_e$ : limite d'élasticité ;                                          |
| III : domaine d'endurance illimitée ; | $\sigma_{D0}$ : limite de fatigue ;                                    |
| A : domaine de non-rupture probable ; | $\sigma_{D(N_f)}$ : limite d'endurance conventionnelle à $N_f$ cycles. |
| B : domaine de rupture probable.      |                                                                        |

Pour limiter au maximum les efforts de la fatigue sur le piston, on veillera à éviter les concentrations de contraintes (lors du dessin, éviter les angles vifs) et les contraintes résiduelles dans la pièce (dues au traitement thermique par exemple).

## 7.2. Segments

Le segment est un anneau élastique formant joint, coulissant entre le piston et le cylindre.

### 7.2.1. Rôle des segments

Le segment doit, dans des conditions de travail difficiles supporter des contraintes d'origine mécanique et thermique, tout en assurant deux fonctions importantes pour le moteur, à savoir :

- Interdire à l'air en cours de compression, puis aux gaz de combustion en cours de détente, l'accès du carter ;
- Contrôler le débit d'huile nécessaire remontant vers la tête du piston.

Pour assurer le bon fonctionnement du moteur, les segments doivent obéir à un certain nombre de paramètres :

- Résistance du matériau à l'égard des flexions alternées à haute température ;
- Conservation des propriétés mécaniques dans le temps et à chaud ;
- Aptitude au frottement à sec ;
- Forme géométrique des faces d'appui ;
- Formes géométriques et natures des surfaces en regard ;
- Jeux : segment - piston - cylindre ;
- Lubrification ;
- Evacuation des calories.

### 7.2.2. Différents types de segments

#### A. Segment d'étanchéité

La mission d'étanchéité aux gaz de combustion est assurée (fig. 2.86. a) :

- D'une part, par appui de la face externe du segment contre le cylindre ;
- D'autre part, par appui de la face inférieure du segment contre le piston.

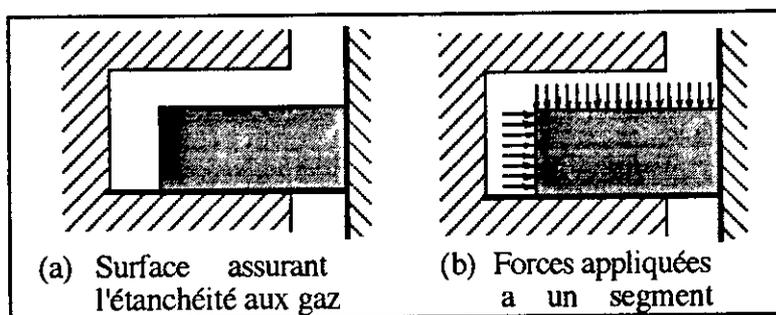


Fig. 2.86 Fonction d'un segment

Tout défaut d'étanchéité segment-cylindre, laisse libre un passage plus ou moins abondant pour les gaz de combustion, ce qui fait disparaître la couche d'huile lubrifiante et provoque un rapide et intense grippage.

Selon le type de coupe nécessaire au montage du segment dans les gorges du piston on note :

- Les segments à coupe en sifflet ;
- Les segments à coupe en Z ;
- Les segments à coupe droite (les plus utilisés).

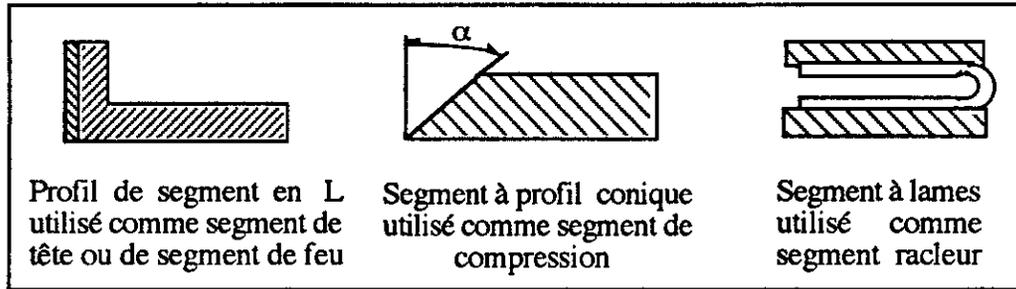


Fig. 2.87 Profil de segments.

Pour obtenir une tension tangentielle suffisante pour assurer l'application du segment sur le cylindre, il est bon que l'ouverture du segment à l'état libre soit comprise entre  $0,1 D$  et  $0,15 D$ .

#### A.1. Etat thermique des segments :

Les températures respectives du segment, du piston et de la chemise varient d'un type de moteur à l'autre en fonction de multiples facteurs :

Refroidissement ou non du piston, températures de l'eau de refroidissement, de l'air admis, de l'huile, des gaz d'échappement, turbulence, importance du jeu à la coupe des segments en place.

Pour assurer une bonne transmission thermique entre piston et segment, il est bon que l'épaisseur radiale du segment soit de l'ordre de  $0,04 D$ .

#### A.2. Contact segment-Chemise :

La pression réelle au contact segment - chemise est fonction de la valeur de la concordance géométrique. Si cette dernière n'est pas correcte, les pressions réelles atteintes sont suffisantes pour rompre le film d'huile et provoquer le frottement à sec.

Pour éviter les incidents qui conduisent rapidement au grippage généralisé, il faut donc :

- Améliorer la résistance mécanique de l'huile (viscosité dynamique, volatilité) ;
- Diminuer les températures ;
- Améliorer les formes ;
- Augmenter le point de fusion du matériau présent sur la face externe du segment par application d'un revêtement à point de fusion plus élevé (avec le chrome ou le molybdène).

#### A.3. Résistance mécanique des segments :

Les ruptures les plus classiques se produisent :

- A l'opposé de la coupe, conséquence d'une ouverture exagérée ou maladroite lors de la mise en place du segment ;
- A quelques cm de la coupe, spécifiques des moteurs à régimes variables, dues à une insuffisance d'ouverture à la coupe ;
- Dans le corps même du segment, surtout s'il est chromé, dans des conditions mécaniques initiant des fissures radiales.

## B. Segment racleur d'huile

Le segment racleur a pour rôle de racler l'huile projetée sur l'intérieur de la chemise à partir du maneton. Cette dernière doit être évacuée vers le carter au travers de la paroi du piston par l'intermédiaire de trous.

### B.1. Types de segments racleurs :

Parmi les segments utilisés on cite :

- Les segments à simple étage ;
- Les segments à double étage ;
- Les segments à expandeur (ressort).

### 7.2.3. Matériaux

La fonte est le matériau le plus utilisé dans la fabrication des segments. Ce choix apparemment mauvais, vu les très mauvaises qualités élastiques de la fonte, est motivé par

- L'aptitude au frottement en lubrification ;
- La stabilité de la structure à chaud ;
- Le prix de revient faible.

La composition de la fonte pour segments de moteurs Diesel est : 3,5% C + (1,5 à 3) % Si + (0,4 à 1,2) % Mn + de faibles teneurs de Ni, Cr, Mo, Va, ...

Les segments sont : soit coulés en anneaux unitaires, soit tronçonnés dans des tubes coulés.

### 7.2.4. Dimensionnement des segments

#### A. Dimensionnement

*Moteur essence :*

- Epaisseur radiale :  $e = 0,045 D$
- Hauteur du segment :  $h = (2 \text{ à } 2,5) \text{ mm}$ , pour un segment compresseur et 5 mm pour un racleur.
- Jeu : 1er segment :  $J_1 = (0,005 \text{ à } 0,006) D$   
Les autres segments  $J = 0,8 \text{ mm}$  et 1 mm pour le segment racleur.

*Moteur Diesel :*

- Epaisseur radiale :  $e = (0,038 \text{ à } 0,04) D$
- Hauteur du segment :  $h = (0,02 \text{ à } 0,025) D$ , avec un  $h$  mini de 2 mm, pour le segment racleur plus 2 mm
- Jeu : 1er segment :  $J_1 = (0,005 \text{ à } 0,0075) D$   
Les autres segments  $J = 0,003 D$ , pour le racleur doubler le jeu.

#### B. Contraintes et déformations

Vérification du segment à la pression sur le cylindre : la pression exercée par le segment sur le cylindre est donnée par :

$$p = \frac{\Delta \cdot e^3 \cdot E}{36 \pi \cdot R^4} \leq P_{adm} \quad (2.164)$$

avec :

$e$  : Epaisseur radiale [mm] ;

$R = D / 2$  [mm] ;

$E$  : Module d'élasticité du matériau constituant le segment [daN / mm<sup>2</sup>] ;

$P_{adm}$  : pression admissible = 1, 2 [daN / mm<sup>2</sup>] ;

$\Delta = (D/10 \text{ à } 1,5 D/10)$  [mm].

La contrainte en extension agissant sur la fibre externe du segment lors de son déplacement est donnée par :

$$\sigma_{max} = \frac{\Delta \cdot E \cdot e}{3 \pi R^2} \leq \sigma_{adm} \quad (2.165)$$

La valeur de la contrainte admissible, varie de 22 à 23 [daN / mm<sup>2</sup>] pour les fontes.

Lors de la mise en place du segment dans sa gorge les fibres internes sont soumises à une contrainte d'extension dont la valeur maximale vaut :

$$\sigma_{cmax} = \left( \frac{6D}{e} + 1 \right) \frac{F}{h \cdot e} \quad (2.166)$$

avec  $F$  l'effort appliqué par la pince à segment sur ce dernier.

### 7.3. Axe de piston

L'axe de piston est un tube épais liant le piston à la bielle. Il est placé à travers le pied de bielle :

– Dans le cas des moteurs à essence, généralement monté serré dans le pied de bielle et libre dans le piston. Cette solution est possible car les efforts nés de la combustion sont faibles.

– Dans le cas des Diesels, toujours montés libres dans les deux logements, afin de ne pas provoquer un déplacement forcé de l'axe de piston dans les logements soumis à charge importante en condition de lubrification précaire. Dans ce cas l'axe est limité en translation latérale par deux circlips prenant appuis dans des rainures ménagées dans les bossages.

Les matériaux employés pour les axes de pistons sont les aciers, dont les deux principaux sont : 15 NC D12 et 16 NC6. Le traitement thermique employé pour les axes de pistons est la cémentation.

L'axe du piston permet de transmettre à la bielle l'effort dû aux gaz reçus par le piston. Il est donc soumis :

- aux efforts dus à la pression des gaz ;
- aux efforts d'inertie du piston.

De ce fait l'axe doit répondre à plusieurs critères tels que :

- critère de résistance mécanique ;
- critère d'état de surface (pression unitaire élevée) ;

- critère de pression de contact ;
- critère d'usure due au glissement relatif des éléments : piston / axe.

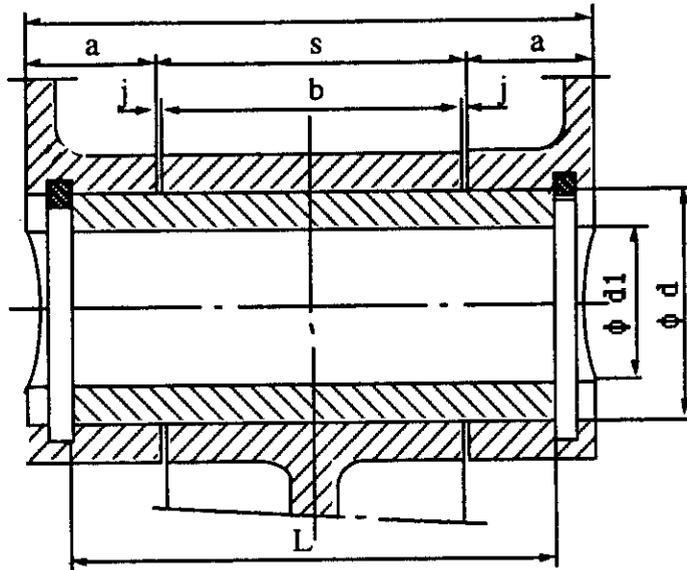


Fig. 2.88 Axe de piston monté

L'axe est soumis à la flexion et se calcule comme les poutres classiques de la résistance des matériaux.

### 7.3.1. Dimensionnement de l'axe

#### A. Dimensions générales

- Pour le moteur à essence :

$$0,25 \leq d / D \leq 0,30$$

- Pour le moteur Diesel :

$$0,35 \leq d / D \leq 0,40$$

- La longueur de la portée dans le pied de bielle  $b$  est de l'ordre de :  $0,35$  à  $0,40 D$
- Le jeu  $j$  entre le pied de bielle et les bossages de piston est estimé entre  $1$  à  $3$  mm.

#### B. Vérification aux contraintes et déformations

##### B.1. Flèche maximale :

La flèche maximale subie par l'axe est donnée par :

$$f = 0,053 \frac{F \cdot L \cdot (L + b)^2}{E(d^4 - d1^4)} \leq f_{adm} \quad (2.167)$$

avec :

- $F$  : effort qu'exerce le piston sur l'axe au voisinage du PMH ;
- $d$  : diamètre extérieur de l'axe ;
- $d1$  : diamètre intérieur de l'axe ;
- $b$  : portée dans le pied de bielle.

La flèche admissible étant de  $3,8 \cdot 10^{-4} \cdot D$  pour le moteur à essence et  $1,4 \cdot 10^{-4} \cdot D$  pour le Diesel.

**B.2. Ovalisation :**

L'ovalisation maximale de l'axe est donnée par :

$$\delta = \frac{1}{15} \frac{F \cdot d^3}{E \cdot L(d-d_1)^3} \leq \delta_{adm} \quad (2.168)$$

La valeur admissible de l'ovalisation de l'axe est :  $\delta_{adm} = (1,25 \cdot 10^{-4} D) + 0,0125$ .

La contrainte d'ovalisation est : (contrainte admissible d'ovalisation = [14 daN / mm<sup>2</sup>]).

$$\sigma_{\delta} = \frac{F \cdot d}{L(d-d_1)^2} \leq \sigma_{\delta adm} \quad (2.169)$$

La contrainte admissible d'ovalisation est de : [14 daN / mm<sup>2</sup>].

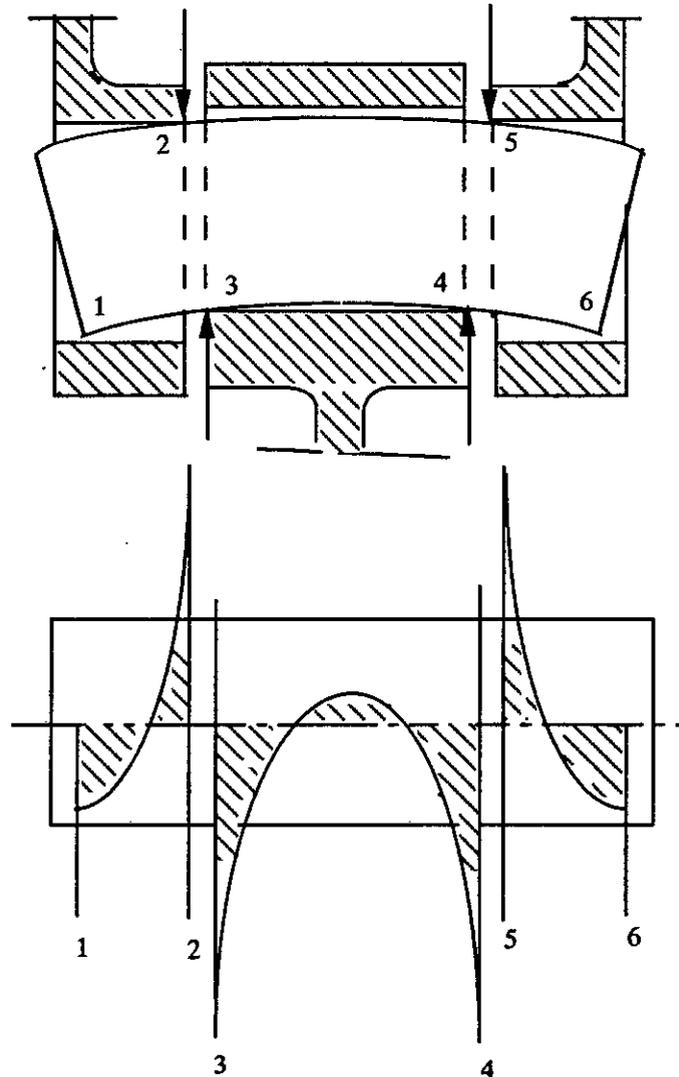


Fig. 2.89 Efforts auxquels est soumis un axe de piston en flexion

**B.3. Vérification de l'axe à la pression spécifique dans les bossages :**

$$p_s = \frac{F}{d(L-S)} \leq p_{sadm} \quad (2.170)$$

La pression spécifique admissible est de : 45 [N / mm<sup>2</sup>] pour les moteurs à essence et 40 [N / mm<sup>2</sup>] pour les moteurs Diesel.

**B.4. Contrainte de flexion :**

La contrainte de flexion maximale est donnée par :

$$\sigma_{fmax} = \frac{16 F \left( \frac{S}{2} - \frac{b}{4} \right) \cdot d}{\pi (d^4 - d_1^4)} \leq \sigma_{fadm} \quad (2.171)$$

Cette contrainte doit être inférieure à la valeur admissible, soit 20 [daN / mm<sup>2</sup>].

**B.5. Contrainte idéale :**

La contrainte idéale tient compte de la contrainte de flexion et de la contrainte d'ovalisation, elle donnée par :

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_f^2 + \sigma_b^2}$$

La contrainte admissible qui limite la contrainte idéale est fixée à 22 [daN / mm<sup>2</sup>].

**C. Critères d'usure et vitesse de glissement**

D'après HUNT, la valeur de la pression limite acceptable pour le graissage est lié à la vitesse moyenne de glissement  $C_g$  de l'axe par rapport au piston.

$$C_g = \alpha \cdot d \cdot N \quad (2.172)$$

avec :

- $\alpha$  : oscillations en rad/cycle ;
- $d$  : diamètre de l'axe [m] ;
- $N$  : vitesse de rotation du vilebrequin [tr/s].

L'abaque de HUNT permet de fixer en fonction de la vitesse de glissement, les limites des pressions maximales admissibles dans les bossages des pistons.

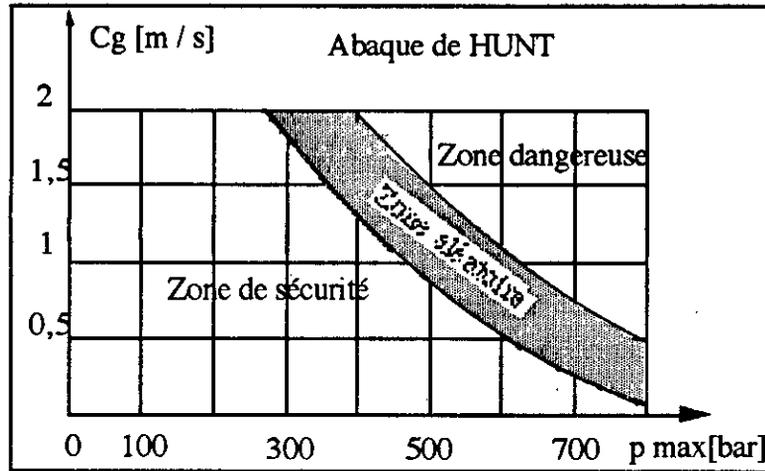


Fig. 2.90 Limites des pressions maximales admissibles dans les bossages en fonction de la vitesse de glissement

## 7.4. Bielle

Dans les machines à pistons, la bielle transforme le mouvement rectiligne alternatif du piston en un mouvement rotatif continu de la manivelle.

En général plus longue est la bielle mieux elle transmet la force qui lui est appliquée, mais plus élevée est la vitesse de rotation du moteur plus légère, soit plus courte, doit être la bielle afin de limiter l'amplitude des efforts d'inertie alternatifs et rotatifs.

### 7.4.1. Construction

La bielle est constituée de 3 parties distinctes :

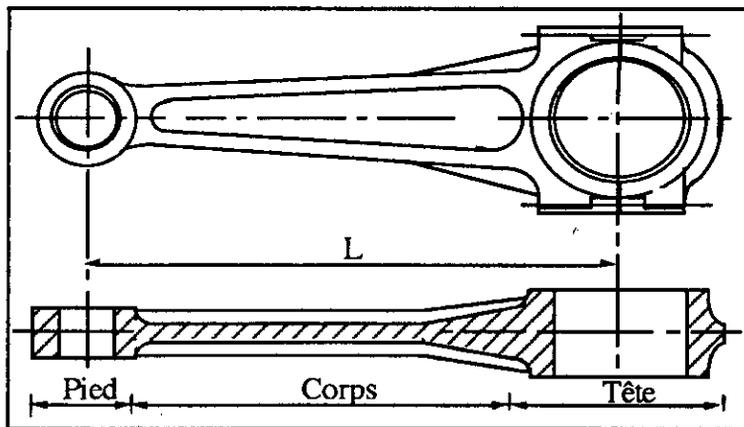


Fig. 2.91 Bielle

– *Le corps de bielle* : Il doit être suffisamment rigide pour résister au flambement, et aussi léger que possible pour diminuer les effets d'inertie.

– *Le pied de bielle* : Il doit être conçu pour résister aux efforts de traction périodiques dues effets d'inertie du piston en cours de phase d'admission.

– *La tête de bielle* : L'assemblage tête de bielle-maneton est soumis à des efforts dépendant :

- . des forces agissant selon l'axe du cylindre ;
- . de l'obliquité de la bielle ;
- . des efforts d'inertie centrifuge de la masse rotative.

#### 7.4.2. Matériaux

Les bielles sont pratiquement obtenues par estampage d'acier mi-dur de nuance X C38 traité pour 80 à 90 [daN / mm<sup>2</sup>], ou encore d'acier au Ni-Cr de nuance 35 NCD6 traité pour 90 à 100 [daN / mm<sup>2</sup>]. La fonte à graphite sphéroïdale est aussi très employée.

#### 7.4.3. Dimensionnement

##### A. Dimensions générales

La première dimension à déterminer est l'entraxe de la bielle, qui conditionne sa longueur et son poids. On définit pour cela le coefficient  $\lambda = L / R$  (L étant l'entraxe et R le rayon de manivelle). Une augmentation de  $\lambda$  se traduit par :

- Une augmentation du poids de la bielle, d'où une augmentation de l'inertie de l'équipage mobile et diminution du régime maximum de rotation.
- Une diminution des efforts normaux sur le cylindre, d'où une meilleure transmission des efforts au vilebrequin, et inertie. Les constructeurs se limitent en général au domaine:  $3,1 \geq \lambda \leq 4,5$ .

Le dimensionnement du corps de bielle est très délicat par les impératifs discordant que doit assumer cette dernière. Le rapport de la section droite du milieu de bielle au carré de l'alésage du cylindre moteur varie comme suit :

$$S/D^2 = 0,020 \text{ à } 0,025 \text{ dans le cas de moteur à essence ;}$$

$$S/D^2 = 0,040 \text{ à } 0,050 \text{ dans le cas de moteur Diesel.}$$

Les dimensions de la section droite d'une bielle pour moteur Diesel sont :

$$\text{Hauteur } h = (0,3 \text{ à } 0,35) D ;$$

$$\text{Largeur } a = (0,22 \text{ à } 0,37) D.$$

Le dimensionnement du pied de bielle est essentiellement fonction des dimensions de l'axe de piston, ou encore des pressions exercées sur l'assemblage axe de piston-bielle.

Le diamètre de l'axe de piston est d'environ 0,25 D dans le cas de moteurs à essence, et de 0,4 D dans le cas de moteurs Diesel. La longueur de la portée dans le pied de bielle est de l'ordre de 0,35 à 0,40 D.

Le diamètre de la tête de bielle est tributaire du diamètre du maneton ainsi que de l'épaisseur du coussinet.

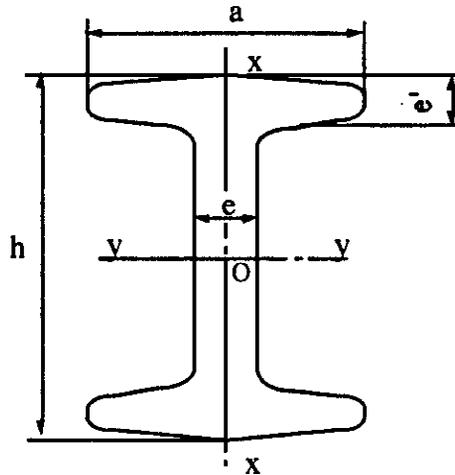


Fig. 2.92 Section de bielle

## B. Vérification aux contraintes et déformations :

### B.1. Corps de bielle :

La bielle est soumise à la traction en cours d'admission, à la compression au cours de la compression, détente et échappement ; elle est également soumise à des effets de flexion sous des forces d'inertie et dans des cas limite, si la bielle est rigide, on peut lui craindre le flambage.

#### a) Traction - compression :

La contrainte de compression (dont l'effet est plus en vue) est donnée par :

$$\sigma_{c\max} = \frac{F_{\max}}{S} \quad (2.173)$$

avec :

$F_{\max}$  : force maximale produite par les gaz en détente:  $F_{\max} = P_{\text{cyl max}} \cdot \pi D^2$   
 $S$  : section droite du corps de bielle :  $S = e(2a + h) - 2e^2$

#### b) Flexion :

Les contraintes d'inertie subies par la bielle sont dues au seul corps de bielle, les inerties du pied et de la tête de bielle interviennent respectivement sur l'axe de piston et sur le maneton.

Soit un point m quelconque situé à une distance  $x$  du pied de bielle ayant une accélération égale à  $d^2\varphi/dt^2 \cdot x$ , l'effort d'inertie pour une section constante, maximale lorsque la bielle est perpendiculaire à la manivelle est alors :

$$Q = 0,5 S \cdot L \cdot \rho \cdot R \omega^2$$

avec :

$Q$  : l'effort d'inertie ;  
 $L$  : la longueur de bielle ;  
 $R$  : le rayon de manivelle ;  
 $\rho$  : la masse volumique de la bielle ;  
 $\omega$  : la vitesse angulaire.

Le moment de flexion en chaque point vaut ainsi :

$$M_f = \frac{Q}{3}x - Q\left(\frac{x}{L}\right)^2 \cdot \frac{x}{3} = \frac{Q}{3}\left(x - \frac{x^3}{L^2}\right)$$

dont la valeur maximale a lieu en un point d'abscisse  $X_{\max}$  tel que :  $dM_f / dx = 0$  soit :

$$X_{\max} = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

Cependant , vu que  $S$  n'est en réalité pas constante, on adopte  $X_{\max} = 2L / 3$ . Le moment fléchissant maximal devient ainsi :

$$M_{f_{\max}} = \frac{10}{81} \cdot Q \cdot L$$

D'où la contrainte maximale de flexion agissant sur le corps de bielle :

$$\sigma_{f_{\max}} = \frac{M_{f_{\max}}}{I_{y/v}} \leq \sigma_{f_{\text{adm}}} \quad (2.174)$$

c) *Flambage* :

Le corps de bielle doit dans les conditions les plus sévères résister au flambement tant dans le plan d'encastrement que dans le plan d'oscillation.

Le corps de bielle, en tant que poutre colonne est tributaire de la formule de Rankine, dont il a contrainte admissible maximale à la compression est donnée par :

$$\sigma_{a_{\max}} = \frac{F_c}{S_{\text{droite}}} \cdot \left(1 + k \left(\frac{l}{\rho}\right)^2\right) \quad (2.175)$$

où :

$F_c$  : effort critique ;

$S$  : aire de la section droite considérée

$l$  : longueur libre voilement ;

$\rho$  : rayon de giration de la section considérée:  $\rho_x = \sqrt{(I_{xx} / S)}$  et  $\rho_y = \sqrt{(I_{yy} / S)}$  ;

$k$  : coefficient dépendant du type de fixation des extrémités :  $k = Re / \pi^2 \cdot E$  ;

$k = 4$  dans le plan d'encastrement ,

$k = 16$  dans le plan d'oscillation.

Il faut vérifier que l'effort normal maximal dans la section considérée reste inférieur à l'effort critique, et cela dans les deux plans  $xx$  et  $yy$ .

d) *Déformée du corps de bielle*

Pour avoir une approximation correcte de la flèche de la bielle, il faudrait découper le corps en 5 à 10 tronçons (selon la précision souhaitée), rechercher l'effort tranchant en chaque section, et en déduire l'effort sur chaque élément du corps de bielle.

Il suffit alors de rechercher les déformations causées par les efforts pour connaître la flèche.

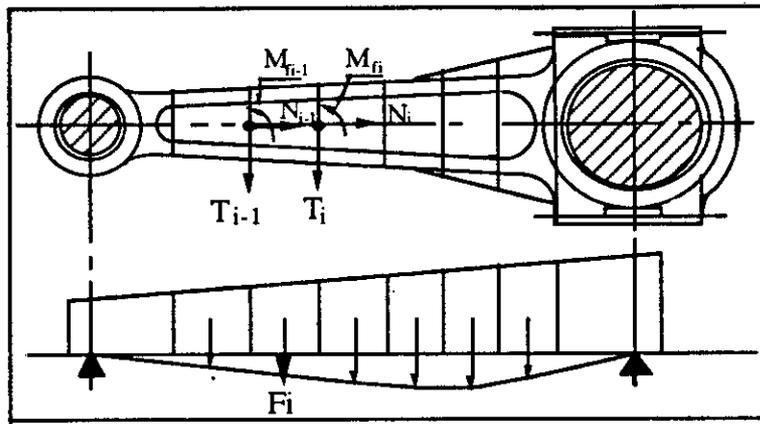


Fig.2.93 Flèche de la bielle

e) *Vibration transversales de la bielle*

On considère la bielle comme un barreau homogène articulé à ses extrémités. Au premier mode, la fréquence de vibration est :

$$f = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E \cdot I}{m \cdot l^3}} \tag{2.176}$$

avec :

- I : moment quadratique le plus faible de la bielle ;
- m : masse de la bielle ;
- l : longueur de la bielle.

La fréquence des efforts périodiques du moteur est de :

$$f_m = \frac{N}{2 \cdot 60} \quad N \text{ étant la vitesse de rotation du moteur.}$$

Le rang du premier harmonique pouvant être concerné est :  $f / f_m$  ; plus le rang de l'harmonique se rapproche de 1 est plus il y a risque d'avoir des amplitudes importantes.

**B.2. Pied de bielle**

Les efforts d'inertie provoquent au sein du pied de bielle des sollicitations composés de flexion et de traction.

a) *Vérification du pied de bielle à la traction*

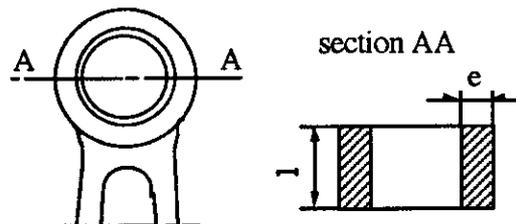


Fig. 2.94 Pied de bielle

La section AA est soumise à la traction due aux forces d'inertie de la masse du piston. Soit  $F_i \max$  l'effort maximum dû aux inerties, la contrainte de traction est donnée par :

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{i \max}}{S} \leq \sigma_a \quad (2.177)$$

avec :

S : la section AA :  $S = 2 \cdot e \cdot l$

Connaissant la contrainte admissible à la traction, on peut déterminer l'épaisseur e, en se fixant l.

Si l'axe du piston est monté serré dans le pied de bielle, cet emmanchement forcé entraîne une contrainte de traction qui se calcule en appliquant les lois de la mécanique des milieux continus. Soit p la pression de serrage on a :

$$p = \frac{S}{D} \left( \frac{Q_a - 0,3}{E_{\text{axe}}} + \frac{Q_b + 0,3}{E_{\text{bielle}}} \right)^{-1}$$

avec :

$E_{\text{bielle}}$  : module d'élasticité de la bielle ;  
 $E_{\text{axe}}$  : module d'élasticité de l'axe.

et

$$Q_a = \frac{d^2 + d_1^2}{d^2 - d_1^2} \quad \text{et} \quad Q_b = \frac{\phi^2 + d^2}{\phi^2 - d^2}$$

avec :

d : diamètre extérieur de l'axe  
 d1 : diamètre intérieur de l'axe  
 $\phi$  : diamètre extérieur du pied de bielle

d'où la contrainte dans la section, dont le serrage s'accroît sous l'effet de la dilatation.

$$\sigma_s = \frac{p}{2} \cdot \frac{d}{e} \quad (2.178)$$

### b) Vérification du pied de bielle à la flexion

La partie importante du pied de bielle est la surface d'appui de l'axe. En effet c'est cette partie qui reçoit l'effort Y2B (décomposition de l'effort FB suivant l'axe Y2). Pour le calcul des contraintes on supposera que cet effort est réparti régulièrement sur un secteur de 90°, selon le schéma suivant.

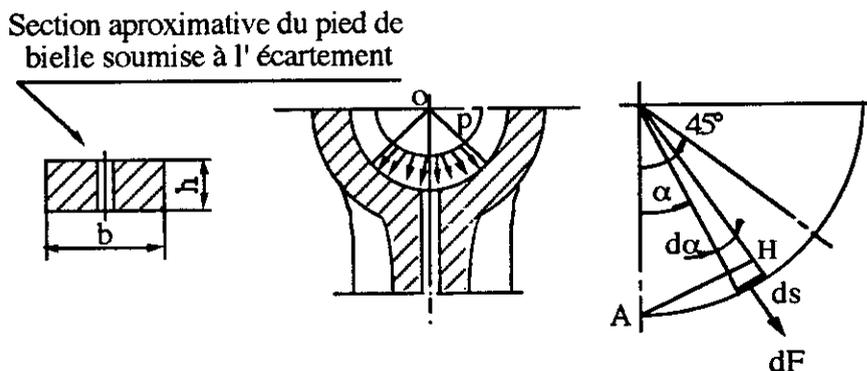


Fig. 2.95 Répartition des efforts dans le pied de bielle

Sur un élément de circonférence  $ds$ , nous avons une force  $df$  telle que :

$$df = p \cdot ds = p \cdot r \cdot d\alpha$$

Le moment fléchissant provoqué par cet effort au point A est :

$$dM_f = AH \cdot df = r \cdot \sin\alpha \cdot p \cdot r \cdot d\alpha$$

L'élément sur lequel est réparti l'effort est :

$$S = (2 \cdot \pi \cdot r) / 4 = \pi r / 2$$

donc la pression unitaire relative à cet élément est donnée par :

$$p = F_{\max} / S = 2 F_{\max} / \pi r$$

comme  $\alpha$  max est de  $45^\circ$  on aura un moment fléchissant de :

$$M_f = \frac{2F_{\max}}{\pi} \cdot r \int_0^{45^\circ} \sin\alpha \cdot d\alpha$$

$$M_f = \frac{2F_{\max}}{\pi} \cdot r \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

La contrainte de flexion est finalement :

$$\sigma_f = \frac{M_f}{I_{xx}/v}$$

La section soumise à l'écartement est approximativement :  $b \cdot h$  tel que :

$$b = 0,75 \cdot d_1 \text{ et } h = e$$

où :  $d_1$  : diamètre intérieur du pied de bielle ;  
 $e$  : épaisseur du pied de bielle.

d'où le moment quadratique axial :

$$I_{xx} = \frac{bh^3}{12} \text{ et } v = \frac{h}{2}$$

Finalement la contrainte de flexion maximale est :

$$\sigma_{f\max} = \frac{12 F_{\max} \cdot r}{\pi \cdot bh^2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad (2.179)$$

Le pied de bielle est vérifié à la contrainte résultante, qui est obtenue par composition algébrique des contraintes de flexion et de traction.

$$\sigma_{r\max} = \sigma_{t\max} + \sigma_{f\max}$$

### B.3. Tête de bielle

La tête de bielle doit être rigide pour que sa déformation soit inférieure à l'épaisseur du film d'huile. Le chapeau de bielle a une configuration qui ne permet pas un calcul simple et rigoureux de ses déformations ; deux possibilités se présentent :

– Faire des hypothèses très simplifiées (considérer le chapeau de bielle comme une poutre courbe sur appuis simple avec un effort réparti sur un arc de 90°) et calculer les contraintes dans le chapeau de bielle, de manière identique à celle utilisée pour le pied de bielle.

– Faire un calcul par éléments finis, d'où la mise en évidence de la position la plus défavorable vis à vis des déformations. Nous choisirons la deuxième possibilité, en utilisant le logiciel Accord.2D.

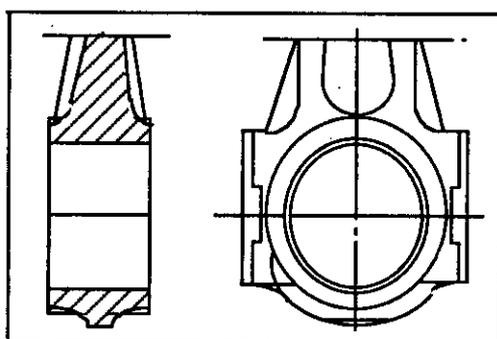


Fig. 2.96 Chapeau de tête de bielle

### B.4. Coussinet de tête de bielle

a) Pression maximale supportée par les coussinets :

$$P_{\max} = \frac{F_{\max}}{L \cdot D} \leq P_{\text{adm}} \quad (2.180)$$

avec : L : la longueur du coussinet = 0,43 . dm

Pour obtenir la pression moyenne sur le coussinet, il suffit de mettre dans (2.229)  $F_{\text{moy}}$  à la place de  $F_{\max}$ , qui s'obtient en planimétrant sur un cycle l'effort sur le maneton.

b) Vitesse de glissement moyenne

$$V_g = \frac{N \cdot \pi \cdot d_m}{60} \quad (2.181)$$

où :  $d_m$  est le diamètre du maneton.

c) Facteur d'usure

$$U = \sqrt{P_{\text{moy}} \cdot V_g^3} \quad (2.182)$$

avec :  $P_{\text{moy}}$  : la pression moyenne

### 7.4.4. Fixation du chapeau de tête de bielle

La fixation du chapeau de tête de bielle peut être réalisée par vis, par goujons, ou par boulons. Cette dernière solution la est plus couramment utilisée à cause des facilités d'exécution qu'elle présente.

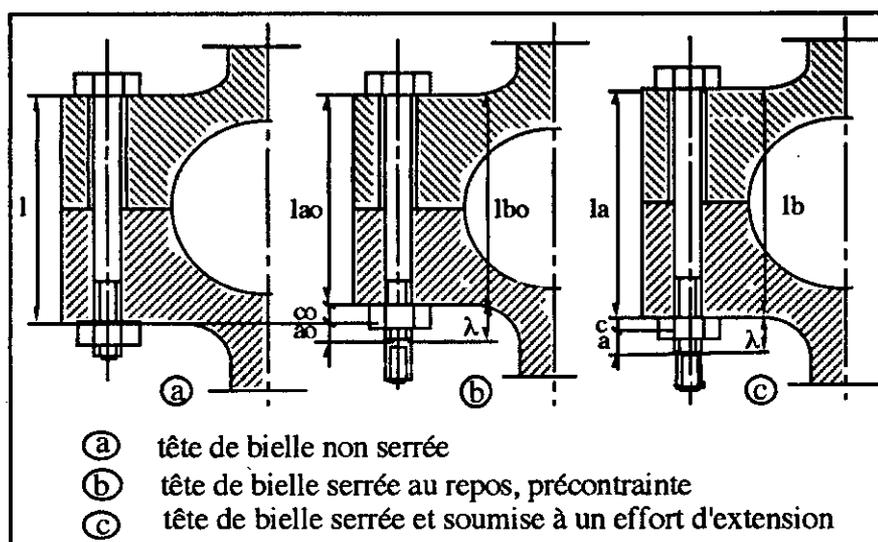


Fig. 2.97 Fixation par boulon du chapeau de tête de bielle

Les boulons d'assemblage jouent deux rôles :

- Empêcher le décollement du chapeau au cours du cycle ;
- Assurer le maintien du coussinet dans son logement en réalisant une compression tangentielle.

#### a) Calcul de l'effort de serrage initial $F_0$

Sous l'effet du serrage initial  $F_0$  (fig. 2.139 b):

- L'assemblage subit une contraction  $l_0$  tel que :

$$l_0 = \frac{F_0}{K_a}$$

avec :  $K_a$  la raideur de l'assemblage donnée par :

$$K_a = \frac{E_a \cdot S_a}{l_a}$$

où :

- $E_a$  : module d'élasticité de l'assemblage ;
- $S_a$  : section de l'assemblage ;
- $l_a$  : longueur de l'assemblage.

- Le boulon subit un allongement  $a_0$  tel que :

$$a_0 = \frac{F_0}{K_b}$$

avec :  $K_b$  la raideur du boulon donnée par :

$$K_b = \frac{E_b \cdot S_b}{l_a}$$

$E_b$  : module d'élasticité du boulon ;  
 $S_b$  : section du boulon.

Si à l'état d'équilibre, on applique un effort extérieur  $F$  tendant à séparer les éléments, on notera une décompression dans l'assemblage et une sur extension dans le boulon (fig. 2 97 c).

En effet, la longueur  $l_{a0}$  de l'assemblage comprimé passe de :  $l - c_0$  à  $l_a = l - c$  avec  $c < c_0$ . La longueur active  $l_{b0}$  du boulon quand à elle devient :  $(l + a) - \lambda$  avec  $a > a_0$ .

L'effort  $F$  se répartit en  $F_a$  et  $F_b$  sollicitant respectivement l'assemblage et le boulon, de telle manière que les déformations respectives soient données par :

$$c = \frac{F_0 - F_a}{K_a} \quad \text{avec } c > 0 \quad \text{ce qui implique } F_0 > F_a$$

et

$$a = \frac{F_0 + F_b}{K_b}$$

avec :

$$F_a = F \left( \frac{-E_b \cdot S_b}{E_b \cdot S_b + E_a \cdot S_a} + 1 \right)$$

Ecrivons la conservation des déformations :

$$a_0 + c_0 = a + c = \lambda$$

On aura ainsi :

$$\frac{F_0}{K_a} + \frac{F_0}{K_b} = \frac{F_0 - F_a}{K_a} + \frac{F_0 + F_b}{K_b} = \frac{F_0}{K_a} - \frac{F_a}{K_a} + \frac{F_0}{K_b} + \frac{F_b}{K_b}$$

ou encore :

$$\frac{F_a}{K_a} = \frac{F_b}{K_b}$$

On déduit que l'effort auxiliaire  $F$  se répartit entre le boulons sous tension et l'assemblage comprimé, de façon proportionnelle à leurs facteurs de raideur, dans la mesure où le serrage initial soit supérieur à la force additionnelle agissant sur l'assemblage.

$$F_0 > F \frac{K_a}{K_a + K_b}$$

Pour soulager un boulon de tête de bielle, il faut en réduire la section et en accroître la longueur. Cette démonstration peut être représentée par un diagramme (fig. 2.98) mettant en valeur l'intérêt d'un  $K_a$  élevé pour obtenir un allongement faible sous l'effet de  $F$  ( $a_0' < a_0$ ).

Donc la limite inférieure de  $S_b$  est celle qui permet d'observer  $F_0 > F_a$  tout en respectant les valeurs limites des contraintes de fatigue :  $R_e \cdot S_b$ .

**B.1. Vérification du coude à la pression maximale des gaz de combustion**

Au PMH, l'effort  $Y_{pmax}$  est transmis par la bielle au coude en A1, il se traduit sur les paliers adjacents par deux réactions en O1 et O2 :  $R_{p1} = R_{p2} = R_p$

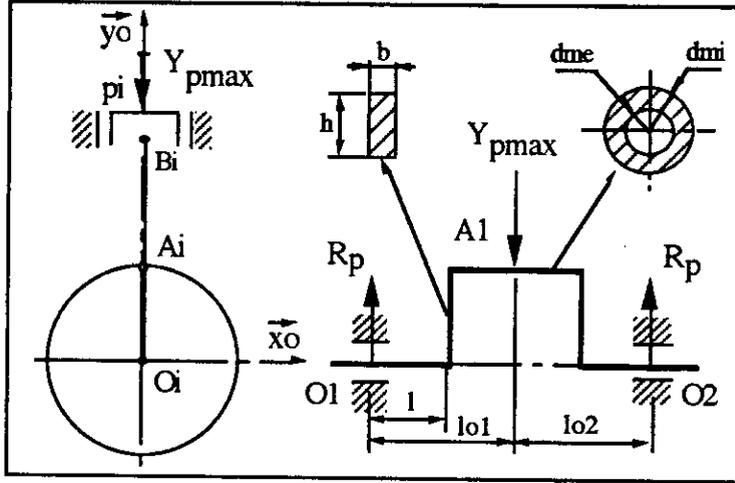


Fig.2.99 Coude soumis à l'effort maximum des gaz de combustion

Sous l'effet de ces forces, les éléments du coude seront sollicités comme suit :

**a) Maneton :**

Le maneton est soumis à une flexion dans le plan du coude, de moment :

$$\vec{M}_{fmax} = (R_p \cdot l_{o1}) \vec{x}_0$$

La contrainte de flexion dans le maneton est :

$$\sigma_{fmax} = \frac{M_{fmax}}{I_v} \leq \sigma_{fadm} \tag{2.185}$$

avec :

$$I_v = \frac{\pi (d_{me}^4 - d_{mi}^4)}{32 d_{me}}$$

ou :

$d_{me}$  : diamètre extérieur du maneton ;  
 $d_{mi}$  : diamètre intérieur du maneton.

**b) Bras :**

L'effort maximale du aux gaz de combustion sollicite la section minimale du bras à la compression et à la flexion.

. Contrainte due à la compression :

$$\sigma_{Nb} = \frac{R_p}{S_b} \leq \sigma_{adm} \tag{2.186}$$

$S_b$  : section minimale du bras ramenée à une surface rectangulaire (b.h) de même aire.

portée :  $l_{pt} = 0,23 \cdot D$  ;  
 largeur :  $l_t = 0,31 \cdot D$  ;  
 arrondis :  $r_t = (0,03 \text{ à } 0,05) \cdot D$ .

c) *Bras* :

largeur :  $l_b = 0,20 \cdot D$ .

### 7.5.2.2. Vilebrequin de moteur Diesel

a) *Maneton* :

diamètre :  $0,65 \cdot D < d_m < 0,75 \cdot D$   
 largeur  $L_m = 0,55 \cdot D$  ;  
 arrondis :  $r_m = (0,03 \text{ à } 0,05) \cdot D$ .

b) *Tourillon* :

diamètre :  $d_t = 0,75 \cdot D$  ;  
 largeur :  $l_t = 0,35 \cdot D$  ;  
 arrondis :  $r_t = (0,03 \text{ à } 0,05) \cdot D$ .

c) *Bras* :

largeur :  $l_b = 0,25 \cdot D$ .

### 7.5.3. Contraintes dans le coude du vilebrequin

#### A. Hypothèses

- Chaque coude est isolé et ininterrompu au milieu de ses paliers adjacents ;
- Le système à étudier constitue un système isostatique ;
- L'influence des différents coudes sur le coude étudié se ramène à un couple pur ;
- L'étude sera faite sur le dernier coude avant le volant, en effet le couple moteur y sera le plus important ;
- Le calcul des contraintes dans le bras seront fait dans la zone de recouvrement maneton-tourillon, où expérimentalement, les contraintes sont les plus élevées.

#### B. Efforts sur le coude

Le coude (considéré) du vilebrequin est vérifiée :

- A l'effort maximal des gaz de combustion, en effet au moment de l'explosion (PMH), le piston reçoit la pression maximum. Cette pression fait naître l'effort  $\vec{F}_p = -Y_{p_{max}} \vec{y}_0$  normal à la manivelle. La valeur  $Y_{p_{max}}$  est atteinte entre 16 et 18 % de la course du piston (voir diagramme course du piston) ;
- A l'effort tangentiel maximal, le maximum de cet effort est atteint à environ 40° après le PMH (voir variation de l'effort tangentiel) ;
- Aux efforts d'inertie (généralement négligeables pour les moteurs qui sont parfaitement équilibrés).

**d) contrainte**

La contrainte de traction dans le noyau de la vis est :

$$\sigma = (F_b + F_o) / S_b \quad (2.184)$$

Une fois la contrainte trouvée, vérifier la limite de fatigue de la vis (en traction-compression) par le diagramme de goodmann.

**7.5. Vilebrequin**

Le vilebrequin est le dernier élément de la chaîne cinématique qui transforme le déplacement rectiligne alternatif du piston en un mouvement continu de la manivelle.

En raison des régimes de rotation élevés et des efforts importants auxquels il est soumis, le vilebrequin doit présenter les caractéristiques suivants :

- une grande rigidité, ainsi qu'une grande résistance aux déformations à la torsion. Ceux-ci conditionnent les diamètres des tourillons et manetons, ainsi que la section des flasques ;
- un usinage précis, car le moindre jeu peut amener à une usure rapide et à des vibrations nuisibles ;
- une grande résistance à l'usure, ce qui conditionne la largeur des portées des tourillons ;
- une bonne régularité cyclique, ce qui permet d'assurer le confort aux usagers ;
- un équilibrage très soigné pour éviter les vibrations nuisibles.

**7.5.1. Matériaux**

Vu les caractéristiques demandées au vilebrequin, les constructeurs utilisent des aciers spéciaux forgés et traités, tel que :

- Acier au Ni-Cr-Mo de nuance 25 NCD15 ;
- Acier au Ni-Cr de nuance 35 NC6 ;
- Acier au Cr-Mo de nuance 42 CD4.

Le traitement thermique employé est souvent :

- Trempe à l'huile à 850 °C
- Revenu à 625 °C.

**7.5.2. Dimensions principales du vilebrequin**

Comme ceux du piston et bielle, les dimensions du vilebrequin sont données par des formules expérimentales rapportées au diamètre de l'alésage.

**7.5.2.1. Vilebrequins de moteurs à essence****a) Maneton :**

diamètre :  $d_m = 0,65 \cdot D$  ;  
 portée :  $l_{pm} = 0,28 \cdot D$  ;  
 largeur  $L_m = l_{pm} + 2 \cdot r_m$  ;  
 arrondis :  $r_m = (0,03 \text{ à } 0,05) \cdot D$ .

**b) Tourillon :**

diamètre :  $d_t = 0,71 \cdot D$  ;

b) Choix du boulon

Les boulons doivent être de haute résistance et élastiques, ils peuvent être choisis en acier de nuance : 35ND4 (Tr : 850°C, Rv : 200°C) qui donne :

$$\begin{aligned} R_e &= 100 \text{ [daN/mm}^2\text{]} \\ R_r &= 160 \text{ [daN/mm}^2\text{]} \end{aligned}$$

Le serrage initial peut conduire à faire travailler les boulons à une valeur voisine de 0,9 fois leur limite élastique.

La section totale des boulons de tête de bielle rapportée à la section du maneton, et d'environ 1/20 dans le cas des moteurs Diesels et 1/15 dans le cas des moteurs à essence.

Lorsque le plan de coupe bielle-chapeau est perpendiculaire à l'axe de la bielle, la longueur de la partie active du boulon (lao) est de l'ordre de 1,2 fois le diamètre du maneton. Le choix de la section du boulon Sb permet la détermination de Fa.

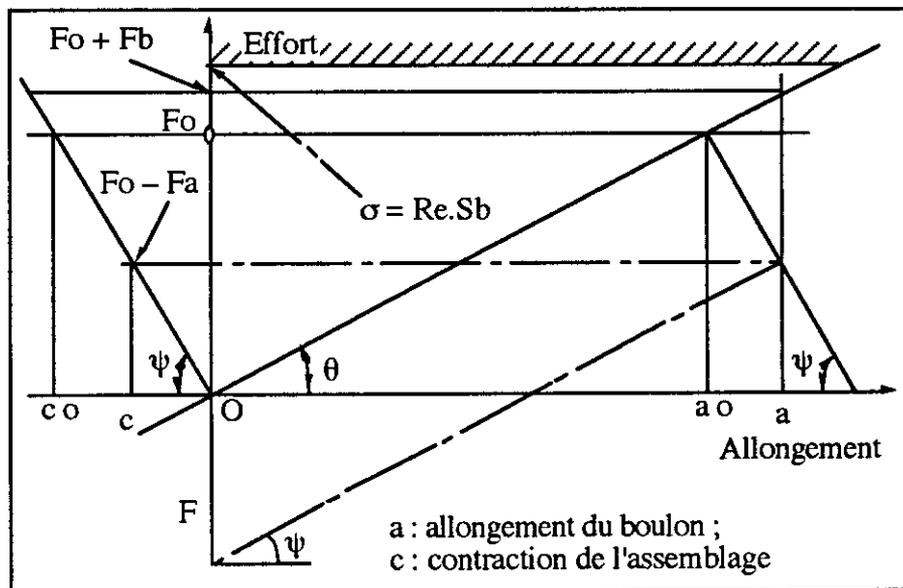


Fig. 2.98 Allongements et contraction

c) Influence de la compression du coussinet dans son logement :

La force de compression  $F_{cp}$  est donnée par :

$$F_{cp} = E . s . (\Delta L/L) \quad (2.183)$$

avec :

- E : module d'élasticité du matériau ;
- s : section du coussinet ;
- $\Delta L$  : longueur du coussinet à comprimer (de l'ordre de 0,01mm) ;
- L : longueur périphérique du coussinet =  $\pi . d_c$ .

On majore Fa de la valeur de  $F_{cp}$  et on fixe  $F_o$  supérieur à Fa. L'effort supporté par chaque boulon sera de :

$$F_b + F_o$$

. Contrainte due à la flexion :

$$\sigma_{fb} = \frac{M_{fb}}{I/v} \leq \sigma_{adm} \quad (2.187)$$

avec :

Mf b : le moment de flexion du bras, donnée par :

$$\vec{M}_{fb} = (R_p \cdot l) \vec{xO}$$

I/v : le module d'inertie qui a pour valeur

$$I/v = \frac{b^2 \cdot h}{6}$$

La fibre la plus chargée du bras est soumise à :

$$\sigma_{max b} = \sigma_{Nb} + \sigma_{ft}$$

c) *Tourillons* :

Chaque extrémité du tourillon subit :

- un moment fléchissant Mft tel que :

$$\vec{M}_{ft} = (R_p \cdot l) \vec{xO}$$

Dont la contrainte de flexion est :

$$\sigma_{ft} = \frac{M_{ft}}{I/v} \leq \sigma_{adm}$$

Le module d'inertie du tourillon est semblable à celui du maneton, il suffit de remplacer les diamètres : dme par dte et dmi par dti.

- un cisaillement de contrainte :

$$\sigma_{Tt} = \frac{R_p}{\frac{\pi}{4}(d_{te}^2 - d_{ti}^2)}$$

Les deux contraintes étant rectangulaires, la contrainte maximale est :

$$\sigma_{max t} = \sqrt{\sigma_{ft}^2 + \sigma_{Tt}^2} \quad (2.188)$$

## B.2. Vérification du coude à l'effort tangentiel maximal

L'effort maximal tangentiel de la bielle se produit à environ 40° après le PMH, il se décompose dans le repère (O,  $\vec{x1}$ ,  $\vec{y1}$ ,  $\vec{z1}$ ) en :

- Une force radiale -  $Y_{y1}$  portée par la manivelle ;
- Une force tangentielle -  $X_{x1}$  ;

Chacune de ces forces se traduit dans les paliers adjacents par un couple de réactions parallèles et équivalentes à celle d'origine, qui sont :

$$R_{o1y1} = R_{o2y1} = -\frac{Y_{y1}}{2}$$

$$R_{o1x1} = R_{o2x1} = -\frac{Y_{x1}}{2}$$

On ne tiendra pas compte de l'effort tangentiel T complémentaire, appliqué par le bras amont, qui est variable avec le nombre et la disposition des cylindres et avec l'ordre d'allumage.

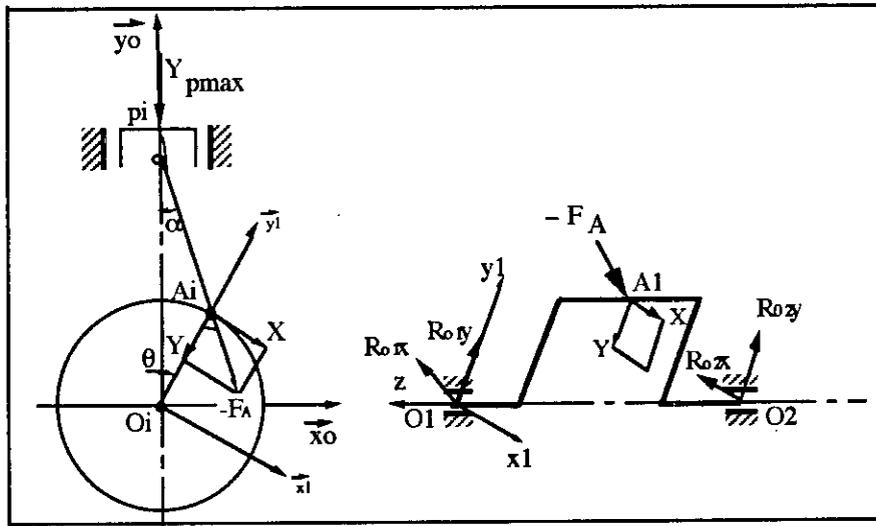


Fig. 2.100 Effort tangentiel maximal

L'effort  $-F_A(\theta)$  qui agit sur le maneton, se décompose dans le repère lié à la manivelle en

$$X_i(\theta) = -X_A \cos\theta - Y_A \sin\theta = -F_A \sin(\theta + \alpha)$$

$$Y_i(\theta) = -X_A \sin\theta - Y_A \cos\theta = -F_A \cos(\theta + \alpha)$$

avec :

$X_A$  et  $Y_A$  les composantes de  $F_A$  dans le repère fixe  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  ;

Nous rappelons que le couple moteur correspondant à chaque cylindre est donné par :

$$C_i = X_i \cdot R$$

De même le couple moteur total (en tenant compte des déphasages entre chaque  $X_i$ ) est donné par :

$$C_m = (S X_i) \cdot R$$

Si nous considérons le premier coude du vilebrequin (coté volant), on peut le schématiser comme suit :

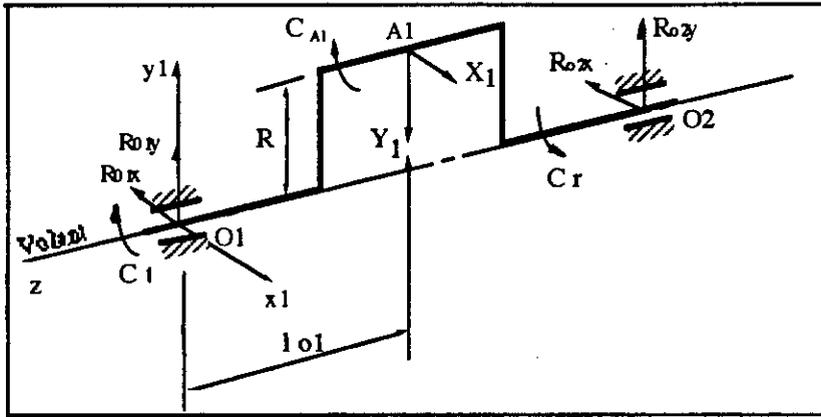


Fig. 2. 101 Efforts sur le coude du vilebrequin

a) Maneton :

Chacun des efforts  $\vec{X}_1$  et  $\vec{Y}_1$  fait subir au maneton une flexion, l'effort  $\vec{X}_1$  lui fait subir de plus une torsion (engendrant le couple moteur) et l'effort  $\vec{Y}_1$  agit sur le maneton comme un effort tranchant.

- Moment fléchissant dû à  $\vec{Y}_1$  :

$$\vec{M}_{f(Y1/A1)} = -(R_{01y} \cdot l_{01}) \vec{x1}$$

- Moment fléchissant dû à  $\vec{X}_1$  :

$$\vec{M}_{f(X1/A1)} = -(R_{01x} \cdot l_{01}) \vec{y1}$$

- Moment fléchissant résultant :

$$\vec{M}_{f(R/A1)} = \sqrt{\vec{M}_{f(Y1/A1)}^2 + \vec{M}_{f(X1/A1)}^2}$$

D'où la contrainte de flexion dans le maneton :

$$\sigma_f = \frac{M_{f(R/A1)}}{I/v}$$

avec  $I/v$  module d'inertie axiale du maneton.

- Moment de torsion dû à  $\vec{X}_1$  :

$$\vec{M}_t(X1/A1) = -(R_{01x} \cdot R) \vec{z1}$$

La contrainte de torsion dans le maneton est :

$$\sigma_t = \frac{M_t(X1/A1)}{I_0/v}$$

avec  $I_0/v = 2I/v$

Contrainte due à l'effort tranchant :

$$\tau = \frac{Y_1}{S_m} \text{ avec : } S_m = \frac{\pi}{4} (d_{em}^2 - d_{im}^2)$$

Contrainte due à l'effort tranchant et au moment de torsion :

$$\sigma_{t\max} = \sigma_t + \tau$$

La contrainte résultante idéale d'après Poncelet est :

$$\sigma_{idm} = 0,35\sigma_f + 0,65 \sqrt{\sigma_f^2 + 4\sigma_t^2} \leq \sigma_{adm} \quad (2.189)$$

b) Bras :

Contrainte dans la section minimale du bras du vilebrequin : On isole le demi-coude qui semble le plus chargé, et on recherche la section minimale du bras.

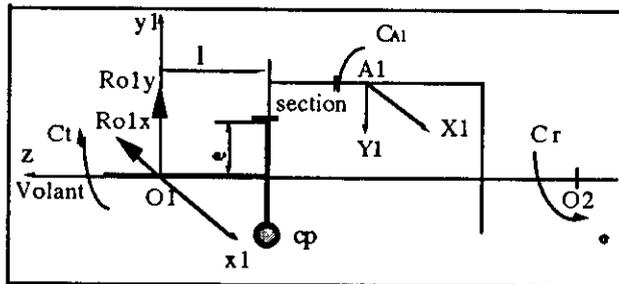


Fig.2.102 Effort sur le 1/2 coude du vilebrequin le plus chargé

La section minimale est une surface réglée s'appuyant sur le diamètre extérieur du tourillon, et sur le diamètre extérieur du maneton (Fig.2.145).

Pour simplifier la recherche des contraintes dans cette section, nous nous ramènerons à une surface rectangulaire, de même aire et placée perpendiculairement à la manivelle du coude choisi.

En isolant le bras, on obtient les différents efforts qui agissent sur la section C représentée sur le schéma ci-dessous.

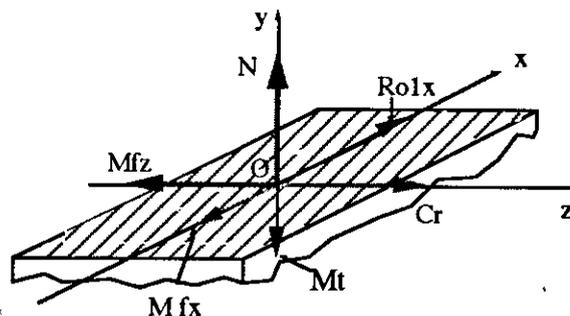


Fig. 2.103 Efforts agissant sur la section C du bras

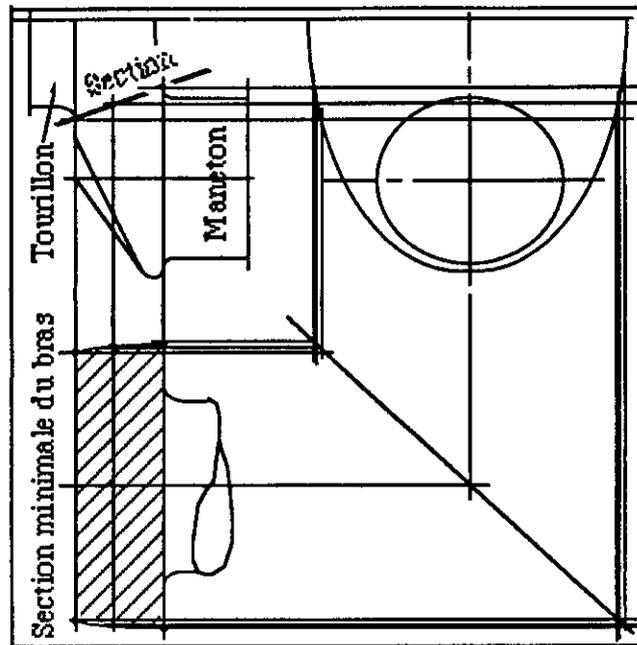


Fig. 2.104 Section minimale du bras

Les bras subissent des déformations complexes, à savoir :

– Une flexion dans le plan de la manivelle, due à  $\vec{Y}_1$  de moment :

$$\vec{M}_{f(Y1/C)} = \vec{R}_{o1Y} \cdot l = -\vec{M}_{fx}$$

– Une flexion dans le plan de rotation, due à  $\vec{X}_1$  de moment :

$$\vec{M}_{f(X1/C)} = \vec{R}_{o1X} \cdot e = -\vec{M}_{fz}$$

– Une flexion dans le plan de rotation provoqué par le couple résistant :

$$\vec{C}_r = (C_t - C_{A1}) \vec{z1}$$

avec :

$C_t$  : le couple moteur ;

$C_{A1}$  : le couple du cylindre agissant sur le coude A1.

Le moment fléchissant résultant dans le plan de rotation (suivant  $\vec{z}$ ) sera de :

$$\vec{M}_{fRz} = |\vec{M}_{fz}| + |\vec{C}_r|$$

Les deux moments de flexions  $M_{fx}$  et  $M_{fz}$  se trouvant dans deux plans perpendiculaires, engendrent une flexion déviée dont la contrainte est donnée par :

$$\sigma_{fd} = \frac{M_{fx}}{I_x/z} + \frac{M_{fz}}{I_z/x}$$

L'axe neutre nn de la section considérée, est caractérisé par  $\sigma_{fd} = 0$

soit :

$$\frac{z}{x} = \frac{M_{fx}}{M_{fz}} \cdot \frac{I_z}{I_x} = \text{tg}\alpha$$

d'où :

$$\alpha = \arctg \left( \frac{M_{fx}}{M_{fz}} \cdot \frac{I_z}{I_x} \right)$$

avec :

$$I_x = \frac{hb^3}{12} \text{ et } I_z = \frac{bh^3}{12}$$

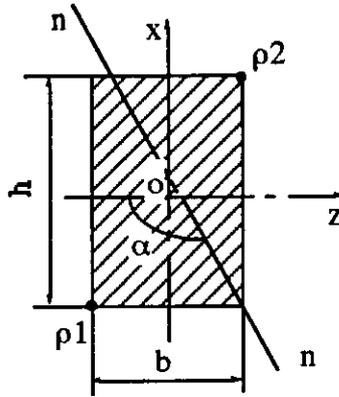


Fig. 2.105 Moments quadratiques de la section minimale du bras

Les fibres les plus tendues et les plus comprimées sont aux niveaux de  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , points les plus éloignés de l'axe neutre.

– Un moment de torsion dû à l'effort  $\vec{x}_1$  qui a pour valeur :

$$\vec{M}_{t(X1/C)} = -[R_{o1X} \cdot l] \vec{y}_1$$

La contrainte de torsion dans le bras est donnée par :

$$\sigma_t = \frac{M_{t(X1/C)}}{I_{o/v}}$$

avec le module d'inertie :

$$I_{o/v} = \frac{\frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12}}{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}} = \frac{bh \sqrt{b^2 + h^2}}{6}$$

– Effort normal agissant sur la section C

$$\vec{N} = (F_{cp} + R_{o1Y}) \vec{y}_1$$

avec :

$$F_{cp} = MS_{cp} \cdot \omega^2$$

où :

$MS_{cp}$  : moment statique du contre poids

$\omega$  : vitesse angulaire du vilebrequin

La contrainte due à l'effort normal :

$$\sigma_N = \frac{N}{S} ; S = bh \text{ (section du bras)}$$

La contrainte due à l'effort normal et au moment fléchissant :

$$\sigma_{f\max} = \sigma_N + \sigma_{fd}$$

Contrainte due à l'effort tranchant dans la section C :

$$\tau = \frac{R_{oIX}}{S} ; S = bh \text{ (section du bras)}$$

Contrainte due à l'effort tranchant et au moment de torsion :

$$\sigma_{t\max} = \sigma_t + \tau$$

La contrainte idéale dans le bras est d'après Poncelet :

$$\sigma_{idb} = 0,35 \sigma_{f\max} + 0,65 \sqrt{\sigma_{f\max}^2 + \sigma_{t\max}^2} \leq \sigma_{adm} \quad (2.190)$$

c) *Tourillon* :

Les tourillons subissent :

- Une flexion due à l'effort radial  $\vec{Y}_1$ , de moment :

$$\vec{M}_{f(Y1/o1)} = - (R_{o1Y} \cdot l) \vec{X1}$$

- Une flexion due à l'effort tangentiel  $\vec{X}_1$ , de moment :

$$\vec{M}_{f(X1/o1)} = - (R_{o1X} \cdot l) \vec{Y1}$$

d'où le moment fléchissant résultant :

$$M_{f\max} = \sqrt{M_{f(X1/o1)}^2 + M_{f(Y1/o1)}^2}$$

La contrainte donnée par ce moment est :

$$\sigma_{f\max} = \frac{M_{f\max}}{I/v}$$

- Une torsion due au couple moteur, de moment :

$$\vec{M}_t = - (X_1 \cdot R) \vec{Z1}$$

La contrainte donnée par le moment de torsion est :

$$\sigma_t = \frac{M_t}{I_o/v}$$

La contrainte idéale dans la section du tourillon est d'après Poncelet :

$$\sigma_{idt} = 0,35 \sigma_{fmax} + 0,65 \sqrt{\sigma_{fmax}^2 + \sigma_t^2} \leq \sigma_{adm} \quad (2.191)$$

Le maneton est, par ailleurs l'objet d'efforts d'inertie de deux sortes (fig.2.106) :

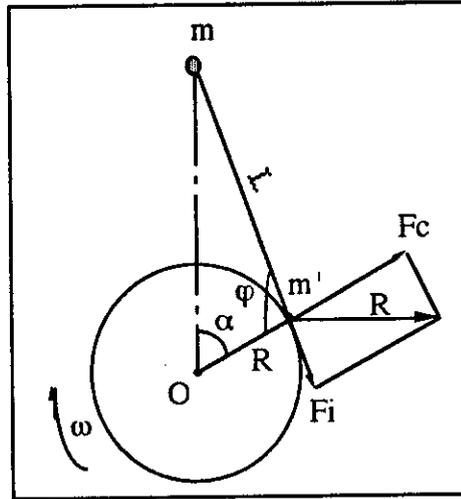


Fig 2. 106 Effort d'inertie sur un maneton

– des efforts d'inertie alternatifs, exercés par les masses concentrées au pied de bielle :

$$F_i = \frac{-mR\omega^2}{\cos\beta} \left[ \cos\alpha + \frac{(\cos 2\alpha)}{\lambda} \right]$$

– des efforts centrifuges, exercés par les masses concentrées au maneton :

$$F_c = m'\omega^2 R$$

La résultante instantanée vaut :

$$R = \sqrt{F_c^2 + F_i^2 + 2F_c F_i \cos \varphi}$$

et la valeur moyenne :

$$R_m = \int_0^{2\pi} \frac{R d\alpha}{2\pi} = \frac{2R \omega^2}{3} \sqrt{m^2 \left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right) + 2m'^2 + mm' \left(2 + \frac{1}{\lambda^2}\right)}$$

La valeur sous radical est la masse équivalente aux masses d'inertie alternative.

#### 7. 5.4. Influence des facteurs de forme

Parmi les facteurs de forme présentant une importance majeure, on note :

### a) Recouvrement maneton-tourillon

Un recouvrement même faible permet un accroissement substantiel de la limite d'endurance à la fatigue du fait de l'abaissement du taux de contrainte provoqué au raccordement entre flasque et génératrice intérieure du maneton, c'est-à-dire au point A où les concentrations de contraintes en extension s'avèrent les plus pernicieuses (fig. 2.107).

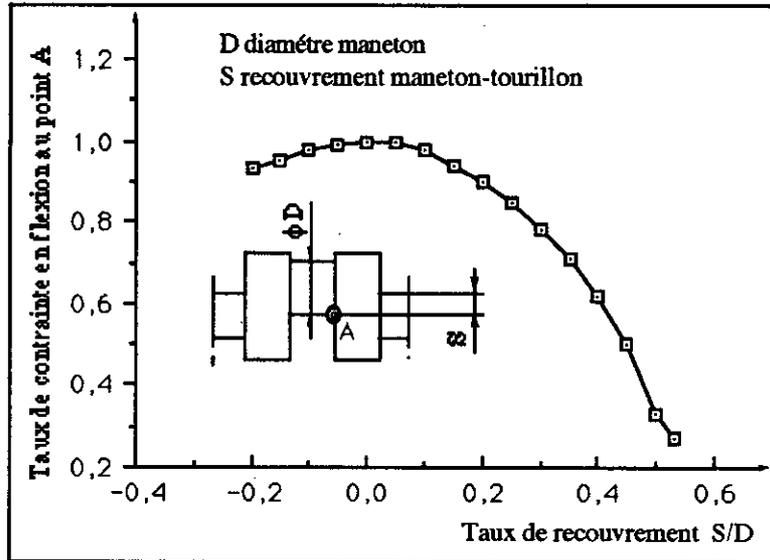


Fig. 2.107 Influence du recouvrement maneton - tourillon au point A d'un vilebrequin

Cette disposition est particulièrement bénéfique dans les vilebrequins de moteurs diesels soumis à des efforts de compression élevés (intérêt des moteurs à faible rapport course/alésage).

### b) Congés

Pour éviter toute concentration de contraintes nocives, et donc en particulier, celle survenant au point A, il faut :

- adopter un matériau aussi ductile que possible ;
- ménager des congés aussi généreux que possible, dont le rayon soit au moins égal à 0,05 du diamètre du maneton ;
- soigner au maximum l'état de surface du congé ;
- créer dans ce congé des contraintes permanentes de compression (galetage).

### 7. 5.5. Calcul des efforts sur les paliers du vilebrequin

Lorsqu'il y a plusieurs paliers (plus de deux), les équations de la mécanique du solide ne suffisent plus pour permettre la détermination des actions de chacun des paliers.

Cette détermination peut cependant se faire (de manière approximative) en assimilant le vilebrequin à une poutre continue reposant sur autant d'appuis que de paliers.

Ces calculs sont très simplifiés. On recherche uniquement un ordre de grandeur des efforts sur les paliers pour définir le système de lubrification des tourillons, et estimer les contraintes des coudes du vilebrequin.

Les efforts agissants sur le vilebrequin (au niveau des manetons), peuvent être concentrés au milieu du tourillon (moteurs en lignes, ou moteurs articulés bielle-biellette), ils peuvent

être concentrés en 2 points du maneton (moteurs en V bielles accolées), ou concentrés en 3 points (moteurs en V bielle-bielle à fourche).

Le principe de calcul reste identique pour les trois cas. On a selon le cas considéré un, deux, ou trois efforts entre chaque appuis (palier).

Nous prendrons dans notre exemple le calcul d'un moteur en V bielles accolées (deux efforts entre chaque appuis). Le programme calcul les réactions aux appuis, pour un ou deux efforts entre chaque appuis.

On prendra le vilebrequin dans une position donnée par rapport au cycle. Le programme calcul les efforts et les couples sur chaque maneton pour cette position précise.

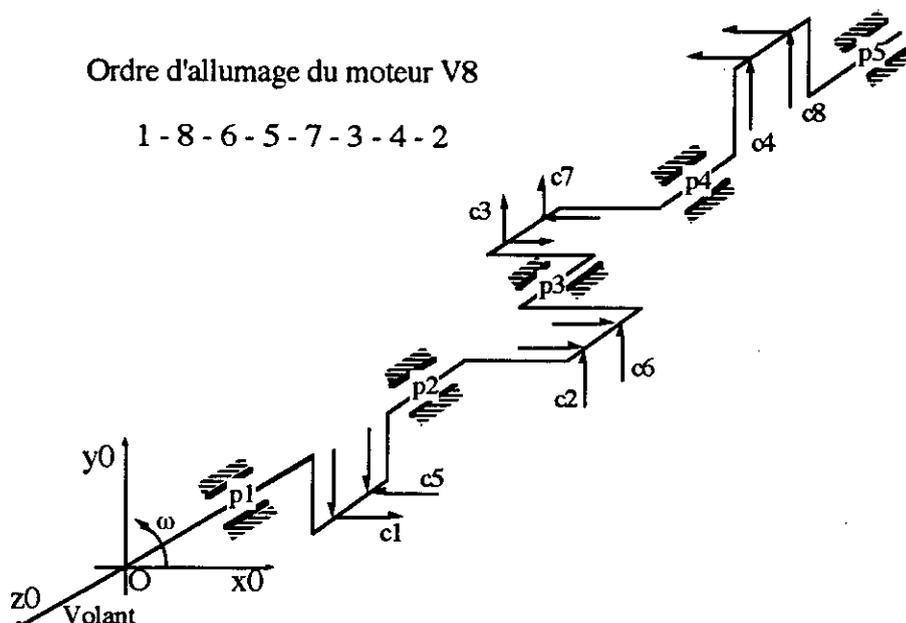


Fig. 2.108 Efforts sur le vilebrequin d'un moteur en V 8 cylindres

Nous modèlerons le vilebrequin par une poutre de section constante reposant sur appuis A1, ..., A5 et soumise à 8 efforts (2 efforts entre chaque appuis) F1, ..., F8, se décomposant en  $X_i, Y_i$ .

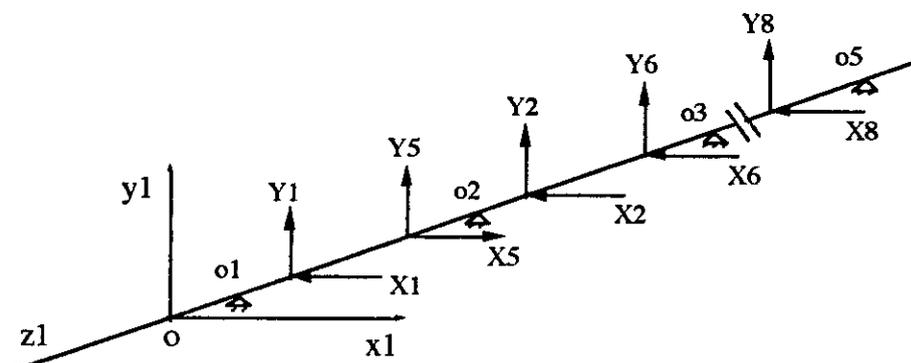


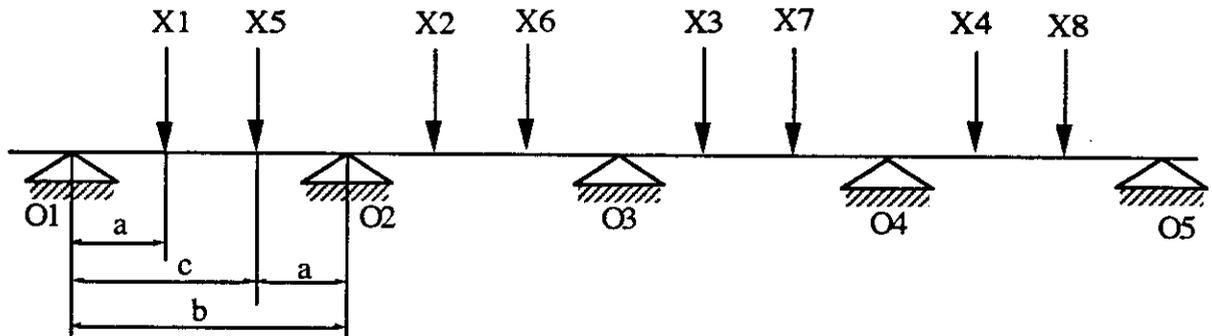
Fig. 2.09 Modèle du vilebrequin

Le problème réside donc dans le calcul des réactions aux appuis dans deux plans x et y. On obtient un ordre de grandeur des efforts sur chaque palier. Il faudrait faire ce calcul

pour plusieurs positions du vilebrequin (tous les 10 ou 20°), afin d'obtenir une valeur moyenne beaucoup plus précise.

Le principe de Clapeyron nous permet de calculer les réactions aux appuis, connaissant les moments de flexion et les efforts tranchants aux appuis.

**A. Calcul des réactions dans le plan x1z1**



**A.1. Moments fléchissant aux appuis :**

Les efforts sont répartis sur la poutre, suivant l'ordre d'allumage. Soit  $M_{O_i}$  le moment fléchissant dans la poutre au niveau du palier  $O_i$ , on a donc :

$$M_{O1} = 0 \text{ et } M_{O5} = 0$$

Les inconnus sont :  $M_{O2}$ ,  $M_{O3}$  et  $M_{O4}$ . On peut établir le système d'équations suivant :

$$4b \cdot M_{O2} + b \cdot M_{O3} = -K(X_1 + X_2) - L(X_5 + X_6)$$

$$b \cdot M_{O2} + 4b \cdot M_{O3} + b \cdot M_{O4} = -K(X_2 + X_3) - L(X_6 + X_7)$$

$$b \cdot M_{O3} + 4b \cdot M_{O4} = -K(X_3 + X_4) - L(X_7 + X_8)$$

avec :

$$K = \frac{a(b^2 - a^2)}{b} \text{ et } L = \frac{c(b^2 - c^2)}{b}$$

Donc nous obtenons un système de la forme :

$$[A] \cdot (X) = [B]$$

dont les inconnus sont les moments d'où :

$$\begin{bmatrix} 4b & b & 0 \\ b & 4b & b \\ 0 & b & 4b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{O2} \\ M_{O3} \\ M_{O4} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K(X_1 + X_2) + L(X_5 + X_6) \\ K(X_2 + X_3) + L(X_6 + X_7) \\ K(X_3 + X_4) + L(X_7 + X_8) \end{bmatrix}$$

**A.2. Les efforts tranchants aux appuis :**

Prenons  $T_{id}$  l'effort tranchant à droite de l'appuis  $i$  et  $T_{ig}$  l'effort tranchant à gauche de l'appuis  $i$ , nous obtenons :

$$T_{o1d} = X_1 \frac{c}{b} + X_5 \frac{a}{b} + \frac{M_{o2}}{b}$$

$$T_{o2g} = -X_1 \frac{a}{b} - X_5 \frac{c}{b} + \frac{M_{o2}}{b}$$

$$T_{o2d} = X_2 \frac{c}{b} + X_6 \frac{a}{b} + \frac{M_{o3} - M_{o2}}{b}$$

$$T_{o3g} = -X_2 \frac{a}{b} - X_6 \frac{c}{b} + \frac{M_{o3} - M_{o2}}{b}$$

$$T_{o3d} = X_3 \frac{c}{b} + X_7 \frac{a}{b} + \frac{M_{o4} - M_{o3}}{b}$$

$$T_{o4g} = -X_3 \frac{a}{b} - X_7 \frac{c}{b} + \frac{M_{o4} - M_{o3}}{b}$$

$$T_{o4d} = X_4 \frac{c}{b} + X_8 \frac{a}{b} - \frac{M_{o4}}{b}$$

$$T_{o5g} = -X_4 \frac{a}{b} - X_8 \frac{c}{b} - \frac{M_{o5}}{b}$$

A partir de ces efforts tranchants et des moments fléchissants, on peut calculer les réactions aux appuis.

$$R_{X1} = T_{o1d} = X_1 \frac{c}{b} + X_5 \frac{a}{b} + \frac{M_{o2}}{b}$$

$$R_{X2} = T_{o2d} - T_{o2g} = (X_2 + X_5) \frac{c}{b} + (X_1 + X_6) \frac{a}{b} + \frac{M_{o3} - 2M_{o2}}{b}$$

$$R_{X3} = T_{o3d} - T_{o3g} = (X_3 + X_6) \frac{c}{b} + (X_2 + X_7) \frac{a}{b} + \frac{M_{o4} - 2M_{o3} + M_{o2}}{b}$$

$$R_{X4} = T_{o4d} - T_{o4g} = (X_4 + X_7) \frac{c}{b} + (X_3 + X_8) \frac{a}{b} + \frac{M_{o3} - 2M_{o4}}{b}$$

$$R_{X5} = -T_{o5g} = X_8 \frac{c}{b} + X_4 \frac{a}{b} + \frac{M_{o4}}{b}$$

Le calcul des réactions  $R_{Yi}$  dans le plan  $y1z1$  se fait de la même manière que celui de  $R_{Xi}$  dans le plan  $x1z1$ , il suffit de remplacer les  $Xi$  par les  $Yi$  dans les équations.

## 8. VIBRATIONS DE TORSION

Un grand nombre d'ensembles mécaniques comportent des lignes d'arbres de commande ou de transmission de puissance, souvent de formes compliquées. Dans les moteurs à combustion interne, le vilebrequin avec ses éléments additionnels rentre dans cette catégorie.

La complexité de cette pièce et l'importance de son rôle dans le moteur impose pour son étude que l'on tienne compte de deux points; celui de l'équilibrage et celui du dimensionnement.

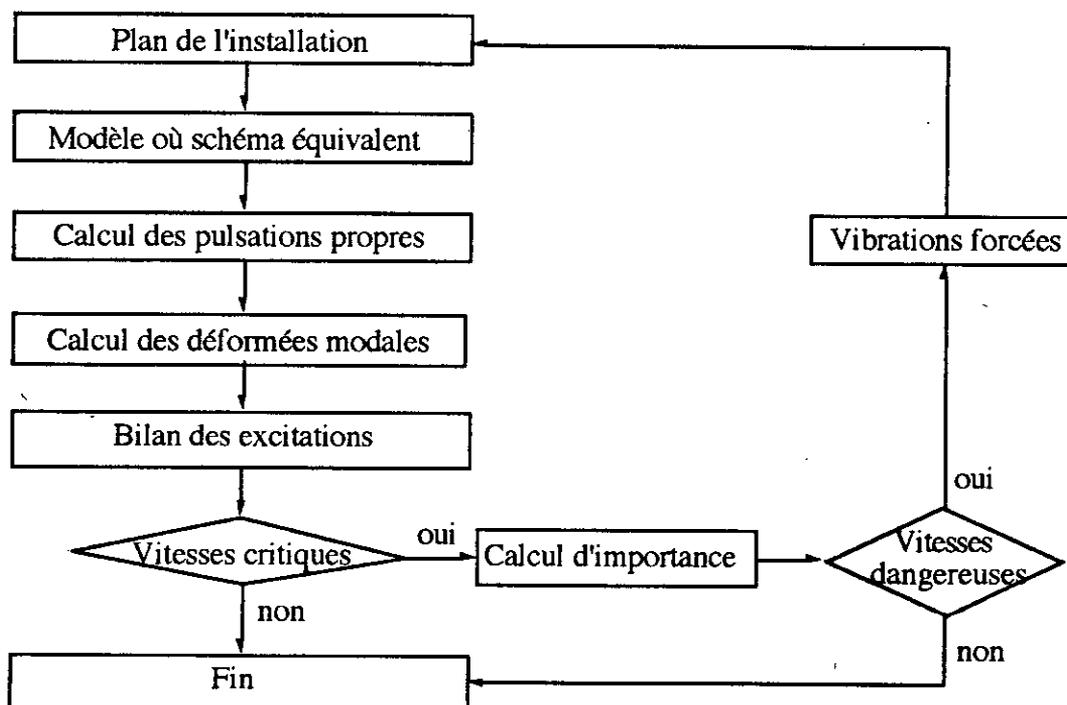
Le premier est résolu par l'utilisation de contrepoids, calculés puis remodelés après essais. Le second point est beaucoup plus délicat, car les sollicitations sont de divers ordres, principalement : torsion, flexion, et pression superficielles dues aux chocs des têtes de bielles. ces sollicitations sont d'autant plus difficiles à établir qu'elles sont cycliques et dépendent du régime moteur et du couple résistant.

Pour l'étude des vibrations de torsion nous pouvons considérer que cette ligne d'arbre (vilebrequin et ses éléments additionnels) est assimilable à un système vibrant à  $n$  degrés de liberté et ayant des fréquences de résonance pour lesquelles les amplitudes de vibration deviennent très importantes.

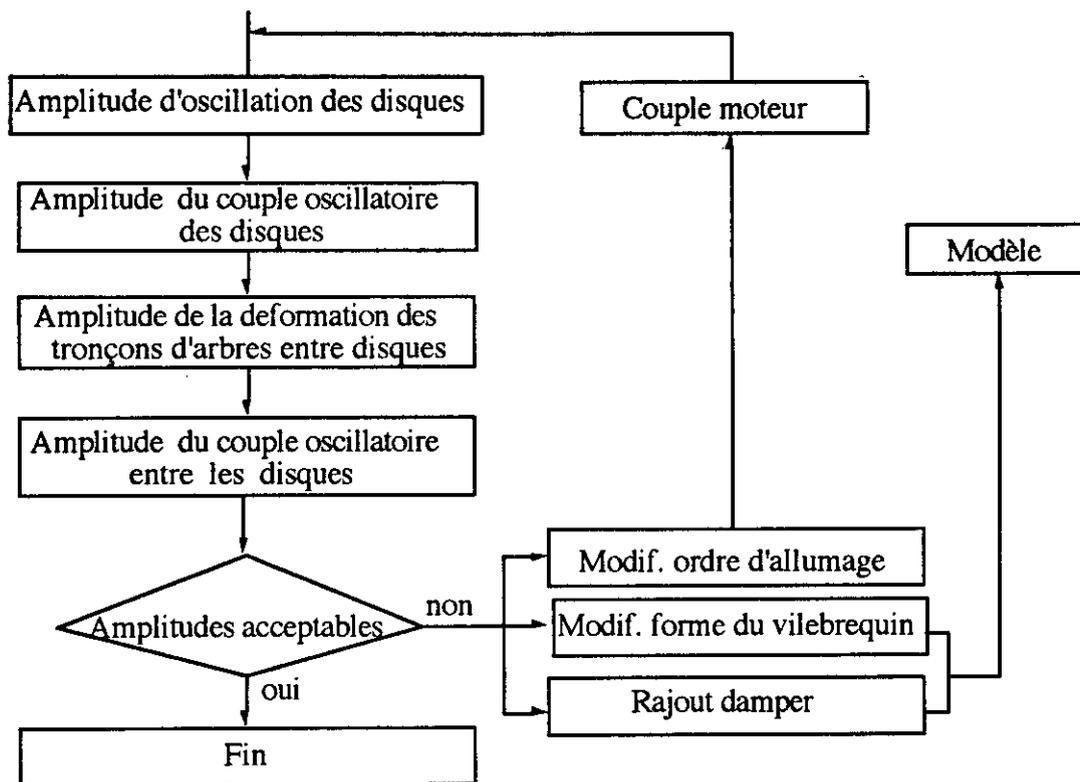
Le problème est de déterminer les caractéristiques des mouvements vibratoires de cette ligne d'arbre.

Le vilebrequin (d'un moteur à combustion interne) avec ses manivelles, bielles, pistons et volant étant une pièce trop compliquée pour en déterminer exactement les caractéristiques vibratoires. Nous devons donc, pour les modéliser, simplifier le système, en remplaçant les différents ensembles par des disques équivalents reliés par un arbre rectiligne ayant la même flexibilité à la torsion. C'est l'élaboration d'un modèle susceptible de rendre compte des phénomènes vibratoires importants.

### Organigramme du module VIBRAT



## Développement du module : vibrations forcées



## Etapes à suivre pour le calcul des vibrations de torsion (VIBRAT)

A partir du schéma d'installation du système considéré, on établit le modèle selon les règles et les hypothèses que nous définissons plus loin. Le modèle nous permet la mise en équation de notre système. La première étape de calcul que nous rencontrons dans Vibrat sont les pulsations propres relatives au modèle choisi, accompagnées des déformées modales (amplitudes relatives des différents disques). Ces calculs étant fait on passe au bilan des excitations, ce qui nous permet en fonction des excitations mises en jeux de déterminer les vitesses critiques ( $\Omega_c$ ) dans la plage de fonctionnement de l'installation. Deux cas peuvent se présenter :

1- Pas de vitesses critiques : les calculs s'arrêtent donc aux vibrations libres, il n'y a pas lieu de faire les calculs des vibrations forcées ;

2- Il y a existence de vitesses critiques : dans ce cas, il faut vérifier si ces vitesses critiques, sont dangereuses, et ceci à l'aide du calcul d'importance. Deux cas se présentent de nouveaux

a) Pas de vitesses dangereuses : on revient au premier cas (vibrations libres seulement) ;

b) Existence de vitesses dangereuses dans la plage de fonctionnement : d'où calcul des vibrations forcées.

Dans le calcul des vibrations forcées, il est recommandé de sélectionner les vitesses dangereuses et les harmoniques en fonction de leur importance, afin de diminuer le temps de calcul et la quantité des résultats. Dans cette partie on calculera successivement :

- Les amplitudes d'oscillation des disques ;
- Les amplitudes des couples oscillatoire des disques ;
- Les amplitudes de la déformation des tronçons d'arbre entre disques ;
- Les amplitudes du couple oscillatoire entre disques.

\* Si les différentes amplitudes sont acceptables, le système peut fonctionner sans danger de destruction.

\* Si les amplitudes ne sont pas acceptables, on peut agir sur le système de différentes façons, afin de diminuer les amplitudes d'oscillation de torsion :

**b1)** Modifier l'ordre d'allumage du moteur (cas d'un moteur), ce qui agit sur le couple d'excitation et donc sur la réponse du système ;

**b2)** On apporte des modifications à la ligne d'arbre (changement des rigidités torsionnelles  $k_i$  et sur les moments d'inerties des disques  $I_i$ ), soit pour rejeter les vitesses dangereuses en dehors des points de fonctionnement, soit pour diminuer les amplitudes des oscillations de torsion ;

**b3)** Monter à l'une des extrémités libre de la ligne d'arbres, un ou plusieurs amortisseurs de torsion.

Remarque : Les points b1 et b2, peuvent être traités au niveau des vibrations libres.

## 8.1. Modélisation de la ligne d'arbre d'un moteur à combustion interne

### 8.1.1. Caractéristiques du modèle

La complexité d'une ligne d'arbres conduit à substituer à la réalité, des modèles auxquels s'appliquent les lois de la physique

Nous nous limiterons à la caractérisation des modèles traduisant les  $n$  premières fréquences naturelles de torsion et les amplitudes des oscillations forcées. Les éléments de ces modèles doivent satisfaire à des règles bien connues : Proportionnalité entre éléments et déformations, conservation des masses, pour que les lois de la mécanique leur soient applicables et que la résolution numérique des équations conduise à l'utilisation de schémas mathématiques classiques. Ces modèles représentent une distribution de paramètres et de degrés de liberté qui dépend de l'expérimentation.

La partie axiale (axe du vilebrequin) de la ligne d'arbre considérée comme un milieu continu déformable est remplacée par un nombre fini de tronçons chacun d'eux est représenté par un disque d'épaisseur nulle et par un ressort de torsion sans masse.

Le disque dont le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation est identique à celui du tronçon réel, prend en compte la cinétique de la portion de la ligne d'arbre considérée

Le ressort de torsion assure la continuité entre deux disques consécutifs, sa raideur est égale à celle de la partie de la ligne d'arbre représentée.

Chaque coude est représenté par deux disques de moment d'inertie  $I_{c/2}$ , situés à une distance  $l_{et}/2$  des extrémités (avec  $l_{et}$  longueur équivalente d'un demi-tourillon) auquel on ajoute un disque de moment d'inertie  $I_{eq}$  dans le plan de l'équipage mobile (piston + segments + axe piston + bielle).

Nous considérons qu'il n'y a pas de couplage entre les vibrations de torsion et les vibrations axiales ou transversales de la ligne d'arbre. En outre nous supposons que la bielle et le piston sont indéformables sous l'action des forces extérieures qu'ils subissent. La vitesse de rotation moyenne du moteur est constante, le cycle thermodynamique suivi par les gaz de combustion est stabilisé et identique pour chaque cylindre.

## 8.1.2. Identification des paramètres du modèle

### 8.1.2.1. Raideurs des ressorts de torsion

La forme géométrique et le comportement mécanique du tronçon réel considéré conditionnent la manière d'évaluer la raideur constante du ressort de torsion représentatif. On distingue :

- Forme géométrique simple et comportement élastique : les résultats élastiques de résistante des matériaux sont utilisés.
- Forme géométrique complexe et comportement élastique : dans le cas des tronçons représentant le vilebrequin, sont utilisées les formules empiriques ou la méthode de BICERA.
- Forme géométrique complexe et comportement non élastique : cas des accouplements ; la raideur moyenne (ou couple moyen transmis) est prise en compte, sa mesure expérimentale est faite à partir d'essais statiques.

### 8.1.2.2. Amortissements

Les couples d'amortissement agissent à divers endroits de la ligne d'arbres. Pour la modélisation nous considérons deux types d'amortissement :

#### A. Amortissements externes

Ce sont ceux qui agissent du milieu extérieur sur la ligne d'arbre (eau sur une hélice, huile dans un palier, frottements piston-cylindre, ...).

##### a) Hypothèse :

Nous ne tenons compte que des amortissements de type visqueux qui présentent la majorité des phénomènes d'amortissement. De plus, nous considérons les coefficients d'amortissement comme constants.

$$C_a = E \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

avec :

- $C_a$  : couple d'amortissement ;
- $E$  : coefficient d'amortissement ;
- $\theta$  : position angulaire du système considéré.

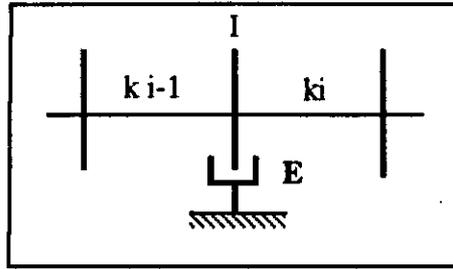


Fig. 2.110 Schématisation du coefficient d'amortissement externe

## b) Valeurs du coefficient d'amortissement

### Méthode expérimentale

Pour un système quelconque, effectuons l'essai suivant : On lance le système à une vitesse  $\omega_0$  et on le laisse s'amortir en l'absence de couples excitateurs et de couples moteurs. On relève la courbe  $\omega = f(t)$ .

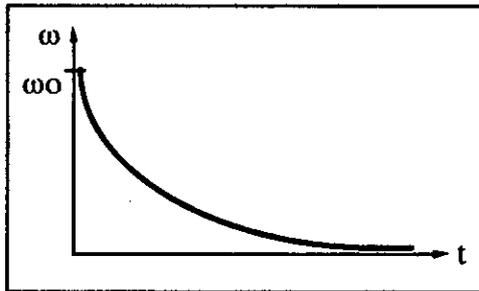


Fig. 2.111 Amortissement du système en l'absence des couples excitateur et moteur

Le théorème de la dynamique nous permet d'écrire :

$$I \frac{d\omega}{dt} = E\omega$$

avec  $E\omega$  le couple d'amortissement et  $\omega = d\theta/dt$  : l'excitation  
Intégrons cette relation entre deux points de la courbe :

$$I \frac{d\omega}{\omega} = E dt$$

$$I \log \frac{\omega_2}{\omega_1} = E [t_2 - t_1]$$

d'où :

$$E = \frac{I}{[t_2 - t_1]} \log \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \quad (2.192)$$

L'inertie étant connue on peut déterminer facilement  $E$  autour d'une vitesse de rotation moyenne

## B. Amortissement interne

Ce sont ceux qui agissent entre deux disques de la ligne modélisée (cycles d'hystérésis dans le matériau, huile dans un amortisseur de vibration à huile).

### a) Hypothèse :

Nous ne tiendrons compte que des amortissements de type visqueux et nous supposons que les couples créés par ces amortissements varient linéairement avec la différence de vitesse entre les deux disques considérés

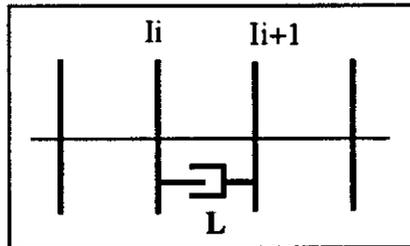


Fig. 2.112 Schématisation du coefficient d'amortissement interne

$$C_a = L \left( \frac{d\theta_{i+1}}{dt} - \frac{d\theta_i}{dt} \right)$$

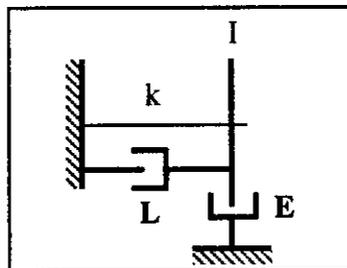
avec :

- $C_a$  : couple d'amortissement ;
- $L$  : coefficient d'amortissement interne ;
- $\theta_{i+1}$  : position angulaire du disque  $i+1$  ;
- $\theta_i$  : position angulaire du disque  $i$ .

### b) Valeurs du coefficient d'amortissement

#### Méthode expérimentale

On écarte le système de sa position d'équilibre et on le laisse osciller.  $L$  étant déjà déterminé par l'essai précédent. Cet essai est réalisé pour chaque système.



Nous pouvons écrire l'équation du système :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + (E+L) \frac{d\theta}{dt} + k\theta = 0$$

On pose la solution de la forme :

$$\theta = e^{rt}$$

En général, les systèmes étudiés donne un mouvement pseudo-périodique c'est à dire :

$$\left(\frac{L+E}{I}\right)^2 - \frac{4k}{I} < 0$$

d'où la solution :

$$\theta = \theta_0 e^{-\left(\frac{L+E}{I}\right)t} \cos \omega t$$

avec :

$\theta_0$  : l'amplitude initiale et  $\omega$  la pulsation

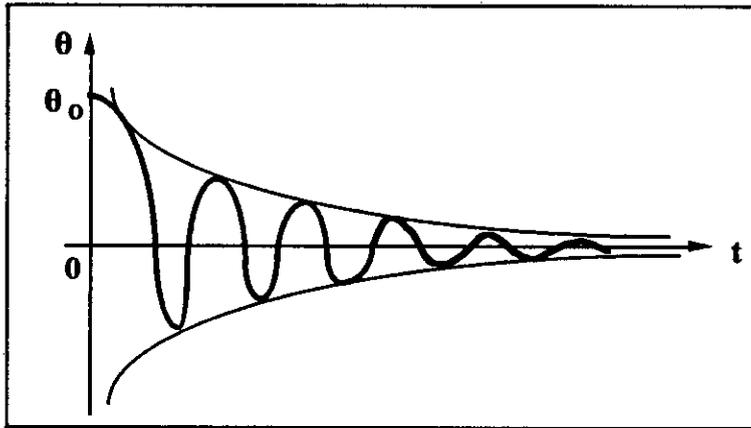


Fig. 2.13 Forme de l'élongation angulaire

Pour  $t = t_1$  et  $\cos \omega t_1 = 1 \Rightarrow \theta_1 = \theta_0 e^{-\left(\frac{L+E}{I}\right)t_1}$

Pour  $t = t_2$  et  $\cos \omega t_2 = 1 \Rightarrow \theta_2 = \theta_0 e^{-\left(\frac{L+E}{I}\right)t_2}$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = e^{\left(\frac{E+L}{I}\right) \cdot (t_2 - t_1)}$$

d'où :

$$L = I \frac{\text{Log} \left( \frac{\theta_1}{\theta_2} \right)}{(t_2 - t_1)} - E \quad (2.193)$$

Cet essai servira à déterminer dans quelles limites on peut considérer le coefficient d'amortissement comme constant. Il faut noter qu'il existe des formules empiriques permettant le calcul du coefficient d'amortissement interne [ Hand book on torsional vibration]

### 8.1.3. Limites du modèle utilisé

#### a) Liaisons mécaniques

Les liaisons réelles ne sont pas parfaites, en particulier, le mouvement relatif entre le maneton et la tête de bielle, qui induit une dissipation d'énergie due à la viscosité de l'huile formant le film hydrodynamique.

En l'état actuel des connaissances, la prise en compte quantitative de ces phénomènes est nouvelle, et les recherches dans ce domaine mettent l'accent sur la mise en évidence des facteurs d'amortissement.

#### b) Raideurs des ressorts de torsion

Lorsque la valeur variable des raideurs de certains tronçons réels est remplacée par une valeur constante, définie quand seul le couple moyen est transmis, peut induire des erreurs sur les pulsations propres associées au modèle linéaire, par rapport au comportement vibratoire réel de la ligne d'arbre. Dans de tel cas on fait appel à des méthodes permettant d'identifier expérimentalement le phénomène non linéaire. Ces méthodes sont généralement longues et ne sont pas encore éprouvées.

#### c) Coefficients d'amortissement

Lorsque la ligne d'arbre possède un amortisseur de vibration de torsion, l'amortissement équivalent (pris constant) du damper, qui est pris en compte dans le modèle, n'est pas constant en réalité. Il s'en suit que les amplitudes de vibrations calculées à la résonance peuvent ne pas concorder avec les résultats expérimentaux.

### 8.1.4. Adaptation de la ligne d'arbres

La connaissance des pulsations propres et des sources d'excitations possibles permet de définir, si elles existent, les vitesses dangereuses dans la plage de fonctionnement de l'installation.

Lorsque une ou plusieurs vitesses dangereuses appartiennent à la plage de fonctionnement il est nécessaire d'apporter des modifications à la ligne d'arbres pour rejeter les vitesses dangereuses en dehors de la plage d'utilisation.

Les modifications d'une ligne d'arbres porte dans la plus part des cas sur les rigidités torsionnelles de certains éléments et sur les moments d'inertie des disques. Lorsque ces modifications ne sont pas suffisantes compte tenu des limites technologiques, pour éliminer les vitesses dangereuses de la plage de fonctionnement il est alors nécessaire de faire une

étude des vibrations forcées, en prenant en considération les amortissements internes ou externes.

Une étude sur les importances des harmoniques permet de sélectionner les harmoniques véritablement dangereux, et limitent les calculs en vibration forcées à ceux-ci.

Ainsi, on peut déterminer les contraintes dues aux oscillations de torsion en tout point de la ligne d'arbres. Lorsque les contraintes en certains points, dépassent la limite autorisée, il est nécessaire de monter, à une extrémité libre de la ligne d'arbre, un ou plusieurs amortisseurs de torsion.

#### 8.1.4.1. Influence de la rigidité torsionnelle sur les pulsations propres

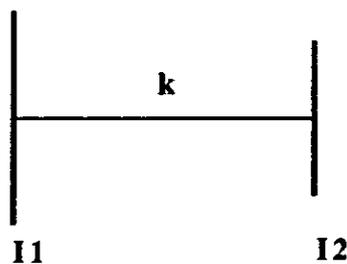
La modification de la rigidité torsionnelle d'un tronçon n'a d'influence notable sur les pulsations propres que lorsque ce tronçon est le siège d'un nœud de vibration. Il est donc inutile de modifier la rigidité torsionnelle des autres tronçons pour déplacer la vitesse dangereuse.

Pour les premiers modes, les nœuds de vibration sont situés près des disques à grand moment d'inertie ou dans les tronçons de faible rigidité torsionnelle. Or généralement, près des disques de grandes inerties (volant), sont montés les accouplements élastiques de liaison. Les nœuds de vibration sont donc presque toujours localisés dans les accouplements. Il est possible, en modifiant les rigidités de l'accouplement, de changer la pulsation propre de la ligne d'arbre. C'est évidemment, de par sa simplicité, la première opération à envisager.

Si cette modification n'est pas suffisante pour écarter tout danger, on agira sur les inerties car toute modification sur les autres rigidités est pratiquement sans influence.

Pour faciliter le choix de la rigidité torsionnelle de l'accouplement, il est à noter que pour le premier mode, la pulsation propre varie sensiblement comme la racine carrée de la rigidité torsionnelle du tronçon situé au nœud de vibration c'est à dire :

Au premier mode il n'y a qu'un nœud de vibration. Les deux parties de la ligne d'arbre situées de part et d'autre du nœud semblent être rigides. On peut donc ramener le modèle de la ligne d'arbre à un modèle à deux disques et un ressort.



$I_1 = \sum I$  à gauche du nœud

$I_2 = \sum I$  à droite du nœud

$k =$  raideur du ressort où se trouve le nœud

On a :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k(I_1 + I_2)}{I_1 \cdot I_2}}$$

Par exemple si l'on veut diminuer  $\omega_1$ , il suffit de réduire  $k$ .

### 8.1.4.2. Influence du moment d'inertie sur les pulsation propres

Il faut noter qu'une modification modérée du moment d'inertie des disques situés de part et d'autre du noeud de vibration a très peu d'influence sur la pulsation propre. En revanche tout changement dans l'inertie du disque le plus éloigné du noeud de vibration entraîne une modification notable de la pulsation propre.

D'une façon générale on évite, pour le premier mode, que le noeud de vibration soit dans le vilebrequin et l'on choisit l'inertie du volant, voir la raideur de l'accouplement pour que le noeud soit dans l'accouplement.

Dans la mesure où l'on n'a pas besoin de mettre sur le vilebrequin un volant de régulation on peut minimiser ce volant, à condition de placer un accouplement à fort taux d'amortissement (accouplement caoutchouc ou geislinguer) pour limiter les oscillations de torsion.

### 8.1.4.3. Amortisseur de vibration de torsion

Lorsque les deux points précédents (8.1.4.1 et 8.1.4.2) ne donnent pas satisfaction, on peut monter sur la ligne d'arbre un amortisseur de torsion. Il est d'autant plus efficace que sa position est éloignée du noeud car son oscillation et par la suite son amortissement, sont importants.

L'étude en vibration forcée de la ligne d'arbres, qui prend en compte les amortissements, permettra de vérifier que l'amortisseur choisi est bien adapté au travail qui lui est demandé.

Dans les systèmes mécaniques rotatifs, au mouvement de rotation de chaque élément du système se superposent des oscillations de torsion. Rechercher des solutions réduisant les amplitudes angulaires qu'elles provoquent, demeure un problème fondamental de la construction mécanique.

Ainsi, lors d'une rencontre en sympathie d'une fréquence d'excitation égale à l'une des fréquences propres des systèmes mécaniques rotatifs, ces derniers entrent en résonance.

Lorsque le spectre des résonances des systèmes en question ne peut être placé hors de leur régime de fonctionnement par le choix adéquat de l'élasticité et des masses, des dispositifs doivent être utilisés pour limiter les amplitudes des vibrations de torsion à des valeurs acceptables.

Ces dispositifs spécialement introduit dans le système vibratoire pour augmenter artificiellement les frottements externes portent le nom d'amortisseurs.

#### a) Amortissement par frottement à sec

L'amortisseur qui fut le plus couramment employé est l'amortisseur à friction du type Lanchester : des surfaces frottent l'une sur l'autre sans lubrifiant. Il se compose d'un volant composé de 2 disques (a) monté fou en bout d'arbre et entraîné par friction réglable (fig.2.114a). Le moyeu (b) (lié rigidement au vilebrequin) porte des patins de frein (c), contre lesquels on peut serrer les disques (a) en vissant les écrous de serrage des ressorts (d).

Quand le moyeu entre en vibration, ses accélérations angulaires provoquent un glissement relatif du volant, et le frottement qui en résulte amortit l'amplitude des oscillations. A ce moment d'ailleurs le volant cessant d'être solidaire de l'arbre, les caractéristiques qui avaient permis l'amorçage des vibrations sont modifiées et la résonance cesse. Pour qu'il y ait glissement relatif des pièces (b) et (a) donc dissipation d'énergie par frottement, le couple dû

aux inerties des masses en vibration doit être supérieur au couple de frottement obtenu par réglage de la tension des ressorts.

Ces amortisseurs n'ont pas uniquement un effet sur des oscillations d'amplitudes notables, ils présentent aussi l'avantage d'être aperiodiques et donc d'amortir toutes les vibrations de torsion quelle que soit leur fréquence.

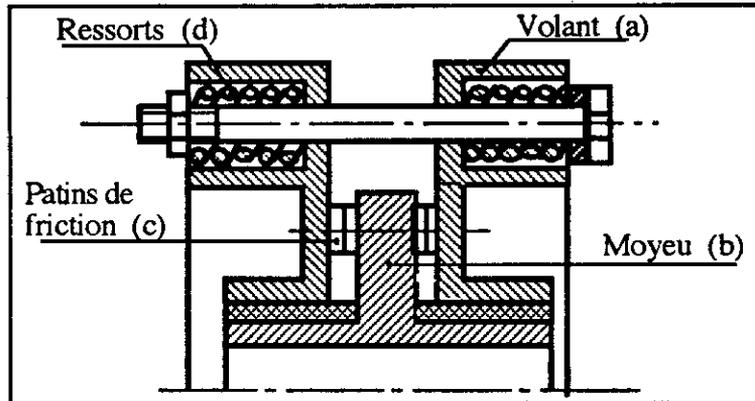


Fig. 2.114a Amortisseur par frottement à sec

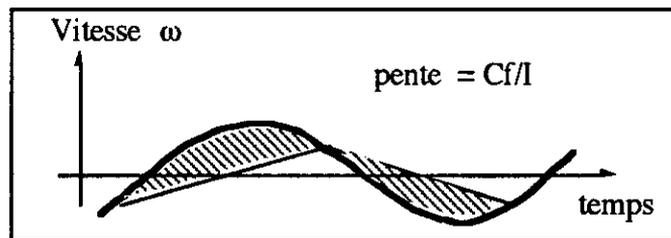


Fig. 2.114b Variation de la vitesse en fonction du temps

En dépit de sa simplicité, l'analyse mathématique de son comportement est plutôt compliqué. On peut mieux se rendre compte par le dessin de la figure 2.114b, de la manière dont est amortie une vibration par frottement à sec. Nous supposons que l'arbre oscille autour de sa vitesse angulaire moyenne. Le couple de friction  $C_f$  est supposé constant pendant le glissement. L'accélération des disques représentée par la pente de la courbe de vitesse sera donc constante et égale à  $C_f / I$ , où  $I$  est le moment d'inertie des disques. La vitesse sera donc représentée par des lignes droites. La vitesse des disques aura tendance à augmenter tant que la vitesse de l'arbre est plus élevée que celle des disques et à diminuer quand la vitesse de l'arbre devient inférieure à celle des disques. L'énergie transformée en chaleur est :

$$W = \int C_f d\theta = C_f \int \omega' dt$$

Avec :  $\omega'$  la vitesse relative

Cette énergie est donc égale au produit du couple  $C_f$  et de la surface hachurée de la figure 2.114b. Cette surface dépend de la valeur de  $C_f$ . On peut choisir un couple optimum donnant une énergie dissipée maximale.

### b) Amortisseur élastique

Nous présentons fig. 2.115 un amortisseur élastique (damper), dont le modèle est donné ci-dessus.

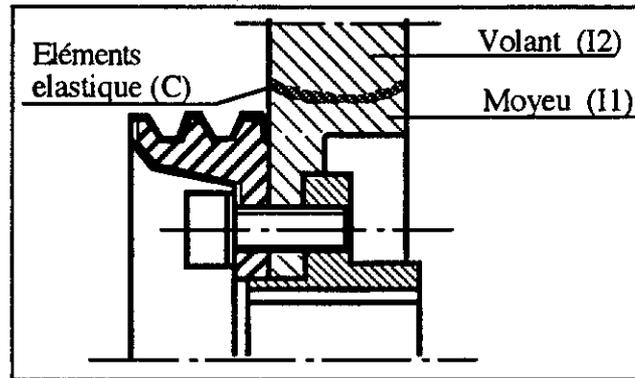
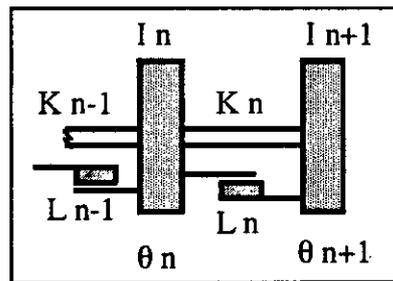


Fig. 2.115 Amortisseur élastique



Modèle de l'amortisseur élastique

Il comporte un rappel élastique entre le volant  $I_2$  (élément d'inertie) et le moyeu  $I_1$  lié rigidement au vilebrequin. Des vibrations se transmettent du vilebrequin au volant par l'intermédiaire de l'élément élastique (c). Grâce à l'hystérésis de l'élément élastique, l'amortissement se fait avec dissipation d'énergie. Une partie de l'énergie vibratoire se transforme en chaleur.

Il s'agit d'un système à un degré de liberté classique dont la fréquence propre est fonction de l'inertie du volant et de la raideur en cisaillement du matériau élastique de liaison. Ce mécanisme ajoute en fait une inertie liée par une raideur à la poulie du vilebrequin, c'est dire qu'il ajoute un degré de liberté à la ligne d'arbre et, par conséquent, modifie le comportement vibratoire du système global. C'est en 1958 qu'apparaît en Europe le damper caoutchouc non adhésif (l'élément élastique est un anneau maintenu en place par compression entre le moyeu et le volant), une compression suffisante évite le glissement et de plus, la pré-compression améliore les qualités d'amortissement du caoutchouc travaillant au cisaillement.

### c) Amortisseur à frottement visqueux

Il se compose d'un volant A (anneau d'inertie) pouvant tourner librement autour du moyeu à l'intérieur d'un carter léger fixé au moyeu B. Le jeu entre le volant et le carter est très faible, et fixé avec une grande précision; l'espace libre ainsi créé est complètement rempli du produit visqueux utilisé. Ce produit peut être un silicone dont la viscosité est non seulement élevée mais aussi constante en fonction de la température.

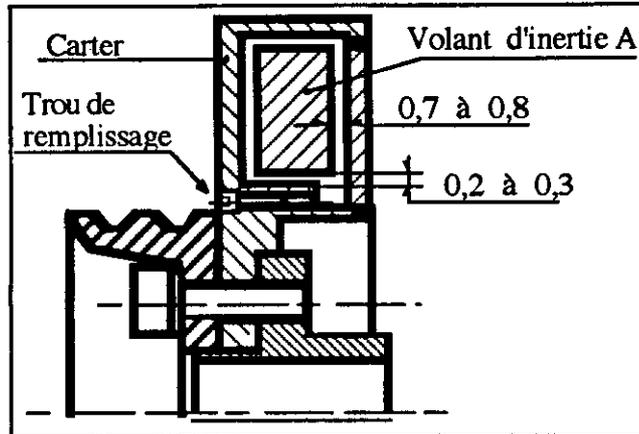
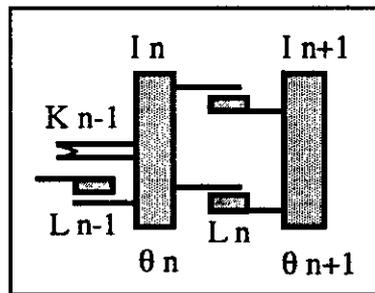


Fig. 2.116 Amortissement visqueux



Modèle de l'amortisseur à frottement visqueux

En raison de son inertie, le volant a tendance à conserver un mouvement de rotation uniforme alors que le carter suit les oscillations du vilebrequin. Le mouvement relatif absorbe un travail de cisaillement du fluide qui se traduit par un dégagement de chaleur et s'oppose à de fortes amplitudes du moyeu.

### c1) Dimensions

Le choix des dimensions est un compromis entre plusieurs paramètres, on recherche en particulier :

- Un damper de petites dimensions car on est souvent limité par l'encombrement ;
- Un volant ayant une grande inertie (en agissant sur la densité du matériau le constituant ou ses dimensions) ;
- Une surface d'échange avec l'extérieur suffisante ;
- Un fluide ayant un taux de cisaillement le plus faible ;
- Un carter offrant une bonne tenue mécanique à la pression interne. Les contraintes dans le carter étant proportionnelle au carré de la vitesse de rotation ; KER WILSON préconise de limiter la vitesse périphérique à 30 m/s pour les carters en fonte et à 60 [m/s] pour les carters en acier ;
- Une température contrôlée : BICERA et KER WILSON proposent de ne jamais dépasser 90°C en utilisation continue. Quant au flux thermique, BICERA et PERVYCHIN conseillent de ne pas dépasser 6000 [W/m<sup>2</sup>].

**c2) Méthode de détermination des amortisseurs à frottement visqueux**

Pour estimer le travail par cycle de vibration effectué par le damper DEN HARTOG propose:

$$W_{\text{cycle}} = \frac{\pi}{2} I_v \cdot \omega^2 \cdot \theta_e^2 \frac{2 \left[ \frac{C}{I_v \omega} \right]}{1 + \left[ \frac{C}{I_v \omega} \right]^2}$$

Tel que :  $\theta_e = \theta_c - \theta_v$

Avec :  $\theta_v$  : le déplacement angulaire du volant ,  $\theta_c$  le déplacement angulaire du carter ;

$I_v$  : l'inertie du volant et C le coefficient d'amortissement visqueux.

La fraction du second membre atteint sa valeur maximum pour :  $C / I_v \omega = 1$  , c'est le critère proposé par DEN HARTOG pour calculer le coefficient d'amortissement C qui assurera une dissipation d'énergie maximum.

Dans le cas où l'amortissement est maximum , on obtient une inertie effective du damper égale à celle du carter majorée de la moitié du celle du volant .

Cette méthode permet un dimensionnement des différents organes sans toutefois donner d'indications sur le choix de l'huile et des jeux qui permettront d'obtenir le coefficient d'amortissement calculé.

DEN HARTOG considère l'étude du damper isolé sans faire intervenir les autres organes de la ligne d'arbre.

Les auteurs PERVYSHIN et MAUMOV montrent que les valeurs du coefficient visqueux ne dépendent pas uniquement de  $I_v$  comme le préconise DEN HARTOG. Leur étude permet de calculer la viscosité initiale à donner au silicone pour obtenir l'amortissement maximum en tenant compte du cisaillement du fluide et du dimensionnement général du damper.

Ce type d'amortisseur est utilisé le plus souvent sur des moteurs Diesel de petite et moyenne puissance, lorsque les vibrations n'autorisent plus l'emploi des amortisseurs élastiques mais ne nécessitent pas encore celui des amortisseurs à ressorts.

**d) Amortisseurs dynamiques (ou amortisseur pendulaire accordé)**

Ces amortisseurs n'ont pas uniquement un effet sur des oscillations d'amplitudes notables, ils présentent aussi l'avantage d'être accordés sur un harmonique pour toutes les vitesses de rotation. [79].

Les axes de l'amortisseur (fig. 2.117b) ont un diamètre  $d_2$  inférieur aux alésages de diamètres  $d_1$ . Il est possible ainsi, de faire  $r = d_1 - d_2$  très faible, tout en conservant une grande masse.

Une masse pendulaire  $m$  concentrée en B est articulée en A à l'extrémité libre du vilebrequin à une distance  $OA = R$  de l'axe de rotation. Quand le point A lié rigidement au vilebrequin prend une accélération angulaire, la masse  $m$  par son inertie retarde ou avance, ce qui crée un rappel du point A (fig. 2.117a)

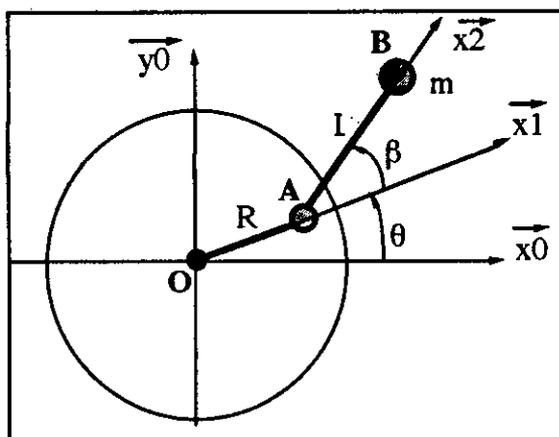


Fig. 2.117a Modèle du pendule simple entraîné en rotation.

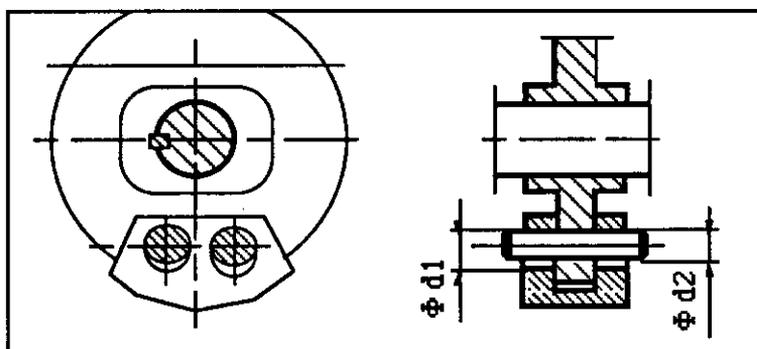


Fig. 2.117b Amortisseur dynamique

Ce dispositif agit comme une masse infinie pour l'harmonique sur lequel il est accordé, provoquant ainsi l'apparition d'un noeud à son point d'application.

On démontre que le pendule est complètement équivalent, pour de petites oscillations, à un volant de moment d'inertie  $I_{eq}$  tel que :

$$I_{eq} = \frac{m \cdot (R+L)^2}{1 - \frac{L}{R} q^2}$$

Avec :  $q$  l'ordre de l'harmonique et  $L$  la longueur du pendule.

Le numérateur de cette expression est le moment d'inertie du pendule quand il est fixé à un arbre le dénominateur est un coefficient numérique. Par conséquent un pendule accordé tel que  $q^2 = R/L$  est équivalent à un moment d'inertie infini, on dit que le pendule est accordé pour l'harmonique  $q$ . Un pendule ayant  $q^2 < R/L$ , correspond à une inertie positive,

tandis qu'un pendule qui a  $q^2 > R/L$  se comporte comme s'il avait un moment d'inertie négatif. La forme relative à l'accord  $q^2 = R/L$ , peut conduire à des difficultés de réalisation.

## 8.2. Exemple d'application de ligne d'arbres

### 8.2.1. Description de l'installation

IL s'agit de l'installation sur banc d'essai d'un moteur Diesel quatre temps en ligne. figure 2.118. La liaison entre le moteur et le frein est assurée par un accouplement élastique (A).

Nous avons retenu le modèle à 1 disques par coude du vilebrequin (la bielle et le piston y sont rattachés à chaque coude), les disques 1, 2, et 3 représentent le frein ; le disque 4 le volant moteur et le disque 9 représente la poulie avec l'amortisseur.

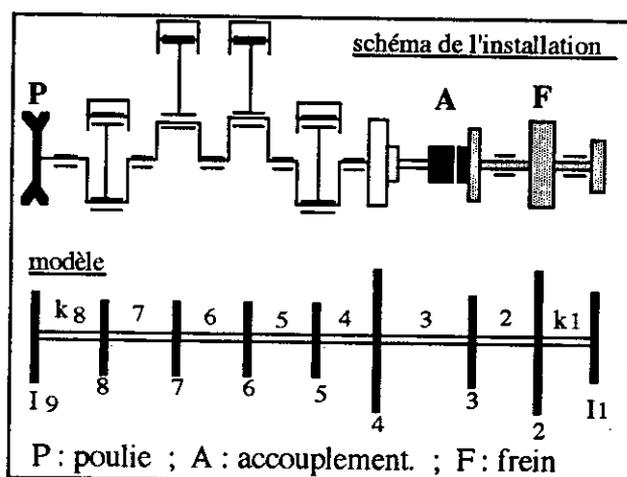


Fig. 2.118 Schéma et modèle du banc d'essai moteur

#### Caractéristiques du moteur F4L 912 :

Vilebrequin maillé à plat ;

Ordre d'allumage : 1-3-4-2.

Vitesse de rotation du moteur [tr/mn] :

$N_{max} = 2800$

$N_{min} = 1500$

Moment d'inertie de la bielle par rapport à son centre de gravité [kg m<sup>2</sup>] :  $I_{gz} = 0,0207$

Masse bielle [kg] :

$m_b = 1,7$

masse piston [kg] :

$m_p = 1,685$

Entraxe bielle [mm] :

$L = 210$

Rayon manivelle [mm] :

$R = 60$

Position du centre de gravité de la bielle par rapport au pied de bielle [mm]  $L_b = 140$

| N° volant | Inertie I [Nm s <sup>2</sup> ] | N° arbre | Régidité k [Nm/rd] |
|-----------|--------------------------------|----------|--------------------|
| 1         | 0,98 E-2                       | 1        | 0,285 E6           |
| 2         | 0,14                           | 2        | 0,285 E6           |
| 3         | 0,1725 E-1                     | 3        | 0,21 E4            |
| 4         | 0, 5525                        | 4        | 0,1 632 676 E7     |
| 5         | 0, 21 985 E-1                  | 5        | 0,145 057 E7       |
| 6         | 0, 21 985 E-1                  | 6        | 0,101 932 E7       |
| 7         | 0, 21 985 E-1                  | 7        | 0,145 057 E7       |
| 8         | 0, 21 985 E-1                  | 8        | 0,145 057 E7       |
| 9         | 0, 93 E-1                      | 8        | 0,348 669 E6       |

Tableau 1. Inerties et rigidités torsionnelles de la ligne d'arbre du modèle de la fig. 2.118

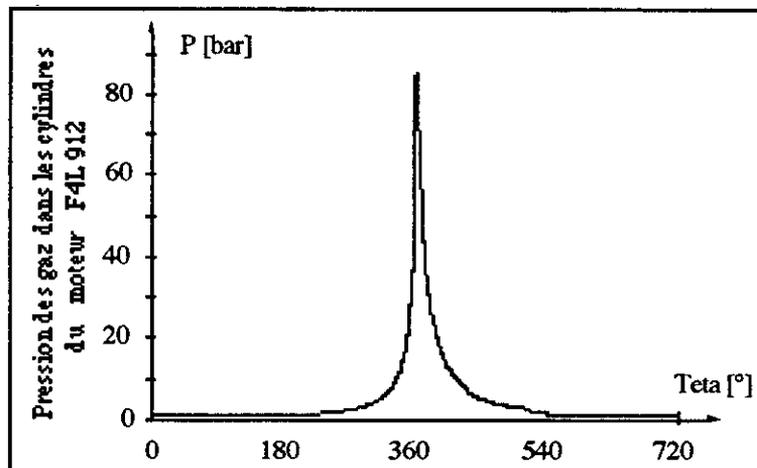


Fig. 2.119 Pression des gaz dans les cylindres du moteur F4L 912

### 8.3. Calcul en vibration libre

On recherche les pulsations naturelles (propres) de vibration permettant de déduire les fréquences de rotation critiques pour un mode donné, ainsi que les amplitudes relatives de torsion (déformées modales) des  $n$  disques pour les  $q$  modes du modèle de la figure 2.118.

#### 8.3.1. Hypothèses

- Le système obéit à la loi de Hooke (les déplacements sont proportionnels aux efforts) ;
- Seules les déformations de torsion sont prises en compte ;
- Le système est conservatif ;
- L'axe de rotation est un axe du référentiel fixe ;
- Les centres de gravité des disques appartiennent à l'axe de rotation ;







Les composantes des vecteurs propres étant définies à un coefficient près, il est donc nécessaire de se fixer une composante, par exemple l'amplitude du disque n°1 sera prise égale à 1 rad. Les composantes des vecteurs propres sont obtenues à partir de l'équation :

$$[[C] - \omega_i^2 [1]](X_i) = (0) \quad (2.201)$$

avec :  $\omega_i$  : pulsation propre n° i ;

[1] : matrice unité ;

(0) : matrice colonne composée d'éléments tous nuls ;

( $X_i$ ) : matrice colonne des composantes  $X_{i,1}, X_{i,2}, \dots, X_{i,n}$  du vecteur propre associé à la valeur propre  $\omega_i$ .

Nous obtenons ainsi les n relations suivantes :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{k_1}{I_1} - \omega_i^2 \right) X_{i,1} - \frac{k_1}{I_1} X_{i,2} = 0 \\ \forall j \in [2, n-1] & \\ & \frac{-k_{j-1}}{I_j} X_{i,j-1} + \left( \frac{k_j + k_{j-1}}{I_j} - \omega_i^2 \right) X_{i,j} - \frac{k_j}{I_j} X_{i,j+1} = 0 \\ & \frac{-k_{n-1}}{I_n} X_{i,n-1} + \left( \frac{k_{n-1}}{I_n} - \omega_i^2 \right) X_{i,n} = 0 \end{aligned}$$

En posant  $X_{i-1} = 1$  rad, nous obtenons :

$$\begin{aligned} X_{i,1} &= \frac{1}{k_1} (k_1 - I_1 \omega_i^2) \cdot 1 \\ X_{i,j+1} &= \frac{1}{k_j} \left[ (X_{i,j} - X_{i,j-1}) k_{j-1} + (k_j - I_j \omega_i^2) X_{i,j} \right] \\ \forall j \in [2, n-1] & \end{aligned}$$

Les  $X_{i,j}$  sont les amplitudes relatives (ou composantes des vecteurs propres de la matrice au pulsations)

### 8.3.4. Vitesses critiques

Un système mécanique conservatif selon les hypothèses définies au paragraphe 3.1 est caractérisé du point de vue vibratoire par :

- Les pulsations propres ;
- Les modes propres .

On peut exciter un tel système par une action extérieure. Or la nature de cette action, de son point d'application dépendra la réponse du système en vibrations forcées. Il est particulièrement important, avant de faire l'étude d'un système en vibrations forcées, de définir les vitesses dangereuses (critiques) la nature et l'intensité des actions mécaniques excitatrices.

Les vitesses critiques sont les vitesses pour lesquelles les pulsations des harmoniques (de l'excitation périodique, d'amplitudes non négligeables), sont égales à l'une des pulsations propres de ligne d'arbres.

Ces oscillations sont souvent à l'origine de la destruction des engrenages, des clavettes et d'une façon générale des lignes d'arbres, par dépassement local de la limite de fatigue.

### 8.3.4.1. Excitations

#### a) Sources électromagnétiques

– Cas d'un alternateur : lors des perturbations du réseau il apparaît des vibrations du couple électromagnétique. Il faudra donc vérifier que :

$$\omega_i \pm 10 \% \neq 314 \text{ rad/s}$$

et

$$\omega_i \pm 10 \% \neq 628 \text{ rad/s}$$

avec :  $\omega_j$  pulsation propre du mode n°<sub>j</sub>

– Cas du moteur électrique : la fréquence d'excitation [htz] du rotor d'un moteur électrique asynchrone est égale à :

$$f_m = \frac{n_p}{60} (N_c - N)$$

avec :

$n_p$  : nombre de pôles ;

$N_c$  : vitesse de rotation du champ magnétique [tr/mn] ;

$N$  : vitesse de rotation de l'arbre moteur [tr/mn].

On vérifiera que :

$$\omega_i \pm 10 \% \neq 2\pi f_m$$

#### b) Sources hydrauliques

Hélices de bateaux, roues de pompes et de turbines hydrauliques.

Les excitations dues aux variations des efforts appliqués sur l'hélice par l'eau auront des harmoniques de pulsations telles que :

$$\Omega_{jh} = j \cdot \frac{N_h \pi}{30} p$$

avec :

$j = 1, 2, \dots$

$N_h$  : vitesse de rotation de l'arbre d'hélice

$p$  : nombre de pales de l'hélice; pour les roues de pompes et turbines hydraulique,  $p$  sera pris égal aux nombres d'aubes ou de pales. Il faut vérifier que :

$$\omega_i \pm 10 \% \neq \Omega_{jh}$$

avec :  $\omega_j$  pulsation propre du mode n°<sub>j</sub>

### c) Sources mécanique

**c1) Balourds** : Lorsqu'un balourd (résiduel) existe, la pulsation de l'excitation qu'il provoque est égale à :

$$\Omega_b = \frac{\pi N}{30}$$

avec : N vitesse de rotation du rotor [tr/mn].

On doit vérifier que :

$$\omega_i \pm 10\% \neq \Omega_b$$

**c2) Engrenages** : Si N est la vitesse de rotation d'une roue dentée, portant n dents, la pulsation d'excitation [rd/s] correspondante est :

$$\Omega_b = n \frac{\pi N}{30}$$

La transmission du couple par les dentures est discontinue car le nombre de dents en prise n'est pas constant dans le temps ce qui entraîne une variation périodique du couple.

Les erreurs d'exécution de l'engrenage et de son support sont aussi génératrices de vibration de torsion. Parmi ces erreurs on retrouve :

- Les erreurs de profil ;
- Les erreurs de division ;
- Les déformations de flexion (modifient l'entre-axe des roues dentées) ;
- Les arbres mal alignés ou les pignons excentrés.

Si les défauts géométriques sont inexistant il faut vérifier que :

$$\omega_i \neq k \Omega_d$$

avec : k = 1, 2, ...

Nous nous trouvons donc en présence d'un système possédant plusieurs fréquences naturelles (ou fréquences propres) et un nombre infini de fréquences d'excitations, le nombre de résonances peut donc être considérable.

Pour limiter ces calculs, on fait appel au calcul d'importance des harmoniques qui permet de sélectionner les harmoniques des régimes dangereux.

## 8.4. Calcul d'importance

### 8.4.1. Evolution du travail d'un couple harmonique

La bielle exerce sur le maneton du vilebrequin un effort cyclique dont la composante tangentielle donne un couple périodique de période  $T = 2k\pi / \Omega$ .

avec :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \text{ pour un moteur à 2 temps ou un compresseur}$$

$$T = \frac{4\pi}{\Omega} \text{ pour un moteur à 4 temps, avec } \Omega \text{ la vitesse de rotation du vilebrequin}$$

Pour un moteur à deux temps ou un compresseur on a :

$$C(t) = C_m + \sum_q D_q \sin(q\Omega t + \varphi_j) \quad (2.202)$$

avec :

$q$  : harmonique = 1, 2, 3 ...

$C_m$  : couple moyen ;

$D_q$  : module du coefficient de Fourier.

Pour un moteur à quatre temps on a :

$$C(t) = C_m + \sum_q D_q \sin(q\Omega t + \varphi_j) \quad (2.203)$$

avec : l'harmonique  $q = 1/2, 1, 3/2, \dots$

Il y a vitesse dangereuse lorsque :

$$\omega_i = q\Omega$$

avec :

$\omega_i$  : pulsation propre du mode propre n° i

$\Omega$  : vitesse de rotation du vilebrequin

$q$  : ordre de l'harmonique d'amplitude  $D_q \neq 0$

Cette vitesse dangereuse est à prendre en considération lorsque le travail de l'harmonique d'ordre  $q$ , par cycle de vibration, est suffisant pour induire des oscillations de torsion relativement importantes. Il faut donc rechercher le travail exercé par tous les harmoniques des couples extérieurs pour déceler celui qui risque d'être dangereux.

#### 8.4.1.1. Cas d'un cylindre

Le vilebrequin tourne à la vitesse  $\Omega$ , la manivelle correspondant au disque est soumise à un couple harmonique  $C$  d'ordre  $q$  :

$$C = D_q \sin(q\Omega t + \varphi_q)$$

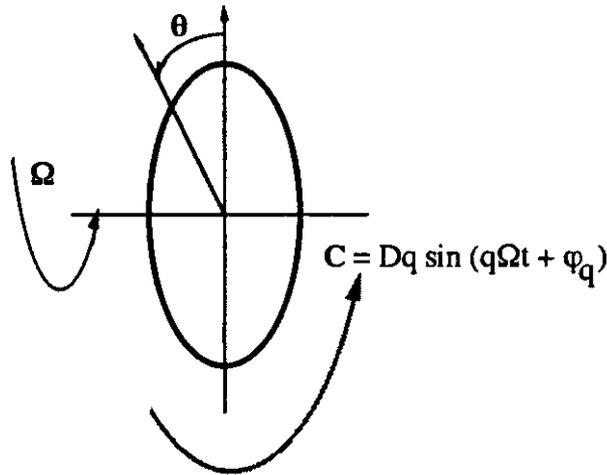
si  $q\Omega = \omega$  est une pulsation de la ligne d'arbres, la loi du mouvement oscillatoire de ce disque est :

$$\theta = X \sin(\omega t + \Phi) \quad (2.204)$$

avec :

$X$  : amplitude relative du disque, au mode propre caractérisé par la pulsation  $\omega$  ;

$\Phi$  : déphasage, on peut choisir le référentiel temps de telle sorte que  $\Phi = 0$ .



Si l'on suppose qu'il y a proportionnalité entre les amplitudes réelles et les amplitudes relatives calculées, on peut alors calculer le travail relatif du couple  $C$  pour un cycle de vibration.

Pour un angle  $d\theta$  de rotation du disque, le travail fourni par le couple est :

$$dW = C.d\theta$$

soit :

$$dW = C.X.\omega.\cos(\omega t).dt$$

Pour un cycle de vibration de pulsation  $\omega$ , le travail relatif est alors :

$$W = D_q X \omega \int_0^{T = 2\pi / \omega} \sin(q\Omega t + \varphi_q) \cos(\omega t) dt$$

soit :

$$W = \pi D_q X \sin(\varphi_q) \quad (2.205)$$

Le travail maximal est obtenu à la résonance lorsque  $\varphi_q = \pi / 2$ .

#### 8.4.1.2. Cas de plusieurs cylindres

Il s'agit d'évaluer le travail fourni par les  $n$  couples harmoniques d'ordre  $q$  pour les  $n$  cylindres et cela pour chacune des vitesses dangereuses. Les harmoniques les plus dangereux sont ceux qui fournissent le travail relatif le plus élevé par cycle de vibration.

On notera :

$$C_{iq} = D_{iq} \sin(q\Omega t + \varphi_{iq})$$

Le couple harmonique de rang  $q$  appliqué au disque correspondant au cylindre  $i$ .

A l'instant  $t_j$  l'explosion se produit au cylindre  $i$ . A cet instant, le couple harmonique d'ordre  $q$  a pour valeur :

$$C_{iq}(t_j) = D_{iq} \sin(q\Omega t_j + \varphi_{iq})$$

L'explosion dans le cylindre j a lieu à l'instant  $t_j$ . A cet instant le couple harmonique d'ordre q à pour valeur :

$$C_{jq}(t) = D_{jq} \sin(q\Omega t_j + \varphi_{jq})$$

Les bielles et pistons des deux cylindres i et j sont géométriquement identiques, on a donc :

$$C_{iq}(t) = C_{jq}(t)$$

Si les pressions régnant dans les cylindres i et j aux instants  $t_i$  et  $t_j$  sont égales, nous en déduisons :

$$D_{iq} = D_{jq} = D_q \quad \forall i \text{ et } j \in [1, n]$$

et

$$q\Omega t_i + \varphi_{iq} = q\Omega t_j + \varphi_{jq}$$

soit :

$$\varphi_{jq} = \varphi_{iq} - q\Omega(t_j - t_i)$$

Le terme  $\Omega(t_j - t_i)$  représente l'angle de rotation dont a tourné le vilebrequin entre l'explosion au cylindre i et l'explosion au cylindre j. On pose :

$$q\Omega(t_j - t_i) = \alpha_{ij} \quad (2.206)$$

Lorsque la ligne d'arbre vibre au mode propre de pulsation  $\omega = q\Omega$ , l'oscillation du disque i est :

$$\theta_i = X_i \sin(\omega t + \Phi)$$

A un mode propre donné tous les disques vibrent à la même pulsation et en phase. L'angle  $\Phi$  est donc identique pour tous les disques. On choisira l'origine des temps de telle sorte que :  $\Phi=0$ . Le travail du couple harmonique de rang q pour les n cylindres, pour un cycle de vibration est égal à :

$$W = \pi D_q \sum_{i=1}^n X_i \sin \varphi_{iq} \quad (2.207)$$

En introduisant l'angle  $\alpha_{1i}$ , on obtient :

$$W = \pi D_q \left[ X_1 \sin \varphi_{1q} + \sum_{i=2}^n X_i \sin(\varphi_{1q} - \alpha_{1i}) \right]$$

afin d'éliminer l'angle  $\varphi_{1q}$  on fait une représentation vectorielle de l'expression ci-dessus. Pour évaluer le travail on considère les vecteurs  $X_i$  définis dans un plan rapporté au repère  $(\vec{x}, o, \vec{y})$ , (fig. 2.120).

$$(\vec{OX}, \vec{X}_i) = \varphi_{1q} - q\alpha_{1i} \quad \forall i \in [2, n]$$

$$|\vec{X}_i| = X_i \text{ et } (\vec{OX}, \vec{X}_1) = \varphi_{1q}$$

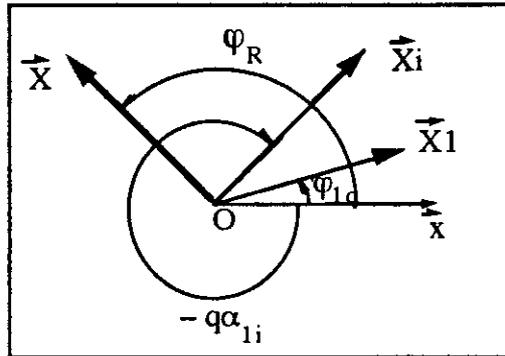


Fig. 2.120 Diagramme des phases

Soit  $\vec{X}$  le vecteur somme tel que :

$$\vec{X} = \sum_{i=1}^n \vec{X}_i \text{ et } (\vec{OX}, \vec{X}) = \varphi_R$$

Le travail a alors pour expression :

$$W = \pi D_q |\vec{X}| \sin \varphi_R$$

A la résonance :  $\varphi_R = \pi / 2$  et le travail est maximal :

$$W_{\max} = \pi D_q \left| \sum_{i=1}^n \vec{X}_i \right|$$

Si l'on se place dans un repère  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ , on peut exprimer l'amplitude du disque  $\vec{X}_i$  tel que

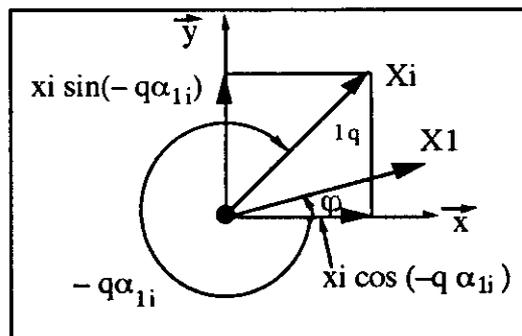


Fig. 2.121 Amplitude du disque  $i$

$$\vec{X}_i = x_i \vec{x} + y_i \vec{y}$$

ou encore :

$$\sum \vec{X}_i = \sum x_i \vec{x} + y_i \vec{y}$$

d'où :

$$|\sum \vec{X}_i| = \sqrt{\sum x_i^2 + y_i^2}$$

Donc, la valeur du travail pour le couple harmonique q peut être calculée par :

$$W_{\max} = \pi D_q \sqrt{\left[ \sum_2^n X_i \sin(-q\alpha_{1i}) \right]^2 + \left[ X_1 + \sum_2^n X_i \cos(-q\alpha_{1i}) \right]^2} \quad (2.208)$$

avec :

$D_q$  : amplitude des couples harmoniques [N.m]

$X_i$  : amplitude des disques [rad]

#### 8.4.2. Détermination des angles $\alpha_{1i}$

soit un moteur de 10 cylindres en V, l'angle du V est :  $VE = 80^\circ$ , l'angle de calage des manetons est  $\delta = 8\pi / nc = 144^\circ$ . L'ordre d'allumage choisi est : 1-3-5-4-2-8-10-9-7-6.

Soit  $li$  l'intervalle entre le cylindre 1 et le cylindre  $i$ , les angles  $\alpha_{1i}$  dépendent du maillage du vilebrequin et de l'ordre d'allumage choisi, ils sont obtenus à l'aide du schéma ci-dessous.

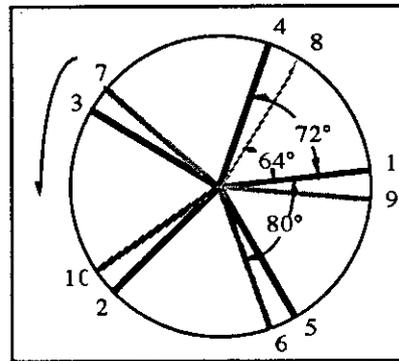


Fig. 2.122 Détermination des angles  $\alpha_{1i}$

Pour les moteur en ligne  $\alpha_{1i}$  est donné par :

$$\alpha_{1i} = \delta \cdot li \quad (2.209)$$

Pour les moteurs en V; la première rangée de cylindre est prise comme référence, dans cette rangée  $\alpha_{1i}$  est calculé d'une façon identique au moteur en ligne. Dans la deuxième rangée du V,  $\alpha_{1i}$  est donnée par :

$$\alpha_{1i} = \delta \cdot li + (\delta - VE) \quad (2.210)$$

en prenant comme référence pour li le premier cylindre de la deuxième rangée qui intervient dans l'allumage (dans notre cas c'est le cylindre 8 qui est pris comme cylindre de référence). On obtient finalement pour le moteur en V 10 cylindres :

| N°cylindre  | 1 | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8  | 9   | 10  |
|-------------|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|-----|-----|
| $\alpha$ li | 0 | 576 | 144 | 432 | 288 | 640 | 496 | 64 | 352 | 208 |

#### - Couple moteur pour un cylindre

Nous donnons sur la figure 2.123 la courbe représentant le couple exercé par la bielle sur le vilebrequin, au droit du cylindre  $n_1$ , en fonction de l'angle de rotation, pour une charge donnée.

Dans les mêmes conditions de vitesse et de charge, les couples exercés par les bielles des cylindres 2,3,4 sont identiques mais décalés en fonction de l'ordre d'allumage (1-3-4-2-1), pour un moteur 4 cylindres en ligne.

La décomposition en série de Fourier de ce couple, permet le calcul de l'amplitude (des couples harmoniques)  $Dq$  pour toutes les vitesses dangereuses et les harmoniques correspondants.

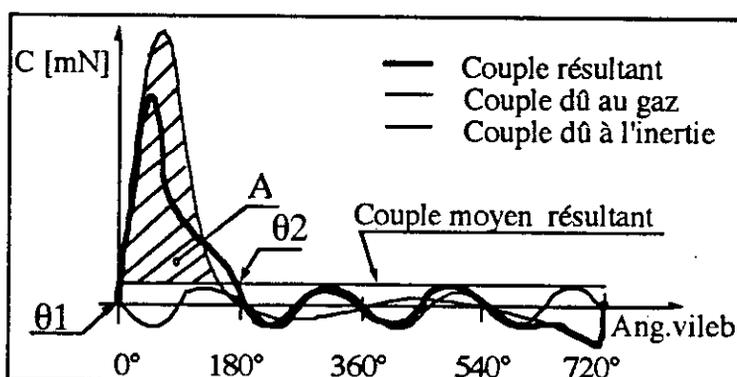


Fig. 2.123 Couple moteur pour un cylindre

#### 8.5. Etude des vibrations forcées

La dernière étape dans le calcul des vibrations de torsion est l'étude des vibrations forcées .

Au modèle de base sont ajoutés des amortissements visqueux internes ou externes et des actions mécaniques extérieures (fig.2.124)

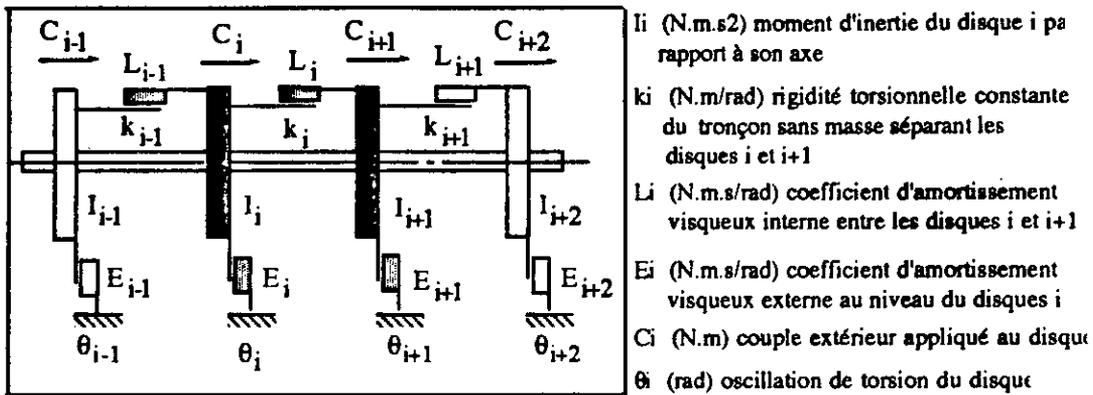


Fig. 2.124 Etude des vibrations forcées de torsion

La répartition des éléments massiques et élastiques de ce modèle est justifiée par le fait que l'on obtient, dans la plupart des cas, une bonne coïncidence entre les pulsations propres calculées et celles trouvées expérimentalement. Cette modélisation présente l'avantage de ne pas faire apparaître de termes non linéaires dans les équations différentielles du mouvement des disques. Afin de conserver cette linéarité les amortissements internes ou externes sont supposés visqueux et à coefficients constants au cours d'une période d'oscillations harmoniques. Lorsque les liaisons internes sont réalisées par des éléments visco-élastiques à fort taux d'amortissement, cette hypothèse est difficilement justifiable.

Pour la modélisation du système bielle-manivelle, nous nous baserons sur l'étude présentée dans les techniques de l'ingénieur par G. Louradour [34].

### 8.5.1. Equations du mouvement des disques

#### a) Equation du mouvement du disque i :

L'équation du mouvement du disque i de la figure 2.124 est :

$$I_i \ddot{\theta}_i - L_{i-1} \dot{\theta}_{i-1} + (L_{i-1} + L_i + E_i) \dot{\theta}_i - L_i \dot{\theta}_{i+1} - k_{i-1} \theta_{i-1} + (k_{i-1} + k_i) \theta_i - k_i \theta_{i+1} = C_i$$

Cette équation est vraie pour tous les disques de la ligne d'arbres à l'exception des disques placés aux noeuds de ramification et des disques représentant le ou les amortisseurs de torsion.

#### b) Equation du mouvement des disques d'un amortisseur de torsion

- Amortisseur visqueux (figure 2.116) ; les équations du mouvement des deux disques du modèle sont :

$$\begin{aligned} I_n \ddot{\theta}_n - L_{n-1} \dot{\theta}_{n-1} + (L_{n-1} + L_n) \dot{\theta}_n - L_n \dot{\theta}_{n+1} - k_{n-1} \theta_{n-1} + k_{n-1} \theta_n &= 0 \\ I_{n+1} \ddot{\theta}_{n+1} - L_n \dot{\theta}_n + L_n \dot{\theta}_{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

- Amortisseurs élastique (figure 2.115) les équations de mouvement des deux disques du modèle sont :

$$\begin{aligned}
 I_n \ddot{\theta}_n - L_{n-1} \dot{\theta}_{n-1} + (L_{n-1} + L_n) \dot{\theta}_n - L_n \dot{\theta}_{n+1} - k_{n-1} \theta_{n-1} + (k_{n-1} + k_n) \theta_n - k_n \theta_{n+1} &= 0 \\
 I_{n+1} \ddot{\theta}_{n+1} - L_n \dot{\theta}_n + L_n \dot{\theta}_{n+1} - k_n \theta_n + k_n \theta_{n+1} &= 0
 \end{aligned}$$

### c) Equation du mouvement d'un disque placé à un noeud de ramification

L'équation du mouvement du disque placé à un noeud de ramification s'écrit :

$$\begin{aligned}
 I_{1,n} \ddot{\theta}_{1,n} - L_{1,n-1} \dot{\theta}_{1,n-1} + (L_{1,n-1} + L_{2,1} + L_{3,1} + E_{1,n}) \dot{\theta}_{1,n} - L_{2,1} \dot{\theta}_{2,1} - L_{3,1} \dot{\theta}_{3,1} \\
 k_{1,n-1} \theta_{1,n-1} + (k_{1,n-1} + k_{2,1} + k_{3,1}) \theta_{1,n} - k_{2,1} \theta_{2,1} - k_{3,1} \theta_{3,1} = 0
 \end{aligned}$$

Le système d'équation différentielle du mouvement des disques peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[I](\theta) + [D](\dot{\theta}) + [K](\theta) = (C) \quad (2.211)$$

avec :

[I] : matrice d'inertie du système, identique à celle définie lors de l'étude des vibrations libres ;

[D] : matrice d'amortissement du système définie à partir des équations du mouvement des disques ;

[K] : matrice globale de rigidité, identique à celle définie lors de l'étude des vibrations libres ;

(C) : matrice colonne des couples extérieurs  $C_i$  ;

( $\theta$ ), ( $\dot{\theta}$ ), ( $\ddot{\theta}$ ) : matrices colonnes des paramètres  $\theta_i$ , de leurs dérivées première et seconde.

Les couples extérieurs  $C_i$  appliqués aux disques sont périodiques dans le cas d'un moteur ou d'un compresseur alternatif. Leur valeur instantanée dépend du régime de rotation, des masses des pièces en mouvement, de la pression des gaz dans le cylindre, de l'ordre d'allumage (pour les moteurs), et du maillage du vilebrequin.

#### 8.5.2. Solution du système d'équations différentielles linéaire

la solution générale de ce système est égale à la somme de l'intégrale particulière du système complet et de l'intégrale générale du système d'équations différentielles sans second membre.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Solution générale du} \\ \text{système différentiel} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Solution générale du} \\ \text{système} \\ \text{sans second membre} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Solution particulière du} \\ \text{système} \\ \text{avec second membre} \end{array} \right\}$$

la solution générale du système sans second membre représente les oscillations libres de l'installation avec amortissement.

La solution générale du système sans second membre est de la forme :

$$\theta = e^{-\omega t} \cdot (\sin \omega t)$$

En régime stationnaire on peut estimer que les amortissements internes et externes font rapidement disparaître les oscillations libres. Seule une solution particulière du système différentiel complet sera donc recherchée.

En régime stationnaire les couples appliqués sont périodiques. Ils sont représentés par leur série de Fourier

$$C_i = C_{iq} + \sum_q \left( A_{iq} \sin(q\Omega t) + B_{iq} \cos(q\Omega t) \right)$$

avec  $q$  : rang de l'harmonique et  $\Omega$  : vitesse de rotation constante de la ligne d'arbres.

En ne considérant que l'harmonique de rang  $q$  de chacun des couples  $C$  le système d'équations différentielles du mouvement des disques est alors :

$$[I] \ddot{\theta} + [D] \dot{\theta} + [K] \theta = (A_q) \sin q\Omega t + (B_q) \cos q\Omega t \quad (2.212)$$

avec

$$(A_q) = \begin{bmatrix} A_{1q} \\ A_{2q} \\ \vdots \\ A_{nq} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad (B_q) = \begin{bmatrix} B_{1q} \\ B_{2q} \\ \vdots \\ B_{nq} \end{bmatrix}$$

$(A_q)$  et  $(B_q)$  sont les matrices colonnes des coefficients  $A_{iq}$  et  $B_{iq}$  des termes en sinus et cosinus de l'harmonique de rang  $q$  du couple  $C_i$  appliqué au disque  $i$ .

L'élongation oscillatoire du disque  $i$  est harmonique, elle peut être représentée par la fonction

$$\theta_i = X_{iq} \sin(q\Omega t) + Y_{iq} \cos(q\Omega t)$$

la solution du système différentiel est recherchée sous la forme :

$$\theta = (X_q) \sin(q\Omega t) + (Y_q) \cos(q\Omega t)$$

avec  $(X_q)$ ,  $(Y_q)$  matrices colonnes dont les éléments sont respectivement  $X_{iq}$  et  $Y_{iq}$ . De cette expression nous déduisons :

$$\dot{\theta} = (X_q) q\Omega \cos(q\Omega t) - (Y_q) q\Omega \sin(q\Omega t)$$

$$\ddot{\theta} = (X_q) q^2 \Omega^2 \sin(q\Omega t) - (Y_q) q^2 \Omega^2 \cos(q\Omega t)$$

En reportant les expressions de  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$  et  $\ddot{\theta}$  dans le système différentiel, et en identifiant les termes en sinus d'une part et en cosinus d'autre part, nous obtenons les deux équations matricielles suivantes.

$$\left[ -[I] q^2 \Omega^2 + [K] \right] (X_q) - [D] \Omega q (Y_q) = (A_q)$$

$$\left[ -[I] q^2 \Omega^2 + [K] \right] (Y_q) - [D] \Omega q (X_q) = (B_q)$$

Ces deux dernières équations matricielles représentent un système linéaire de  $2n$  équations de la forme

$$[\alpha](X) = (Y) \quad (2.213)$$

avec  $[\alpha]$  matrice carrée d'ordre  $2n$ , des coefficients :

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} [-I]\Omega^2 q^2 + [K] & -[D]q\Omega \\ [D]q\Omega & [-I]\Omega^2 q^2 + [K] \end{bmatrix}$$

$$(X) = \begin{bmatrix} X_{1q} \\ \cdot \\ X_{nq} \\ Y_{1q} \\ \cdot \\ Y_{nq} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad (Y) = \begin{bmatrix} A_{1q} \\ \cdot \\ A_{nq} \\ B_{1q} \\ \cdot \\ B_{nq} \end{bmatrix}$$

avec :

$(X)$  : matrice colonne des inconnues et  $(Y)$  : matrice colonne des seconds membres.

La réponse des disques à l'harmonique de rang  $q$  est obtenue en recherchant les solutions du système linéaire défini par la relation (2.205)

La réponse globale du système est la somme des réponses à chaque harmonique, soit :

$$(\theta) = \sum_q [(X_q) \cdot \sin(q\Omega t) + (Y_q) \cdot \cos(q\Omega t)] \quad (2.214)$$

### 8.5.3. Résolution numérique

Les résultats recherchés pour les vitesses de rotation  $\Omega$ , appartenant à la plage de fonctionnement sont :

- L'amplitude d'oscillation de chaque disque (pour faire une vérification expérimentale, ou pour juger de la perturbation produite dans les mécanismes entraînés).

$$\theta_{i, \max} = \left[ \sum_q (X_{iq} \sin q\Omega t + Y_{iq} \cos q\Omega t) \right]_{\max}$$

- L'amplitude de la déformation de chaque tronçon afin de calculer les contraintes, et de décider ou non de l'installation d'un amortissement de torsion.

$$\delta_{i+1, \max} = \left| \sum_q (X_{iq} \sin q\Omega t + Y_{iq} \cos q\Omega t) + \sum_q (X_{i+1, q} \sin q\Omega t + Y_{i+1, q} \cos q\Omega t) \right|_{\max}$$

- L'amplitude du couple oscillatoire de chacun des disques pour le comparer au couple moyen (un couple oscillatoire supérieur au couple moyen à transmettre est souvent la cause de la destruction rapide des dentures).

$$m_{i, \max} = \theta_{i, \max} \cdot q^2 \Omega^2 I_i$$

- L'amplitude du couple oscillatoire entre les disques  $i$  et  $i+1$

$$H_{i+1, \max} = \delta_{i+1, \max} \cdot k_{i+1}$$

Afin de diminuer le temps de calcul et la quantité des résultats, il est important de sélectionner les vitesses dangereuses et les harmoniques en fonction des importances.

### Algorithme de calcul

Les données nécessaires au calcul sont :

- Les rangs des harmoniques dangereux et les vitesses correspondantes ;
- L'évolution de la pression des gaz dans les cylindres en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin pour les régimes dangereux :  $\Omega d_1, \Omega d_2, \dots, \Omega d_n$  sélectionnées ;
- L'ordre d'allumage des cylindres ;
- Le maillage du vilebrequin ;
- Les caractéristiques géométriques des systèmes bielle manivelle placés sur la ligne d'arbres.
- Les caractéristiques mécaniques du modèle linéaire  $I_i, K_i, L_i, E_i$ , pour la vitesse  $\Omega = \Omega d_j$ .

On calcule :

- \* Le couple appliqué sur chaque disque en tenant compte de l'ordre d'allumage et du maillage du vilebrequin ;
- \* Les coefficients  $A_{iq}$  et  $B_{iq}$  des éléments des séries de Fourier des couples  $C_i$  correspondant aux harmoniques dangereux ;
- \* Les éléments de la matrice  $[\alpha]$  ;
- \* Les solutions  $X_{iq}$  et  $Y_{iq}$  du système linéaire:  $[\alpha] \cdot (X) = (Y)$  pour chacun des harmoniques sélectionnés ;
- \* L'amplitude d'oscillation des disques choisis :  $\theta_{i, \max}$  ;
- \* L'amplitude de la déformation du tronçon compris entre les disques  $i$  et  $i+1$  :  $\delta_{i+1, \max}$  ;
- \* L'amplitude du couple oscillatoire entre les disques  $i$  et  $i+1$  :  $H_{i+1, \max}$  ;
- \* L'amplitude du couple oscillatoire appliqué au disque  $i$  :  $m_{i, \max}$ .

**TROISIEME PARTIE**

**VOLANT      MOTEUR**

## 1. VOLANT MOTEUR CLASSIQUE

### 1.1. Généralités

D'habitude on appelle volant, une pièce lourde et circulaire de grand moment d'inertie  $I$  par rapport à son axe. Le volant intervient dans divers types de machines, comme accumulateur d'énergie cinétique.

Si le moment d'inertie  $I$  du volant est exprimé en  $[\text{Nms}^2]$  et si sa vitesse angulaire  $\omega$  est exprimée en  $[\text{rad/s}]$ , son énergie cinétique  $E$  exprimée en Joules a pour expression :

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Lorsque la vitesse varie de  $\omega_1$  à  $\omega_2$ , l'énergie cinétique du volant varie algébriquement de la quantité  $\Delta E$  telle que :

$$\Delta E = \frac{1}{2} I (\omega_2^2 - \omega_1^2) \quad (3.1)$$

Soit une ligne d'arbres comportant un volant, sur laquelle agit un couple moteur  $C_m$ , un couple résistant  $C_r$  et un couple dû aux frottements  $C_f$ . Le bilan énergétique du système entre  $\theta_1$  et  $\theta_2$  est exprimé par :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} (C_m - C_r - C_f) d\theta = \frac{1}{2} I (\omega_2^2 - \omega_1^2) \quad (3.2)$$

On doit faire intervenir un volant :

- S'il existe, au cours du mouvement, des variations d'énergie cinétique  $\Delta E$  non nulles ;
- S'il y a lieu de maintenir dans des limites acceptables les variations de vitesses qui correspondent à ces variations d'énergie cinétique.

Les principales applications du volant se retrouvent dans :

*a/ Machines à accumulation d'énergie (presses mécaniques, laminoirs, marteau-pilons,...)*

Dans ces machines, le couple moteur et le couple résistant agissent dans des phases différentes ; si  $C_f$  est négligé, on aura :

- Phase accumulation : Le volant est accéléré de  $\omega_1$  à  $\omega_2$ .

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} C_m d\theta = \frac{1}{2} I (\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

- Phase restitution : Le volant est décéléré de  $\omega_2$  à  $\omega_1$

$$\int_{\omega_2}^{\omega_1} C_r d\theta = \frac{1}{2} I (\omega_1^2 - \omega_2^2)$$

*b/ Machines à régime variable (appareils de levage, ascenseurs,...)*

Dans ces machines, le volant est employé pour limiter la valeur maximale de l'accélération angulaire  $\dot{\omega}$  lors des phases de démarrage et freinage de la machine. Pendant ces périodes transitoires l'accélération a pour expression :

$$\dot{\omega} = \frac{C_m - C_r - C_f}{I}$$

*c/ Machines à régime périodique*

Machines caractérisées par la présence de masses en mouvement alternatif tel que moteurs à combustion interne, pompes, compresseurs alternatifs, etc.

Par l'emploi du volant, on cherche à réduire l'importance des oscillations de vitesse ; soit parce qu'elles pourraient être gênantes lors de l'utilisation, soit parce qu'elles peuvent produire d'importantes contraintes. Le volant est généralement monté le plus près possible des organes soumis aux couples.

## 1.2. Volant dans les moteurs à combustion interne

Pour atténuer la variation du couple moteur qui est fonction, entre autre du nombre de cylindres, de la vitesse de rotation, de la masse des organes animés d'un mouvement de rotation, nous accouplons au vilebrequin un volant moteur qui devra :

*a) Régulariser le couple moteur ;*

*b) Permettre l'obtention d'un bon ralenti ou empêcher le moteur de caler à l'arrêt du véhicule et pendant les débrayages :*

La masse du volant gêne les brusques changements de régimes, le constructeur doit adapter un compromis entre la souplesse du moteur et une vitesse de ralenti très faible et très régulière. On admet qu'un moteur courant doit pouvoir tenir un régime de ralenti de l'ordre de 300 [tr/mn] avec un coefficient de régularité compris entre 20 et 50 ((3.8) donne la définition de l'irrégularité  $i$ ) ;

*c) Servir de liaison avec la chaîne de transmission :*

Dans les transmissions classiques le volant est situé à l'arrière du moteur pour ne pas placer le vilebrequin entre l'inertie du volant et celle du véhicule (ce qui mettrait le vilebrequin entre deux couples de torsion, la fatigue en serait très accrue et les ruptures d'arbres plus à craindre) ;

*d) Servir au démarrage du moteur :*

Dans presque tous les moteurs à démarrage électrique, le pignon du démarreur attaque une couronne dentée situé sur le volant.

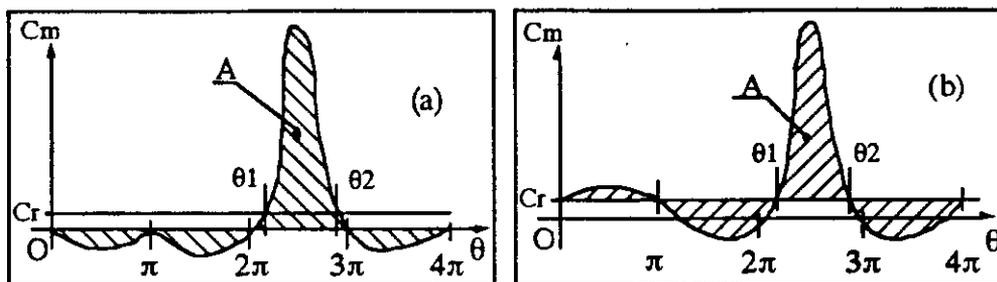


Fig 3.1 Exemple de variation du couple moteur en fonction de l'angle manivelle pour un monocylindre à quatre temps

(a) Le vilebrequin ne comporte pas de volant. Le couple n'est positif que pendant le 3ème temps (détente).

(b) Le vilebrequin comporte un volant. Le couple moteur est modifié ; une partie de l'énergie, développée par le temps actif (3ème temps) a été emmagasinée par le volant et restituée aux autres temps résistants (le 1er le 2ème et le 4ème).

Certains constructeurs emploient pour le dimensionnement des volants, le  $PD^2$ . Le produit  $PD^2$  caractérise le moment d'inertie d'un rotor par rapport à son axe de rotation, il est couramment utilisé dans l'industrie.

. Lorsque le  $PD^2$  est exprimé en kilogrammes mètres carrés [ $kg.m^2$ ] le moment d'inertie du rotor est :

$$I = \frac{PD^2}{4}$$

. Lorsque le  $PD^2$  est exprimé en Newtons-mètres carrés ( $N.m^2$ ), le moment d'inertie du rotor est alors exprimé par :

$$I = \frac{PD^2}{4g} \quad (3.3)$$

Avec : P [kg] le poids du volant, D [m] le diamètre de giration du volant et g [ $m/s^2$ ] l'accélération de la pesanteur.

On remarque qu'une augmentation du diamètre de giration a plus d'influence sur l'inertie qu'une augmentation de poids. Mais d'un autre coté, on ne peut accroître à volonté le diamètre au risque d'augmenter les vitesses linéaires périphériques (les vitesses linéaires sont de l'ordre de 50 m/s pour les fontes et de 100 m/s pour l'acier). Il résulte de ce qui précède que le volant doit :

- Présenter un moment d'inertie suffisant pour assurer la régularité cyclique, tout en permettant les changements rapides de régime ;
- Etre parfaitement équilibré pour ne pas engendrer des forces centrifuges irrégulières dont le vilebrequin supporterait la résultante ;

– Présenter un compromis entre le poids, qu'il est intéressant de ne pas augmenter pour éviter d'alourdir le moteur, et le rayon qu'on ne peut accroître à volonté, au risque d'augmenter les vitesses linéaires périphériques.

**Remarque :** On exprime généralement les moments d'inerties en  $[N.m.s^2]$ , et les  $PD^2$  sont exprimés en  $[kg.m^2]$  ou en  $[N.m^2]$ .

e) *Schéma du volant moteur :*

Le volant se présente sous la forme d'un disque en fonte ou en acier dont la masse est rejetée à la périphérie. Il comprend la jante qui en est la partie active, et la toile dont l'épaisseur, est celle strictement nécessaire pour assurer la rigidité.

Sur cette toile sont ménagés des trous pour le passage des boulons de fixation en bout de vilebrequin. Le volant reçoit la couronne dentée pour l'engrènement du pignon de démarreur. Sujette à usure cette couronne est généralement rapportée.

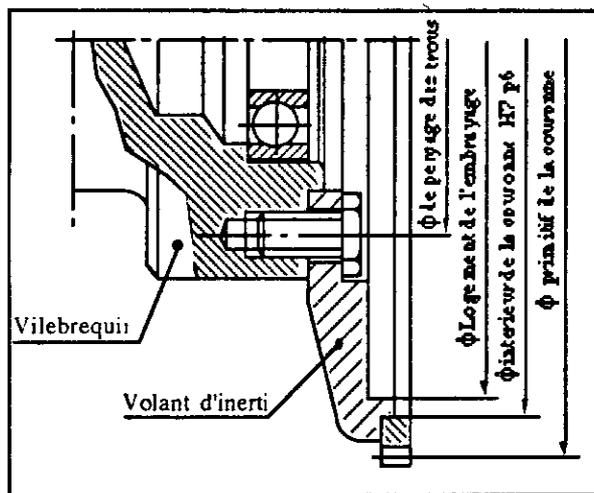


Fig. 3.2 Fixation du volant moteur sur le vilebrequin.

Le volant porte souvent sur la périphérie les repères de réglage (point mort, point d'allumage, repères de la distribution). Enfin la face externe constitue, dans la majorité des cas, la face d'appui du disque d'embrayage.

### 1.3. Calcul des volants moteur

Le calcul des volants d'inertie se faisait selon deux méthodes ; l'une ancienne basée sur le calcul de la masse ou de l'inertie et l'autre plus moderne basée sur le théorème de l'énergie cinétique appliqué à la ligne d'arbre considérée, en prenant la vitesse moyenne comme la moyenne arithmétique entre les vitesses maximum et minimum. Nous proposons une troisième méthode qui améliore cette dernière.

#### 1.3.1. Méthode ancienne

La méthode qui est encore employée, pour donner un aperçu global mais rapide sur l'inertie du volant est celle représentée par la relation (3.3).

Une autre méthode qui n'est plus employée de nos jours, basée sur le calcul de la masse du volant, puisque à partir de cette grandeur, il est très simple de trouver les dimensions qu'il faut lui donner suivant le matériaux employé pour sa construction.

Parmi les paramètres importants qui rentrent dans le calcul de la masse du volant, l'irrégularité cyclique, la puissance du moteur, ainsi que la vitesse du rayon moyen du volant. C'est ainsi que la masse est donnée par :

$$m = \frac{k \cdot P}{i \cdot g \cdot N \cdot V^2}$$

Ou encore :

$$m = \frac{93 k \cdot P}{i \cdot N^3 \cdot R^2} \quad (3.4)$$

Avec :

k : le coefficient tenant compte du travail résistant constant, entrant en jeu dans un tour du volant ;

i : l'irrégularité cyclique ; N le nombre de tours par minute de l'arbre portant le volant ;

R : le rayon moyen de la couronne (volant) en [m] et P la puissance du moteur en [ch].

Une fois la masse du volant trouvée, connaissant sa densité volumique et l'encombrement du moteur, on détermine les dimensions du volant considéré.

### 1.3.2. Méthode classique

L'équation d'équilibre dynamique de la ligne d'arbre, peut être obtenue directement par l'application du théorème des forces vives. Soit  $C_m$  le couple moteur et  $C_r$  le couple résistant, si on néglige les pertes par frottement, on aura pour une variation angulaire  $d\theta$  :

$$(C_m - C_r) d\theta = \frac{1}{2} d(\sum m v^2) \quad (3.5)$$

$\frac{1}{2} d(\sum m v^2)$  représente la variation d'énergie cinétique des pièces en mouvement de translation et de rotation.

Si  $I$  est le moment d'inertie résultant de toutes les masses, en mouvement de translation et de rotation rapporté à l'axe du vilebrequin, on aura après intégration, pour une rotation de  $\theta_1$  à  $\theta_2$ .

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} (C_m - C_r) d\theta = \frac{1}{2} I (\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

Si nous remplaçons le couple résistant  $C_r$  par le couple moteur moyen constant  $C_{moy}$  on aura :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} (C_m - C_{moy}) d\theta = \frac{1}{2} I (\omega_2^2 - \omega_1^2) = A \quad (3.6)$$

A représente l'aire sous tendue à la courbe du couple  $C_m$ , limitée par  $C_{moy}$  entre  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . L'aire A est soit déterminée au planimètre sur le graphe (fig.3.1) soit par une autre méthode.

Comme  $\omega_1 = \omega_{min}$  et  $\omega_2 = \omega_{max}$  donc :

$$\left( \omega_2^2 - \omega_1^2 \right) = (\omega_M + \omega_m)(\omega_M - \omega_m) = \frac{2A}{I}$$

D'autre part, la vitesse angulaire moyenne  $\omega$  est prise approximativement comme étant la moyenne arithmétique entre  $\omega_{max}$  et  $\omega_{min}$ . c'est à dire :

$$\omega = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2} \quad (3.7)$$

Nous en déduisons :

$$\omega_{max} - \omega_{min} = \frac{A}{\omega I}$$

Comme l'irrégularité est donné par :

$$i = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega} \quad (3.8)$$

donc :

$$i = \frac{A}{\omega I} \quad (3.81)$$

Pour réduire l'irrégularité  $i$ , il faut soit augmenter le régime  $\omega$ , soit augmenter l'inertie  $I$  pour un couple donné. Comme il est plus intéressant d'avoir  $\omega$  faible (cas du moteur au ralenti), on doit donc augmenter  $I$ . On peut obtenir ce résultat en ajoutant aux pièces en mouvement de rotation le volant d'inertie.

Soit  $i_1$  la valeur maximale admise du coefficient d'irrégularité cyclique (y compris le volant),  $I_v$  le moment d'inertie du volant et  $I_{sv}$  le moment d'inertie des pièces en mouvement sans volant. D'après (3.8) on doit avoir :

$$i_1 = \frac{A}{(I_{sv} + I_v) \omega} \quad (3.9)$$

D'où le moment d'inertie recherché, qui nous permet de dimensionner le volant :

$$I_v = \left( \frac{\left( \frac{A}{I_1} \right)}{\omega^2} \right) - I_{sv} \quad (3.10)$$

$$I_v = I_{sv} \left( \frac{i}{I_1} - 1 \right)$$

Donc pour calculer  $I_v$ , il suffit de connaître l'inertie des pièces en mouvement  $I_{sv}$ , l'air sous tendu à la courbe du couple moteur, la vitesse angulaire moyenne  $\omega$  ainsi que l'irrégularité  $i_1$ , choisie selon le type de moteur.

### 1.3.3. Méthode améliorée

Dans la méthode classique, nous avons fait l'hypothèse qui consiste à dire que la vitesse moyenne est égale à la moyenne arithmétique entre les vitesses maximum et minimum. Cette hypothèse diminue l'exactitude des résultats, mais facilite les calculs à la main. Tenons compte des moyens de calcul numérique, il est possible d'envisager une méthode pour le calcul de l'irrégularité cyclique  $i$  plus précise.

$$i = \frac{\int_{\theta_1}^{\theta_2} (C_m - C_{moy}) d\theta}{I \omega_{moy}^2} = \frac{A}{I \omega^2} \quad (3.11)$$

D'autre part, on sait que :

$$C_m - C_r = C(t) = I \frac{d\omega}{dt} = I \ddot{\theta}$$

D'où :

$$\omega(t) = \frac{1}{I} \int C(t) dt \quad (3.12)$$

Comme on connaît l'expression de  $C(t)$ , on peut trouver la fonction  $\omega(t)$  en fonction de  $I$ . Connaissant  $\omega(t)$ , on trouvera  $\omega_{max}$ ,  $\omega_{min}$  et  $\omega_{moy}$ . Par conséquent on trouvera  $i$  en fonction de  $I$  sans faire d'hypothèse simplificatrice sur la vitesse moyenne. Le reste du calcul se fait d'une manière analogue à la méthode classique.

### 1.4. Simulation de la variation de vitesse du vilebrequin

On s'intéressera à la simulation des variations de vitesse du moteur suivant certains états de fonctionnement. Nous simulerons l'effet des forces de pression, des forces d'inertie et du frottement chemise-piston.

Le calcul des variations de vitesse du vilebrequin nécessite la connaissance des couples résultants de chaque bielle qui lui sont appliqués.

Après avoir calculé ces couples, et ayant déterminé par application du principe fondamental de la dynamique, l'accélération angulaire du vilebrequin (ce dernier est considéré comme rigide en torsion) par intégration, nous accédons à la variation de vitesse.

La vitesse uniforme est fixée par l'équilibre des couples moyens moteurs et récepteurs. Dans le cas qui nous intéresse (fonctionnement du moteur à vide), le couple récepteur moyen est essentiellement dû aux frottements de l'équipage mobile. Or celui-ci n'est pas connu avec suffisamment de précision, pour nous permettre de déterminer correctement la vitesse moyenne. Par conséquent, nous nous intéressons uniquement à la variation de vitesse.

Nous calculerons donc les couples résultants sur le vilebrequin et les variations de vitesse correspondantes, pour divers cas de simulation.

Si l'on admet que le vilebrequin se comporte comme un corps rigide, il est possible d'écrire :

$$C(t) = I \frac{d^2\theta}{dt^2} = I \ddot{\theta} \quad (3.13)$$

ou encore :

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{C(t)}{I} = \frac{1}{I} f(\theta, t)$$

En fixant la valeur moyenne nulle pour  $C(t)$  (toujours vraie pour  $C_i(t)$ ), l'intégration de  $\ddot{\theta}(t)$  donne une vitesse instantanée de composante moyenne nulle ce que nous appellerons variation de vitesse. Le couple peut être exprimé par sa décomposition en série de Fourier, dans le cas d'un moteur à quatre temps, on aura :

$$C(t) = C_{\text{moy}} + \sum_{q=1}^{\infty} \left[ a_q \sin q\omega t + b_q \cos q\omega t \right]$$

avec :  $a_q$  et  $b_q$  les coefficients harmoniques de Fourier. Les harmoniques  $q$  sont dites d'ordre  $1/2, 1, 3/2, \dots, 9$ .

Le couple peut aussi être donné sous sa forme explicite :

$$C(t) = -R (X_A \cos\theta + Y_A \sin\theta)$$

$X_A$  et  $Y_A$  sont les composantes de l'effort  $FA$  provoqué par la poussée de la bielle sur la manivelle.

En intégrant le couple on obtient :

$$\dot{\theta} = \frac{1}{I} \int C(t) dt \quad (3.14)$$

Cette intégrale est évaluée en posant le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \dot{\phi} \\ \dot{\phi} &= \ddot{\theta} = \frac{1}{I} f(\theta, t) \end{aligned}$$

Or par définition on a :

$$\frac{\theta_{n+1} - \theta_n}{h} = \dot{\phi}$$

et

$$\frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{h'} = \dot{\phi}$$

Les pas  $h$  et  $h'$  sont très faibles (de l'ordre de  $1E-03$ ), ils ne sont pas nécessairement les mêmes, d'où :

$$\theta_{n+1} = h\dot{\phi} + \theta_n$$

$$\phi_{n+1} = h'\dot{\phi} + \phi_n = h' \cdot \frac{C(t)}{I} + \phi_n$$

Ou encore :

$$\phi_1 = \phi_0 + h' \cdot \frac{C(t)}{I} ; \quad t=0$$

$$\theta_1 = \theta_0 + h\phi_1$$

⋮

⋮

$$\phi_n = \phi_{n-1} + h' \cdot \frac{C(t)}{I} ; \quad t = (n-1) \cdot h' \quad (3.15)$$

$$\theta_n = \theta_{n-1} + h\phi_n$$

Si  $\theta$  et  $\phi$  correspondent à chaque degré de rotation du vilebrequin, le couple  $C(t)$  le sera aussi.

On peut ainsi obtenir les variations de vitesse  $\Delta V$ ,  $\Delta V_g$  et  $\Delta V_i$  du couple résultant  $C$  et ses composantes  $C_g$  et  $C_i$ , selon que l'on utilise  $C$ ,  $C_g$  ou  $C_i$ .

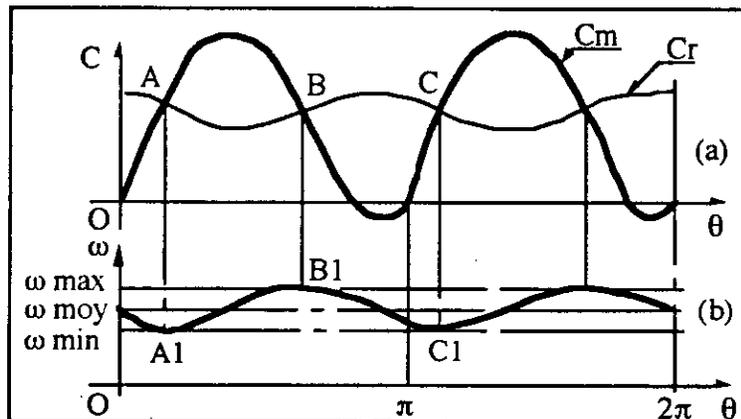


Fig. 3.3 Variation de  $C(t)$  et de  $\omega(t)$  en fonction de l'angle  $\theta$

Nous avons représenté en (a) le couple moteur  $C_m$  et le couple résistant  $C_r$  en fonction de l'angle de manivelle  $\theta$ , en supposant que leur période ( $T=AC$ ) est la même. En (b) nous

avons représenté la vitesse angulaire  $\omega$  en fonction de l'angle  $\theta$ , en considérant la vitesse angulaire moyenne constante.

- De A à B le couple moteur est supérieur au couple résistant, le mouvement est accéléré, et  $\omega$  croît de A1 à B1.
- De B à C le couple résistant est supérieur au couple moteur, le mouvement est retardé, et  $\omega$  décroît de B1 à C1.

Le volant moteur doit donc diminuer la variation de la vitesse angulaire ( $\omega_{\max} - \omega_{\min}$ ), il doit limiter l'emballement pendant la période A1B1 et limiter le ralentissement pendant la période B1C1.

On admet généralement une variation de la vitesse angulaire de 2,5% autour d'une vitesse moyenne. Cette variation peut descendre jusqu'à 1%.

## 2. DIMENSIONNEMENT DU VOLANT

Le dimensionnement du volant est basé sur deux données principales :

- L'irrégularité cyclique ;
- Les formes et dimensions des éléments montés sur le volant.

### 2.1. Principe

On détermine la masse du volant en tenant compte de l'inertie, de l'irrégularité cyclique et des rayons extérieurs et intérieurs du disque. Puis on calcule l'épaisseur minimum que doit avoir l'âme du volant ainsi que le rayon maximum en tenant compte de la vitesse périphérique admise pour qu'il n'y ait pas de rupture.

En fonction des éléments énumérés, on améliore le coefficient de l'irrégularité en jouant sur la forme du volant tout en respectant la compatibilité géométrique des pièces montées sur ce dernier; et ceci à l'aide du logiciel DVMAO (Dimensionnement du Volant Moteur Assisté par ordinateur). Pour des raisons de commodités, les programmes sont réalisés sur un micro-ordinateur.

### 2.2. Détermination de la masse du volant

Le moment d'inertie du volant est donné par (3.10) déjà démontrée.

$$I_v = \left( \frac{\left( \frac{A}{i_1} \right)}{\omega^2} \right) - I_{sv} \quad (3.10)$$

Pour un moteur diesel, la valeur maximale admise de  $i_1$  est généralement voisine de 1/20. C'est cette valeur que nous adopterons dans les calculs à venir. De même on imposera pour le moteur au ralenti  $\omega_{\text{moy}} = 600$  [tr/mn].

L'inertie de la ligne d'arbres sans volant s'écrit :

$$I_{sv} = n_c \cdot I_c + I_a$$

avec :

- $n_c$  : nombre de coudes ;
- $I_c$  : moment d'inertie d'un coude [m.N.s<sup>2</sup>] ;
- $I_a$  : moment d'inertie de l'amortisseur [m.N.s<sup>2</sup>].

Cette dernière inertie n'intervient pas dans un premier temps. C'est le calcul à venir qui justifiera ou non la nécessité d'un amortisseur.

D'autre part, le moment d'inertie d'un volant cylindrique  $I_v$  en fonction de la masse est donné par

$$I_v = \frac{1}{2} M \left( \frac{R_{\text{ex}}^4 - R_{\text{in}}^4}{R_{\text{ex}}^2 - R_{\text{in}}^2} \right) \quad (3.16)$$

Ce qui nous permet de déterminer la masse  $M$  du volant connaissant son inertie  $I_v$  en  $[N.m.s^2]$

$$M = \frac{2 I_v (R_{ex}^2 - R_{in}^2)}{(R_{ex}^4 - R_{in}^4)} \quad (3.17)$$

Où  $R_{ex}$  et  $R_{in}$  sont les rayons extérieur et intérieur du volant exprimés en  $[m]$ .

### 2.3. Détermination de l'épaisseur minimale du volant ( $E_{min}$ )

La masse du volant est donnée par :

$$M = \rho \cdot V$$

Avec  $V$  le volume en  $[m^3]$  et  $\rho$  la densité volumique en  $[kg/m^3]$

En exprimant le volume en fonction de l'épaisseur, on aura :

$$M = \rho \pi E (R_{ex}^2 - R_{in}^2) \quad (3.18)$$

En égalisant les valeurs de (3.17) et (3.18) on obtient l'épaisseur  $E$ .

$$E = \frac{2 I_v}{\rho \pi (R_{ex}^4 - R_{in}^4)} \quad (3.19)$$

L'expression de la vitesse linéaire périphérique  $V_p$  en  $[m/s]$ , est exprimée en fonction du rayon extérieur par :

$$V_p = \omega \cdot R_{ex} = \frac{\pi N}{30} \cdot R_{ex}$$

d'où :

$$R_{ex \max} = \frac{30 V_{p \max}}{\pi N}$$

où  $N$  est la vitesse maximum du moteur en  $[tr/mn]$ .

Pour une vitesse maximale admise  $V_{p \max}$ , on aura un rayon maximum  $R_{ex \max}$  à ne pas dépasser ; ce rayon maximum correspondra à l'épaisseur minimale de l'âme du volant  $E_{min}$ . Donc nous devons avoir

$$E_{min} \geq \frac{2 I_v}{\rho \pi (R_{ex}^4 - R_{in}^4)} \quad (3.20)$$

On doit vérifier aussi, le volant par rapport à la résistance, par la relation :

$$R_{moy} \leq \sqrt{\frac{\sigma_{ad}}{\rho \omega^2}} \quad (3.21)$$

Où  $\sigma_{ad}$  est la contrainte normale admissible du matériau choisi,  $\rho$  la densité volumique du matériau choisi,  $\omega$  la vitesse angulaire moyenne du volant et  $R_{moy}$  le rayon moyen du volant.

#### 2.4. Dimensionnement du volant.

Afin de pouvoir initialiser les calculs, nous avons choisi une forme de volant (fig.3.4) en se basant sur les données relatives aux dimensions des pièces assemblées sur ce dernier.

Le volant se décompose en éléments simples suivant la figure (b). On peut alors calculer le moment d'inertie de chacun de ces éléments par rapport à  $xx'$ . La somme de ces différents parties nous donne l'inertie du volant dessiné :  $I_d$ .

$$I_d = \sum_{i=1}^n I_{Gi} \quad (3.22)$$

$I_{Gi}$  : inerties des différentes parties du volant de forme géométrique simple.

On visera ensuite, en faisant varier certains de ces éléments à égaliser les deux termes  $I_d$  et l'inertie calculée  $I_v$ .

Nous initialiserons les calculs avec :

$$E_{cal} = \frac{2I_v}{\pi\rho(R_d^4 - R_{in}^4)}$$

tel que  $R_d < R_{exmax}$  et  $R_{in} = d_1$

$$R_{cal} = \frac{9}{10}R_d$$

Les différentes longueurs énumérées sur la fig. 34 auront pour valeurs, en fonction de  $E_{cal}$  et  $R_{cal}$  :

$$E1 = E_{cal}$$

$$E2 = E3 = E_{cal} / 4$$

$$E4 = E_{couronne} = 16$$

$$E5 = E_{embrayage} = 5$$

$$E6 = E1 + E2 + E5$$

$$R1 = R_{vil} = (65/2)$$

$$RT = (94/2) \text{ 8 trous de fixation du volant sur le vilebrequin } \phi d_1$$

$$d1 = VF = (11)$$

$$L1 = 3d1 + E2$$

$$L2 = R_{cal} - (L1 + L3 + L4 + R1)$$

$$L3 = 2E4$$

$$L4 = E2 = [(d_p \text{ cour} - d_{int} \text{ cour}) / 2 - 2]$$

$$L5 = (R1 + L1 + L2 + L3 + L4) = R_{cal}$$

$$L6 = d_{ex} \text{ emb} + E2 = (280/2)$$

$$L7 = d_{in} \text{ emb} - E2 = (152/2)$$

L'inertie des 8 trous  $\phi d1$  n'intervient pas, car ces trous seront comblés par les vis de fixation. Les angles des parties obliques seront pris égaux à  $45^\circ$ .

Afin d'améliorer l'inertie  $I_d$  (faire tendre  $I_d$  vers  $I_v$ ), on modifie le rayon  $R_{cal}$  (en le faisant augmenter) puis, on agit sur  $E_{cal}$  de façon à obtenir :

$$\frac{10}{9} E_{cal} < E_6 < \frac{3}{2} E_{cal}$$

On vérifiera que l'on a bien :

$$I_v - I_d \leq \epsilon$$

$E_{cour}$  : épaisseur de la couronne ;

$R_{vil}$  : rayon de centrage du vilebrequin sur le volant moteur ;

$RT$  : rayon de perçage des trous de fixation du volant sur le vilebrequin ;

$d1$  : diamètre des trous de fixation ;

$d_{p\ cour}$  : diamètre de pied de la couronne ;

$d_{in\ cour}$  : diamètre intérieur de la couronne ;

$d_{ex\ emb}$  : diamètre extérieur de l'embrayage ;

$d_{in\ emb}$  : diamètre intérieur de l'embrayage ;

$\epsilon$  : valeur de l'erreur permise sur le calcul de l'inertie dessinée.

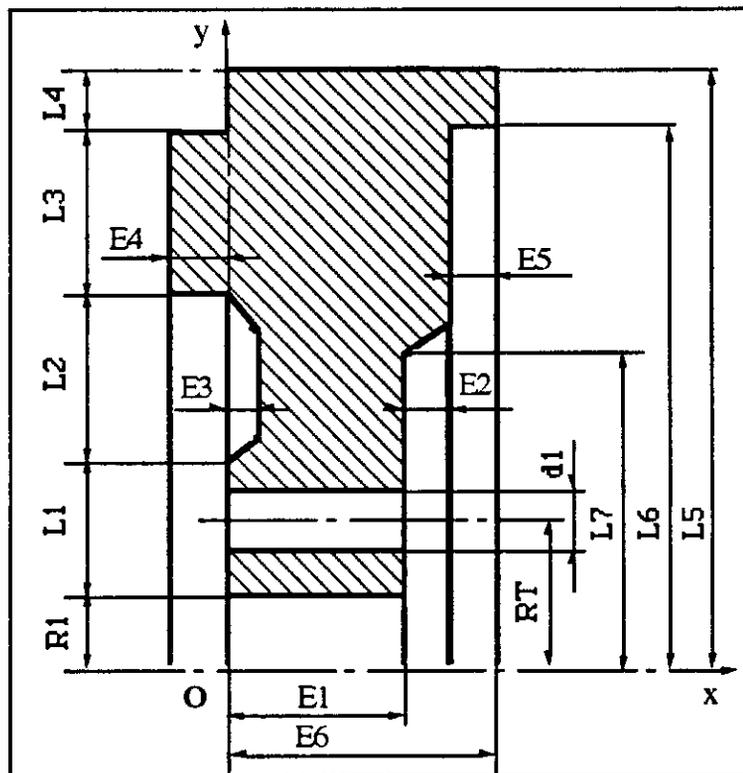


Fig.3.4 Forme initiale du volant

La figure 3.4 représente les coordonnées  $(x_i, y_i)$  du volant et la figure 3.5 représente la décomposition du volant en forme géométrique simple pour le calcul de  $I_D$ .

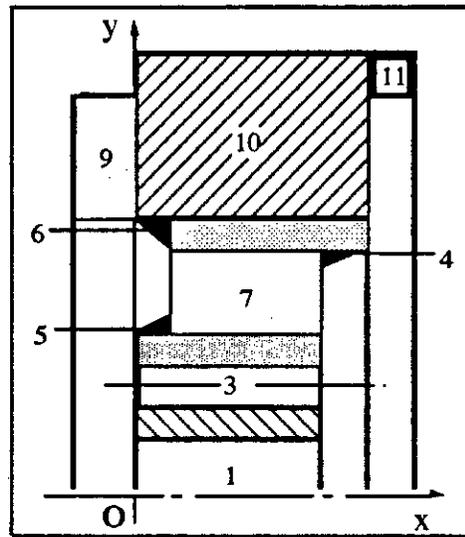


Fig.3.5 Décomposition du volant en formes géométriques simples.

### 3. VOLANT PENDULAIRE

#### 3.1. Introduction

Le moteur à explosion interne, de par son fonctionnement, est un générateur d'oscillations de torsion. Les efforts produits par la compression des gaz avant explosion, l'explosion des gaz dans les cylindres et le mouvement des pistons et bielles agissent sur le vilebrequin en modifiant sans cesse sa vitesse de rotation autour d'une valeur moyenne.

On remédie généralement à ce type de problème par l'emploi du volant d'inertie, qui régularise le couple moteur et contribue ainsi à améliorer la régularité cyclique.

Cependant cette solution, ne donne pas entière satisfaction, particulièrement pour les véhicules industriels.

C'est à ce titre que nous développons les volants de types pendulaires à masse auxiliaires roulantes, susceptibles de mieux régulariser la vitesse de l'arbre.

Le principe consiste à utiliser des masses pendulaires centrifuges indépendantes, qui oscillent sans frottement, dans des cavités cylindriques équidistantes, à une distance  $R$  du centre du volant.

Les effets dynamiques maintiennent l'orientation des masses oscillantes qui s'opposent au mouvement et engendrent une inertie supplémentaire qui s'ajoute à celle du support, donc à celle de la ligne d'arbre.

#### 3.2. Amortisseur pendulaire

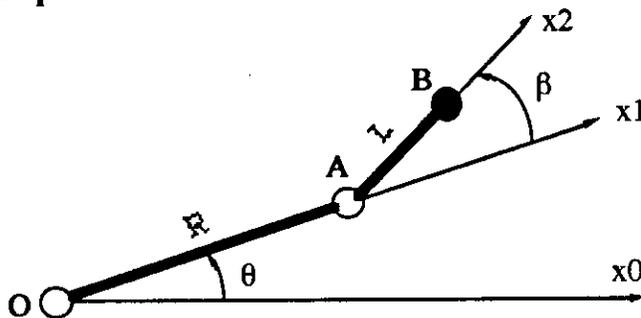


Fig.3.6 Modèle du pendule simple entraîné en rotation

#### Hypothèses :

- Pesanteur négligée ;
- Masse du pendule concentrée en B ;
- Frottements au niveau des articulations négligeables ;
- Vitesse de rotation  $\theta' = \Omega = \text{constante}$  ;
- Amplitude du pendule faible.

##### 3.2.1. Pulsation propre du pendule

###### a) Calcul de l'énergie cinétique

$$2T = m V_B^2$$

avec :

$$\begin{aligned}\vec{V}_B &= \vec{V}_A + \vec{V}_B^A \\ V_A &= R\Omega \\ V_B^A &= L(\Omega + \dot{\beta})\end{aligned}$$

D'après le théorème de Pythagore généralisé, la vitesse au carrée en un point est donnée par :

$$\begin{aligned}V_B^2 &= (V_A)^2 + (V_B^A)^2 + 2 V_A \cdot V_B^A \cdot \cos\beta \\ V_B^2 &= R^2 \Omega^2 + L^2 (\Omega + \dot{\beta})^2 + 2RL\Omega (\Omega + \dot{\beta}) \cos\beta\end{aligned}$$

d'où l'énergie cinétique :

$$2T = \left[ R^2 \Omega^2 + L^2 (\Omega + \dot{\beta})^2 + 2RL\Omega (\Omega + \dot{\beta}) \cos\beta \right] \quad (3.23)$$

#### b) Calcul de la fonction de force U

- Pesanteur négligée :  $U = 0$
- Liaisons à frottement nul :  $U = \text{constante}$

#### c) Equations de Lagrange en $\beta$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} &= m \left[ RL\Omega \cos\beta + L^2 (\Omega + \dot{\beta}) \right] \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} \right] &= m \left[ -RL\Omega \dot{\beta} \sin\beta + L^2 \ddot{\beta} \right] \\ \frac{\partial T}{\partial \beta} &= m \left[ -RL\Omega \sin\beta \cdot (\Omega + \dot{\beta}) \right] \\ \frac{\partial U}{\partial \beta} &= 0\end{aligned}$$

En utilisant les équations de Lagrange en  $\beta$  on obtient l'équation du mouvement :

$$m \left( L^2 \ddot{\beta} + RL\Omega^2 \sin\beta \right) = 0 \quad (3.24)$$

#### d) Pulsation propre du pendule

Pour  $\beta$  faible l'équation du mouvement linéarisée est :

$$m \left( L^2 \ddot{\beta} + RL\Omega^2 \beta \right) = 0 \quad (3.25)$$

D'où la pulsation propre du pendule :

$$\omega_p = \Omega \sqrt{\frac{R}{L}} \quad (3.26)$$

### e) Accord du pendule

Le disque support tourne à la vitesse  $\Omega$ , une vibration de pulsation  $q\Omega$  se superpose à cette vitesse de rotation.

$$\theta = \Omega t + A \sin(q\Omega t)$$

Pour  $q\Omega = \omega_p$ , le pendule rentre en résonance, on a donc :

$$q\Omega = \Omega \sqrt{\frac{R}{L}} \quad \text{soit} \quad q^2 = \frac{R}{L} \quad (3.27)$$

Le pendule est accordé si :  $L = \frac{R}{q^2}$

L'accord du pendule ne dépend pas de la vitesse de rotation du disque support mais, seulement de l'harmonique  $q$  de la vibration.

### 3.2.2. Moment d'inertie équivalent

Considérons le disque support du pendule de moment d'inertie  $I$  par rapport à son axe de rotation. Les équations du mouvement de ce système sont :

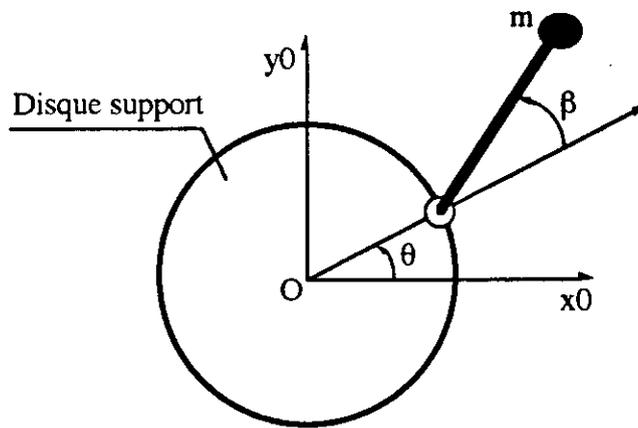


Fig. 3.7 Pendule articulé sur son disque support

$$\begin{aligned} [m(R+L)^2 + I] \ddot{\theta} + mL(R+L) \ddot{\beta} &= 0 \\ (R+L)\ddot{\theta} + L\ddot{\beta} + R\dot{\theta}^2\beta &= 0 \end{aligned}$$

Le disque tourne à la vitesse  $\Omega$  constante. On superpose à ce mouvement une vibration  $\alpha$  tel que:

$$\theta = \Omega t + \alpha$$

Les équations du mouvement deviennent :

$$\left[ m(R+L)^2 + I \right] \ddot{\alpha} + mL(R+L) \ddot{\beta} = 0 \quad (3.28)$$

$$(R+L)\ddot{\alpha} + L\ddot{\beta} + R(\dot{\alpha})^2 \beta = 0 \quad (3.29)$$

Les amplitudes des vibrations sont faibles, on peut alors faire l'approximation suivante :

$$\Omega + \alpha \approx \Omega$$

d'où les équations du mouvement :

$$\left[ m(R+L)^2 + I \right] \ddot{\alpha} + mL(R+L) \ddot{\beta} = 0$$

$$(R+L)\ddot{\alpha} + L\ddot{\beta} + R\Omega^2 \beta = 0$$

Le pendule a une pulsation  $\omega_p$  telle que :

$$\ddot{\beta} = -\omega_p^2 \beta$$

donc la deuxième équation du mouvement s'écrit :

$$(R+L)\ddot{\alpha} + \left( R\Omega^2 - L\omega_p^2 \right) \beta = 0$$

Soit :

$$\beta = \frac{(R+L) \ddot{\alpha}}{L\omega_p^2 - R\Omega^2}$$

d'où :

$$\ddot{\beta} = \frac{-(R+L) \ddot{\alpha}}{L\omega_p^2 - R\Omega^2} \omega_p^2$$

Si le pendule est accordé sur l'harmonique  $q$  alors :  $q\Omega = \omega_p$  d'où :

$$\ddot{\beta} = \frac{-(R+L) \ddot{\alpha}}{\frac{R}{q^2} - L}$$

En reportant la valeur de  $\beta$  dans la première équation du mouvement on obtient :

$$\left[ I + m(R+L)^2 + \frac{mL(R+L)^2}{\frac{R}{q^2} - L} \right] \ddot{\alpha} = 0$$

On en déduit l'expression du moment d'inertie équivalent de l'ensemble disque support et pendule :

$$I_{eq} = I + \frac{mR(R+L)^2}{R-Lq^2} \quad (3.30)$$

Conséquences :

a). Lorsque  $Lq^2 = R$  alors  $I_{eq} \rightarrow \infty$

Le pendule accordé de cette façon donne un moment d'inertie infini à son support. Un noeud de vibration se crée donc au niveau du disque support. Cette condition est appelée accord à la résonance (le pendule est accordé à la résonance).

b). Lorsque  $Lq^2 < R$  alors  $I_{eq} > 0$

Pour toute valeur de  $q$  fixée,  $I_{eq}$  diminue rapidement lorsque  $L$  diminue,

$$I_{eq} \rightarrow I + mR \quad \text{quand} \quad L \rightarrow 0$$

c). Lorsque  $Lq^2 > R$  alors  $I_{eq} \leq 0$

Le moment d'inertie équivalent du système est négatif ou nul :

$$I_{eq} = 0 \quad \text{pour} \quad I = -\frac{mR(R+L)^2}{R-Lq^2}$$

### 3.2.3. Application au pendule composé

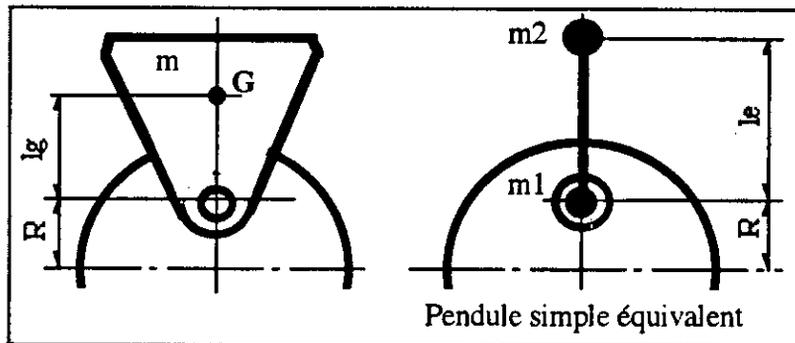


Fig. 3.8 Pendule composé

Soit :

$le$  : la longueur du pendule simple équivalent ;

$K$  : le rayon de giration du pendule composé par rapport à un axe passant par  $G$  et parallèle à l'axe de rotation.

Le système équivalent a les propriétés suivantes :

$$m_1 + m_2 = m$$

même masse ;

$$m_1 lg = m_2 \cdot (le - lg)$$

même position du centre de gravité ;

$$m_1 lg^2 + m_2 (le - lg)^2 = m K^2$$

même moment d'inertie.

d'où les caractéristiques du pendule équivalent :

$$m_1 = mK^2 / (lg^2 + K^2)$$

$$m_2 = m lg^2 / (lg^2 + K^2)$$

$$le = (lg^2 + K^2) / lg$$

le moment d'inertie équivalent de ce pendule est donné par :

$$I_{eq} = I + m_1 R^2 + \frac{m_2 R (R + le)^2}{R - leq^2} \quad (3.30)$$

### 3.3. Amortisseur pendulaire à rouleaux

L'Application de l'amortisseur pendulaire sur le volant d'un moteur a pour finalité l'obtention :

- D'une régularité cyclique supérieure à celle obtenue avec un volant classique ;
- D'une masse inférieure ou égale à celle d'un volant classique.

L'étude sera effectuée au régime de ralenti du moteur, pour assurer un maximum de confort aux usagers.

Le modèle choisi est un système à un seul étage de masses oscillantes et roulantes fig.3.9

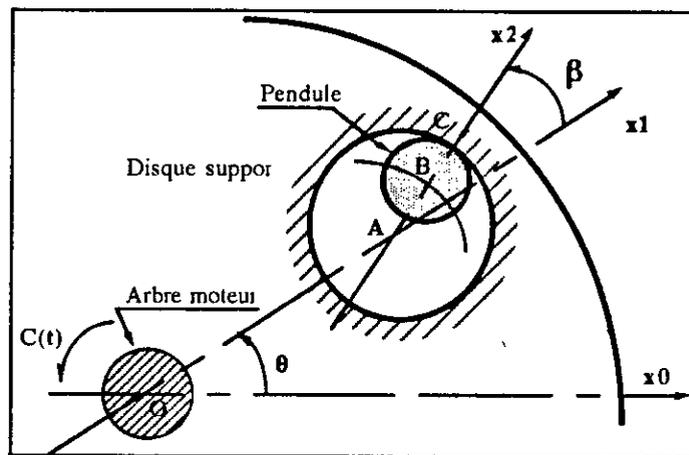


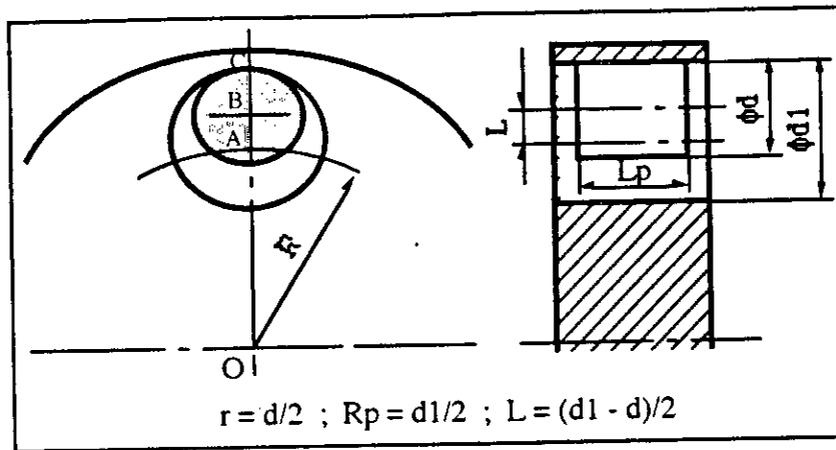
Fig.3.9 Volant pendulaire-Régulateur de vitesse

OA = R : rayon de perçage du trou dans le disque support ;

AB = L : entraxe entre le pendule et son logement ;

BC = r : rayon du rouleau.

L'étude de notre système est faite dans le cas le plus défavorable, c'est-à-dire lorsque le moteur est au ralenti (découplé de l'ensemble récepteur), en prenant comme valeur moyenne du régime moteur  $\Omega$  constante.



Dans le but de faciliter les calculs, on suppose un roulement sans glissement au point de contact (c), du rouleau et du disque support. Le couple C auquel est soumis le volant est :

$$C = A_q \sin q\Omega t$$

où q est l'harmonique prédominant, et  $A_q$  la demi-amplitude du couple.

### 3.3.1. Equations du système

#### a) Energie cinétique de l'ensemble

$$T = T_1 + T_2$$

Avec :

$T_1$  : Energie cinétique du disque support ;  
 $T_2$  : Energie cinétique du pendule (cylindre).

$$T_1 = \frac{1}{2} I_d \dot{\theta}^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m \cdot V_{(B, 2/0)}^2 + \frac{1}{2} \bar{I}_{(B, 2)} \cdot \bar{\Omega}_{(2/0)} \cdot \bar{I}_{(B, 2)}$$

La vitesse du point B dans le repère 2 par rapport à 0 est :

$$\vec{V}_{(B, 2/0)} = \left[ \frac{d}{dt}(\vec{OB}) \right]_O = R\dot{\theta}\vec{y}_1 + L(\dot{\theta} + \dot{\beta})\vec{y}_2$$

$$\vec{V}_{(B, 2/0)} = R\dot{\theta} \sin\beta \vec{x}_2 + (R\dot{\theta} \cos\beta + L(\dot{\theta} + \dot{\beta}))\vec{y}_2$$

Avec :

$$\bar{\Omega}_{(2/0)} = (\dot{\theta} + \dot{\beta})\vec{z}$$

et :

$$I_{(B, 2)} = \begin{bmatrix} I_A & 0 & 0 \\ 0 & I_A & 0 \\ 0 & 0 & I_C \end{bmatrix}$$

de même on a :

$$I_C = \int (x^2 + y^2) dm = \frac{1}{2} m \cdot r^2 = I_p$$

d'où l'énergie cinétique :

$$2T = m \left[ R^2 \dot{\theta}^2 + \left( L^2 + \frac{r^2}{2} \right) (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 + 2RL\dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \cos\beta \right] + I\dot{\beta}^2$$

b) Potentiel

$$U = A_q \cdot \sin(q\Omega t) \cdot \theta$$

c) Equations de Lagrange du système

-Equation en  $\theta$  :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}'} \right] - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}'} = m \left[ R^2 \dot{\theta} + RL \cos\beta (\dot{\theta} + \dot{\beta}) + RL \dot{\theta} \cos\beta + \left( \frac{r^2}{2} + L^2 \right) (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \right] + I\dot{\beta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}'} = m \left[ R^2 \dot{\theta} + RL \cos\beta (2\dot{\theta} + \dot{\beta}) + \left( \frac{r^2}{2} + L^2 \right) (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \right] + I\dot{\beta}$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}'} \right] = m \left[ R^2 \ddot{\theta} + RL \cos\beta (2\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) - RL\dot{\beta} \sin\beta (2\dot{\theta} + \dot{\beta}) + \left( \frac{r^2}{2} + L^2 \right) (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \right] + I\ddot{\beta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = A_q \cdot \sin(q\Omega t)$$

-Equation en  $\beta$  :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}'} \right] - \frac{\partial T}{\partial \beta} = \frac{\partial U}{\partial \beta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}'} = m \left[ RL \dot{\theta} \cos\beta + \left( \frac{r^2}{2} + L^2 \right) (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}'} \right] = m \left[ RL \ddot{\theta} \cos\beta - RL \dot{\theta} \dot{\beta} \sin\beta + \left( \frac{r^2}{2} + L^2 \right) (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \right]$$

$$\frac{\partial T}{\partial \beta} = m \left[ -RL \dot{\theta} \sin\beta (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \right]$$

$$\frac{\partial U}{\partial \beta} = 0$$

Les équations de mouvement du système pendulaire sont :

$$m \left[ R^2 \ddot{\theta} + RL \cos\beta (2\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) - RL\dot{\beta} \sin\beta (2\dot{\theta} + \dot{\beta}) + \left( \frac{r^2}{2} + L^2 \right) (\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \right] + I_d \ddot{\theta} = C \quad (3.32)$$

$$m \left[ RL \ddot{\theta} \cos\beta + RL \dot{\theta}^2 \sin\beta + \left( \frac{r^2}{2} + L^2 \right) (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \right] = 0 \quad (3.32)$$

### 3.3.2. Intégration numérique

Nous obtenons un système d'équations différentielles couplées non résolubles analytiquement. Nous proposons donc une résolution numérique.

Le système d'équations (3.32) et (3.33) n'étant pas du premier ordre, on pose le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} Y_1 &= \theta \\ Y_2 &= \dot{\theta} \\ Y_3 &= \beta \\ Y_4 &= \dot{\beta} \end{aligned}$$

On obtient le système :

$$\begin{aligned} a_{11} Y_2' + a_{12} Y_4' &= b_1 \\ a_{21} Y_2' + a_{22} Y_4' &= b_2 \end{aligned}$$

avec les notations suivantes :

$$\begin{aligned} a_{11} &= m \left( \frac{r^2}{2} + R^2 + L^2 + 2RL \cos Y_3 \right) + I_d \\ a_{12} &= m \left( \frac{r^2}{2} + L^2 + RL \cos Y_3 \right) \\ a_{21} &= \frac{r^2}{2} + L^2 + RL \cos Y_3 \\ a_{22} &= \frac{r^2}{2} + L^2 \\ b_1 &= m (2Y_2 + Y_4) Y_4 RL \sin Y_3 + A_q \cdot \sin(q\Omega t) \\ b_2 &= -RL \sin Y_3 \cdot Y_2^2 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient le système différentiel du 1er ordre suivant :

$$\begin{aligned} Y_1' &= Y_2 \\ Y_2' &= (a_{12} b_2 - a_{22} b_1) / (a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22}) \\ Y_3' &= Y_4 \\ Y_4' &= (a_{21} b_1 - a_{11} b_2) / (a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22}) \end{aligned}$$

Dans le cas général, ce système peut se mettre sous la forme :

$$\frac{dY_i}{dt} = f_i(t, Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_N)$$

ou encore :

$$\frac{Y_i(t+h) - Y_i(t)}{h} = f_i(t, Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_N)$$

$$Y_i(t+h) = Y_i(t) + hf_i(t, Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_N)$$

Ce système peut s'intégrer par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Connaissant la solution du système au temps  $t$ , la méthode permet de déterminer la solution approchée au point  $t+h$ . Le pas  $h$  fera l'objet d'une prédétermination, si celui-ci est trop grand la méthode diverge.

La méthode présente un bon compromis entre complexité, rapidité de calcul et précision.

#### - Méthode de résolution

Les solutions approchées étant connus, on calcule les  $4N$  coefficients suivants :

$$\begin{aligned} K_{1i} &= hf_i(t, Y_1(t), \dots, Y_N(t)) \\ K_{2i} &= hf_i(t + h/2, Y_1(t) + K_{11}/2, \dots, Y_N(t) + K_{1N}/2) \\ K_{3i} &= hf_i(t + h/2, Y_1(t) + K_{21}/2, \dots, Y_N(t) + K_{2N}/2) \\ K_{4i} &= hf_i(t, Y_1(t) + K_{31}, \dots, Y_N(t) + K_{3N}) \end{aligned}$$

d'où la solution recherchée :

$$Y_i(t+h) \approx Y_i(t) + 1/6 (K_{1i} + 2K_{2i} + 2K_{3i} + K_{4i}) \quad (i = 1, N)$$

Le logiciel Runge-Kutta permet l'intégration des équations de Lagrange par la méthode de Runge-Kutta. L'intégration d'ordre  $n$  utilise la solution approchée au point  $n-1$ . A chaque pas de temps, on calcule Teta ( $\theta$ ) et Beta ( $\beta$ ) ainsi que leur dérivée ( $\theta'$  et  $\beta'$ ) par rapport au temps ; ce qui nous permet d'avoir :

- L'écart de fluctuation de la vitesse  $\theta'$  autour du régime moyen  $\omega$ .
- L'amplitude angulaire du pendule  $\beta$ .

Pour le cas d'un moteur tournant au ralenti ( $N = 600$  à  $1500$  [tr/mn]), l'application de Runge-Kutta nous permet de tracer la fluctuation de la vitesse autour du régime moyen du disque, l'amplitude et la variation de la vitesse angulaire du pendule en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin  $\theta$ .

Pour  $N = 1500$  tr/mn et  $Aq = 50$  N.m, nous obtenons :

$$\omega_{\max} [\text{rad}] = 157.771 \text{ et } \omega_{\min} [\text{rad}] = 157.025, \text{ d'où l'irregularite cyclique } i = 0.005$$

$$\beta_{\max} [\text{rad}] = 0.062 \text{ et } \beta_{\min} [\text{rad}] = -0.062$$

$$\beta'_{\max} [\text{rad}] = 193.123 \text{ et } \beta'_{\min} [\text{rad}] = -193.602$$

Pour  $N = 1500$  tr/mn et  $A_q = 100$  N.m, nous obtenons :

a) *Vitesse angulaire du vilebrequin*

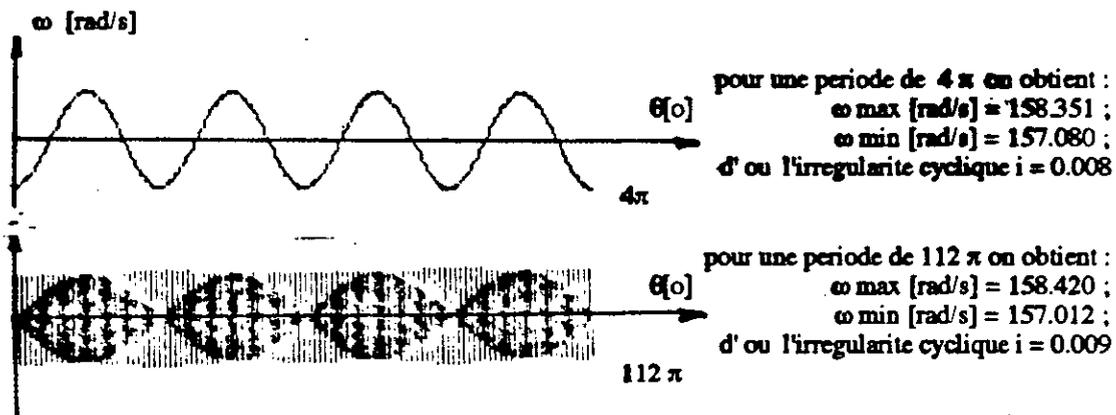


Fig. 3.10 Fluctuation de la vitesse angulaire autour du régime moyen du vilebrequin

b) *Amplitude angulaire du pendule*

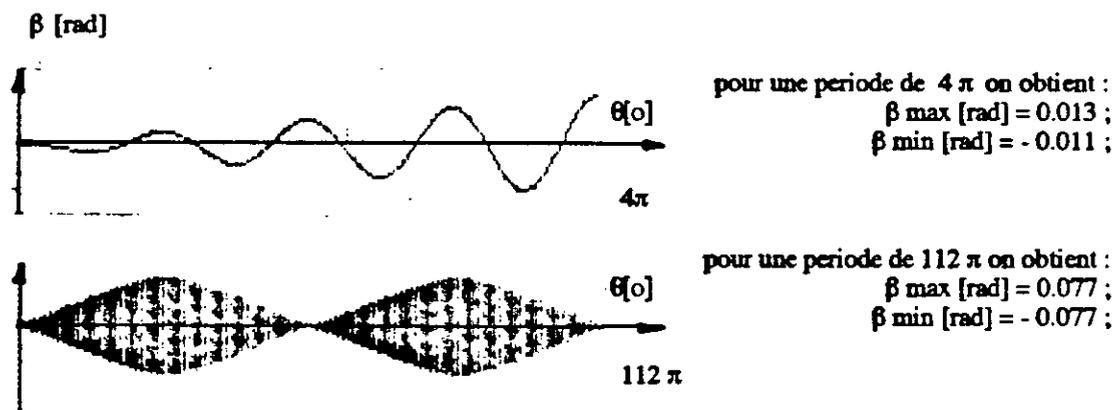


Fig. 3.11 Amplitude angulaire du pendule

c) *Vitesse angulaire du pendule*

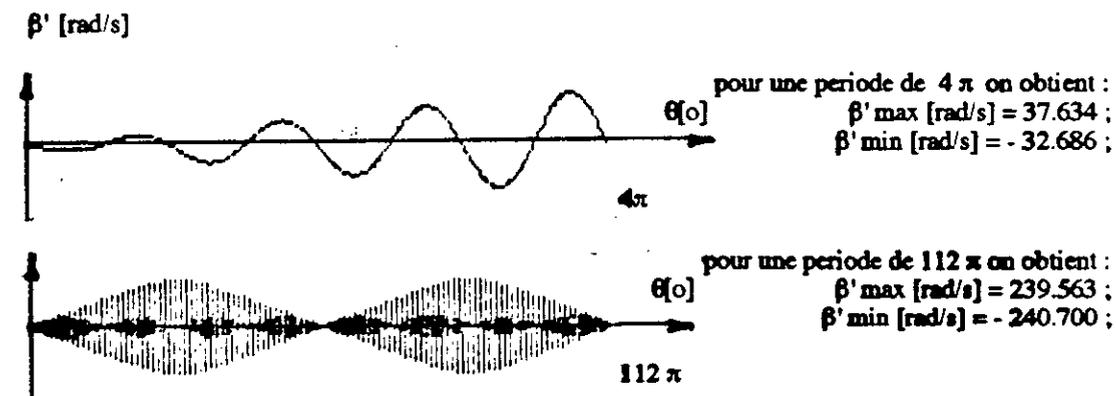


Fig. 3.12 Variation de la vitesse angulaire du pendule

Nous remarquons que l'amplitude du pendule reste assez faible (fig 3.11), on peut donc linéariser les équations du mouvement ; ce qui nous permet d'obtenir :

- Les pulsations propres du pendule ;
- L'amplitude du pendule ;
- Le moment d'inertie équivalent du système leq.

### 3.3.3. Linéarisation des équations

Les solutions des équations (3.32) et (3.33) en  $\beta$  et  $\beta'$  données par la méthode de Runge-Kutta sont suffisamment petites (faible amplitude du pendule) pour nous permettre de poser :

$$\begin{aligned}\cos\beta &= 1 \\ \sin\beta &= \beta\end{aligned}$$

De même, on pourra négliger tous les termes du 2ème et 3ème ordre en  $\beta$  et  $\beta'$ . Les équations (3.32) et (3.33) deviennent :

$$\left[ m \left( R^2 + 2RL + \frac{r^2}{2} + L^2 \right) + I_d \right] \ddot{\theta} + m \left( RL + \frac{r^2}{2} + L^2 \right) \ddot{\beta} = A_q \sin(q\Omega t) \quad (3.32)'$$

$$mRL \dot{\theta}^2 \beta + m \left( \frac{r^2}{2} + L^2 + RL \right) \ddot{\theta} + m \left( \frac{r^2}{2} + L^2 \right) \ddot{\beta} = 0 \quad (3.33)'$$

#### a) Calcul approximatif des pulsations propres du pendule

Si on considère  $\theta'$  faible, on peut poser :

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &\approx \Omega \\ \ddot{\theta} &= 0 \quad \text{avec} \quad \Omega = Cte\end{aligned}$$

L'équation (3.33)' devient :

$$mRL\Omega^2 \beta + m \left( \frac{r^2}{2} + L^2 \right) \ddot{\beta} = 0$$

d'où :

$$-\frac{\ddot{\beta}}{\beta} = \Omega^2 \left[ \frac{RL}{L^2 + \frac{r^2}{2}} \right]$$

La pulsation du pendule s'exprime par :

$$\omega_p = \Omega \sqrt{\frac{RL}{L^2 + \frac{r^2}{2}}} = q\Omega$$

**b) Amplitude approchée du pendule à la résonance**

De l'équation (3.32)' on tire  $\theta''$  :

$$\ddot{\theta} = \frac{A_q \sin(q\Omega t) - m \left( RL + L^2 + \frac{r^2}{2} \right) \ddot{\beta}}{m \left( 2RL + R^2 + L^2 + \frac{r^2}{2} \right) + I_d}$$

Le pendule est accordé sur l'harmonique q, d'où :

$$\omega_q = \Omega \sqrt{\frac{R}{L}} = q\Omega$$

Le pendule oscille donc à sa pulsation propre, et on peut poser :

$$\beta = b \sin(\omega_p t)$$

d'où :

$$\ddot{\beta} = -\omega_p^2 \beta$$

L'accélération devient :

$$\ddot{\theta} = \frac{A_q \sin(q\Omega t) + m \left( RL + L^2 + \frac{r^2}{2} \right) \omega_p^2 \beta}{m \left( 2RL + R^2 + L^2 + \frac{r^2}{2} \right) + I_d}$$

à la résonance, l'amplitude du pendule  $\beta$  est :

$$\beta = \frac{-A_q \sin(q\Omega t)}{mR\Omega^2 \left( R + L + \frac{r^2}{2L} \right)}$$

Pour cette amplitude  $\theta'' = 0$  ; ce qui veut dire que la vitesse  $\Omega$  du disque est constante (ou sans vibration). En pratique, il faut vérifier que l'amplitude  $\beta$  est suffisamment faible (< à  $10^{-2}$  par exemple).

**c) Amplitude du pendule en dehors de la résonance**

Le pendule est accordé sur l'harmonique q, c'est à dire :

$$\ddot{\beta} = -\omega_p^2 \beta$$

De l'équation (3.33)', on obtient :

$$\frac{\ddot{\beta}}{\ddot{\theta}} = \frac{\left(L^2 + RL + \frac{r^2}{2}\right)}{\left(L^2 + \frac{r^2}{2}\right) + \frac{RL\dot{\theta}^2}{q^2\Omega^2}}$$

Les vibrations étant faibles ( $\dot{\theta}^2 = \Omega^2$ ), il vient :

$$\frac{\ddot{\beta}}{\ddot{\theta}} = \frac{(L+R) + \frac{r^2}{2L}}{\left(L + \frac{R}{q^2}\right) - \frac{r^2}{2L}}$$

Le système n'est pas à la résonance, il y a donc vibration forcée de pulsation  $q\Omega$  ; d'où :

$$\begin{aligned}\ddot{\beta} &= -q^2\Omega^2\beta \\ \ddot{\theta} &= -q^2\Omega^2\theta\end{aligned}$$

donc :

$$\frac{\beta}{\theta} = \frac{(L+R) + \frac{r^2}{2L}}{\left(L + \frac{R}{q^2}\right) - \frac{r^2}{2L}}$$

En dehors de la résonance,  $\beta$  dépend de  $q$  et  $\theta$ . On remarque que pour :

$$\begin{aligned}q^2 &= 2L\left(L + \frac{R}{r^2}\right) \\ \frac{\beta}{\theta} &\longrightarrow \infty \quad \text{et} \quad \theta \longrightarrow 0 \quad (\text{résonance})\end{aligned}$$

#### d) Calcul approximatif du moment d'inertie équivalent $I_{eq}$

Si on considère que le disque tourne à une vitesse constante, on peut superposer à ce mouvement une vibration  $\alpha$  telle que :

$$\theta = \Omega t + \alpha$$

d'où :

$$\dot{\theta} = \Omega + \dot{\alpha}$$

et

$$\ddot{\theta} = \ddot{\alpha}$$

Pour  $\alpha$  suffisamment petit, on peut poser  $\alpha' \approx 0$  d'où  $\dot{\theta}^2 \approx \Omega^2$  et donc les équations (3.32)' et (3.33)' deviennent :

$$\left[ m \left( R^2 + 2RL + \frac{r^2}{2} + L^2 \right) + I_d \right] \ddot{\alpha} + m \left( RL + \frac{r^2}{2} + L^2 \right) \ddot{\beta} = A_q \sin(q\Omega t) \quad (3.34)$$

$$mRL \Omega^2 \beta + m \left( \frac{r^2}{2} + L^2 + RL \right) \ddot{\alpha} + m \left( \frac{r^2}{2} + L^2 \right) \ddot{\beta} = 0 \quad (3.35)$$

Posons le changement de variables suivant :

$$A = m \left( R^2 + 2RL + L^2 + \frac{r^2}{2} \right) + I_d$$

$$B = m \left( RL + L^2 + \frac{r^2}{2} \right)$$

$$C = m \left( L^2 + \frac{r^2}{2} \right)$$

$$D = mRL\Omega^2$$

Les équations (3.34) et (3.35) peuvent se mettre sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} A\ddot{\alpha} + B\ddot{\beta} &= C(t) \\ B\ddot{\alpha} + C\ddot{\beta} + D\beta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Si nous supposons que le pendule oscille à la pulsation de l'excitation telle que  $\beta$  soit de la forme :

$$\beta = b \sin(q\Omega t)$$

et

$$\ddot{\beta} = -q^2 \Omega^2 \beta$$

Après arrangement, le système d'équations (a) devient :

$$A\ddot{\alpha} + B\ddot{\alpha} \left[ \frac{B}{C - \frac{D}{q^2 \Omega^2}} \right] = C(t)$$

$$\left[ A - \frac{B^2}{\left( \frac{-D}{q^2 \Omega^2} + C \right)} \right] \ddot{\alpha} = C(t) \quad (3.36)$$

En identifiant (3.36) avec la 2ème loi de Newton appliquée à la rotation, on déduit le moment d'inertie équivalent :

$$I_{eq} = A - \frac{B^2}{\left[ \frac{-D}{q^2 \Omega^2} + C \right]}$$

En remplaçant les coefficients A,B,C, et D par leur valeur, on obtient le moment d'inertie équivalent du système (pour un pendule).

$$I_{eq} = I_d + m \left[ \frac{r^2}{2} + (R+L)^2 - \frac{\left(\frac{r^2}{2} + LR + L^2\right)^2}{-\frac{RL}{q^2} + \left(L^2 + \frac{r^2}{2}\right)} \right]$$

En remplaçant  $(r^2/2)$  par  $K^2$ , et en divisant le terme  $[B^2 / (-D/q^2\Omega^2 + C)]$  par  $L^2$ , nous obtenons :

$$I_{eq} = I_d + m \left[ K^2 + (R+L)^2 - \frac{\left(\frac{K^2}{L} + L + R\right)^2}{1 + \frac{K^2}{L^2} - \frac{R}{Lq^2}} \right]$$

Pour empêcher les excitations du vilebrequin (mises en jeu par les vibrations de torsion, de flexion et latérales), dûes à l'emploi d'un pendule, il faut utiliser trois pendules placés à  $120^\circ$  l'un de l'autre[54].

Dans le cas d'un volant à 3 pendules, on multiplie la masse  $m$  du pendule par 3, ce qui nous donne un moment d'inertie équivalent :

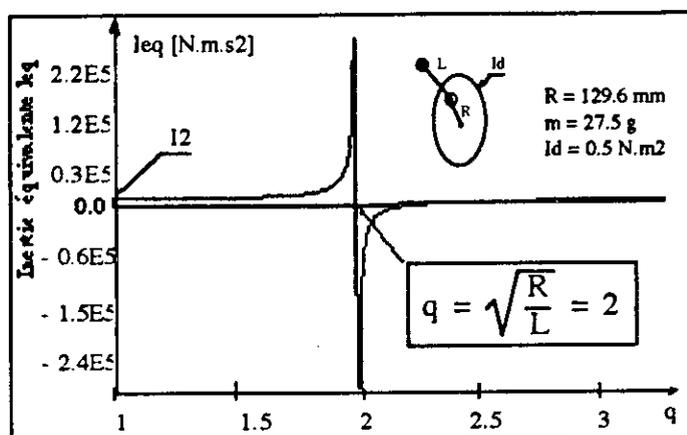
$$I_{eq} = I_d + 3m \left[ K^2 + (R+L)^2 - \frac{\left(\frac{K^2}{L} + L + R\right)^2}{1 + \frac{K^2}{L^2} - \frac{R}{Lq^2}} \right] \quad (3.37)$$

A l'accord, le pendule donne un moment d'inertie équivalent  $I_{eq}$  infini, dans ce cas on a :

$$1 + \frac{K^2}{L^2} - \frac{R}{Lq^2} = 0$$

Donc l'accord du pendule est réalisé lorsque

$$1 + \frac{K^2}{L^2} = \frac{R}{Lq^2} \quad \text{ou} \quad q = \sqrt{\frac{R}{L\left(1 + \frac{K^2}{L^2}\right)}} \quad (3.38)$$

a) Evolution de l'inertie équivalente  $I_{eq}$  en fonction de l'harmonique  $q$ fig. 3.13 Variation de l'inertie  $I_{eq}$  en fonction de l'harmonique  $q$ 

Pour l'exemple donné ci-dessus, le pendule est accordé sur l'harmonique 2. Pour  $q = 2$  le moment d'inertie équivalent est infini. On remarque que le moment d'inertie est égal à  $I_2$  (moment d'inertie du disque support) pour toutes les autres valeurs de  $q$ .

## 3.3.4. Calcul des paramètres du pendule

a) Détermination de  $L$ 

L'équation (3.38) nous permet d'écrire :

$$L^2 - \frac{RL}{q^2} + K^2 = 0 \quad (3.39)$$

(3.39) est une équation du 2ème ordre en  $L$ . Les solutions en  $L$  sont données en fonction de l'harmonique  $q$ .

$$L_1 = \frac{R + \sqrt{R^2 - 4q^4 K^2}}{2q^2} \quad (a)$$

$$L_2 = \frac{R - \sqrt{R^2 - 4q^4 K^2}}{2q^2} \quad (a)$$

Avec :

- $L$  : entr'axe entre le pendule et son logement ;
- $R$  : position du logement par rapport à l'axe de rotation du volant support ;
- $r$  : rayon du pendule rouleau ;
- $q$  : harmonique.

Conditions à respecter :

– La première condition est relative au discriminant qui doit être positif ou nul :

$$\Delta = R^2 - 4q^4 K^2 \geq 0$$

d'où :

$$R \geq 2q^2 K$$

– La deuxième condition est le choix de l'une des solutions (a) ou (b).

Dans le calcul de dimensionnement du volant, nous devons tenir compte de l'encombrement du moteur (couronne dentée, plateau d'embrayage, vilebrequin). Pour ce faire, nous sélectionnons une plage de valeurs des grandeurs  $R$  et  $r$ , en fonction des harmoniques  $q$ , ce qui nous permettra de calculer : la masse  $m$  du rouleau, le rayon de perçage du trou du rouleau  $R_p$  et l'entraxe  $L$ .

On procède ensuite au calcul du moment d'inertie équivalent linéarisé du volant pendulaire, en donnant un intervalle de tolérance à  $R$  et  $L$  que nous réajustons après avoir localisé les inerties effectives.

Nous avons montré dans le paragraphe 3 que seul le 2ème harmonique représente un danger. Nos calculs seront donc fait avec  $q = 2$ .

Si on choisi  $q = 2$  et  $r = 5$ , la première condition nous impose :  $R \geq 28,3$  ; d'où le choix de  $R$  qui tient compte des dimensions du volant et des pièces voisines. Si nous devons garder les mêmes dimensions du moteur F4L 912 (même couronne dentée, même embrayage), on doit prendre  $R$  au voisinage de 130 mm.

La deuxième condition, nous impose la solution (a), qui nous permet le calcul des paramètres suivants :

$$\begin{aligned} L &= 32,11 \text{ mm} \\ R_p &= 37,11 \text{ mm} \\ m &= 27,56 \text{ g} \end{aligned}$$

La masse est calculée pour un rouleau de longueur 45 mm, (catalogue SKF).

### b) Evolution de l'inertie équivalente $I_{eq}$ en fonction des paramètre $R$ et $L$

Afin de pouvoir calculer  $I_{eq}$  sur une bande  $R$  au voisinage de 130 mm, on trace la fonction  $I_{eq}$  donnée par (3.37), en fonction de  $R$  et  $L$  (graphe à 3 D) pour  $q = 2$ , sur les bornes  $R$  et  $L$  tel que :

$$\begin{aligned} R_{\max} &= 135 \text{ mm} ; & R_{\min} &= 125 \text{ mm} \\ L_{\max} &= 33,37 \text{ mm} ; & L_{\min} &= 30,84 \text{ mm} \end{aligned}$$

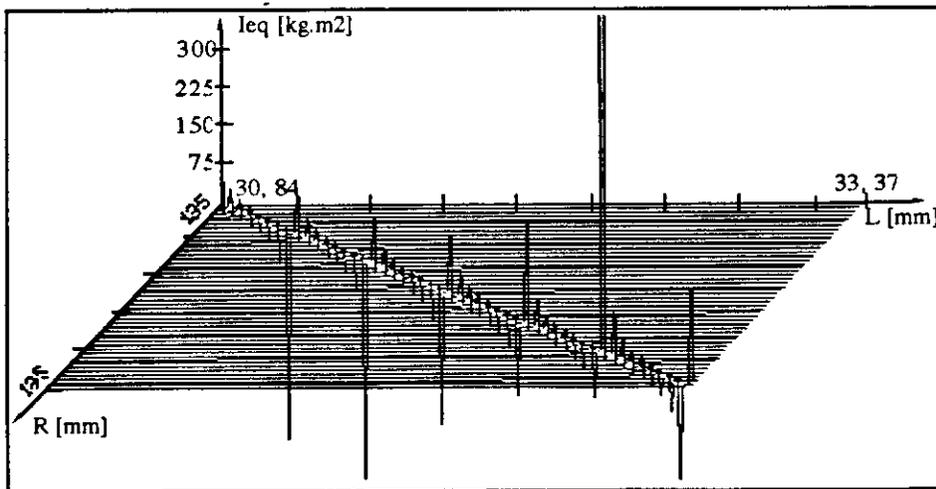


Fig. 3.14 Evolution de l'inertie équivalente  $I_{eq}$  en fonction de  $R$  et  $L$  pour  $I_d = 2,21 \text{ kg.m}^2$  et  $q = 2$  ( $I_{eq\min} = -355$ ;  $I_{eq\max} = 4144 \text{ kg.m}^2$ )

Les inerties équivalentes sont constitués par des chaînes de valeurs, chaque chaîne de  $I_{eq}$  est comprise entre deux pique (négatif et positif). Les valeurs de  $I_{eq}$  dépendent des intervalles pris sur R et L. Une faible variation des paramètres R et L a une très grande influence sur la valeur du moment d'inertie équivalent. Ceci est rendu plus apparent sur le graphe de la figures 3.15.

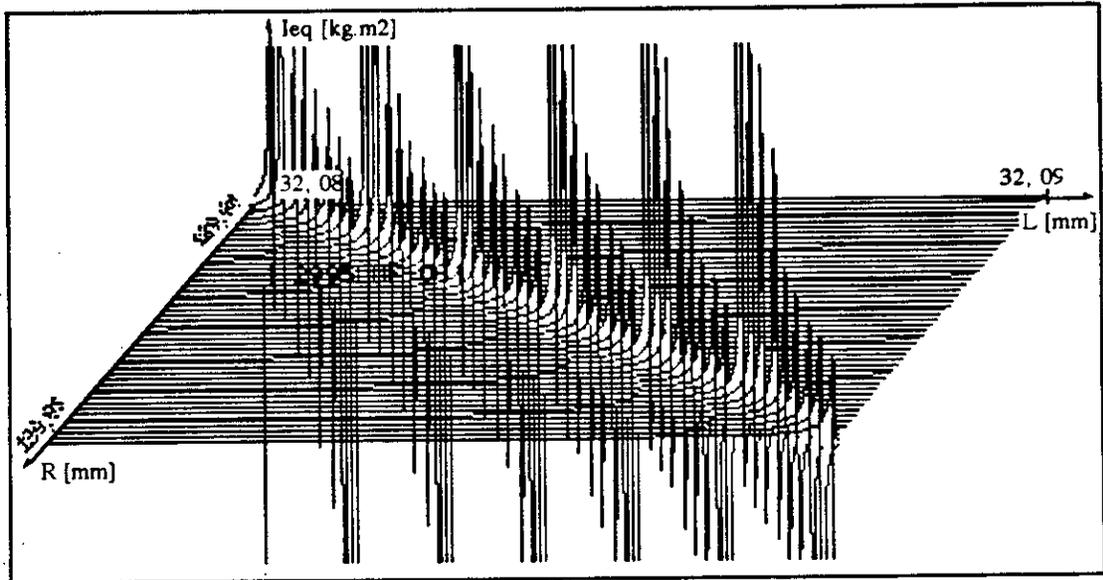


Fig. 3.15 Evolution de l'inertie équivalente  $I_{eq}$  en fonction de R et L pour un intervalle de 0,05 mm sur R

Nous remarquons sur la figure 3.14, que lorsque l'intervalle sur R diminue la fréquence de l'inertie équivalente augmente, de même que la valeur de  $I_{eq}$  prend des valeurs considérables (de l'ordre de  $10E4$  N.m<sup>2</sup>).

\* Evolution de l'inertie équivalente en fonction de L

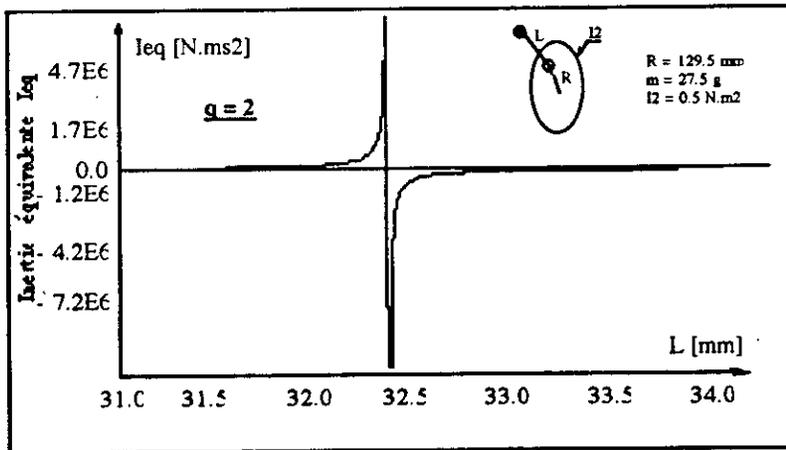


Fig. 3.16 Evolution de  $I_{eq}$  en fonction de la l'entraxe L du pendule

On remarque sur le graphe ci-dessus qu'une faible variation de la longueur L du pendule autour de 32,4 mm a une très grande influence sur la valeur du moment d'inertie équivalent. Ceci montre qu'il faut une grande précision sur les dimensions des pendules.

**\* Evolution de l'inertie équivalente en fonction du rayon R**

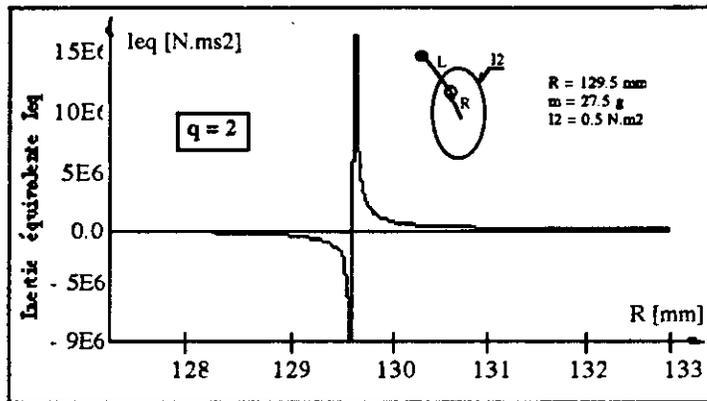


Fig. 3.17 Evolution de Ieq en fonction du rayon R

On remarque sur le graphe de la figure 3.17 qu'une faible variation du rayon R autour de 129,5 mm a une très grande influence sur la valeur du moment d'inertie équivalent. Ceci montre qu'il faut une grande précision sur les dimensions des pendules.

**c) Evolution de la pulsation propre en fonction de l'inertie équivalente Ieq**

On remarque sur le graphique de la fig. 3.18 que, grâce au pendule, on peut faire varier la pulsation propre de 0 à l'infini.

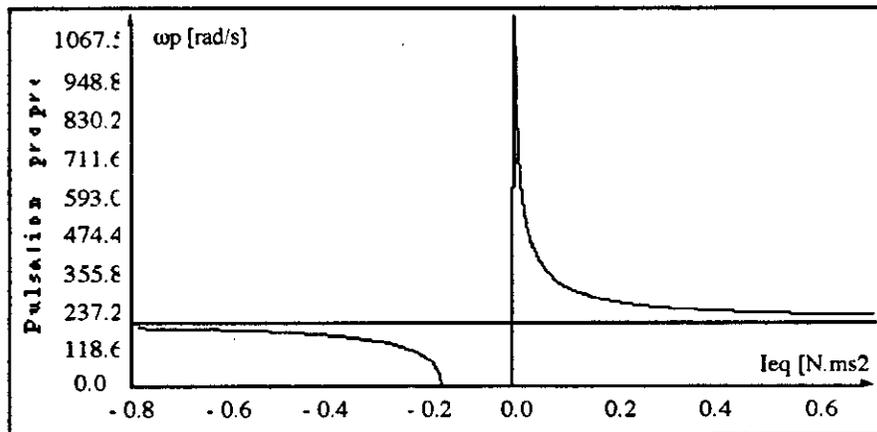


Fig. 3.18 Variation de la pulsation propre en fonction de Ieq

Pour l'exemple que nous avons pris, la pulsation propre du système varie d'une valeur minimum nulle, pour une inertie équivalente - 0,2 à une valeur maximum de 230 rd/s pour une inertie équivalente moins l'infini. Dans les inerties positives, la pulsation propre varie d'une valeur minimum 240 rd/s pour inertie équivalente qui tend vers l'infini, à une valeur maximum qui tend vers plus l'infini, pour une inertie équivalente nulle.

Afin d'optimiser le dimensionnement du volant pendulaire en fonction des paramètres : Inertie-coût de production, nous retenons les dimensions suivantes. (intervalle de tolérance retenu sur R et L est de 0,05 mm):

$$R = 129,90 \pm 0,05$$

$$L = 32,07 \begin{matrix} 0 \\ * \\ 0,03 \end{matrix}$$

$$r = 5,00 \begin{matrix} 0 \\ * \\ 0,01 \end{matrix}$$

$$L_p = 45,00 \begin{matrix} 0,03 \\ * \\ 0 \end{matrix}$$

Avec  $L_p$  : longueur du pendule rouleur, (fabriqué par SKF).

### 3.3.5. Calcul exact du moment d'inertie équivalent ( $I_{eq}$ ) vu par le système

Le moment d'inertie équivalent se présente sous la forme :

$$I_{eq} = \frac{2T}{\dot{\theta}^2} = I_d + 3m \frac{V_B^2}{\dot{\theta}^2} + \frac{3(\dot{\beta} + \dot{\theta})^2}{\dot{\theta}^2} I_p$$

Avec  $I$  le moment d'inertie du volant support et  $I_p$  le moment d'inertie du pendule, soit :

$$I_{eq} = I_d + 3 m R^2 + 3 m L^2 \left( 1 + \frac{\dot{\beta}}{\dot{\theta}} \right)^2 + 6 m R L \left( 1 + \frac{\dot{\beta}}{\dot{\theta}} \right) \cos \beta + 3 I_p \left( 1 + \frac{\dot{\beta}}{\dot{\theta}} \right)^2$$

Si on pose :

$$\beta = b \sin(q\Omega t)$$

On a :

$$\dot{\beta} = bq\Omega \cos(q\Omega t)$$

En remplaçant  $\dot{\beta}$  par sa valeur, on obtient :

$$I_{eq} = I_d + 3 m R^2 + 3 m L^2 \left( 1 + \frac{bq\Omega \cos(q\Omega t)}{\dot{\theta}} \right)^2 + 6 m R L \left( 1 + \frac{bq\Omega \cos(q\Omega t)}{\dot{\theta}} \right) \cos \beta + 3 I_p \left( 1 + \frac{bq\Omega \cos(q\Omega t)}{\dot{\theta}} \right)^2$$

Si on considère que le disque tourne à une vitesse constante, on peut superposer à ce mouvement une vibration  $\alpha$  telle que :

$$\theta = \Omega t + \alpha$$

d'où :

$$\dot{\theta} = \Omega + \dot{\alpha}$$

Pour  $\alpha$  suffisamment petit, on peut poser  $\dot{\alpha} \approx 0$  d'où  $\dot{\theta} \approx \Omega$  et donc l'expression donnant  $I_{eq}$  devient :

$$I_{eq} = I_d + 3 m R^2 + 3 (m L^2 + I_p) (1 + bq \cos(q\Omega t))^2 + 6 m R L (1 + bq \cos(q\Omega t)) \cos \beta$$

On détermine l'amplitude  $b$ , en posant des conditions aux limites sur  $\beta'$  (la vitesse du pendule  $\beta'$  étant déjà calculée au paragraphe 3.3.2). d'où :

$$I_{\text{eq}} = I_d + 3 mR^2 + 3 (mL^2 + I_p) \left( 1 + \frac{\dot{\beta}_{\text{max}}}{\Omega} \cos(q\Omega t) \right)^2 + 6 mRL^2 \left( 1 + \frac{\dot{\beta}_{\text{max}}}{\Omega} \cos(q\Omega t) \right) \cos\beta$$

Pour pouvoir comparer les deux inerties, donnons les mêmes valeurs aux paramètres  $R$ ,  $r$ , et  $m$  et calculons  $I_{\text{eqe}}$  et  $I_{\text{eq}}$  en fonction de l'harmonique  $q$ .

| Harm<br>Inertie  | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $I_{\text{eq}}$  | 0,533 | 5,083 | 0,528 | 0,528 | 0,529 | 0,530 | 0,530 | 0,530 | 0,530 | 0,530 |
| $I_{\text{eqe}}$ | 0,501 | 0,501 | 0,501 | 0,501 | 0,501 | 0,501 | 0,501 | 0,501 | 0,501 | 0,501 |

Tableau 3.4 Comparaison des inerties  $I_{\text{eqe}}$  et  $I_{\text{eq}}$ .

Nous constatons que l'inertie équivalente  $I_{\text{eqe}}$  présente une faible variation en fonction des harmoniques  $q$ .

Pour les harmoniques supérieurs à 2, l'inertie  $I_{\text{eq}}$  reste pratiquement constante. Tandis que pour l'harmonique  $q = 2$ , l'inertie linéarisée  $I_{\text{eq}}$  prend une valeur importante.

En conclusion, on constate que les valeurs des inerties équivalentes linéarisées et les valeurs des inerties équivalentes exactes, présentent une grande similitude, ce qui justifie la linéarisation du système d'équation (3.32) et (3.33). Cependant, nous constatons une discordance pour l'harmonique  $q = 2$  pour lequel l'inertie équivalente linéarisée prend une valeur importante. Cette discontinuité peut être exploitée pour élever l'inertie du volant, améliorant ainsi la régularité cyclique du moteur.

### 3.4. Conception du volant pendulaire

A partir des dimensions des pendules déjà calculées, et en accord avec les inerties équivalentes obtenues, nous proposons le dessin du volant pendulaire.

Les dimensions extérieures du volant pendulaire, doivent être identiques à celle du volant classique, afin de permettre son montage sur le moteur F4L 912.

Dans le souci de diminuer le coût du volant pendulaire, nous avons pris comme modèle de base le volant classique auquel nous avons rajouter trois noyaux pour le logement du pendule.

La masse du volant pendulaire (obtenue après montage) est légèrement inférieure à celle du volant classique.

La précision de fabrication des rouleaux étant élevée, on les achètera chez le fabricant de roulement SKF.

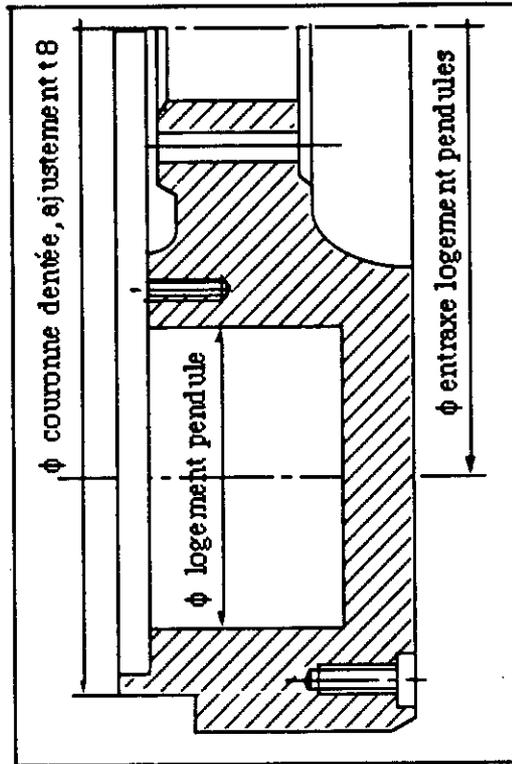


Fig. 3.19 Dessin du volant pendulaire

### 3.5. Variation de la vitesse angulaire

#### 3.5.1. Irrégularité cyclique avec volant classique.

L'intégration du couple moteur, (paragraphe 3.1.4), nous permet la détermination des vitesses angulaires pour chaque degré de rotation du vilebrequin, c'est à dire la variation de  $\omega$  en fonction de  $\theta$ . Ce qui nous donne l'irrégularité cyclique  $i$ .

L'irrégularité cyclique du moteur F4L 912 obtenue avec le volant classique pour un moment d'inertie du vilebrequin  $I = 0.7433 \text{ N.m.s}^2$  et une vitesse de rotation  $N = 1500 \text{ tr/mn}$  à pour valeur :  $i = 0.077$ .

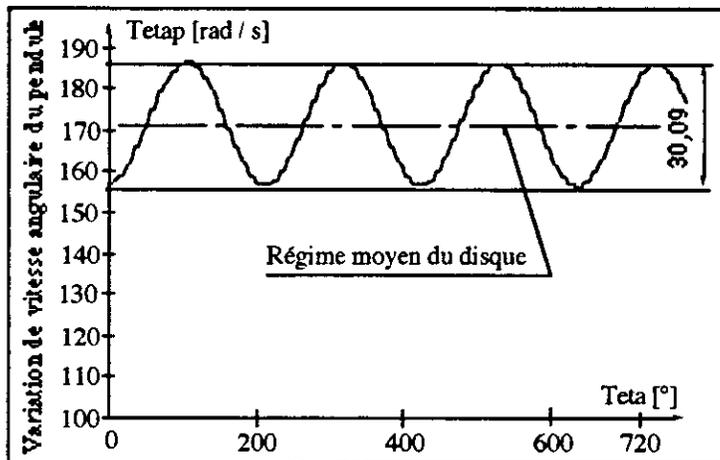


Fig.3.20 Variation de la vitesse angulaire en fonction de l'angle vilebrequin, du moteur F4L 912, en utilisant le volant classique

#### 3.5.2. Irrégularité cyclique avec volant pendulaire

En utilisant les solutions des équations (méthode de Runge-Kutta), nous obtenons la variation de la vitesse angulaire  $\omega$  en fonction de l'angle vilebrequin  $\theta$ , que nous visualisons sur la figure 3.10. L'irrégularité cyclique du volant moteur F4L 912 obtenu avec le volant pendulaire de moment d'inertie  $I_d = 0,5 \text{ Nms}^2$ , est de 0,005.

#### 3.5.3. Comparaison des deux irrégularités cycliques

La simulation des volants (classique et pendulaire), montre fig. 3.21 que même si nous utilisons un volant classique ayant la même inertie que celle développée par le volant pendulaire  $I_{eq}$ , c'est à dire une inertie bien supérieur à son inertie réelle, nous obtenons une fluctuation de la vitesse angulaire (donnée par le volant classique) supérieure à celle donnée par le volant pendulaire.

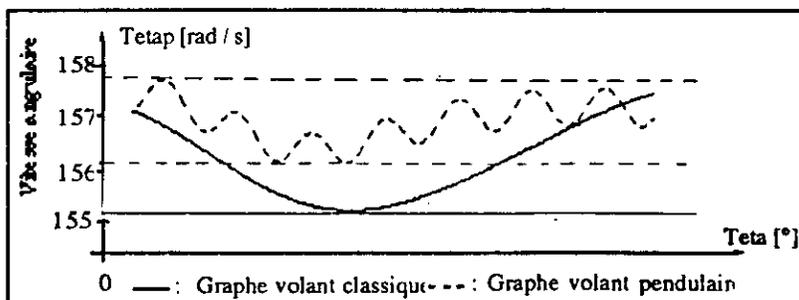


Fig.3.21 Variation de la vitesse angulaire des volants classique et pendulaire

### 3.6. Vibration de torsion du volant moteur

Pour atténuer les variations de vitesse, les constructeurs de moteurs augmentent l'inertie de la ligne d'arbre en disposant sur celle-ci un volant d'inertie incorporant le dispositif d'embrayage (disque et plateau).

Comme sur tout système mécanique, une augmentation de masse s'accompagne généralement d'un abaissement des fréquences propres. Le constructeur est confronté ainsi à des problèmes de vibration de torsion et de flexion du vilebrequin, avec des amplitudes de résonance parfois importantes dans des plages d'utilisation du moteur, entraînant des ruptures par fatigue.

L'étude des vibrations de volant, nous permettra d'apprécier le volant pendulaire par rapport au volant classique, de localiser les zones de résonance et connaître les plages d'utilisation, et enfin voir si l'utilisation du volant pendulaire sur le moteur F4L-912, nous dispenserait de l'utilisation de l'amortisseur de torsion.

#### 3.6.1. Modélisation

Le vilebrequin est discrétisé en 9 disques I1, . . . , I9, centrés sur l'axe de rotation et séparés par des raideurs torsionnelles  $k_1, \dots, k_8$ , (fig. 3.22).

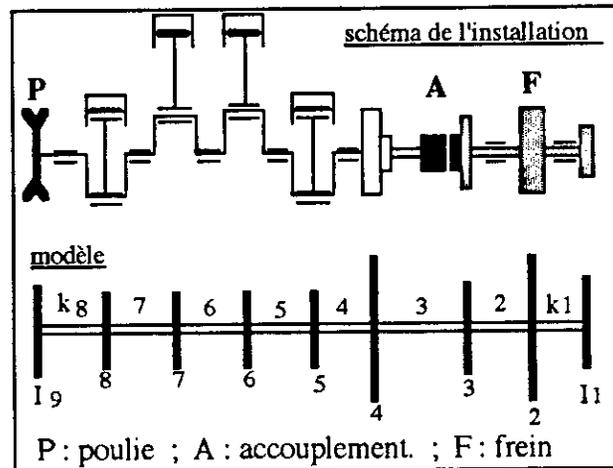


Fig. 3.22 Modèle en torsion du moteur F4L 912 sur banc

A chaque coude (maneton, tourillon et bras) est affecté un disque, de plus, le disque I9 est affecté au couple poulie-amortisseur et le disque I4 représente le volant moteur. L'accouplement et le frein sont représentés respectivement par I3, I2 et I1.

Le comportement vibratoire du modèle est d'autant plus proche du comportement de l'arbre réel, que le nombre de disques est plus grand.

Le calcul des raideurs entre chaque disque, utilise les formules de résistance des matériaux lorsqu'il s'agit d'une portion d'arbre cylindrique, ou des formules expérimentales [BICERA], pour les coudes de vilebrequin.

Les inerties de l'attelage mobile sont calculées dans le paragraphe 6.1.

Le tableau 3.4. donne les valeurs des inerties et raideurs affectées au modèle de la figure.3.22.

| N° volant | Inertie I [Nm s <sup>2</sup> ] | N° arbre | Régidité k [Nm/rd] |
|-----------|--------------------------------|----------|--------------------|
| 1         | 0,98 E-2                       | 1        | 0,285 E6           |
| 2         | 0,14                           | 2        | 0,285 E6           |
| 3         | 0,1725 E-1                     | 3        | 0,21 E4            |
| 4         | 0,5525                         | 4        | 0,1632676 E7       |
| 5         | 0,21985 E-1                    | 5        | 0,145057 E7        |
| 6         | 0,21985 E-1                    | 6        | 0,101932 E7        |
| 7         | 0,21985 E-1                    | 7        | 0,145057 E7        |
| 8         | 0,21985 E-1                    | 8        | 0,145057 E7        |
| * 9       | a/ 0,93 E-1                    | 8        | a/ 0,348669 E6     |
|           | b/ 0,02 E-1                    |          | b/ 0,1633 E7       |

Tableau 3.4. Inerties et raideurs relatif au modèle avec volant classique

*Remarque* : Dans la dernière case du tableau 3.4, a/ représente les inerties et raideurs de la poulie avec amortisseur de torsion et b/ les inerties et raideurs de la poulie sans amortisseur de torsion.

### 3.6.2. Fréquences et modes propres

Le calcul des pulsations propres  $\omega_i$  à été développé dans le paragraphe 8.2. A partir de la 3<sup>em</sup> fréquence propre, les valeurs calculés sont assez loin des fréquences d'excitation, donc nous nous contenterons de représenter les trois premières valeurs.

#### a) Modèle avec volant classique sans amortisseur de torsion

Les trois premières pulsations propres de la ligne d'arbre munie du volant classique sans l'amortisseur de torsion sont :

| Pulsations propres du modèle figure 3.22. |                    |             |
|-------------------------------------------|--------------------|-------------|
| Numéro des modes                          | Pulsations propres |             |
|                                           | en rad / s         | en tr / mn  |
| 1                                         | 0,1117 E+03        | 0,1067 E+04 |
| 2                                         | 0,1720 E+4         | 0,1653 E+05 |
| 3                                         | 0,3288 E+04        | 0,3140 E+05 |

Tableau 3.6. Pulsations propres du modèle muni du volant classique sans l'amortisseur de torsion.

Amplitudes relatives des 3 premiers modes relatives au modèle avec volant classique sans l'amortisseur de torsion.

| Numéro des disques | Amplitudes relatives mode 1<br>(.1067 E+04 tr/mn] | Amplitudes relatives mode 2<br>(.1643 E+05 tr/mn] | Amplitudes relatives mode 3<br>(.3140 E+05 tr/mn] |
|--------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| 1                  | .1000 E+01                                        | .1000 E+01                                        | .1000 E+01                                        |
| 2                  | .9996 E+00                                        | .8982 E+00                                        | .6282 E+00                                        |
| 3                  | .9930 E+00                                        | -.5094 E+00                                       | -.3080 E+01                                       |
| 4                  | .1195 E-02                                        | -.1792 E+03                                       | -.2328 E+00                                       |
| 5                  | -.8561 E-02                                       | .4496 E-01                                        | .6187 E+03                                        |
| 6                  | -.9229 E-02                                       | .8222 E-01                                        | -.1014 E+08                                       |
| 7                  | -.3454 E-02                                       | .1300 E+00                                        | -.2220 E+08                                       |
| 8                  | -.5233 E-02                                       | .1577 E+00                                        | -.2704 E+08                                       |
| 9                  | -.6811 E-02                                       | .1761 E+00                                        | -.2740 E+08                                       |

Tableau 3.7. Amplitudes relatives du modèle avec volant classique sans amortisseur de torsion

Déformées modales relative au modèle de la figure 3.22, ligne d'arbre sans l'amortisseur de torsion, au premier mode.

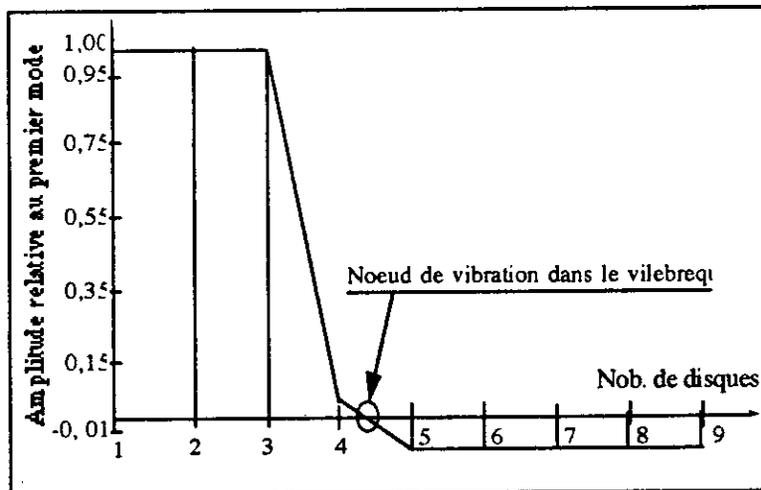


Fig. 3.23. Déformées modales du modèle fig. 3.22 sans amortisseur de torsion au premier mode

Nous remarquons que le noeud de vibration est situé dans le vilebrequin.

#### b) Modèle avec volant classique et amortisseur de torsion

Les trois premières pulsations propres de la ligne d'arbre munie du volant classique avec l'amortisseur de torsion sont donnée par :

| Pulsations propres du modèle figure 3.22. |                    |             |
|-------------------------------------------|--------------------|-------------|
| Numéro des modes                          | Pulsations propres |             |
|                                           | en rad / s         | en tr / mn  |
| 1                                         | 0,1238 E+03        | 0,1183 E+04 |
| 2                                         | 0,1426 E+4         | 0,1361 E+05 |
| 3                                         | 0,4081 E+04        | 0,3897 E+05 |

Tableau 3.5. Pulsations propres du modèle: volant classique avec amortisseur de torsion.

Amplitudes relatives des 3 premiers modes relatives au modèle avec volant classique et amortisseur de torsion.

| Numéro des disques | Amplitudes relatives mode 1 | Amplitudes relatives mode 2 | Amplitudes relatives mode 3 |
|--------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
|                    | [.1183 E+04 tr/mn]          | [.1361 E+05 tr/mn]          | [. 3897 E+05 tr/mn]         |
| 1                  | .1000 E+01                  | .1000 E+01                  | .1000 E+01                  |
| 2                  | .9995 E+00                  | .9301 E+00                  | .4274 E+00                  |
| 3                  | .9914 E+00                  | - .6854 E-01                | - .3641 E+01                |
| 4                  | - .2270 E+00                | - .1345 E+03                | - .5778 E+02                |
| 5                  | - .2274 E+00                | - .4214 E+02                | .2677 E+ 03                 |
| 6                  | - .2278 E+00                | .6307 E+02                  | .5665 E+ 03                 |
| 7                  | - .2283 E+00                | .2100E+03                   | .7883 E+ 03                 |
| 8                  | - .2286 E+00                | .3068 E+03                  | .7452 E+03                  |
| 9                  | - .2295 E+00                | .6702 E+03                  | - .2165 E+03                |

Tableau 3.8 Amplitudes relatives du modèle avec volant classique et amortisseur de torsion

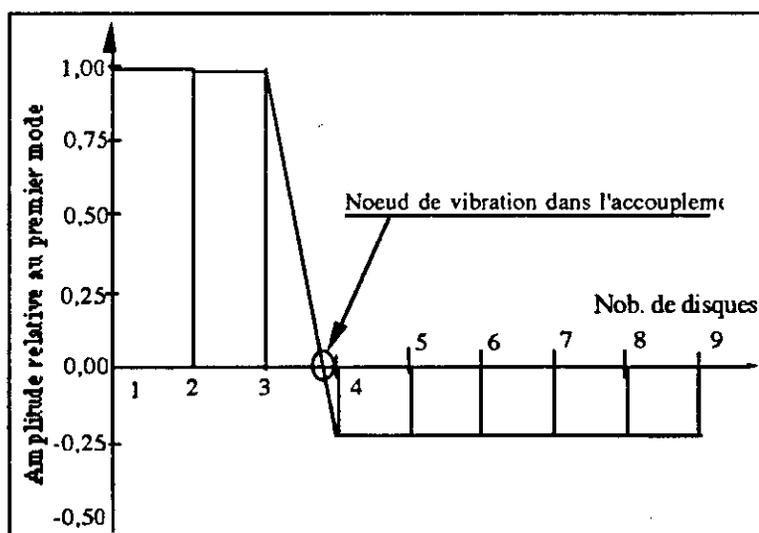


Fig. 3.24 Déformées modales du modèle fig. 3.22 avec amortisseur de torsion au premier mode

Nous remarquons que le noeud de vibration (fig. 3.24) s'est déplacé (par rapport à la fig.3.23) dans l'accouplement, à cause de l'amortisseur de torsion, monté sur le disque n° 9. Nous pouvons observer aussi la très faible amplitude du volant, relativement à celle des autres disques de la ligne d'arbres.

A cause de son inertie importante, le volant peut pratiquement être considéré comme bloqué en rotation.

Il est intéressant de comparer ces résultats avec la ligne d'arbre, du volant pendulaire.

Les inerties du volant pendulaire étant variables, nous utiliserons pour le calcul des pulsations propres, relatives à sa ligne d'arbres, les inerties du tableau 3.9.

| N° volant | Inertie I [Nm s <sup>2</sup> ] | N° arbre | Régidité k [Nm/rd] |
|-----------|--------------------------------|----------|--------------------|
| 1         | 0,98 E-2                       | 1        | 0,285 E6           |
| 2         | 0,14                           | 2        | 0,285 E6           |
| 3         | 0,1725 E-1                     | 3        | 0,21 E4            |
| 4         | 17, 414                        | 4        | 0,1 632 676 E7     |
| 5         | 0, 21 985 E-1                  | 5        | 0,145 057 E7       |
| 6         | 0, 21 985 E-1                  | 6        | 0,101 932 E7       |
| 7         | 0, 21 985 E-1                  | 7        | 0,145 057 E7       |
| 9         | a/ 0, 93 E-1                   | 8        | a/ 0,348 669 E6    |
|           | b/ 0, 02 E-1                   |          | b/ 0, 1633 E7      |

Tableau 3.9. Inerties et raideurs relatives au modèle avec volant pendulaire.et amortisseur de torsion

### c) Modèle avec volant pendulaire sans amortisseur de torsion

Les trois premières pulsations propres de la ligne d'arbre munie du volant pendulaire sans l'amortisseur de torsion sont donnée par :

| Numéro des modes | Pulsations propres du modèle figure 3.22 |              |
|------------------|------------------------------------------|--------------|
|                  | en rad / s                               | en tr / mn   |
| 1                | 0, 1117 E+03                             | 0, 1067 E+04 |
| 2                | 0, 3076 E+3                              | 0, 2938 E+04 |
| 3                | 0, 3288 E+04                             | 0, 3140 E+05 |

Tableau 3.11 Pulsations propres de la ligne d'arbre munie du volant pendulaire sans l'amortisseur de torsion.

Amplitudes relatives des 3 premiers modes relatives au modèle avec volant pendulaire sans amortisseur de torsion.

| Numéro des disques | Amplitudes relatives mode 1<br>(.1067 E+04 tr/mn] | Amplitudes relatives mode 2<br>(. 2938 E+04 tr/mn] | Amplitudes relatives mode 3<br>(.3140 E+05 tr/mn] |
|--------------------|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| 1                  | .1000 E+01                                        | .1000 E+01                                         | .1000 E+01                                        |
| 2                  | .9996 E+00                                        | .9967 E+00                                         | .6282 E+00                                        |
| 3                  | .9930 E+00                                        | .9472 E+00                                         | - .3080 E+01                                      |
| 4                  | .1375 E-02                                        | - .6519 E+01                                       | - .2328 E+02                                      |
| 5                  | - .8340 E- 04                                     | .5156 E-01                                         | .2661 E+ 05                                       |
| 6                  | - .1476 E- 03                                     | .5180 E-01                                         | - .4360 E+ 09                                     |
| 7                  | - .2390 E- 02                                     | .5204E-01                                          | - .9549 E+ 09                                     |
| 8                  | - .3032 E- 03                                     | .5213 E-01                                         | - .1163E+10                                       |
| 9                  | - .3601 E- 03                                     | .5215E-01                                          | - .1179E+10                                       |

Tableau 3.12 Amplitudes relatives du modèle avec volant pendulaire sans amortisseur de torsion

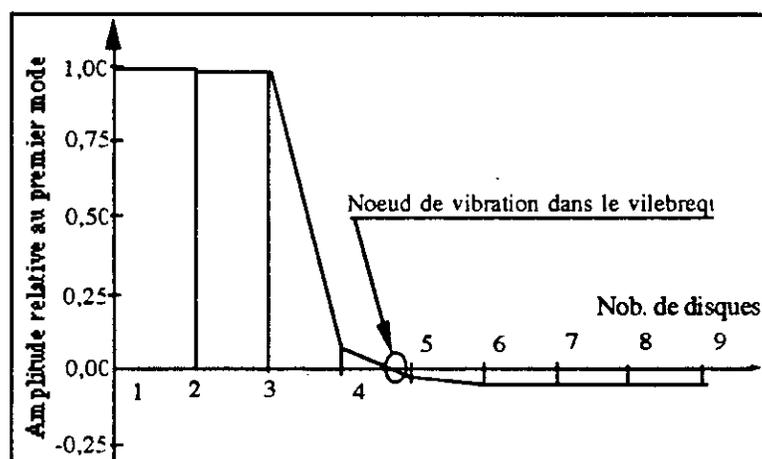


Fig. 3.25 Déformées modales du modèle fig. 3.22 sans amortisseur de torsion au premier mode

Nous remarquons que le noeud de vibration est situé dans le vilebrequin.

#### d) Modèle avec volant pendulaire et amortisseur de torsion

Les trois premières pulsations propres de la ligne d'arbre munie du volant pendulaire avec l'amortisseur de torsion sont :

| Pulsations propres du modèle figure 3.22. |                    |              |
|-------------------------------------------|--------------------|--------------|
| Numéro des modes                          | Pulsations propres |              |
|                                           | en rad / s         | en tr / mn   |
| 1                                         | 0, 1117 E+03       | 0, 1067 E+04 |
| 2                                         | 0, 3076 E+3        | 0, 2938 E+04 |
| 3                                         | 0, 1377 E+04       | 0, 1315 E+05 |

Tableau 3.10 Pulsations propres de la ligne d'arbre muni du volant pendulaire

Amplitudes relatives des 3 premiers modes relatives au modèle avec volant pendulaire et amortisseur de torsion.

| Numéro des disques | Amplitudes relatives mode 1<br>(.1067 E+04 tr/mn] | Amplitudes relatives mode 2<br>(. 2938 E+04 tr/mn] | Amplitudes relatives mode 3<br>(.1315 E+05 tr/mn] |
|--------------------|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| 1                  | .1000 E+01                                        | .1000 E+01                                         | .1000 E+01                                        |
| 2                  | .9996 E+00                                        | .9967 E+00                                         | .9348 E+00                                        |
| 3                  | .9930 E+00                                        | .9472 E+00                                         | - . 1379 E-02                                     |
| 4                  | .1375 E-02                                        | - . 6519 E+01                                      | - . 1270 E+02                                     |
| 5                  | -.8340 E- 04                                      | .5156 E-01                                         | . 2443 E+04                                       |
| 6                  | - .1476 E- 03                                     | .5211 E-01                                         | -.7016 E+07                                       |
| 7                  | - . 2390 E- 02                                    | .5279 E-01                                         | -.1672 E+08                                       |
| 8                  | - .3032 E- 03                                     | .5319 E-01                                         | - . 2305 E+08                                     |
| 9                  | - .5698 E- 03                                     | .5455 E-01                                         | - . 4666 E+08                                     |

Tableau 3.13 Amplitudes relatives du modèle avec volant pendulaire et amortisseur de torsion

Déformées modales relative a la ligne d'arbre sans l'amortisseur de torsion, au premier mode.

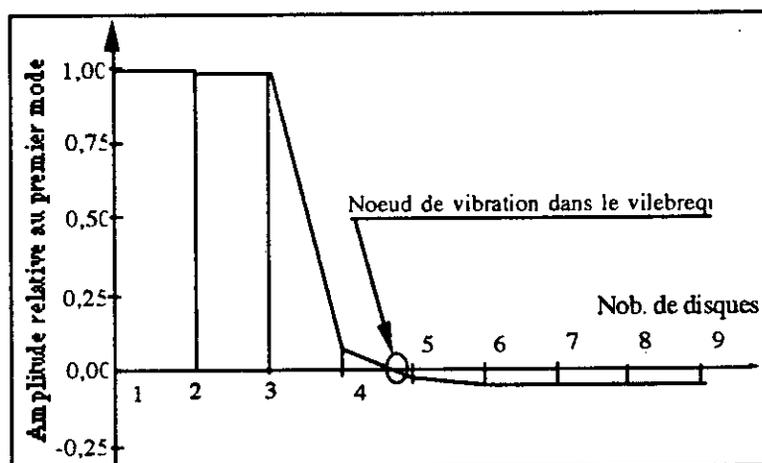


Fig. 3.26 Déformées modales du modèle fig. 3.22 et amortisseur de torsion au premier mode

Nous pouvons remarquer sur la fig.3.26, que le noeud de vibration ne s'est pratiquement pas déplacé par rapport à la déformée de la fig. 3.25 et ce malgré l'ajout de l'amortisseur de torsion sur le disque n° 9. Ceci est dû à la très forte inertie du volant (disque n° 4). En effet l'inertie du disque n° 4 étant très importante pour déplacer le noeud de vibration, il faut soit changer la rigidité du tronçon n° 3 (l'accouplement), soit augmenter l'inertie du damper (le disque n° 9).

On remarque aussi que les pulsations propres relatives aux modèles sans et avec amortisseur de torsion (tableau 10 et 11), ont leur 1er, 2ém mode identiques. Ceci confirme la remarque que nous venons de mentionner plus haut.

### 3.6.3. Vitesses critiques, Vitesses dangereuses, importances

La structure passe à l'état résonnant, lorsque la pulsation de l'excitation  $\Omega$  devient égale à une pulsation propre  $\omega$ , soit lorsque :  $q\omega = \Omega$ . Les vitesses critiques seront alors définies par :

$$\omega_c = \frac{\Omega}{q}$$

$q$  étant l'harmonique ; on se limite généralement à l'harmonique de rang 9, sachant que l'amplitude des harmoniques d'ordre supérieur est très faible.

Dans le cas du moteur F4L 912, la plage de fonctionnement de la vitesse d'excitation est de 1500 à 2800 tr/mn.

#### a) Volant classique sans amortisseur de torsion

| Mode 1 : $\omega$ [tr/mn] = 1198.23 |                            |                                |            |
|-------------------------------------|----------------------------|--------------------------------|------------|
| Harmonique gangereux                | Vitesse dangereuse [tr/mn] | Amplitude du coup. harmo [m.N] | Importance |
| 0,5                                 | 2396,46                    | 44,98                          | 40,49      |

Tableau 3.14 Importance, vitesse et harmonique dangereux au mode 1

On enregistre une seule vitesse critique correspondant à l'harmonique 0,5, mode 1, dans la plage de fonctionnement qui nous est fixée. Cette vitesse critique n'est pas une vitesse dangereuse, car l'harmonique correspondante ( $q = 0,5$ ) n'est pas une harmonique majeure (importance minimale).

#### b) Volant classique avec amortisseur de torsion

Valeur des importances aux modes 1 et 2.

| Mode 1 : $\omega$ [tr/mn] = 1182.  |                            |                                |            |
|------------------------------------|----------------------------|--------------------------------|------------|
| Harmonique gangereux               | Vitesse dangereuse [tr/mn] | Amplitude du coup. harmo [m.N] | Importance |
| 0,5                                | 2365,26                    | 44,98                          | 35,49      |
| Mode 2 : $\omega$ [tr/mn] = 13614. |                            |                                |            |
| Harmonique gangereux               | Vitesse dangereuse [tr/mn] | Amplitude du coup. harmo [m.N] | Importance |
| 5,0                                | 2722,97                    | 23,90                          | 25649,51   |
| 5,5                                | 2475,43                    | 20,49                          | 4182,51    |
| 6,0                                | 2269,14                    | 18,10                          | - 27395,22 |
| 6,5                                | 2094,59                    | 15,94                          | 19536,36   |
| 7,0                                | 1944,98                    | 13,45                          | 2784,68    |
| 7,5                                | 1815,31                    | 11,68                          | 17208,82   |
| 8,0                                | 1701,86                    | 10,61                          | - 14325,88 |
| 8,5                                | 1601,75                    | 9,76                           | 2073,25    |
| 9,0                                | 1512,76                    | 8,58                           | 12016,24   |

Tableau 3.15 Importances, vitesses et harmoniques dangereux

Le rajout de l'amortisseur à la ligne d'arbre, diminue la fréquence propre du deuxième mode, ce qui a entraîné des vitesses critiques aux harmoniques : 5.5, 6, ...9. Selon les valeurs des importances, les vitesses dangereuses correspondent aux harmoniques 5, 6, 6.5, 7.5, 8 et 9.

### c) Volant pendulaire sans amortisseur de torsion

Valeur des importances au mode 1.

| Mode 1 : $\omega$ [tr/mn] = 1072.58 |                            |                                |            |
|-------------------------------------|----------------------------|--------------------------------|------------|
| Harmonique gangereux                | Vitesse dangereuse [tr/mn] | Amplitude du coup. harmo [m.N] | Importance |
| 0,5                                 | 2145,16                    | 44,98                          | 1,49       |

Tableau 3.16 Importance, vitesse et harmonique dangereux

Comme pour le volant classique, il y a une seule vitesse critique correspondant à l'harmonique 0,5 dans le premier mode. Cette vitesse critique n'est pas une vitesse dangereuse.

### d) Volant pendulaire avec amortisseur de torsion

Valeur des importances aux modes 1 et 2.

| Mode 1 : $\omega$ [tr/mn] = 1072.55  |                            |                                |            |
|--------------------------------------|----------------------------|--------------------------------|------------|
| Harmonique gangereux                 | Vitesse dangereuse [tr/mn] | Amplitude du coup. harmo [m.N] | Importance |
| 0,5                                  | 2145,10                    | 44,98                          | 1,48       |
| Mode 2 : $\omega$ [tr/mn] = 12262.49 |                            |                                |            |
| Harmonique gangereux                 | Vitesse dangereuse [tr/mn] | Amplitude du coup. harmo [m.N] | Importance |
| 4,5                                  | 2725,00                    | 29,97                          | 1895388    |
| 5,0                                  | 2452,50                    | 23,90                          | 755081     |
| 5,5                                  | 2229,54                    | 20,49                          | 241667     |
| 6,0                                  | 2043,75                    | 18,10                          | 1022011    |
| 6,5                                  | 1886,54                    | 15,94                          | 562566     |
| 7,0                                  | 1751,78                    | 13,45                          | 172609     |
| 7,5                                  | 1635,00                    | 11,68                          | 576761     |
| 8,0                                  | 1532,81                    | 10,61                          | 424684     |

Tableau 3.17 Importances, vitesses et harmoniques dangereux

L'addition du damper à la ligne d'arbre, diminue la fréquence propre du deuxième mode, ce qui a entraîné des vitesses critiques aux harmoniques : 4.5, 6, ...8. Selon les valeurs des importances, ces vitesses critiques deviennent des vitesses dangereuses.

**En conclusion** le volant classique sans amortisseur, donne une irrégularité cyclique importante, l'addition d'un amortisseur torsionnel diminue l'irrégularité cyclique, mais fait naître des vitesses dangereuses dans la plage de fonctionnement du moteur, au deuxième mode.

Le volant pendulaire sans amortisseur de torsion permet d'avoir une irrégularité cyclique très basse (acceptable) et ne développe pas de vitesse dangereuse dans la plage de fonctionnement du moteur. Donc nous retiendrons pour notre application le modèle ayant le volant pendulaire sans l'amortisseur de torsion. Ceci implique une bonne régularité cyclique et une masse allégée.

### 3.7. Fiabilité du système pendulaire

La fiabilité d'un composant est sa probabilité conditionnelle, à un âge donné, de remplir sa fonction, dans les limites de performance spécifiques, pour la période de temps prévue et sous les contraintes liées aux conditions de fonctionnement normal.

Dans les conditions normales d'utilisation, le fonctionnement d'un matériel peut être perturbé par trois types de pannes :

- Les pannes infantiles ;
- Les pannes franches ;
- Les pannes d'usures.

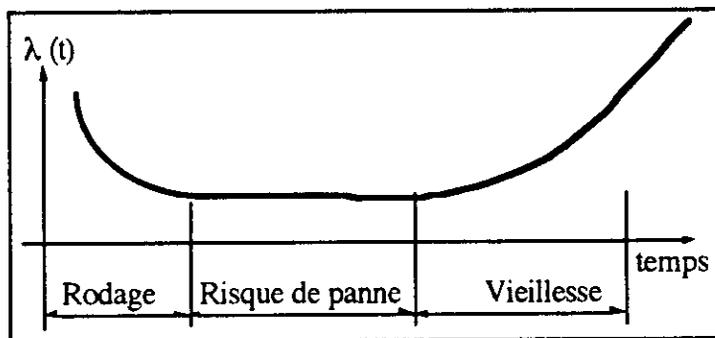


Fig.3.27 Courbe en bassin du risque de pannes

#### 3.7.1. Présentation du système

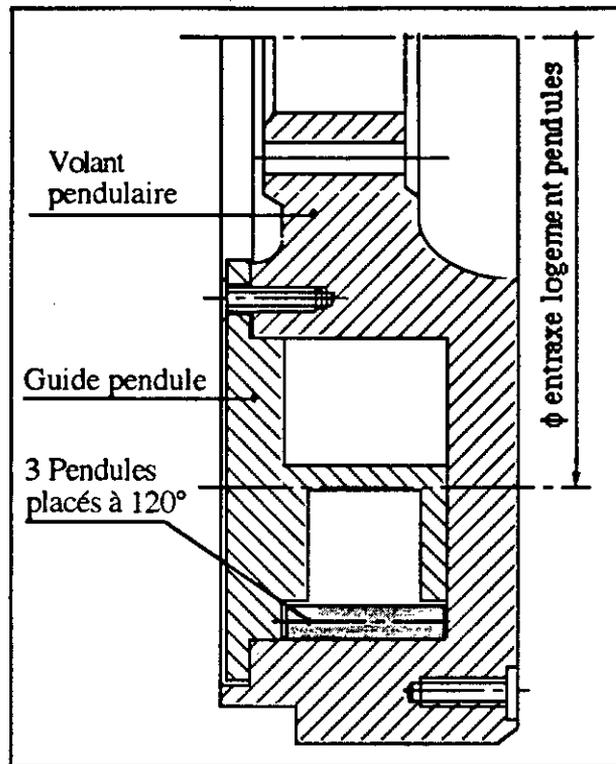
Le système étudié (fig. 3.9) est composé d'un volant (chemin du roulement), et d'un rouleau, qui oscille à l'intérieur de son logement.

Dans notre cas l'absence de charge sur le rouleau, permet d'obtenir un roulement sans glissement dans les zones de contact : Rouleau-chemin de roulement. D'autre part, l'utilisation d'un lubrifiant est interdite du fait que le frottement associe un roulement sans glissement.

#### 3.7.2. Durée de vie

Pour le calcul de la durée de vie, on assimile les rouleaux du volant pendulaire à ceux des roulements à rouleaux.

Nous avons suivi pour cela les règles de calcul de la norme ISO 281 correspondant à la dernière version 1988.



Dessin de l'ensemble volant pendule

#### a) Charge radiale dynamique de base $C_r$

La charge radiale (constante en intensité et en direction), qu'un roulement peut théoriquement supporter en un million de tours, s'exprime par :

$$C_r = b_m \cdot f_c (i \cdot L_r \cos \alpha)^{7/9} \cdot z^{3/4} \cdot D_r^{29/z}$$

Les coefficients  $b_m$  et  $f_c$  sont donnés par le constructeur SKF, pour des conditions de contraintes réparties d'une façon sensiblement uniforme le long du contact le plus chargé entre rouleaux et chemins.

$b_m$  : facteur de calcul pour un matériau et une fabrication donnée. Il dépend du type de la construction du roulement = 1.1 ;

$f_c$  : facteur dépendant de la géométrie des éléments, de leur précision et de leur matériau = 83.8 ;

$i$  : nombre de rangées de rouleaux = 1

$L_r$  : longueur du rouleau = 45 mm

$\alpha$  : angle nominal de contact (rouleau-chemin de roulements) =  $0^\circ$

$z$  : nombre de rouleaux dans un roulement à une rangée = 1

$D_r$  : diamètre de rouleau ( $D_r = 2r$ ) = 10 mm

#### b) Charge radiale dynamique équivalente $P_r$

C'est une charge radiale, concentrée qu'un roulement peut théoriquement supporter pour une durée nominale d'un million de tours.

Pour les roulements à rouleaux dont  $\alpha = 0^\circ$ , ayant une charge radiale et axiale constantes,  $P_r$  s'exprime par :

$$P_r = X \cdot F_r + Y \cdot F_a$$

Avec :

- Fr : composante radiale de la charge en N ;
- Fa : composante axiale de la charge en N ;
- X : coefficient radial donné selon le type de roulement ;
- Y : coefficient axial donné selon le type de roulement.

Dans le cas du rouleau pendulaire, nous avons une charge radiale pure, donc Fa = 0 et X = 1. Dans ce cas la charge radiale appliquée au rouleau s'exprime par :

$$Pr = Fr = 2 \cdot m \cdot N \cdot r \cdot \delta$$

Avec :

- m : masse du rouleau ;
- N : vitesse de rotation maximum du volant ;
- r : rayon du rouleau pendule ;
- $\delta$  : accélération du pendule.

### c) Durée nominale d'un roulement

La durée nominale est la durée atteinte ou dépassée par 90% de roulements apparemment identiques fonctionnant dans les mêmes conditions. Elle s'exprime par les relations :

$$L_{10} = \left[ \frac{C_r}{P_r} \right]^{10/3} \quad [\text{en nombres de tours}]$$

$$L_{10h} = \left[ \frac{L_{10}}{60 N} \right] \quad [\text{en nombres d'heures}]$$

### 3.7.3. Fiabilité

Le calcul de fiabilité du pendule rouleau suit la loi de WEIBULL. La fiabilité R d'un roulement s'exprime donc par :

$$R = \exp \left\{ - \left[ \frac{N}{L_{10} \left( \frac{C_r}{P_r} \right)^\theta} \right]^\beta \right\}$$

Avec  $\theta$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , respectivement paramètres de position, de forme et d'échelle, dépendant du type de roulement, et satisfaisant aux conditions:  $\gamma \geq 0$ ,  $\beta > 0$  (on prend  $\theta = 0$  et  $\beta = 0,1$ )

Si on pose :

$$\eta = L_{10} \left( \frac{C_r}{P_r} \right)^\theta \quad \text{et} \quad \gamma = 0$$

On aura :

$$R = \exp \left\{ - \left[ \frac{N}{\eta} \right]^\beta \right\}$$

Le graphe de WEIBULL est aussi utilisé pour le calcul des paramètres de fiabilité :

$$R(t) = 1 - F(t)$$

avec F(t) la fonction de fiabilité.

## CONCLUSION

L'outil d'aide à la conception des moteurs, que nous venons de présenter permet à l'ingénieur concepteur à partir de l'expression d'un besoin de :

- Définir une architecture générale : alésage, nombre et disposition des cylindres, choix du type de cycle thermodynamique, vitesse de rotation et puissance souhaité du moteur ;
- Fournir le dimensionnement des principales pièces en mouvement : piston, bielle et vilebrequin.

Nous pouvons distinguer quatre chapitres dans la deuxième partie de la thèse : cycles thermodynamiques, cinématique, efforts et vibrations.

- Les cycles thermodynamiques des différents types de moteur (à allumage commandé, Diesel, suralimenté ou à aspiration naturelle) permettent de générer les efforts internes du moteur. Le logiciel développé permet de simuler les pressions dans le cylindre en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin pour différentes charges et vitesses, ainsi un nombre important de paramètres relatifs au cycle est donné.
- Nous avons présenté la cinématique des pièces en mouvement des deux principaux types d'embellage : système bielle-manivelle et le système bielle-biellette articulée. Le logiciel développé, permet de donner les déplacements, les vitesses et les accélérations de tout point des pièces mobiles.
- L'étude dynamique des organes en mouvement, permettant la recherche des efforts induits par le moteur sur sa suspension est développer pour les moteurs en ligne et les moteurs en V.
- La vérification aux vibrations de torsion de la ligne d'arbre permet le calcul des fréquences propres, des déformés modales, des importances, ainsi que les amplitudes d'oscillations des disques et tronçons d'arbres de même que les contraintes équivalentes.

L'étude du volant moteur à essentiellement porté sur

- La mise en relief des méthodes de calcul, ancienne et classique, ainsi que l'élaboration d'une méthode améliorée ;
- La conception et le calcul dynamique du volant pendulaire. Après avoir vérifier par la méthode de Runge-Kutta que l'amplitude angulaire  $\beta$  des pendules, reste assez faible, nous avons linéarisé les équations du mouvement, ce qui nous a permis de calculer les pulsations propres du pendule, le moment d'inertie équivalent  $I_{eq}$  du système, ainsi que le dimensionnement du volant ;

Les résultats des calculs relatifs à la variation de la vitesse angulaire, ont montré que l'irrégularité cyclique de la ligne d'arbres avec volant accordé sans amortisseur de torsion est meilleure que celle obtenue avec le volant classique avec amortisseur de torsion. D'où une masse inférieure du moteur et donc des pulsations propres plus importantes, ce qui évite d'avoir des vitesses dangereuses dans la plage de fonctionnement du moteur.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] - AKHLAGHI M. BAMER F. LENZ H.P.  
Causes des irrégularités de fonctionnement des moteurs à essence.  
Motortech.Z 1978
- [2] - BALLEZ M.  
Détermination des fréquences propres de vibrations de torsion des lignes d'arbres au moyen d'une analogie électrique.  
Congres International des moteurs, Mai 1951.
- [3] - BARSCH H. HERMANNA E.  
Mesure des vibrations de torsion d'un vilebrequin avec utilisation d'un calculateur de table.  
VDI - Berichte Nr. 320, 1978.
- [4] - BAUDOIN A.  
Détermination du rendement mécanique d'un moteur à combustion interne.  
Revue "T" Tudschrift n° 1 1982
- [5] - BERGER H.  
Analyse du frottement de l'ensemble segments - piston sur la chemise  
Thèse Docteur Ingénieur ENSAM de Paris 1985.
- [6] - BERICHT A.  
Auslegung von viskose. Drchswingungs dampfern für Hubkolbenmotoren.  
Motor technische zeits chrift 43, 1982.
- [7] - BIGRET R.  
Vibrations des machines tournantes et structures tome II  
Technique et documentation Paris 1980
- [8] - BLANC H.  
Contribution à l'étude des vibrations de torsion forcées des lignes d'arbres de machines alternatives.  
Thèse de Docteur Ingénieur ENSAM de Paris 1983.
- [9] - BOUDET R.  
Elément de lubrification  
cours de D.E.A. ENSAM 1990.
- [10] - BOUKABACHE M.  
Etude de comportement vibratoire du groupe motopropulseur d'un véhicule industriel.  
Journal of technologie N° 1 / E.N.P. 1986.
- [11] - BOUKABACHE M. CHOUCHAOUI. B  
Dimensionnement des bielles des moteurs à combustion interne.  
Journal of technologie N° 6 / E.N.P. 1988.
- [12] - BOUKABACHE M. CHOUCHAOUI. B  
Dimensionnement de pistons des moteurs à combustion interne.  
Journal of technologie N° 6 / E.N.P. 1988.
- [13] - BOUKABACHE M. MEKID. S  
Volant régulateur de vitesse.  
Journal of technologie N° 6 / E.N.P. 1988.

- [14] – BROWN R.N.  
A torsional vibration problem as associated with synchronous motor driver machines.  
Journal of engineering for power, Juillet 1960.
- [15] – BROCH J.J.  
Mécanical vibration and shock measurements.  
Brüel & kjaer 1980.
- [16] – BRUN R.  
Science et technique du moteur diesel et de transport.  
Edition technip Paris 1966.
- [17] – BUEN V.  
Vibrations mécaniques dans les automobiles.  
Idiada n°1 Novembre 1978.
- [18] – CHAPOUILLE P.  
Fiabilité des systèmes  
Ed. Masson & Cie. 1968.
- [19] – CIMA B.  
Etude mécanique de l'attelage bielle-biellette d'un moteur diesel deux temps.  
Thèse se Doctorat 3ém. cycle Université Pierre et Marie Curie Paris VI 1982.
- [20] – CHEN S.K. CHANG T.  
Crankshaft torsional and damping simulation an update and correlation with test results.  
SAE Transaction 1987.
- [21] – CONSTANS B. GUICHAOUA J.L. ...  
Frottement et température du film d'huile entre pistons, segments et chemises d'un moteur diesel.  
Institut Français du Pétrole 1984.
- [22] – DAUGAS C.F.  
Moteur GMK 240 (non publié).  
ENSAM de Paris Octobre 1990.
- [23] – DESPRES M.D.  
Le double volant amortisseur.  
Technique de l'automobile Avril 1987.
- [24] – DEN-HARTOG J.P.  
Un phénomène non linéaire dans les amortisseurs de vibration du type pendule centrifuge.  
Université Torino 1976.
- [25] – DEN-HARTOG JP  
Tunel Pendulums as torsional vibration eliminators.  
Harvard University.
- [26] – DEN-HARTOG J.P  
Vibrations mécaniques.  
Ed. Dunod 1960.
- [27] – DEN-HARTOG J.P. ORMONDROYD I.  
Torsional vibration dampers transactions.  
ASME, vol 52, APM-52-133, 1930.
- [28] – DILIP JAIN  
Finite element analysis of an aluminum damper.  
SAE Transactions. Copyright 1987

- [29] – FEDERN K.  
 Conception d'amortisseurs visqueux de vibrations de torsion pour des moteurs à pistons alternatifs.  
 VDI. Berichte n° 269, 1976.
- [30] – FEDERSPIEL J.  
 Aspects modernes des problèmes de dynamique automobile.  
 Ingénieur de l'automobile n° 5-6, 1976.
- [31] – FELSKÉ  
 Analyse de vibrations par holographie à laser à double impulsion.  
 SAE n° 770 030 - Février-Mars 1977.
- [32] – FONTANET P.  
 Etude de la vibration des carters moteurs.  
 Ingénieur de l'automobile n° 5-6, 1978.
- [33] – FOX R.L.  
 Mesure transmission d'un camion.  
 SAE n° 760 844 - Novembre 1976.
- [34] – GABILLARD R.  
 Vibrations et phénomènes de propagation.  
 Dunod Paris 1972.
- [35] – GIRAUDEAU A.  
 Système vibratoires comportant des amortissements visqueux multiples. Application aux vibrations de torsion des lignes d'arbres.  
 Association technique maritime et aéronautique session 1954.
- [36] – GIRONNET B.  
 Machines thermiques.  
 Cours de DEA ENSAM-Paris VI 1979 (non publié).
- [37] – GIRONNET B. LOURADOUR G.  
 Pistons pour moteur à combustion interne.  
 Cours DEA ENSAM-Paris VI 1985.
- [38] – GIRONNET B. LOURADOUR G.  
 Vibrations et vitesses dangereuses de torsion des lignes d'arbres.  
 Techniques de l'ingénieur B 5770 - 1984.
- [39] – GROZA V.F. YANUSHEVSKAYA V.F.  
 Etude des vibrations longitudinales de flexion dans les vilebrequins des moteurs de tracteurs.  
 Izvest, 1975.
- [40] – HARKER R.J.  
 Generalized methods of vibrations analysis .  
 Ed. John Willey & Son 1983.
- [41]. – HERSUKOWITZ H.  
 The role of torsional vibration measurements in preventive maintenance of rotating machinery, presented at the vibration.  
 Institute Machinery, New-Jersey, USA, Novembre 1977.
- [42] – HELMS H.  
 Résultats d'une enquête sur les caractéristiques du système de vibration des voitures particulières.  
 ATZ n° 5, 1976.

- [43] – HEALEY A.J.  
Etude analytique et expérimentale de la dynamique d'une automobile soumise à des impulsions aléatoires provenant de la chaussée.  
ASME n°4, Décembre 1977.
- [44] – HILBRANDT  
Etude des vibrations sur une carrosserie de voiture particulière.  
Véhicule système dynamics n°2, September 1974.
- [45] – IVANOV S.N.  
Vibrations dans la transmission d'une voiture particulière à traction avant.  
Automobil'naya promyshlennost n°9 septembre 1975.
- [46] – JULIEN M.A.  
Dynamique de la voiture automobile.  
Technip Paris 1960.
- [47] – JOYNER R.G.  
La transmission du camion considérée comme source de vibration.  
SAE n° 760 843 Novembre 1976.
- [48] – KASHIWAGI A.  
Evaluation method of internal damping in torsional vibration of engine shafting.  
Bulletin of the ISME 1975.
- [49] – KEMPNER M.L. NESTEROVA S.V.  
Etude des vibrations liées de torsion et longitudinales des vilebrequins.  
Machinove denie 1975.
- [50] – KRUSE H. TODSEN U.  
Travaux de recherche effectués jusqu'à présent sur le système tribologique piston-segments-cylindre.  
Tribologie und schmierungstechnik, 1986.
- [51] – KERWILSON W.  
Practical solution of torsional vibration problems.  
Chapman et Hall LTD, London.
- [52] – KORINE G.M.  
Construction de l'automobile et des tracteurs. Dynamique et longévité des machines de transport.  
Ecole Supérieure Minsk, 1974.
- [53] – KOVALEV Y.L.  
Calcul des vibrations d'une automobile, dans le cas où la suspension à des caractéristiques non linéaires.  
Automobil'naya n° 3 1980.
- [54] – LOURADOUR G.  
Contribution à l'étude des arbres. Application aux vilebrequins.  
Thèse de Doctorat d'état Université Pierre et Marie curie Paris VI 1981.
- [55] – LOURADOUR G.  
Dynamique des lignes d'arbres.  
Cours de DEA, ENSAM de Paris 1990.
- [56] – LEMASSON G.  
Calcul et construction de moteurs.  
Cours ENSAM de Paris.

- [57] – LURIE I.A.  
Torsional oscillations in diesel installations.  
Leningrad, vœnmorizdat 1940.
- [58] – LOURENDON M.  
Description générale du mécanisme de génération des vibrations d'un moteur  
Ingénieur de l'automobile n° 5-6 1978.
- [59] – LAUSTER E.  
Etude des vibrations de torsion des véhicules utilitaires.  
n° 7-8-9 1978.
- [60] – MOGHADAS M.  
Diagnostic des moteurs à combustion interne par l'analyse de la vitesse instantanée de rotation.  
Thèse de Docteur Ingénieur ENSAM Paris 1986.
- [61] – MESTORIDES E.J.  
A Hand book on torsional vibration (BICERA).  
Combridge University press 1958.
- [62] – MONRAZIER J.  
Réduction des bruits sur un moteur.  
Ingénieur de l'automobile n° 5-6 1978.
- [63] – MULLER G.  
Calcul des vibrations d'une cabine de véhicule utilitaire en vue d'optimiser la suspension.  
KFT n° 11 Novembre 1979.
- [64] – NAZAROV P.N.  
Calcul des oscillations longitudinales de flexion d'un vilebrequin.  
Izvest 1975.
- [65] – O'KEEFFE J.M.  
Diminution du bruit du moteur sans modification importante de construction.  
MTZ n° 2 Fevrier 1978.
- [66] – OUZIAUX R.  
Mécanique appliquée : dynamique des machines alternatives.  
Ed. Dunod Paris 1960.
- [67] – PICARD C.  
Lubrification des roulements.  
Institut Français du Pétrole - 93-50 Essais mécaniques  
Septembre 1980
- [68] – REYRAUD Y.  
La cavitation et ses effets (SACM).  
Entropie n° 145 1988.
- [69] – REIK W.  
Comportement vibratoire d'une transmission d'automobile comprenant un volant d'inertie à deux masses.  
VDI. Berichte 1988.
- [70] – SABATEL J.  
Vibrations transitoires de torsion dans les arbres des grands turboalternateurs.  
Collection des publications - Université de Liège 1979.
- [71]. – SALOMON B.  
Régularisation de la vitesse d'un arbre de machine par masses auxiliaires mobiles.  
Congrès International de Mécanique Appliquée.  
Combridge Printed by walter lewis, M.A., University press.

- [72]. – SALOMON B.  
Amortisseur dynamiques de vibration.  
Technique Automobile et Aérienne ; octobre 1945.
- [73] – SHIEH A.H.  
Optimum performance of pendulum type torsional vibration absorber.  
Massachusetts institute of technology journal of the Aeronautical sciences July 1942.
- [74] – STRAKERJAN B.  
Problèmes actuels concernant les vibrations du véhicule automobile.  
ATZ n° 3 Mars 1977.
- [75] – SWOBODA B.  
Mecanique des moteurs alternatifs.  
Edition Technip Paris 1984.
- [76] – SEBULKE A.  
The two mass flywheel a torsional vibration damper for the power train of passenger cars.  
SAE transactions 1988.
- [77] – SVOBODA M. ; ULRICH H. ; STEINMULLER G.  
Calcul de vibrations lors de la conception d'un moteur d'automobile.  
VDI. Berichte wuerzburg 1986.
- [78] – TIMOSHENKO S.  
Dynamique supérieur.  
Librairie Polytechnique Paris 1950.
- [79] – TIMOSHENKO S.  
Théorie des vibrations.  
Librairie Polytechnique Paris 1954.
- [80] – TAYLOR ES.  
Crankshaft torsional vibration in radial air craft engines.  
M.I.T. SAE journal vol. 38 n° 2 March 1936.
- [81] – ULRICH A.  
Vitesses critiques de torsion.  
Techniques de l'ingénieur B 775.
- [82] – WILLIAM W.  
Mechanical vibrations.  
Mc.Graw-hill New-york 1964.
- [83] – WILLIAM F.P.  
The main rotor bifilar pendulum vibration absorber.  
Sikorsky aircraft February 1970.
- [84] – WILLIAM T.  
Theory of vibration with applications englewood cliffs.  
New-jersey 1972.